T a k á c s   G á b o r

A FIZIKA MEGMARADÁSI TÉTELEINEK ALKALMAZÁSA KÖZÉPISKOLAI FELADATOK MEGOLDÁSÁNÁL

D o k t o r i   é r t e k e z é s

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

SZEGED 1974

T a r t a l o m

Oldal

B e v e z e t é s

A középiskolai oktatás reformjának alapvető célkitüzései közé tartozik az ismeretek gyakorlati alkalmazásának / a legáltalánosabb értelemben vett feladatmegoldás / oly mértékben való elmélyitése,hogy az ifjuság fel legyen késszitve a társadalmi termelőmunka egyre fokozódó követelményeire.A gyakorlati élet rugalmas gondolkodást és rugalmas,jól funkcionáló ismereteket igényel a tanulók részéről.Ezt leginkább a tanulók ismereteinek formális jellege akadályozza,melyről például Szkatkin megjegyzi "...a szakadék az ismeretek szóbeli felidézése és a gyakorlatban való alkalmazása között".

A feladatmegoldó készség szerepe korunkban fokozatosan előtérbe kerül,fontosabb mint a nagy mennyiségben tárolt ismeretanyag és annak reprodukálási készsége.A tanulók terhelését a közelmultban bevezetett tananyagcsökkentés is az ismeretek alkalmazásának gyakorlása javára módositotta.Igy a fizika középfoku tanitásában egyre nagyobb szerephez jut a feladatok megoldása,amelynek jelentőségét több szempont is indokolja:

a/.a feladatok megoldása közben világosabbá és pontosabbakká válnak a fizikai fogalmak

b/.a tanulók emlékezetében jobban rögzitődnek a felhasznált összefüggések,biztosabban épülnek be a gondolkodásukba

c/.feladatokkal a tananyag jól kiegészithető,egyre inkább csökkentve annak formális jegyeit

d/.a feladatok rendszeres megoldása megvilágitja,mire használhatók a tanult törvények,összefüggések;gyakorlás révén még érthetőbbé válnak a fizika törvényei

e/.a feladatokban szereplő gyakorlati problémák tudatositják környezetünk számtalan jelenségében a fizikai törvények érvényesülését

d/.az önálló feladatmegoldás a gondolkodási készség fejlesztésének alapvető eszköze

A dolgozatban a feladatmegoldások gondolkodás-módszertanának általános elméletét a fizikai feladatok azon csoportjára kivánjuk alkalmazni,amelyek a fizika jelenleg általánosan elfogadott invariancia-elveiből levezethető megmaradási tételek alkalmazásával megoldhatók /az impulzusmomentum megmaradásának alkalmazásánál a középiskolai tananyag keretein belül/: megmutatván,hogy a tárgykörbe tartozó tetszőlegesen nehéz feladat megoldható néhány a középiskolai tananyagban szereplő alapösszefüggés alkalmazásával,és az esetleg felmerülő nehézségek csak matematikai természetüek lehetnek.

A feladatmegoldások gondolkodás-módszertana /konkréten fizikai feladatok esetén/ a szakirodalom mostohán kezelt kérdése,igy a feladatcsoport kiválasztásában az vezetett benünket,hogy a fizika szimmetriái mindig jelentős szerepet játszottak a fizikai kutatásban,és a megmaradási törvények alkotják szilárd tudományos alapját annak a dialektikus materialista tételnek,amely szerint a világ örök,azaz a mozgó anyag elpusztithatatlan.Mint tapasztalati törvényeken,ezeken nyugszik egész fizikai világképünk is.

Az invariancia-elvekből származtatható megmaradási tételek közül tárgyaljuk a teljes geometriai szimmetriacsoportot /a négydimenziós téridő az alapul választott geometriai tér/ és a dinamikai invarianciák közül az elektromágneses kölcsönhatásra vonatkozó mértékinvarianciát.

A szimmetriaelvekből az energia megmaradásának /időbeni homogenitásból/,a mozgásmennyiség megmaradásának /a tér homogén voltából/,az impulzusmomentum megmaradásának /a tér izotróp voltából/,az elektromos töltés megmaradásának /az elektromágneses tér mértékinvarianciájából/ tételét vezetjük le.

A tárgykörbe tartozó feladatok megoldására általunk javasolt módszert kidogozott feladatokon mutatjuk be.A feladatok megfogalmazásánál nem törekedtünk teljességre,mivel a fizikai jelenségek igen bonyolultak,vizsgálatuknál viszont a mellékkörülményektől általában eltekinthetünk./Wigner szerint:"Ténylegesen a magyarázható körülhatárolása az eddig tett legnagyobb felfedezés a fizikában."/ A feladatoknál ezt oly módon vettük figyelembe,hogy amely mellékkörülményről nem esik szó,annak szerepétől eltekinthetünk.

A feladatok csoportositásánál a gimnáziumi fizikakönyvek beosztását követtük,igyekeztünk a tankönyvek jelöléseit használni.A kidolgozott feladatok mindegyike a gimnáziumi fizika tananyagának ismeretében megoldható.Néhány összetettebb,elmélyültebb gondolkodást kivánó feladatot, amelyek követelménynek nem tekinthetők /azaz nem szabad minősitő számonkérés tárgyává tenni/ külön megjelöltünk /"x" jellel/ módszerünk hatékonyságának érzékeltetése céljából tárgyalunk.

Munkánkat az iskolareform célkitüzései ihlették,tudományos és erkölcsi inditéka e célok eléréséhez való hozzájárulás szándéka volt.

I. A FIZIKAI FELADATOK MEGOLDÁSÁNAK GONDOLKODÁS-MÓDSZERTANÁRÓL

A fizikai feladatok sikeres megoldása a gondolkodás-módszertani kulturáltság függvénye,bár a tanulók feladatmegoldásaiban /miként Wiedemann László megjegyzi/ tudatosan alkalmazott módszerekkel ritkán találkozhatunk.

Valamely fizikai feladat megoldásához szükséges ismeretanyag birtoklása,sőt aktualizálása sem biztositja önmagában a feladatmegoldás sikerét.Itt szándékosan használtuk "az ismeretek aktualizálása" kifejezést,mert különbséget szándékozunk tenni az ismeretek aktualizálása és puszta felidézése között.Ugyanis az ismeretek egyszerü felidézése során a tanulók a tananyagot az elsajátitás rendszerében,az ismeretrészek ugyanazon kapcsolatában és sorrendjében adják vissza.Az ismeretek aktualizálása ettől annyiban különbözik,hogy az ismeretek felidézését nem a bevésés módja,hanem a megoldandó feladat sajátosságai határozzák meg.Egyetértünk Lénárd Ferenccel abban,hogy: "A szilárd és biztos ismeretek önmagukban még nem jelentik azt,hogy a tanulók gondolkodni is tudnak,hogy ezeket az ismereteket fel is használják.".

Weaver és Madden a feladatmegoldást a siker feltételeinek szempontjából vizsgálták.Arra a következtetésre jutottak,hogy a feladatmegoldás eredményessége egyenes arányban van az ismeretek mozgósitásának mértékével.Igy alapvető feltételnek tekintik a megfelelő ismeretek birtoklását.Kiemelik még a gondolkodás aktivitásának szükségességét a feladat megértésében,a megoldás konkrét végrehajtásában.A feladatmegoldás eredményessége érdekében felhivják a figyelmet a gondolkodási müveletek begyakorlottságának szükségességére,ahogy ők nevezik,"kutatási müveletek" birtoklására.

Bayer István felméréseket végzett a fizikatanitás eredményességének vizsgálata céljából az általános iskola VII. és VIII. osztályát végző tanulókkal.A datok erejével hivta fel a figyelmet arra a tarthatatlan állapotra,hogy a tanulók igen elmaradottak az ismeretek alkalmazása terén. Kiemeljük a szerzőnek azt a megállapitását,hogy "a tanulók főként az emlékezetre s nem a logikai készségre támaszkodnak.A gondolkodásra nevelés háttérbe szorul."

A megszerzett ismeretek feladatmegoldásra való alkalmazásának kérdése Lénárd Ferenc gondolkodásvizsgálatai során is felvetődik,amelyek eredményeit "A problémamegoldó gondolkodás" cimü munkájában összegzi.Az élet és iskola kapcsolatának szemszögéből,a cél és eszköz viszonylatában Lénárd Ferenc kiemeli az ismeretek alkalmazása /a legáltalánosabb értelemben vett feladatmegoldás/ általános pedagógiai gyakorlattá válásának szükségességét."Az alapismeretek megszerzése eszköz,a problémák megoldása a cél. Ennek megfelelően több időtt kell forditanunk az ismeretek alkalmazására,a problémák megoldására,mint a problémamegoldáshoz szükséges eszközök megszerzésére".Sajnálattal konstatálja,hogy az oktatási gyakorlatban "Az alkalmazásra nem marad idő".

Az időközben bevezetett változások a tanitási órák viszonylatában az alkalmazás javára módositottak az arányokon,de még mindig helytálló Nagy László kandidátusi értekezésében tett megállapitása: "A jelenlegi iskolai gyakorlatban az alkalmazásra forditott idő és energia nincs arányban azzal,amit az elsajátitásra forditunk." Tehát Lénárd Ferenc megfogalmazásával élve megállapithatjuk,hogy tulsulyba kerül az eszközök megszerzése /ismeretek/,a cél /feladatok,problémák megoldása ismeretek felhasználásával/ elérésével szemben.

Természetesen problémát megoldani /gondolkodni/ csak ismeretek alapján lehet.Az ismeretek jellege pedig kihat a gondolkodás sajátosságaira.Ezért fontos,hogy minél magasabb legyen az ismeretek általánositottságának a szinvonala,mert annál sikeresebben alakithatók ki a feladatmegoldás általános módszerei is.

Azt gondolhatnánk,hogy az ismeretek alkalmazására szánt iskolai feladatok automatikusan kiváltják a hozzátartozó ismereteket.Ennek ellenkezőjéről T.V.Kudrjavcev azon vizsgálatai szolgáltatnak bizonyitékot,amelyekben elektrotechnikai feladatok megoldásával kapcsplatban azt vizsgálta, hogy az oktatás egyes feltételei esetén a megfelelő elméleti tundivalók feladatmegoldás során aktualizálódnak,más feltételek esetén azonban nem.

A bevezetésben emlitettük már,hogy az ismeretalkalmazás problémáinak megoldása az iskolareform megvalósitása szempontjából sürgős és fontos feladat.Nagy László a kandidátusi értekezéséhez végzett vizsgálatainak eredményét is ebben az értelemben összegzi:"Mint az eredményekből láthattuk,a tanulók fejlettségi szintje ebben a vonatkozásban elég alacsony.Ugy gondoljuk,vizsgálataink is felhivják a figyelmet arra,hogy nem oldhatók meg az iskolareform alapvető feladatai,ha csak az ismeretek elsajátitásával törödünk,ugyanilyen fontos problémának kell tekintenünk az alkalmazás kérdését is."

Több szerzőnél osvasható az a megállapitás,hogy az ismeretek alkalmazása elsajátitásuktól függ.Ezt azonban nem szabad mereven értelmezni.Kudrjavcev kisérleti tapasztalatai alapján vonja le azt a következtetést,hogy az alkalmazás nehézségei nemcsak az elsajátitással függnek össze, sajátos nehézségek létrejöhetnek a feladat megoldásának folyamatában is.Szerinte a tanulók azért nem tudták megoldani feladatukat,mert nem vették figyelembe a konkrét feladat sajátosságait.S ez arra vezethető vissza,hogy a feladat elemzése során nem valósultak meg kellő szinvonalu gondolkodási müveletek.

Mivel a formális ismeretek kialakulásának megelőzésére az oktatás egyik leghatékonyabb eszköze lehet az ismeretek gyakorlati alkalmazásának mind szélesebb körü meggyökereztetése a pedagógiai gyakorlatban,a szakmódszertani kutatás feladata a konkréten fizikai feladatokra alkalmazandó gondolkodás-módszertani eljárások kidolgozása.

A hazai szakmódszertani irodalomban ez a terület alig tükröződik.Találhatunk egyrészt általános elemzéseket, mint például Makai Lajos "A fizika tanitása" cimü egyetemi tankönyvének megfelelő fejezete,vagy az Országos Pedagógiai Intézet módszertani füzeteiben megjelent Vize Lászlóné "A fizika feladatmegoldás néhány kérdése" cimü tanulmánya,vagy a Középiskolai Matematikai Lapok szerkesztőségének a fizika rovat uj megoldóinak irt tanácsai.Másrészt elvétve konkrét tipusu feladatok megoldásánál célravezető eljárások ismertetésével,mint például Major János "A dinamikai példék megoldásáról" cimü cikke,vagy Mihály László "Sztatikai feladatok megoldása" cimü cikke,vagy Nagy László "Testek gördülése,a haladó és forgómozgás együttes fellépése" cimü cikksorozatának harmadik része,vagy Buvári András "Feladatfetisizmus és a fizikai tartalom" cimü cikke.

Buvári András a felsőfoku technikumok fizika felvételi vizsgáinak tapasztalatait elemezve a feladatok tipusairól irt fejtegetései mellett azok szinvonalának csökkentését javasolja,amivel azért nem érthetünk egyet,mert a felvételi vizsgák eredményének javulása a követelményszint csökkentésével csak látszólagos,tényleges pozitiv változás a tanulók felkészitésének javitásától várhatók.Időközben történtek is ilyen irányu intézkedések,mint például a fizikai dolgozók gyermekeinek már egészen minimális létszámu tanulónál /hat fő/ fellépő igény esetén költségvetési alapból tartható előkészitő tanfolyamok bevezetése.

Landa,L.N.az algoritmusok alkalmazásával kapcsolatos tanulmányában a szakmódszertanok hiányosságai között első helyen foglalkozik azzal a ténnyel,hogy eddig nagyon kevés számu feladat megoldására fogalmaztak meg algoritmust ahhoz képest,ahány feladatnak létezik és felfedezhető az algoritmusa.A fizika módszertanában a közben eltelt időszak nem hozott minőségi változást,főleg a programozott oktatás /ismeretek elsajátitására/ fejlesztésére irányuló kisérletekkel találkozhatunk.Landa által megfogalmazott "Algoritmusnak a müveletek szigoru egymásutánját nevezzük,amely lehetővé teszi egy bizonyos adott kategória valamennyi feladatának megoldását" követelményt többé-kevésbé megközelitő eljárások kidolgozása a fizika szakmódszertanát vitathatatlanul gazdagitja.Ezért mi megelégszünk olyan cselekvési szabályok /utasitások/ rendszerének kidolgozásával,amelyeknek a már emlitett kategóri bármelyik feladatára való alkalmazása megoldásra vezet.

Tudatában vagyunk annak a ténynek,hogy nem mindenféle feladatot lehet algoritmikusan megoldani,azaz nem mindenféle feladatra lehet előzetesen olyan müveleti rendszert megadni,amely annak megoldására vezet./Az ilyen feladat természetesen a fenti ténytől függetlenül megoldható lehet./

A fizikai feladat általánosságban,mint probléma jelentkezik.A problémák megoldásánál alkalmazott gondolkodás-módszertani eljárások összeségét,azaz a feladatmegoldásokban követett módszereket rendszerezni igyekvő tudományágat heurisztika néven nevezhetjük.

A feladatmegoldások gondolkodás-módszertanának első rendszerezője az i.e.300 körül élt görög matematikus Papposz a Collectiones cimü müvében a heurisztika megalapózóiként Eukleidészt,a Pergai Apolloioszét és az idősebb Arisztaeusét emliti./Pólya György nyomán/.A modern heurisztika müvelőjének,Pólya György professzornak véleménye szerint a leghiresebb kisérletek a heurisztika rendszeres felépitésére Descartes és Leibnicz nevéhez füződnek.

A dolgozatban Pólya György alapvető elképzeléseit,mint a feladatmegoldások gondolkodás-módszertanának általános elméletét /felhasználva az általa használt terminológiát/ a középiskolai fizika feladatainak azon csoportjára kivánjuk alkalmazni,amelyek a fizika jelenleg általánosan elfogadott invariancia-elveiből levezethető megmaradási tételek alkalmazásával megoldhatók:megmutatván,hogy a tárgykörbe tartozó tetszőlegesen nehéz feladat megoldható néhány a középiskolai tananyagban szereplő alapösszefüggés alkalmazásával.

A feladatok megoldásában négy szakaszt különböztetünk meg,amelyek rendre: a feladat megértése,a megoldás tervének elkészitése,a megoldás végrehajtása,a megoldás vizsgálata.

A feladat megértése a probléma megoldásának alapvető fázisa,kihagyásával feladatot megoldani még olyan esetben sem lehet,amikor a tanulónak különösen jó ötlete támad /ennek ugyanis feltétele a feledat megértése/ és minden előkészitést átugorva produkálja a megoldást.A feladat megértése nélkül nem szabad a tanulónak hozzáfognia a számoláshoz.Célszerü az adott,vagy ismertnek tekinthető adatok összegyüjtése,a kérdés több oldalról való megfogalmazása,valamint a kikötések vizsgálata.Ahol szükséges ábrát kell rajzolni,ezen az ismert adatokat és a keresett mennyiségeket feltüntetve alkalmas jelöléseket vezethetünk be.

Fizikai feladatoknál gyakran előfordulhat,hogy bizonyos körülmények,illetve adatok a feladat szövegében explicite nem szerepelnek,egyes mellékjelenségektől el kell tekintenünk.A nem szereplő adatokat esetleg máshonnan ismerjük /legalábbis ismernünk kellene/,vagy pedig nem lesz rájuk szükség,a feladat ezek ismerete nélkül is megoldható / a megoldás nem függ tőlük,de matematikailag ez a megoldás során egy ujabb ismeretlen bevezetését jelenti/.

A feladat megoldásának tulajdonképpen a legfontosabb része,a gerince a tervkészités.A feladat megoldásának terve azt jelenti,hogy legalább vázlatosan tudjuk,milyen számitásokat kell elvégeznünk,hogy megkapjuk az ismeretlent. Leibnicz szerint:"Tökéletes a megoldási módszer akkor,ha kezdettől fogva előre látjuk,sőt be is bizonyithatjuk,hogy azt követve elérjük célunkat." /Pólya György nyomán/ A legnehezebb feladat a fizikai lényeg felismerése,az alkalmazandó fizikai törvény,illetve törvények kiválasztása.Ezért indokolt /a szakirodalomban is szokásos/ megkülönböztetni a "felismerési" algoritmust a "megoldási" algoritmustól.

A problematikus helyzetek elemzésének algoritmusait,amelyek a különböző feladattipusok megoldására alkalmas algoritmusok alkalmazhatóságának felismerésére szolgálnak szkás "felismerési" algoritmusoknak nevezni.

A feladatok egy konkrét csoportjának a megoldására alkalmas algoritmusok /a feladat feltételeire alkalmazhatók/ csoportját "megoldási" algoritmusoknak szokás nevezni.Ez esetben elvonatkoztatunk attól,hogyan tudtuk meg,hogy az adott feladat éppen az adott tipushoz tartozik./például egy felismerési algoritmus segitségével/

Az általunk javasolt módszer,melyet analitikus megközelitésnek fogunk nevezni mindkét tulajdonsággal rendelkezik, mert a jelenség /a feladatban vizsgált probléma/ fizikai lényegének megragadása,a megfelelő törvény,törvények matematikai alakjának megtalálása /érvényességi feltételekkel/ a feladat megoldásának legnehezebb szakasza,amelyen átsegitve a tanulót joggal bizhatunk a feladat eredményes megoldásában.

A megoldási terv elkészitése a fizikai feladat elemzésével kezdődik,amelynek sokszinüsége teszi éppen sokszor nehézzé a feladatot /nem lehet ezt a gondolkodási müveletet számolással helyettesiteni,formulákhoz rögziteni./.Ez a kvalitativ elemzésnek nevezhető müvelet az alkalmazandó fizikai törvények kiválasztása,érvényességi feltételeiknek tisztázása szempontjából alapvető jelentőségü.A kvalitativ elemzés során célszerü a feladatot determináló fizikai mennyiségeket megvizsgálni,hogy milyen más mennyiségektől függnek /és hogyan/ illetve egymással milyen kapcsolatban vannak.Megvizsgálandók kölcsönhatások a megmaradó fizikai mennyiségek változása,az esetleges mozgást segitő és akadályozó erők,az elhanyagolások szemszögéből.Egyensuly esetén gondolatkisérletet végezhetünk,annak eldöntésére, hogy a nyugalmi /stacionárius/ helyzetből kimozditott rendszer,mely erők /hatások/ bekövetkezése esetén térvissza nyugalmi helyzetébe.Mindenképpen meghatározandó a fizikai jelenségek köre,amelyek a feladat tárgyával kapcsolatba hozhatók.

Ezek után célszerü összefüggés,vagy összefüggések /mivel kvantitativ,ugynevezett "számitásos" feladatokról van szó itt már a megfelelő fizikai törvények matematikai alakjára gondoltunk/ keresése az ismeretlen és a megadott adatok között.Az összefüggések közül leginkább megfelel az amelyik minimális számu uj ismeretlent tartalmaz és maximálisan felhasználja megadott adatainkat,azon megszoritást figyelembevéve,hogy a feladat fizikai tartalmának megfelelő fizikai jelenségek csoportjától minél kevésbé távolodjunk el.Az összefüggésben esetlegesen szereplő uj ismeretlen illetve ismeretlenek meghatározása uj feladatot,feladatokat jelent,amelyekhez a fenti megszoritások betartásával szintén megkeresendő a megoldás szempontjából legkedvezőbb összefüggés.A módszer ismételet alkalmazásával eljuthatunk a számunkra ideális összefüggéshez, amelyben már csak egy ismeretlen van.Az utolsó összefüggéssel kezdve,összefüggéseinket rendre visszafelé alkalmazva megkapjuk a megoldást.Természetesen az ut hosszusága és kitérőktől mentes volta függ az összefüggések választásától.Esetleg zsákutcába jutunk és valamelyik elágazástól ujra kell kezdenünk a gondolatmenetet,ugyanis kevés tárgyi ismerettel nehéz jó ötletre bukkani,tárgyi ismeret nélkül pedig szinte lehetetlen.Ezen gondolatmenet alkalmazását nagyban segiti az ugynevezett analóg feladatok felismerése,amelyeknek a megoldása könnyebb vagy már ismert.Természetesen ha jó az analógia a fenti analitikus megközelités mellőzhető.

A kapott összefüggéseket a megoldási terv végrehajtása előtt célszerü ellenőrizni abból a szempntból,hogy megfelelnek-e a feladat szövegének;mértékegység szempontjából helyes összefüggések-e /dimenzió próba/;matematikailag megoldhatók-e?

A megoldási terv végrehajtása,a feladat kidolgozása viszonylag könnyebb része a feladat megoldásának.Főleg türelemre van szükség és lankadatlan figyelemre,hogy a megoldás tervének minden részlete hiánytalanul és hibátlanul kerüljön megvalósitásra.

Előfordulhat,hogy az analitikus közelitéssel kapott összefüggésekkel általánosságban történő számolás rendkivül bonyolult /több ismeretlen miatt,a párhuzamos elágazások száma zavaró lehet/,ilyenkor helyesebb a részeredmények konkrét kiszámitása.

A megoldás vizsgálata a megoldási terv végrehajtásának rutinszerü ellenőrzésénél sokkal jelentősebb fázisa a feladat megoldásának.A megoldás helyességét megnyugtatóan csak a kisérlet,a megfigyelés mérési eredményeivel való összehasonlitás alapján lehet ellenőrizni.

Az eredmény diszkutálása /a képlet által leirt fizikai folyamatok céltudatos vizsgálata/,a hozzávezető ut ismételt átvizsgálása,esetleges másképpen történő levezetése, a feladat bővitése,idealizálása /egyes tényezők megoldáskor való figyelmen kivül hagyása/,általánosabb megoldás készitése megszilárditja a tanulók tudását és fejleszti feladatmegoldó készségét.

Természetesen hiba lenne a fenti módzsert merev sémának tekinteni,vagyis olyképpen értelmezni,hogy megértésre csak az első szakaszban,ellenőrzésre meg csak a negyedik szakaszban van szükség.Valójában megértésre,ellenőrzésre minden lépésben szükség van.A feladatmegoldás egységes folyamat,amelynek azonban különböző szakaszai vannak.Az elnevezések csak az egyes gondolkodási szakaszok legjellemzőbb vonásait jelölik meg.

II. SZIMMETRIA ÉS A MEGMARADÁSI TÉTELEK

A fizikai törvények /Planck szerint:"Fizikai törvény minden olyan tétel,amely szilárd,megtámadhatatlanul érvényes összefüggést mond ki mérhető fizikai mennyiségek között,amely lehetővé teszi,hogy egy fizikai mennyiséget kiszámitsunk,ha a többi mérés után ismeretes"/ szimmetriáján azt értjük,hogy alávetve valamilyen transzformációnak a törvény változatlan marad.E definició szerint azonos értelemben használhatjuk a szimmetria és invariancia szavakat.

Ahogyan a természettörvények lehetővé teszik számunkra,hogy előrelássunk eseményeket más eseményekre vonatkozó ismereteink alapján az invariancia-elvek ugy teszik lehetővé,hogy az események között uj összefüggéseket állapitsunk meg,az események között már megállapitott összefüggések ismerete alapján.Ezért fizikai rendszerek vizsgálatánál minden esetben előnyt jelent,ha a rendszer rendelkezik valamiféle szimmetriatulajdonsággal.Ugyanis a szimmetriatulajdonságok figyelembevételével egyrészt olyan általános összefüggésekre tudunk következtetni,amelyek függetlenek a rendszer alkotóelemei közötti kölcsönhatások konkrét természetétől,és igy a rájuk vonatkozó ismereteinktől is,másrészt lehetőség van a konkrét számitások nagyfoku egyszerüsitésére.

Az invarianciaelvek tehát szigoru összefüggéseket posztulálnak a természettörvények által meghatározott összefüggések között,azaz a lehetséges természettörvények próbakövét képezik.Valamely természettörvény csak akkor fogadható el érvényesnek,ha összefüggések,melyeket posztulál összeférnek az elfogadott invarianciaelvekkel.Ilyen invarianciaelvek:

a/.Az idő homogén: az időszámitást bármikor kezdhetjük,a fizikai törvények a kezdeti időpont önkényes választásával szemben invariánsak /természetesen az egyes eseményeket bármely választás esetén ugyanolyan időközök választják el egymástól/

b/.A tér homogén: nincsenek a térnek kitüntetett pontjai,a koordinátarendszer origója eltolható,az eltolással szemben a fizikai törvények invariánsak.

c/.A tér izotrop: minden iránya egyenértékü,a koordinátarendszer tengelyeinek irányitása tetszőleges lehet,ez elforgatással szemben a fizikai törvények invariánsak.

Nem lehetett volna felismerni a természettörvényeket, ha azok nem tennének eleget a fenti invarianciaelveknek. /Például helyről helyre változnának,vagy különböző időpontokban más és más természettörvények volnának érvényben./

Az invarianciaelvekből fontos fizikai törvények /megmaradási tételek/ vezethetők le,ha kihasználjuk az elmélet matematikai kereteit /például a klasszikus mechanika Lagrange-formalizmusának felhasználásával/ és azt a követelményt,hogy a törvény /melynek egzakt alakját nem kell ismernünk/ álljon összhangban az invarianciaelvekkel.

A középiskolában tanitott fizika anyagában a következő megmaradási törvények fordulnak elő:

az energia megmaradásának törvénye
az impulzus megmaradásának törvénye
az impulzusmomentum megmaradásának törvénye
a tömeg megmaradásának törvénye
az elektromos töltés megmaradásának törvénye

Természetesen tudatában vagyunk annak,hogy a felsorolt megmaradási törvények nem mindegyikét tanitjuk jelenleg explicit formában,mivel azonban az itt szereplő törvények alapjául szolgáló fizikai jelenségeket a tanterv értelmében tanitani kell,lehetőség van arra,hogy a helyes szaktudományi világkép kialakitása érdekében legalább röviden utaljunk a szóban forgó jelenséggel kapcsolatos megmaradási törvényre is.

A geometriai szimmetriacsoport /a négydimenziós téridő az alapul választott geometriai tér/ felhasználásával levezethető az energia megmaradásának /időbeni homogenitásból/,az impulzus megmaradásának /a tér homogén voltából/ az impulzusmomentum megmaradásának /a tér izotrop voltából/ törvénye.Az elektromos töltés megmaradásának a dinamikai invarianciák közé tartozó mértékinvariancia /elektromágneses kölcsönhatásra vonatkozó/ felhasználásával kapható.

A tömegmegmaradási törvény kontinuitási egyenlet /áramló folyadékra és gázra vonatkozó tömegmegmaradási tétel/ alakjában,vagy a kémiában helytelenül anyagmegmaradási törvénynek nevezett Lavoisier tételeként szerepel a középiskolai anyagban.Mivel azonban a relativitás elmélete szerint a tömeg és az energia arányos egymással /Einstein-féle egyenlet/ kettőjük megmaradását egyetlen tételként tartjuk számon.

A geometriai természetü invarianciatranszformációk csoportjába tartozik még az egyenletes transzláció /megmaradó tulajdonság: tömegközéppont mozgása/ amellyel szemben a fizikai törvények szintén invariánsak,azaz érvényes a relativitási elvben kimondott egyenértéküség a tehetetlenségi rendszerekre.

A geometriai invarianciatranszformációk nem változtatják meg az eseményeket; csupán térbeli elhelyezkedésükön és mozgásállapotukon változtatnak,azaz adott vonatkoztatási rendszerrel mindazon koordinátarendszerek egyenértéküek,amelyeket az előbbiekhez képest az origó,illetve a kezdeti időpont eltolása,a tengelyek elforgatása,valamint egyenesvonalu egyenletes sebességü transzlációval való eltolása által nyerünk.

a/. A z e n e r g i a m e g m a r a d á s á n a k t é t e l e

A kényszerfeltételek kiküszöbölésének céljából a derékszögü koordináták helyett más koordinátákat választunk.Tegyük fel,hogy az előirt r számu kényszerfeltétel holonom, vagyis:

$f_k/x_1, x_2, \ldots, x_{3n}, t/= 0$ alaku,ahol: $k = 1,2,\ldots,r$

Ebben az esetben a rendszer 3n derékszögü koordinátája közül csak 3n-r független egymástól /azaz a rendszer szabadsági fokainak száma: $\bar{f}$ = 3n-r /.

Az olyan f számu, egymástól független $q_1, q_2, \ldots, q_f$ adatot, amelyek a rendszer helyzetét teljesen meghatározzák általános koordinátáknak nevezzük. $\{q_1, q_2, \ldots, q_f\} \equiv \{q_k\}$

Az általános koordináták idő szerinti differenciálhányadosait általános sebességkoordinátáknak nevezzük. $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f\} \equiv \{\dot{q}_k\}$

A mechanikai rendszer tulajdonságait egyértelmüen értelmezhetjük egy Lagrange-féle függvény segitségével, amely az általános koordináták, általános sebességkoordináták és az idő ismert függvényének tekinthető, bár a fügvény alakjáról mást nem állithatunk.

$L = L/q_1, q_2, \ldots, q_f, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_f, t/ = L/q_k, \dot{q}_k, t/$

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszerre sz idő homogén, azaz az időtől független a rendszert leiró Lagrange-függvény, vagyis

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0, \text{ezért} \quad L = L/q_k, \dot{q}_k/.$$

Igy a Lagrange-féle mozgásegyenletek egy integrálja:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k \quad \text{, ahol} \quad \ddot{q}_k = \frac{d^2 q_k}{dt^2} .$$

A mozgásegyenlet, mint a variációs probléma Euler-Lagrange-féle megoldása:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0, \text{amelyből} \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

behelyettesitésével:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d^2 q_k}{dt^2} \right\}$$

Az egyenlet jobb oldala egy összetett függvény differenciálhányadosa, ezért:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{dq_k}{dt}\right) \quad \text{más alakban:}$$

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L \right\} = 0 \quad \text{azaz}$$

$$\sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \text{const.}$$

Ha L=T-V -ben a V potenciális energia csak az általános koordinátáktól függ, T kinetikus energia pedig az általános sebességkoordináták homogén kvadratikus alakja

/ $T = a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + a_{ff}\dot{q}_f^2$ / akkor a homogén kifejezésekre vonatkozó Euler-féle tétel szerint alkalmazható a $\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = 2T$ eredmány, azaz

$$\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L = 2T - / T-V / = T+V = \text{const},$$

ahol $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$ feltevést használtuk ki a $\sum_{k=1}^{f}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k = \sum_{k=1}^{f}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k$ helyettesitésnél.

Az időbeni szimmetria tehát bármilyen komplikált rendszer esetén annak energiáját állandónak biztositja.

b/. A z i m p u l z u s m e g m a r a d á s á n a k t é t e l e

Az általános impulzuskoordinátákat $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ összefüggéssel definiáljuk, amely azért indokolt, mert a p_k-k derékszögü koordináták és zárt rendszer esetén / A rendszer zárt, ha $\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k = 0$, ahol $\vec{F}_k$ a k-adik tömegpontra ható külső erők eredője/ az általános sebességkoordináták együtthatója tömeg dimenzióju mennyiség, konzervativ rendszer esetén pedig a p_k-k a közönséges impulsus-komponensekkel azonosak:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\dot{x}_k^2 - V/x_1, x_2, \dots, x_{3n}/\text{-ből} \quad p_{x_k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m_k\dot{x}_k,$$

azaz a $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_k$ általános sebességkoordináták a $p_1, p_2, \dots, p_k$ általános impulzuskoordináták függvényeinek tekinthetők és megforditva.

Tegyük fel, hogy a vizsgált rendszerre a tér homogén, azaz a rendszert leiró Lagrange-függvény invariáns a transzlációval szemben.

$\{q_1, q_2, \dots, q_f\}$ általános koordinátáknak megfelelő derékszögü koordináták: $\{\vec{r}_1, \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\}$, ahol N a rendszer tömegpontjainak száma. A koordináta rendszer origójának infinitezimális elmozdulását jelölje $\vec{\varepsilon}$,akkor $\vec{r}_k' = \vec{r}_k + \vec{\varepsilon}$. A Lagrange-függvény változását definiáló $\delta L = L/\vec{r}_k'/ - L/\vec{r}_k/$ összefüggés feltételünk miatt zérus.

Az uj helyre vonatkozó Lagrange-függvényt sorbafejtve az infinitezimális volta miatt az olyan tagokat, amelyekben második és magasabb hatványra emelendő elhagyhatjuk:

$$L/\vec{r}_k'/ = L/\vec{r}_k + \vec{\varepsilon}/ = L/\vec{r}_k/ + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} \vec{\varepsilon}$$ Ennek felhasználásával:

$$\delta L = \vec{\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k}\right) = \vec{\varepsilon}\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k}\right) = 0$$

Ennek minden -ra fenn kell állnia, ezért:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} = 0, \text{azaz:} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} = \text{const.}$$

Zárt rendszer esetén viszont $\frac{L}{v} = m\,v = p$. Azaza teljes

$$\text{impulsus} \quad \vec{p} = \sum_{k=1}^{N} \vec{p}_k \equiv \sum_{k=1}^{N} m_k \vec{v}_k \equiv \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} = \text{oonst.}$$

A tér homogén volta tehát bármilyen komplikált /de zárt/ rendszer esetén annak impulsusát álhandónak biztositja.

c/. Az impulzusmomentum megmaradásának tétele

Ha valamely rendszerre ható külső erők forgatónyomatékainak eredője zérus, akkor a rendszer $\vec{N} = \sum_{k=1}^{N} \vec{r}_k \times \vec{p}_k$ -ral definiált teljes impulsusmomentuma állandó.

Tegyük fel, hogy a vizsgált zárt rendszerre a tér izotrop, azaz a rendszert leiró Lagrange-függvény invariáns a koordinátarendszer tengelyeinek elforgatásával szemben.

A koordinátarendszer tengelyeinek infinitezimális szöggel történő elforgatását jelölje $\delta\vec{\varphi}$,akkor a helyvektor és a sebességvektor változásai $\delta\vec{r}_k = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_k$ és $\delta\vec{v}_k = \delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_k$.
A Lagrange függvény változását definiáló

$$\delta L = \sum_{k=1}^{N}\left\{\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k}\delta\vec{r}_k + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k}\delta\vec{v}_k\right\}$$ összefüggés feltételünk miatt zérus.

A Lagrange-féle mozgásegyenlet,mint variációs probléma Euler-Lagrange-féle megoldása: $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} = 0$, amelyből

$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_k} = \vec{p}_k$ jelölés felhasználásával $\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_k} = \dot{\vec{p}}_k$,igy:

$$\delta L = \sum_{k=1}^{N}\left\{\dot{\vec{p}}_k/\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_k/ + \vec{p}_k/\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_k/\right. =$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left\{m_k\ddot{\vec{r}}_k/\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_k/ + m_k\dot{\vec{r}}_k/\delta\vec{\varphi} \times \dot{\vec{r}}_k/\right\} =$$

$$= \delta\vec{\varphi}\sum_{k=1}^{N}\left\{m_k\vec{r}_k \times \dot{\vec{v}}_k + m_k\dot{\vec{r}}_k \times \vec{v}_k\right\} =$$

$$= \delta\vec{\varphi}\sum_{k=1}^{N}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k \times m_k\vec{v}_k\right) \quad \text{azaz} \quad \delta L = \delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times \vec{p}_k = 0$$

Ennek minden $\delta\vec{\varphi}$-re fenn kell állnia,ezért:

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times \vec{p}_k = 0 \text{ ,azaz } \vec{N} = \sum_{k=1}^{N}\vec{r}_k \times \vec{p}_k = \text{const.}$$

A tér izotrop volta tehát bármilyen komplikált /de zárt/ rendszer esetén annak impulzusmomentumát állandónak biztositja.

d/. Az elektromos töltés megmaradásának tétele

A szabad elektromágneses tér

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\vec{D}}{t}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{c}\frac{\vec{B}}{t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Maxwell egyenletei közül az első kettő ekvivalens $\partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$ $/\mu, \nu = 1,..,4/$ kontinuitási egyenlettel,ahol $F_{\mu\nu}$ elektromágneses térerősségtenzort a következő meggondolások alapján származtatjuk: div $\vec{B} = 0$ miatt $\vec{B}$ egy $\vec{A}$ vektor,az ugynevezett vektorpotenciál rotációjával tehető egyenlővé: $\mu\vec{H} = \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$,mert div rot $\vec{A} = 0$ identikusan teljesül. $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ -t helyettesitsük be a harmadik Maxwel egyenletbe.Mivel a rotáció képzése és az idő szerinti differenciálás sorrendje felcserélhető,az eredmény zérusra redukált formában: $\mathrm{rot}\left\{\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right\}=0.$

Ez viszont bármely olyan $\vec{E}$-vel és $\vec{A}$-val kielégithető,amelyekre $\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,\varphi$ teljesül,mert a gradiens rotációja bármely φ -re zérus.A φ-t skalárpotenciálnak nevezzük.

$\vec{A}$ és φ egyértelmüen meghatározza $\vec{E}$-t és $\vec{D}$-t,de forditva nem,ezért célszerü egy kovariáns megszoritást tennünk.A relativitás elméletével összhangban legyen a megszoritás olyan,hogy az $\vec{A}$ három komponense $/A_1,A_2,A_3/$,valamint $i\varphi=A_4$ egy négyesvektor négy komponenseként viselkedjék.Ekkor a négyes-térbeli antiszimmetrikus tenzort $\vec{F}=-\vec{F}^{+}$

$$\vec{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\alpha-\partial_\nu A_\mu=-F_{\nu\mu}$$

összefüggésekkel értelmezzük.A tenzor,amelyet az elektromágneses tér tenzorának nevezünk,$\vec{B}$ és $\vec{E}$ komponenseivel felirva:

$$\vec{F}=\begin{vmatrix} 0 & B & -B & -iE \\ -B & 0 & B & -iE \\ -B & -B & 0 & -iE \\ iE & iE & iE & 0 \end{vmatrix}$$

A_μ-re még a $\partial_\mu A_\mu=0$ Lorentz-feltétel is kiszabható.
Igy a szabad elektromágneses teret a négyespotenciál teljes mértékben jellemzi,és A_μ-re érvényes $\partial_\nu\partial_\mu A_\mu\equiv\Box A_\mu=0$ téregyenlet a Lorentz-feltétellel kiegészitve ekvivalens a Maxwell-egyenletek rendszerével.

A téregyenlet és a Lorentz-feltétel invariáns az $A_\mu\to A'_\mu$ $A'_\mu=A_\mu+\partial_\mu\mathcal{E}/x/$ transzformációval szemben,amelyet másodfaju mértéktranszformációnak nevezünk. $/\mathcal{E}/x/$ tetszőleges skalár függvény/ Ezen mértékinvariancia teljesülése nélkül a foton nyugalmi tömege nem lenne zérus.

Ahhoz,hogy a foton tömege kölcsönhatás közben is zérus maradjon meg kell követelnünk,hogy a kölcsönható elektromágneses tér is invariáns legyen a mértéktranszformációval szemben.Ez azt jelenti,hogy a kölcsönhatásban álló terek teljes Lagrange-függvénye is megörzi alakját, ha rá a másodfaju mértéktranszformációt alkalmazzuk. Ez ugy biztositható, hogy az elektromágneses transzformációval egyidejüleg a anyagtaret is transzformációnak vetjük alá:

$$\psi \longrightarrow e^{/ie/hc/\mathcal{E}/x/}\psi$$

$$\psi^* \longrightarrow e^{-/ie/hc/\mathcal{E}/x/}\psi^*$$

, ezt nevezzük elsőfaju mértéktranszformációnak. Mivel a ψ és a ψ^* a Lagrange-függvényben mindig csak $\psi^*\psi$ tipusu bilineáris kombinációkban léphet fel, az exponenciális együtthatók kitevőinek összege zérus, azaz a Lagrange-függvény a kétféle mértéktranszformációval szemben invariáns.

Mivel A_μ a tér állapothatározója szokásos a Lagrange-függvényt A_μ-k és $\partial_\nu A_\mu$-k segitségével meghatározni, de mivel a téregyenletek invariánsak a másodfaju mértéktranszformációval, a Lagrange-függvény közvetlenül nem tartalmazhatja a négyespotenciált. Igy csak a térerősségek /illetve $F_{\mu\nu}$/ függvénye lehet. A térerősségek független invariánsai $/\vec{E}^2 - \vec{H}^2$ és $\vec{E}\vec{H}/$ közül, választhatunk, de a téregyenletek linearitását is megkövetelve:

$$L = \frac{1}{2}/\vec{E}^2 - \vec{H}^2/ = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}/\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu//\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu/$$

Ezt összevetve a variációs problémához tartozó Euler-Lagrange egyenletekkel $/ \frac{\partial L}{\partial A_\nu} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu A_\nu} = 0 /$ azt kápjuk,

hogy $\frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0$ és $\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu A_\nu} = -/\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu/ = -F_{\mu\nu}$

A megmaradó tulajdonság meghatározása céljából alkalmazzuk a $\partial_\mu F_{\mu\nu} = 0$

$$\mathcal{L}\, F_{\mu\nu} = / L\delta_{\mu\nu} - \partial_\nu \varphi_i \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_i} / \delta x_\nu + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi_i}\delta\varphi_i /$$

kontinuitási egyenletre egyidejüleg a kétféle mértéktranszformációt.

Legyen $\mathcal{E}/x/$ infinitezimálisan kicsi, akkor a megfelelő infinitezimális transzformációk:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \mathcal{E}/x/ \;;$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \mathcal{E}/x/$$

$$\psi'_i = \psi_i + /ie/\hbar c/\mathcal{E}/x/\psi_i \;;$$

$$\delta\psi_i = /ie/\hbar c/\cdot\mathcal{E}/x/\psi_i$$
$$\psi_i^{*\prime} = \psi_i^* - /ie/\hbar c/\cdot\mathcal{E}/x/\psi_i^*;$$
$$\delta\psi_i^* = -/ie/\hbar c/\cdot\mathcal{E}/x/\psi_i^*$$
$$\delta x_\mu = 0$$

A kontinuitási egyenlet tehát ebben az esetben:

$$\partial_\mu\left[\frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\psi_i\,\mathcal{E}/x/ - \frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^*\mathcal{E}/x/ + \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu A_\mu}\partial_\nu\mathcal{E}/x/\right] = 0$$

Mivel $\partial_\mu A_\nu$ csak a szabad elektromágneses tér Lagrange-függvényében szerepel, a Lagrange-függvény szerkezetéről tett megjegyzéseink szerint: $\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu A_\nu} = -F_{\mu\nu}$.

Definiáljuk az áramsürüséget a $\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c}j_\mu$ összefüggéssel és használjuk ki F antiszimmetrikus voltát $/\partial_\mu\partial_\nu/F_{\mu\nu}\mathcal{E}/x// = 0$ / akkor a transzformált kontinuitási egyenlet utolsó tagját $\partial_\mu[\mathcal{E}/x/\partial_\nu F_{\mu\nu}] = \partial_\nu\mathcal{E}/x/\{\frac{1}{c}j_\mu\}$, alakra hozhatjuk, amelyet visszahelyettesitve a c-vel szorzott egyenletbe:

$$\partial_\mu\left[\left\{j_\mu - \frac{ie}{\hbar}\left(\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^* - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\psi_i\right)\right\}\cdot\mathcal{E}/x/\right] = 0$$

Kijelölve a differenciálást:

$$\left[j_\mu - \frac{ie}{\hbar}\left\{\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^* - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\psi_i\right\}\right]\partial_\mu\mathcal{E}/x/ - \mathcal{E}/x/\partial_\mu\left[\frac{ie}{\hbar}\left\{\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^* - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\psi_i\right\}\right]$$

Ennek minden $\mathcal{E}/x/$-re fenn kell állnia, / $\mathcal{E}/x/$ értékével $\partial_\mu\mathcal{E}/x/$ értéke is egy adott pontban tetszőleges/ ezért az első tagból:

$$j_\mu = \frac{ie}{\hbar}\left\{\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^* - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\psi_i\right\}$$

a második tagból: $\partial_\mu\frac{ie}{\hbar}\left\{\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^* - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\psi_i\right\} = 0$, azaz a

Lagrange-függvényből $j_\mu = \frac{ie}{\hbar}\left\{\frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i^*}\psi_i^* - \frac{\partial L}{\partial\partial_\mu\psi_i}\right\}$ szerint képzett áramsürüség forrásmentes kontinuitási egyenletet elégit ki: $\partial_\mu j_\mu = 0$.

A megfelelő megmaradó mennyiség az elektromos töltés, amelynek megmaradását tehát a kombinált első és másodfaju mértéktranszformációval szembeni invariancia biztositja.

III. MEGMARADÁSI TÉTELEK

A klasszikus mechanika megmaradási tételeiből a gimnáziumi tantervnek megfelelően az impulzus megmaradásának tételével és a mechanikai energia megmaradásának tételével foglalkozunk.Mindkét tételnek jellemzője,hogy a folyamatok kezdő és végállapotára vonatkozó kijelentéseket tartalmaz,de nem világosit fel a folyamat lefolyásának részleteiről.Figyelmen kivül hagyja a pillanatnyi erőhatások, gyorsulások,sebességek,helyzetek változását,de biztonsággal megmondja,hogy a rendszer /igen bonyolult is lehet/ vagy a test milyen energiaállapottal,mozgására jellemző impulzussal,azxaz helyzettel,sebességgel jellemezhető a folyamat végén.A gyakorlatban legtöbbször ez is elég.Ezeknek a törvényeknek nemcsak gyakorlati szerepük van,hanem nagy elméleti jelentőségük is.Az impulzus megmaradásának törvénye általános természettörvény,amely az anyag minden mechanikai mozgását leirja,meghatározza.Az energia fogalma eredetileg a mechanikában alakult ki,azonban a mechanikai energia megmaradásának tétele nem általános jellegü,csak konzervativ erőkre érvényes.Ennek ellenére az energia megmaradásának elve a mechanika,sőt a klasszikus fizika területén tulmenő általános tapasztalati törvénynek bizonyult.Ha a mechanikai energiákon kivül a természetben előforduló energiákat is figyelembe vesszük,akkor már általánosan érvényes az energia megmaradásának törvénye,mert a nem konzervativ erő ellenében végzett munka során eltünő mechanikai enrgia más energiafajtává alakul át.

Az energia megmaradásának speciális eseteként foglalkozunk a Bernoulli-egyenlettel,ahol a p nyomásu és V térfogatu folyadéknak a mozgási és helyzeti energián kivül pV nyomási energiát is tulajdonitunk.Megemlitendő,hogy a Bernoulli-egyenlet bizonyitásához felhasznált kontinuitási egyenlet a tömegmegmaradás törvényének következménye.

A klasszikus mechanika harmadik alapvető megmaradási tétele az impulzumomentum megmaradásának tétele,amelynek centrális erő hatása alatt álló egyetlen tömegpontra vonatkoztatott speciális esete a felületi tétel,és a középiskolai tananyagban Kepler II.törvényeként kerül feldolgozásra.

A tömeg,az energia,az impulzus és az impulzusmomentum megmaradási tételeivel hasonló jelentőségü az elektromos töltés megmaradásának tétele,amelynek gyakorlati számitásokban különösen jelentős következménye Kirchhoff csomóponttörvénye.

a/. A mechanikai energia megmaradásának tétele

Az olyan erőt /erőteret/,amelyeknél az erő által végzett munka nem függ attól,hogy a tér egyik pontjából milyen pályán kerül valamely tömegpont a tér másik pontjába,hanem csak a két pont helyzetétől függ,konzervativ erőnek /erőtérnek/ nevezzük.A gravitációs,elektromos erők konzervativok,nem **konzervativ** /un.disszipativ/ a surlódási erő.

Konzervativ $\vec{F}$ erő hatása alatt levő testekhez egyértelmüen helyzeti /potenciális/ energiát rendelhetünk.Legyen a tér egy tetszőleges O pontjában a test potenciális energiája zérus.A tér valamely P pontjában a testnek az $\vec{F}$ erőtől származó potenciális energiáját definiáljuk azzal a munkával,amelyet az erő akkor végez,amikor a testet P-ből O-ba jutatja.Több konzervativ erő esetén mindegyik erőhöz rendelhetünk egy-egy potenciális energiát, és ezek összege adja a test teljes potenciális energiáját.

Vizsgáljuk meg az energiákat,amikor a test P pontból kicsi $\Delta\vec{r}$ vektorral elmozdulva P' pontba jut.A test P' pontbeli potenciális energiáját az O-P-P' uton végzett munka segitségével két részből irhatjuk fel: a P pontbeli potenciális energiával / $E_{pot/P}$ egyenlő nagyságu,de ellentétes előjelü energia és a P-P' uton végzett $\vec{F}\Delta\vec{r}$ munka összegeként.Ennek kell egyenlőnek lennie a P' pontbeli potenciális energiával egyenlő nagyságu,de ellentétes előjelü energiával.

$$-E_{pot\,P'} = -E_{pot\,P} + \vec{F}\Delta\vec{r} \qquad /1/$$

Legyen P pontban a test sebessége $\vec{v}$, P' pontban akkor $\vec{v} + \Delta\vec{v}$. Ha P'-t közel választjuk P-hez /$\vec{F}$ véges volta miatt/ $\Delta\vec{v}$ olyan kicsivé tehető, hogy $/\Delta\vec{v}/^2$ már elhanyagolható legyen. Igy a kinetikus energiák:

$$E_{kin\,P} = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m\vec{v}\vec{v}}{2} \qquad /2/$$

$$E_{kin\,P'} = \frac{1}{2}\,m/\vec{v}+\Delta\vec{v}//\vec{v}+\Delta\vec{v}/ = \frac{m}{2}\vec{v}^2 + m\vec{v}\Delta\vec{v} + \frac{m}{2}/\Delta\vec{v}\Delta\vec{v}/ \approx$$

$$\approx E_{kin\,P} + m\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\Delta\vec{v} = E_{kin\,P} + m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Delta\vec{r} = E_{kin\,P} + \vec{F}\Delta\vec{r} \qquad /3/$$

/3/-ból $\vec{F}\Delta\vec{r}$-t kifejezve, /1/-be helyettesitve, majd rendezve:

$$E_{pot\,P} + E_{kin\,P} = E_{pot\,P'} + E_{kin\,P'}$$

Tehát a test mozgása során a potenciális és a kinetikai energia összege állandó/bizonyitásunk a test pályájának közeli pontpárjára vonatkozik, de P'-vel szomszédos P'', majd P''-vel szomszédos P'''-vel, stb rendre megismételhető, ezért az egész pályára igaz/

A mechanikai energia megmaradásának tétele fentiek szerint azt mondja ki, ha a testre ható összes erők konzervativak, akkor a tömegpontnak a mechanikai energiája a mozgás folyamán állandó marad.

b/. Az impulzus megmaradásának tétele

A mechanikai rendszerbe tartozó testeknek, a rendszerhez nem tartozó testekkel való kölcsönhatásából származó erőket külső erőknek nevezzük. Azokat a mechanikai rendszereket, amelyekre külső erők nem hatnak, vagy a külső erők eredője zérus, zárt rendszereknek nevezzük.

Vizsgáljuk meg egy n tömegpontból álló, zárt mechanihanikai rendszer impulzusának változását Δt idő alatt, az egyszerüség kedvéért feltételezve, hogy a testek közötti erőhatás, a testek tömegközéppontját összekötő egyenes mentén hat. Általában, bármely két pontszerü test között lehet erőhatás, összesen tehát n/n-1/ belső erő léphet fel. Ezek az erők azonban a kölcsönhatás törvénye szerint párosával egyenlő nagyságuak. Ha az impulzust meghatározó $\vec{I} = m\vec{v}$ összefüggést Δt idővel bővitjük $\Delta \vec{I}$ impulzus változás a dinamika alaptörvényét figyelembevéve $\Delta \vec{I} = m\frac{\vec{v}}{\Delta t}\Delta t = \vec{F}\Delta t$ a tömegpontra ható erők eredőjének és a közben eltelt időnek a szorzatával határozható meg. Az egyes tömegpontok impulzusának változását összegezve:

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta \vec{I}_i = \left\{ \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_{\frac{n(n-1)}{2}} - \vec{F}_1 - \vec{F}_2 - \vec{F}_3 - \ldots - \vec{F}_{\frac{n(n-1)}{2}} \right/ \Delta t = 0$$

Tehát minden időpontban a rendszer teljes/mozgás esetén is/ impulzusának változása zérus, azaz a tömegpontok a belső erők hatására csak ugy mozoghatnak, hogy a mozgások folyamán a rendszer impulzusa állandó marad.

c/. A Bernoulli egyenlet

Az olyan képzelt folyadékot, amelyben nincsen belső surlódás, surlódásmentes vagy ideális folyadéknak nevezzük.

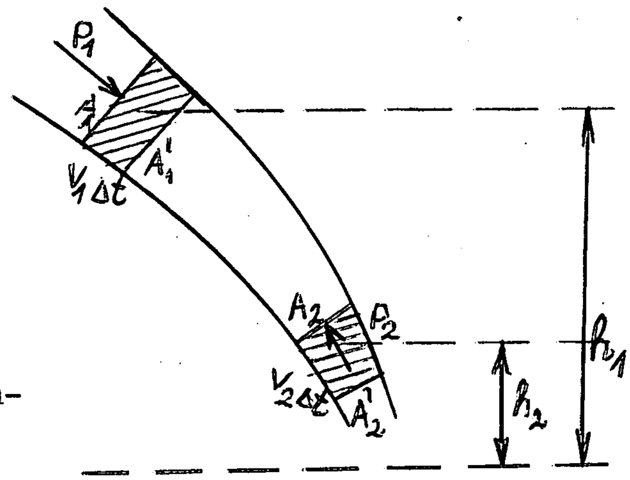
Az összenyomhatatlan /inkompresszibilis/ és homogén /az áramlási térben egyidejüleg csak egyfajta folyadék van/ folyadéknál a sürüség sem a helytől, sem az időtől nem függ.

Stacionárius áramlásnak nevezünk minden olyan áramlást, amelynél a sebesség, a nyomás, a sürüség, általában az áramlási állapot az áramlási tér minden helyén független az időtől. /különböző helyein az áramlási térnek ezek az állapothatározói természetesen lehetnek különbözők/

Ha az áramlási tér tekintetbe vett tartományának egyetlen helyén sem végeznek a folyadékrészecskék forgó mozgást akkor örvénymentes áramlásról beszélünk.

Vizsgáljuk surlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásánál egy keskeny áramcsöben levő folyadéknak azt a részét, amelyet az 1 és 2 indexü helyeken az A_1, illetve A_2 nagyságu felületek határolnak. Legyen az A_1 és A_2 felületekre ható nyomás p_1 és p_2, ezen indexü helyeken a folyadékrészecskék sebessége pedig v_1, illetve

v_2. Az áramcső fala és az A_1, A_2 felületek által közrezárt folyadékoszlop igen kicsi Δt idő alatt A_1', A_2' helyzetbe jut. Alkalmazzuk a folyadékoszlop elmozdulására a kinetikai energia tételét, amely szerint a kinetikai energia megváltozása egyenlő a rendszerre ható összes erők munkájával. A folyadékoszlop elmozdulásával $V = A_1 v_1 \Delta t$ térfogatu folyadék az 1 indexü helyről eltávozik, a 2 indexü helyen pedig az összenyomhatatlanság miatt ugyanekkora $V = A_2 v_2 \Delta t$ térfogatu folyadék megjelenik.



Ezért, és mivel az áramlás stacionárius volta miatt az áramcső fala és az A_1', A_2 felületek által közrezárt térben semmi sem változott, az energiatétel alkalmazásánál ugy járhatunk el, mintha a kicsiny $m=\varrho V$ tömegü folyadék az 1 indexü helyről a 2 indexü helyre jutott volna. Surlódásmentes folyadékról lévén szó az elmozdulásnál az összes munka a nehézségi erő és a nyomóerők munkájából tevődik össze. Legyen az m tömegü folyadék tömegközéppontjának magassága az 1 indexü helyen h_1, a 2 indexü helyen h_2, akkor a nehézségi erő munkája $mg/h_1-h_2/$. A nyomóerők munkája az A_1 és A_2 keresztmetszetnek $v_1\Delta t$-vel, illetve $v_2\Delta t$-vel való eltolásánál: $p_1 A_1 v_1 \Delta t = p_1 V$, illetve $-p_2 A_2 v_2 \Delta t = -p_2 V$.
A kinetikai energia tétele szerint tehát:

$$\frac{1}{2}\varrho V/v_2^2 - v_1^2/ = \varrho V g/h_1 - h_2/ + /p_1 - p_2/ \text{ , amelyet}$$

V-vel osztva és az indexek szerint rendezve:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho g h_2 \text{ , azaz}$$

surlódásmentes és összenyomhatatlan folyadék stacionárius áramlásánál $p + \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h = \text{const.}$

Ha az áramlás még örvénymentes is,akkor a konstans értéke az egész áramlási térben ugyanaz.
A Bernoulli-egyenlet fenti alakját V térfogattal megszorozva: $pV + \frac{1}{2}mv^2 + mgh = const.$
Ha a p nyomásu és V térfogatu folyadéknak a mozgási és helyzeti energián kivül pV nyomási energiát is tulajdonitunk a Bernoulli-egyenlet az energia megmaradását fejezi ki.

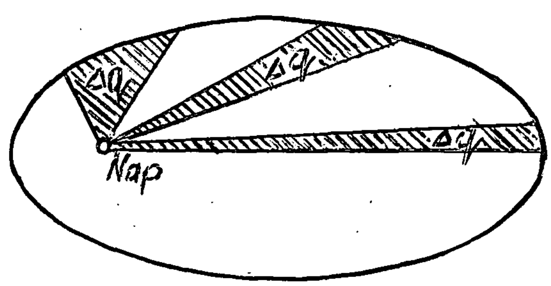
d/. K e p l e r   f e l ü l e t i   t é t e l e

Azokat az erőket,amelyek vektoregyenese mindig egy meghatározott ponton,a centrumon megy keresztül centrális erőnek nevezzük.A kérdéses erő nagysága tetszőlegesen változhat.

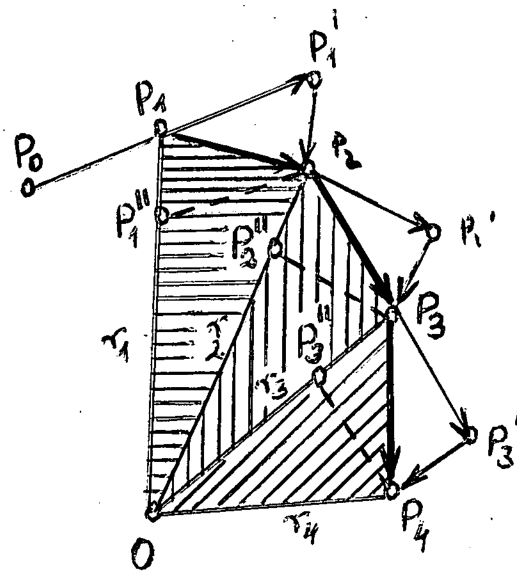
Azokat a mozgásokat amelyeket centrális erő létesit,azaz gyorsulásuk mindig a centrum felé vagy éppen ellentétes irányba mutat centrális mozgásnak nevezzük.

A bolygók centrális mozgást végezve,olyan ellipszispályákon keringenek,amelyeknek egyik gyujtópontjában a Nap áll.A bolygó pillanatnyi helyzetét a Nappal összekötő egyenes szakaszt vezérsugárnak nevezzük.

Tegyük fel,hogy a bolygó tömegközéppontja a vonzó O centrumtól r_1 távolságra levő P_1 helyre v_1 sebességgel érkezik.Ha nem volna vonzó erő,akkor tehetetlensége következtében az igen kicsinek választott időegység alatt P_1' helyre jutna.A vonzás miatt azonban az időegység végére P_2 -be jut,ahol sebessége v_2 ,s ezen időegység alatt az r_1 vezérsugár az ábrán vizszintesen vonalkázott területet surol.Ha nem volna vonzó erő,akkor a bolygó tömegközéppontja tehetetlensége következtében a második időegység végére P_2' helyre jutna.A vonzás miatt azonban a második időegység végére P_3-ba jut,ahol sebessége v_3,s



ezen időegység alatt az r_2 vezérsugár függőlegesen vonalkázott területet surol. Ezen eljárást ismételve: a harmadik időegység végére P_4-ba jut a bolygó tömegközéppontja, ahol sebessége v_4, s ezen időegység alatt az r_3 vezérsugár ferdén vonalkázott területet surol, és igy tovább.



A kicsi időegység miatt a pályát megközelithetjük a $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \ldots$ elmozdulásokkal, amelyek arányosak a $P_1, P_2, P_3, \ldots$ pontokhoz tartozó $v_1, v_2, v_3, \ldots$ sebességekkel. A $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \ldots$ elmozdulásokat tekinthetjük a bolygó tehetetlenségéből eredő $\overrightarrow{P_1P_1'}, \overrightarrow{P_2P_2'}, \overrightarrow{P_3P_3'}, \ldots$ elmozdulások és a centrum felé mutató a vonzó erő okozta gyorsulással arányos vezérsugár irányu $\overrightarrow{P\,P}, \overrightarrow{P\,P}, \overrightarrow{P\,P}, \ldots$ elmozdulások eredőjének.

A rádiuszvektor által egyenlő időközök alatt surolt területek egyenlők, amely például az első és második időegységre a következőképpen látható be:

Egyrészt az OP_1P_2 és az OP_2P_2' háromszögek területe egyenlő, mert az egyenlő P_1P_2, P_2P_2' alapokra az O-ból huzott /az ábrán nem feltüntetett/ magasság közös.

Másrészt az OP_2P_2' és az OP_2P_3 háromszögek területe egyenlő, mert a paralelogramma-szerkesztés szerint $P_2'P_3$ párhuzamos a P_2O szakasszal, és igy az OP_2 közös alapra a P_2' és a P_3 pontokból huzott magasságok egyenlők.

Ezeket összevetve az OP_1P_2 háromszög vizszintesen vonalkázott területe egyenlő az OP_2P_3 háromszög függőlegesen vonalkázott területével.

A területek összehasonlitása az OP_2P_3 és OP_3P_4, OP_4P_5 és OP_5P_6, stb háromszögekre rendre megismételhető, ezért az egész pályára igaz Kepler felületi tétele, amely szerint a vezérsugár egyenlő időközök alatt egyenlő területeket surol.

e/. Az elektromos töltés megmaradásának tétele

Az elektromos töltés a természetben mindig az ugyneve-zett elemi töltés,az elektron töltésének egész számu több-szöröseként fordul elő.Elektrontöbblet /negativ töltés/ valamely testen kisérleti tapasztalat szerint csak ugy hoz-ható létre,ha ugyanakkor egy másik testen az elektrontöbb-lettel egyenlő mennyiségü elektronhiány /pozitiv töltés/ keletkezik.Sok kisérleti tapasztalat által igazolt tény, hogy töltéseket nem lehet előállitani,hanem csak különbö-ző előjelü töltéseket lehet egymástól stétválasztani.Ezen tény viszont már a töltés megmaradásának tételét jelenti, amely szerint: zárt rendszerben az elektromos töltések al-gebrai összege állandó.

A töltés megmaradásának tételét matematikai alakban megkaphatjuk,ha figyelembe vesszük,hogy egy zárt felület által körülhatárolt térrészben az elektromos töltés annak következtében változik,hogy a térfogatot határoló felüle-ten az időegység alatt beáramló és kiáramló töltés mennyi-sége nem egyforma.Az elektromos töltés időegységre eső változását megkapjuk,ha az áramsürüséget összegezzük a térfogatot határoló felületre,azaz:

$$\oint_A \vec{J}\, dA = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \varrho\, dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial t}\varrho\, dV \quad ,\text{ahol } \varrho$$

a térbeli töltéssürüség.Az egyenlet baloldalát a Gauss-té-tel segitségével átalakithatjuk:

$$\oint_A \vec{J}\, dA = \int_V \operatorname{div} \vec{J}\, dV$$

Mivel ez az összefüggés tetszés szerinti térfogatra igaz, következik,hogy

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Azaz a töltés megmaradásának tételét a $\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ ala-ku kontinuitási egyenlettel is kifejezhetjük.

f/. K i r c h h o f f c s o m ó p o n t t ö r v é n y e

A stacionárius elektromágneses térben a sztatikushoz hasonlóan az elektromos töltéssürüség az időtől független $/\partial\rho/\partial t = 0$ /,de időben állandó /stacionárius/ elektromos áram van.Az elektromos töltés megmaradását kifejező $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0$ kontinuitási egyenlet $\operatorname{div}\vec{J} = 0$ alaku lesz,ami azt jelenti,hogy a stacionárius áram forrás mentes: áramvonalainak nincs forrásuk./ Áramforrások,azaz olyan anyagi rendszerek,amelyek bizonyos fizikai és kémiai változások segitségével fenntartják a stacionárius áramot természetesen vannak./

Vizsgáljuk összefüggő lineáris vezetők rendszerének olyan pontját,amelyben n számu vezető találkozik.Vegyük körül zárt F felülettel a találkozási pontot és integráljuk a kontinuitási egyenletet a felület által körülzárt térfogatra.Mivel a felületi integrál F-nek csak azon részein különbözik zérustól,amelyekben F egy-egy lineáris vezetőt metsz,elegendő csupán $\sum_{i=1}^{n} F_i$-re integrálnunk /F_i az i-edik vezető keresztmetszete,$\vec{I_i}$ a benne folyó áram erőssége/ ami tagonként végezhető:

$$\int_V \operatorname{div}\vec{J}\,dV = \oint_F \vec{J}\,d\vec{F} = \vec{I_1} + \vec{I_2} + \ldots + \vec{I_i} + \ldots + \vec{I_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{I_i}$$

Mivel $\operatorname{div}\vec{J}$ értéke zérus, $\sum_{i=1}^{n} \vec{I_i} = 0.$

Ez Kirchhoff csomóponttörvénye: adott elágazási pontban találkozó áramok erősségének összege zérus.Ha a csomópontban találkozó n-1 számu vezetőn folyó áram erősségét ismerjük az n-edik tehát kiszámitható.

g/.A t é t e l e k k ö z é p i s k o l a i t á r g y a l á s á r ó l

A 10235/2 raktári számu jelenleg rendszeresitett tankönyv a mechanikai energia megmaradásának törvényét a konzervativ erő fogalmának mellőzésével tárgyalja,bizonyitásként a szabadon eső test mechanikai energiáit öszszegzi a jellemző helyzetekben.A tétel megfogalmazása csak a nehézségi és a rugalmassági erő surlódásmentes hatásaira terjed ki.A megfogalmazás nem általános volta előirt /nyugvó/ felületen vagy görbén való mozgásnál /kényszererők esetén/ akadálya lehet a megmaradási tétel alkalmazásának. Például surlódásmentes ingalengésekre is érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele,mert csak a tömegpontra ható szabaderők eredőjének kell konzervativ erőnek lennie,ugyanis a kényszererő a pályára merőleges lévén nem végez munkát.A kidolgozott feladat hasznos eszköze az egyes jelenségek több oldalról való bemutatásának,a lezárt tanitási módszer elleni küzdelemnek.

Az impulzus megmaradásának törvényét a felhasznált fogalmak tökéletes meghatározásával,valamint két kizérleti eszközön elvégezendő /egyik kvalitativ,a másik kvantitativ/ kisérlettel vezeti be.A tényleges bizonyitás a fentiekben alkalmazott módszerrel történik,azzal az eltéréssel,hogy a rendszer eredő impulzusa zérus / ez a kisérletekhez való kapcsolás miatt szükséges/ és csak két tömegpontra történik meg a részletezés / didaktikai okokból ez indoklt is,mert az egyes lépések jobban követhetők,másrészt a tétel fizikai tartalma igy is hiánytalanul tárgyalható/. Összeségében a törvény jelentőségének megfelelő a tankönyv által nyujtott ismeretanyag,ami a 10235 raktári számu közelmultban használatos tankönyvhöz viszonyitva didaktikai fejlődésen tul a megjegyzések rovatában az egységes fizikai szemlélet kialakitása szempontjából fontos értelmezését adja a megmaradási tételnek,mig a kidolgozott feladatok között a különböző irányu sebességek alkalmazása alapvető hiányt pótol /a tanulók feladatmegoldási gyakorlata a sebesség vektor jellegét gyakran figyelmen kivül hagyta/.

Bernoulli egyenletének bizonyitását csak olvasmánynak szánt feldolgozásban tárgyalja,érvényességének feltételeit meg sem emlitve.A bizonyitás tagoltsága a 10335 raktári számu közelmultban használatos tankönyvhöz viszonyitva egyrészt fejlődés a sztatikus nyomás és a mozgási energia meghatározásának részletezése miatt,másrészt viszont a kinetikai energia tételének kulcsfontosságu szerepét nem emeli ki eléggé.A törvény kvalitativ tárgyalását bőséges mennyiségü gyakorlati probléma felvetésével teszi teljessé.Sajnálatos,hogy a kvantitativ tárgyalást követő megjegyzésekben nem került sor a Bernoulli egyenlet és az energia megmaradás törvénye közötti kapcsolat vizsgálatára.A 10335 raktári számu tankönyvhöz képest ez negativum,mert az még megemliti a folyadék mozgási energiájának a nyomási energiával való kapcsolatát.Mindkét tankönyvben a Bernoulli egyenlet változatlan szintkülönbségre van bizonyitva,ezért a helyzeti energia esetleges változása fel sem merül.

A 10335/1 raktári számu jelenleg rendszeresitett tankönyv hasonlóan a közelmultban használatos 10335 raktári számu tankönyvhöz Kepler felületi tételét a bolygók mozgástörvényei között mint tapasztalati uton talált törvényt tárgyalja.Egyrészt ez természetes,mivel a középiskolai tananyagban nem szerepel az impulzusmomentum megmaradásának tétele.Másrészt viszont érthetetlen,hogy gyakorlati alkalmazásként /például feladatok/ a bolygók sebességének naptávolban és napközelben történő kvalitativ összehasonlitásánál egyik tankönyv sem merészkedik távolabbra.

A 10435 raktári számu jelenleg rendszeresitett tankönyv az elektromos töltés megmaradásának tételét meg sem emliti,pedig egyrészt oka Kirchhoff csomóponttörvényének /megtiltja,hogy a hálózat bármely pontján töltések halmozódjanak fel/ másrészt a tankönyv elektrosztatikai feladatai között van olyan,amelynek megoldása igényli a töltés megmaradási tétel ismeretét.A tétel jelentősége megérdemelné minimálisan annak megemlitését,hogy töltéseket nem lehet előállitani,hanem csak a különböző előjelü töltéseket lehet egymástól szétválasztani.Az Oktatási Minisztérium gimnáziumok számára kiadott irányitó tanmenete is javasolja a töltésmegmaradás törvényének megbeszélését.

Kirchhoff csomóponttörvényét két párhuzamosan kapcsolt ellenálláson végzett mérőkisérlettel vezeti be,amelynek eredményét n számu párhuzamosan kapcsolt fogyasztó esetére általánositja.Párhuzamosan kapcsolt fogyasztók eredő ellenállásának meghatározására /a tankönyv itt tárgyalja a tételt/ elegendő főágra és mellékágakra kimondani a törvényt,de általános alkalmazhatósága és fizikai tartalma is gyengül ezáltal./Ez a megfogalmazási mód a csomópontba befolyó áramirányt csak egyetlen vezetőn engedélyez/.Feladatmegoldásmál /a tankönyv tartalmaz vegyes kapcsolásokból felépitett áramköröket/ ezen tárgyalási mód miatt szükséges a törvény átfogalmazása.

IV. KIDOLGOZOTT FELADATOK

1/. A part felé 0,05 $\frac{m}{s}$ sebességgel közlekedő 200 kg tömegü csónakból 70 kg tömegü ember ugrik ki, a partra 2 $\frac{m}{s}$ sebességgel. Milyen irányban és mekkora sebességgel mozog a csónak az ember kiugrása után ?

A megadott mennyiségek:

$m_1 = 200$ kg
$m_2 = 70$ kg
$v_1 = 0{,}05\ \frac{m}{s}$
$v_2 = 0{,}05\ \frac{m}{s}$
$u_2 = 2\ \frac{m}{s}$

A meghatározandó mennyiség:

A csónak sebessége, az ember kiugrása után; $u_1 = ?$

A csónakból és az emberből álló rendszerre érvényes az impulzus megmaradásának tétele: $I_1 + I_2 = I_1' + I_2'$ azaz, $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$, ebből u -et kifejezve:

$$u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 u_2}{m_1}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$u_1 = \frac{200\ kg.0{,}05\frac{m}{s} + 70\ kg.0{,}05\frac{m}{s} - 70\ kg.2\frac{m}{s}}{200\ kg} = -\ 0{,}63\ \frac{m}{s}$$

A csónak sebessége azért negativ, mert a kiugró ember impulzusa nagyobb, mint amekkora a rendszer impulzusa volt az ugrás előtt.

Tehát 0,63 $\frac{m}{s}$ sebességgel fog mozogni a csónak az eredeti irányával ellentétes irányba.

2/. A 240 kg tömegü csónak 2 $\frac{m}{s}$ állandó sebességgel halad. Mekkora sebességgel ugrott ki a 60 kg tömegü ember, ha emiatt a csónak éppen megállt ?

A megadott mennyiségek:

$m_1 = 240$ kg
$m_2 = 60$ kg
$v_1 = 2\ \frac{m}{s}$
$v_2 = 2\ \frac{m}{s}$
$u_1 = 0\ \frac{m}{s}$

A meghatározandó mennyiség:

A sebesség amellyel az ember kiugrott a csónakból; $u_2 = ?$

A csónakból és az emberből állórendszerre érvényes az impulzus megmaradásának tétele.

A rendszer teljes impulzusát az ember magával vitte.

$I_1 + I_2 = I_2'$ azaz, $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_2 u_2$, amelyből u_2-t kifejezve:

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$u_2 = \frac{240\ kg \cdot 2\ \frac{m}{s} + 60\ kg \cdot 2\ \frac{m}{s}}{60\ kg} = 10\ \frac{m}{s}$$

Az ember 10 $\frac{m}{s}$ sebességgel ugrott ki a csónakból.

3/. Egy löveg csövének és a vele együtt mozgó szerelvényeknek a tömege 500 kg. A 20 kg tömegü lövedék 300 $\frac{m}{s}$ sebességgel hagyja el a csövet. Mekkora lesz a hátrafutó cső sebessége ?

A megadptt mennyiségek:

$m_1 = 20$ kg

$m_2 = 480$ kg

$v_1 = 0\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 0\ \frac{m}{s}$

$u_1 = 300\ \frac{m}{s}$

A meghatározandó mennyiség:

A löveg csövének sebessége; $u_2 = ?$

A löveg csöve, a szerelvények és a lövedék zárt rendszert alkot, ezért érvényes az impulzus megmaradásának tétele.

A lövés előtt a rendszerbe tartozó minden test nyugalomban van, ezért az eredő impulzus zérus. $0 = I_1' + I_2'$ azaz

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = 0 \quad \text{amelyből:}$$

$$u_2 = \frac{-m_1 u_1}{m_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$u_2 = \frac{-20\ kg \cdot 300\ \frac{m}{s}}{480\ kg} = -12{,}5\ \frac{m}{s}$$

A negativ előjel mutatja, hogy a lövedékkel ellentétes i-

rányba mozdul el a cső.
A cső,a szerelvénnyel együtt 12,5 $\frac{m}{s}$ sebességgel fut hátra.

4/. Egy csónak a benne levő emberrel együtt mozdulatlanul áll a tó vizén.Mennyire mozdul el a csónak,ha az ember átmegy a csónak egyik végéből a másikba ? Az ember tömege m,acsónak tömege M,a csónak hossza l .A viz ellenállásától eltekintünk.

A megadott mennyiségek:

m

M

l

A meghatározandó mennyiség:

A csónak elmozdulása; s = ?

A csónakból és az emberből álló rendszerre érvényes az impulzus megmaradásának tétele.A nyugalomban lévő rendszer impulzusa zérus.A csónak mozgásának ideje legyen t,és megegyezik az ember mozgásának idejével.Ezért a sebességek:

$$v_{cs} = \frac{s}{t}, \qquad v_e = \frac{l}{t}$$

A megmaradási tétel:

$$mv_e + /M + m/.v_{cs} = 0$$

$$m\frac{l}{t} + /M + m/\frac{s}{t} = 0$$

Az elmozdulást kifejezve:

$$s = \frac{-ml}{M + m}$$

A negativ előjel azt mutatja,hogy a csónak az emberrel ellentétes irányba mozdul el.

5/.Állóvizben két csónak egyenletesen halad egymás felé.Sebességük külön-külön 0,6 $\frac{m}{s}$ .Amikor egymás mellé érnek az egyikről a másikra 60 kg tömegü testet tesznek át.Ezután a másik csónak eredeti irányában 0,4 $\frac{m}{s}$ sebességgel halad tovább.Mekkora ennek a második csónaknak a tömege, ha a viz ellenállását elhanyagoljuk ?

A megadott mennyiségek:

$m = 60$ kg
$v_2 = 0,6 \frac{m}{s}$
$v_1 = -0,6 \frac{m}{s}$
$u_2 = 0,4 \frac{m}{s}$
A meghatározandó mennyiség:
A második csónak tömege; $M = ?$
A jelenség tulajdonképpen nem más, mint az egyik csónakból áttett 60 kg tömegü test tökéletesen rugalmatlan ütközése az M tömegü másik csónakkal. Ha testet nem dobták, hanem tették a másik csónakba /például ugy, hogy miközben a két csónak elhaladt egymás mellett, valaki, aki az első csónakban oldalt kihajolva tartotta a testet, ezt elengedve, beleejtette a másik csónakba/, akkor a testnek az állóvizhez képesti sebessége megegyezett az első csónak sebességével. A külső erőhatástól mentes rugalmatlan ütközésre is érvényes az impulzusok összegének a megmaradása, ami az m testből és az M tömegü csónakból álló rendszerre felirva a következő alaku:

$$mv_1 + Mv_2 = /m + M/u_2$$ ebből M-et kifejezve:

$$M = \frac{m/v_1 - u_2/}{u_2 - v_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$M = \frac{60\ \text{kg}/-0,6 \frac{m}{s} - 0,4 \frac{m}{s}/}{0,4 \frac{m}{s} - 0,6 \frac{m}{s}} = 300\text{kg}$$

Tehát a csónak tömege 300 kg.

6/.[x] Két párhuzamos menetirányu csónak jön egymással szembe. Mikor a csónakok egymás mellett vannak, mindegyikből egy egy 50 kg tömegü zsákot dobnak át, a másikba. Ennek következtében az első csónak megáll, mig a második $8,5 \frac{m}{s}$ sebességgel tovább halad az eredeti irányban. Mekkora volt a csónakoknak a sebessége a zsákok kicserélése előtt, ha a csónakok tömege teherrel 500 kg illetve 1000 kg ?
A megadott mennyiségek:
$m_1 = 500$ kg
$m_2 = 1000$ kg

$m = 50\ kg$
$u_1 = 0\ \frac{m}{s}$
$u = 8{,}5\ \frac{m}{s}$
A meghatározandó mennyiségek:
A csónakok sebessége a zsákok kicserélése előtt; $v_1 = ?$
$v_2 = ?$
Érvényes az impulzus megmaradásának tétele az 1 és 2 jelü csónakra külön-külön, ami a zsákok átdobása előtti és utáni időpontokra felirva:
1-es jelü csónakra: $m_1 v_1 - m\ v_1 + m v_2 = m_1 u_1$
2-es jelü csónakra: $m_2 v_2 - m\ v_2 + m\ v_1 = m_2 u_2$
Ez a kétismeretlenes egyenletrendszer megoldva:
/Célszerü a két egyenletet összeadni, másrészt felhasználni, hogy problémánk az indexszám felcserélésére invariáns./

$$v_1 = \frac{u_1 m_1 /m_2 - m/ - m\ m_2 u_2}{m_1 m_2 - m/m_1 + m_2/} \quad \text{és}$$

$$v_2 = \frac{u_2 m_2 /m_1 - m/ - m\ m_1 u_1}{m_1 m_2 - m/m_1 + m_2/}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_1 = \frac{0\frac{m}{s}.500\ kg/1000\ kg-50\ kg/-50\ kg.1000\ kg.8{,}5\ \frac{m}{s}}{500\ kg.1000\ kg-50\ kg/1000\ kg + 500\ kg/} = -1\ \frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{8{,}5\ \frac{m}{s}\ 1000\ kg/500\ kg-50\ kg/-50\ kg.500\ kg.0\ \frac{m}{s}}{500\ kg.1000\ kg-50\ kg/1000\ kg + 500\ kg/} = 9\ \frac{m}{s}$$

A negativ előjel azt mutatja, hogy a csónakok egymással szembe mozogtak.

7/.[x] Három egyforma, M tömegü csónak halad egymás sodrában /egymás mögött/, egyforma v sebességgel. A középső csónakból a középső csónakhoz viszonyitott u sebességgel m tömegü terhet dobnak egyidejüleg az elülső és a hátulsó csónakba is. Mekkora a csónakok sebessége a terhek átdobása után ?
A megadott mennyiségek:
M
m
v

u

A meghatározandó mennyiségek:

A csónakok sebessége a terhek átdobása után; $v_1 = ?$

$v_2 = ?$

$v_3 = ?$

A csónakokat rendre 1,2,3 jelöléssel ellátva felirjuk az impulzusok összegét az átdobás előtti és utáni időpontra csónakonként:

1-es jelü csónakra: $m/v + u/ + Mv = /M + m/v_1$ azaz

$$v_1 = \frac{m/v + u/ + Mv}{M + m}$$

2-es jelü csónakra: $m/u-v/ - m/u+v/ + Mv = /M-2m/v_2$ azaz

$$v_2 = v$$

3-as jelü csónakra: $-m/u-v/ + Mv = /M + m/v_3$ azaz

$$v_3 = \frac{m/v - u/ + Mv}{M + m}$$

8/. 50 kg tömegü tanuló 15 kg tömegü kocsin áll. Mekkora sebességgel halad hátra a kocsi, ha atanuló 1,5 $\frac{m}{s}$ sebességgel lefut róla ?

A megadott mennyiségek:

$m_1 = 50$ kg

$m_2 = 15$ kg

$v_1 = 1,5 \frac{m}{s}$

A meghatározandó mennyiség:

A kocsi sebessége a tanuló lefutása után; $v_2 = ?$

A kocsiból és a tanulóból álló rendszerre érvényes az impulzus megmaradásának tétele. A futás előtt a rendszerbe tartozó minden test nyugalomban volt, ezért az eredő impulzus zérus.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \text{ , ebből: } v_2 = \frac{-m_1 v_1}{m_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_2 = \frac{-50 \text{ kg} \cdot 1,5 \frac{m}{s}}{15 \text{ kg}} = -5 \frac{m}{s}$$

A negativ előjel mutatja, hogy a tanulóval ellentétes irányba mozdul el a kocsi.

9/. Megfelelően hajlitott lejtőről vizszintesen irányuló $3\frac{m}{s}$ sebességgel m tömegü test csuszik rá a nyugalomban levő 2m tömegü kiskocsi lapjára. A kocsi a talajon ellenállás nélkül mozoghat.

a/. Mekkora sebességet ér el a kiskocsi, ha elég hosszu ahhoz, hogy a test a kocsiról ne csusszék le ?

b/. Mekkora sebességet ér el a kiskocsi, ha a test a kiskocsit a kocsihoz viszonyitott $1{,}2\,\frac{m}{s}$ sebességgel hagyja el ?

A megadott mennyiségek:

$v = 3$

$u = 1{,}2\,\frac{m}{s}$

m

$M = 2m$

A meghatározandó mennyiségek:

Mindkét esetben a kiskocsi sebessége; $v_k = ?$

a/, Ha a test a kocsiról nem csuszik le, az azt jelenti, hogy a kocsival közös sebességet ér el /a jelenség lényegében "lassitott" rugalmatlan ütközés/. Az impulzus megmaradásának tételét felirva a csuszás előtti és utáni időpontokra: $mv = /m + M/v_k$, amelyből:

$$v_k = \frac{mv}{m + M}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_k = \frac{m.3\,\frac{m}{s}}{m + 2m} = 1\,\frac{m}{s}$$

b/. Ha a test a v_k sebességgel haladó kocsit /kocsihoz viszonyitott/ u sebességgel hagyja el, akkor sebessége v_k+u. Az impulzus megmaradásának tételét felirva a csuszás előtti és a kocsi elhagyása utáni időpontokra:

$$mv = m/v_k + u/ + Mv_k \text{ amelyből:}$$

$$v_k = \frac{m/v-u/}{m + M}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_k = \frac{m/3\,\frac{m}{s} - 1{,}2\,\frac{m}{s}/}{m + 2m} = 0{,}6\,\frac{m}{s}$$

A "b" esetben azért lesz kisebb a kocsi sebessége, mert a teher a kocsi elhagyásakor az impulzus $m/v_k + u/$ nagyságu részét magával viszi.

10/.[x] A 10 kg tömegü lövedék a vizszintessel 30 -os szöget bezáró irányban 240 $\frac{m}{s}$ sebességgel hagyja el az ágyu torkolatát. Pályájának legmagasabb pontján a lövedék két részre robban szét. Az egyik, egy 4 kg-os darab, éppen a robbanás helye alatt, függőlegesen zuhan le a földre. A másik darab sebességének iránya robbanás közben nem változik meg. Hol csapodna be ez a második darab, ha nem lenne légellenállás ?

A megadott mennyiségek:

$m_1 = 4$ kg
$m_2 = 6$ kg
$\alpha = 30^o$
$v_o = 240 \frac{m}{s}$
$g = 10 \frac{m}{s^2}$

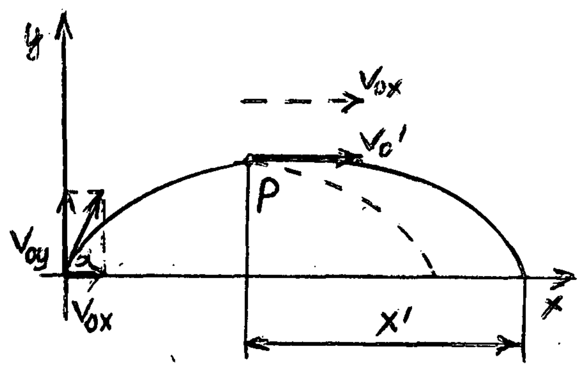
A meghatározandó mennyiség:

A lövedék becsapódási helyének az ágyutól mért távolsága;
$l = ?$

A lövedék a pálya tetőpontjáig a ferde hajitás törvényei szerint mozog.

Bevezetve a $v_{ox} = v_o \cos\alpha$
$v_{oy} = v_o \sin\alpha$

jelöléseket, az ábra, illetve a hajitás törvényei alapján: a lövedék helyét illetve a sebességét meghatározó összefüggések:



$$x = v_{ox} t \qquad v_x = v_{ox}$$
$$y = v_{oy} t - \frac{g}{2} t^2 \qquad v_y = v_{oy} - gt$$

Ezekből a tetőpont /P/ helyének koordinátái:

$$x = \frac{v.v}{g} \quad ; \quad y = \frac{v}{2g}$$

A tetőponton, a robbanás előtt a lövedék sebességének komponensei: $v_x = v_{ox}$; $v_y = 0$

A robbanás következtében a lövedék m_1 tömegü részének sebessége zérusra csökken, a másik /m_2 tömegü/ rész sebessége megnövekszik. A robbanás közben csak belső erők müködnek, ezért az impulzus megmaradásának tétele alkalmazható: $/m_1 + m_2/v_{ox} = m_2 v_o'$ ebből az m_2 tömegü rész robbanás utáni v_o' sebessége:

$$v_o' = \frac{m_1 + m_2}{m_2} v_{ox}$$

Ennek a résznek a mozgása a továbbiakban v_o' kezdősebességü vizszintes hajitás. A test t' idő alatt a P ponttól vizszintes irányban $x' = v_o' t'$ távolságra jut, függőlegesen pedig $-y' = \frac{g}{2} t'^2$ mélyre süllyed. A becsapódás szintjéig zuhanva:

$$-y' = y_P = \frac{v_{oy}^2}{2g}$$

Ebből a vizszintes hajitás időtartama kiszámitható: $t' = \frac{v_{ox}}{g}$

A hajitás vizszintes távolsága: $x' = \frac{v_o' v_{oy}}{g} = \frac{m_1 + m_2}{m_2 g} v_{ox} v_{oy}$.

A lövedékrész becsapodási helyének az ágyutól mért távolsága:

$$l = x_P + x' = \frac{v_{ox} v_{oy}}{g} + \frac{m_1 + m_2}{m_2 g} v_{ox} v_{oy} = \frac{m_1 + 2m_2}{m_2} \frac{v_{ox} v_{oy}}{g}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$l = \frac{4\ kg + 12\ kg}{6\ kg} \frac{208 \frac{m}{s} . 120 \frac{m}{s}}{10} = 6656\ m$$

11/^{x}. Az 1000 m magasan lebegő léggönbről 80 kg tömegü bombát ejtenek le. A bomba 600 m esés után két részre robban szét. Az egyik, 30 kg tömegü rész a robbanás pillanatában vizszintes irányban 200 $\frac{m}{s}$ sebességet kap. Ha eltekintünk a légellenállástól, hol éri el a talajt a másik rész ?

A megadott mennyiségek:

$h_1 = 600$ m
$h_2 = 400$ m
$m_1 = 30$ kg
$m_2 = 50$ kg
$v_1 = 200\ \frac{m}{s}$
$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A becsapodási pont vizszintes távolsága a léggömbtől; s = ?

A bomba h_1 uton szabadon esik, felgyorsul, és $\sqrt{2gh_1}$ függőlegesen lefelé mutató sebességre tesz szert. A robbanás közben csak belső erők müködnek, és ezek hatására a két repesznek csak vizszintes irányu sebessége változik meg /zérusról $-v_1$-re, illetve v_2-re/. Az impulzus megmaradásának tétele alapján:

$$m_1/-v_1/ + m_2 v_2 = 0 \text{ ,amelyből: } v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$$

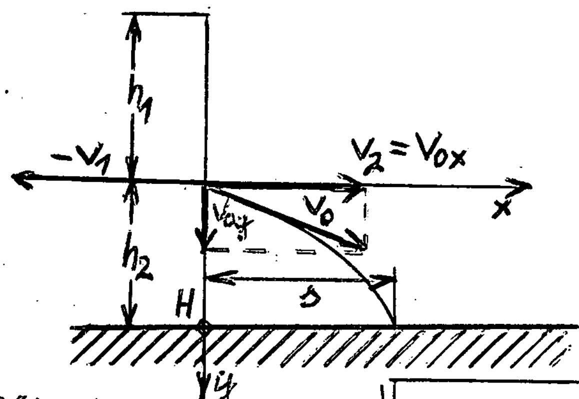
Az m tömegü rész mozgása ferde hajitás lesz, amelynek v_o kezdősebessége depressziószöget zár be a vizszintessel.

A kezdősebesség összetevői:

$$v_{ox} = v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$$

$$v_{oy} = \sqrt{2gh_1}$$

A repesz pillanatnyi helyét meghatározó összefüggések az ábrán jelölt koordinátarendszerben:



$x = v_{ox}t$

$y = v_{oy}t + \frac{g}{2}t^2$

Mivel a repesz h_2 mélységben ér földet: $y = h_2$ igy a $\frac{g}{2}t^2 + v_{oy}t - h_2 = 0$

összefüggésből a hajitás időtartama:

$$t = \frac{-2v_{oy} \pm \sqrt{4v_{oy}^2 + 8h_2 g}}{2g}$$

ahol t csak pozitiv lehet, ezért:

$$t = \frac{-2v_{oy} + \sqrt{4v_{oy}^2 + 8h_2 g}}{2g}$$

amelyből:

$$t = \frac{-v_{oy} + \sqrt{v_{oy}^2 + 2h_2 g}}{g}$$

A becsapódási pont távolsága az A ponttól:

$$s = v_{ox}t = \frac{m_1 v_1}{m_2 g}/\sqrt{v_{oy}^2 + 2h_2 g} - v_{oy}/ = \frac{m_1 v_1}{m_2 g}/\sqrt{2g/h_1 + h_2/} - \sqrt{2gh_1}/$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$s = \frac{30\ kg.200\ \frac{m}{s}}{50\ kg.10\ \frac{m}{s^2}} / \sqrt{2.10\ \frac{m}{s^2}.1000\ m} - \sqrt{2.10\frac{m}{s^2}600\ m} / = 400\ m$$

12/. Mekkora magasságra emelkedik az $50\frac{m}{s}$ kezdősebességgel függőlegesen felrepitett test ?

A megadott mennyiségek:

$v = 50\frac{m}{s}$

$g = 10\frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A hajitás magassága; h = ?

A mozgás kezdetén a testnek $W_m = \frac{1}{2}\ m\ v^2$ mozgási energiája van,helyzeti energiája $W_h = 0$. Emelkedés közben csökken a test sebessége és ezzel mozgási energiája,helyzeti energiája viszont növekszik.A tetőponton $W_m = 0$ és $W_h = mgh$. A gravitációs erőtér konzervativ,érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$W_m + W_h = W_m' + W_h' \quad \text{azaz}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh\ \text{,amelyből:}\ h = \frac{v^2}{2g}$$

Az ismert adatokkal:

$$h = \frac{/50\ \frac{m}{s}/^2}{2.10\frac{m}{s^2}} = 125\ m$$

Látható,hogy a hajitás magassága független a test tömegétől.

13/. Milyen magasra tudjuk függőlegesen felhajitani a 0,5 m hosszu zsinegen 180 percenkénti fordulatszámmal körpályán forgatott követ ?

A megadott mennyiségek:

$r = 0,5\ m$

$n = 180\ \frac{1}{min} = 3\ \frac{1}{s}$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

a hajitás magassága; h = ?

A zsineget a legkedvezőbb időpillanatban elengedve / a zsineg vizszintes helyzeteiből az,amelyben a sebesség vektor felfelé mutat/ a 12-es feladatban tárgyalt problémát kapjuk.

A kő kerületi sebessége: $v = 2\pi rn$,ezzel $h = \frac{v^2}{2g} = \frac{4\pi^2 r^2 n^2}{2g}$

Az ismert mennyiségekkel: $h = \frac{4 \cdot 3{,}14^2/0{,}5\ m/^2 \cdot /3\frac{1}{s}/^2}{2 \cdot 10\ \frac{m}{s^2}} = 4{,}5\ m$

14/. Milyen magasságban lesz egyenlő a függőlegesen felhajitott test helyzeti és mozgási energiája.?

A megadott mennyiségek:

v

g

A meghatározandó mennyiség:

A feltételben szereplő magasság; $h' = ?$

A feltételünk szerint:

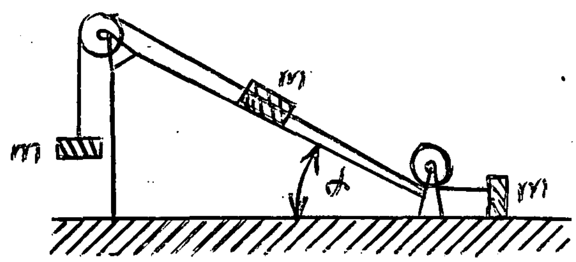
$$mgh' = \frac{1}{2} mv^2$$

A gravitációs erőtér konzervativ,érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh' + \frac{1}{2} mv'^2 \text{ ebből}$$

és a feltételből: $h' = \frac{1}{4} \frac{v}{g}$

15/. Határozzuk meg a rajzon látható rendszer gyorsulását,ha a surlódástól eltekintünk !



A megadott mennyiségek:

m

g

A meghatározandó mennyiség:

A rendszer gyorsulása; a = ?

A kötél nyujthatatlansága miatt mindhárom test gyorsulása a.Mivel a surlódástól eltekintünk érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele.

A függőlegesen mozgó test s uton mgs helyzeti energiát veszit,ez részben mozgási energiává alakul /mindhárom testnek lesz/ részben a lejtőn mozgó test helyzeti energiáját növeli mgssinα értékkel:

$$mgs = mgs.\sin\alpha + \frac{3mv^2}{2}$$

Felhasználva,hogy állandó erők hatnak,tehát a mozgás egyenletesen gyorsuló:

$$v^2 = 2as \quad ,\text{behelyettesitve:}$$

$$g = g.\sin\alpha + 3a \quad \text{ebből:}$$

$$a = g\,\frac{1 - \sin\alpha}{3}$$

16/. Egy ejtőernyős süllyedési sebessége 8 $\frac{m}{s}$.Milyen magas falról leugorva gyakorolhatják az ejtőernyősjelöltek a földre való megérkezést ?

A megadott mennyiségek:

$v = 8\ \frac{m}{s}$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A fal magassága; h = ?

A megérkezés olyan magas falról gyakorolható,hogy azonos végsebességet /a falról való ugrást szabadesésnek tekintjük/ érjenek el mint ejtőernyővel való érkezéskor. Szabadesést feltételezve érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele:az ejtőernyősjelöltek helyzeti energiája alakul át mozgási energiává.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad ,\text{amelyből:}$$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$h = \frac{/8\ \frac{m}{s}/^2}{2.10\ \frac{m}{s^2}} = 3{,}2\ m$$

A megoldás független a tömegtől,ezért a gyakorlást mindegyikük azonos magasságból végezheti.

17/. Csigán átvetett fonál két oldalán 10 kg illetve 15 kg tömegü testek függnek.Az utóbbi a talaj felett 75 cm magasságban.A csiga és a fonál tömege,surlódása és a közegellenállás elhanyagolható.Mekkora sebességre gyorsul fel a rendszer ?

A megadott mennyiségek:

$m_1 = 10$ kg

$m_2 = 15$ kg
$h = 0,75$ m
$g = 10 \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A rendszer sebessége mikor az m tömeg a talajhoz ér; v = ?

A mechanikai energia megmaradásának tétele értelmében a keletkezett mozgási energiákat a helyzeti energia csökkenése fedezi /sőt az m_1 testnek a helyzeti energiája is nővekedett/:

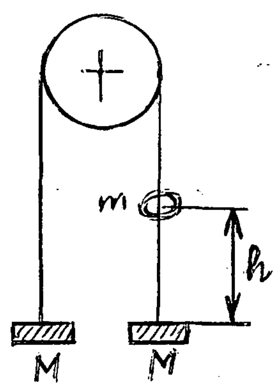
$$m_2gh - m_1gh = \frac{1}{2} m_1v^2 + \frac{1}{2} m_2v^2 \quad \text{ebből:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2gh/m_2-m_1/}{m_1 + m_2}}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{\frac{2.10 \frac{m}{s^2} 0,75\ m/15\ kg - 10\ kg/}{10\ kg + 15\ kg}} \approx 1,75 \frac{m}{s}$$

18/. Az ábrán látható ideális csigán egy-egy M tömegü suly álló helyzetben egyensulyt tart. A t=0 időpillanatban h magasságból a jobboldali sulyra $m = \frac{2}{7}M$ tömegü sulyt ejtünk. Mennyi idő mulva fog a baloldali suly h magasságra emelkedni, ha ütközés tökéletesen rugalmatlan és gyakorlatilag elhanyagolható idő alatt történik ?



A megadott mennyiségek:

M
$m = \frac{2}{7}M$
h
g

A meghatározandó mennyiség:

A kérdéses helyzetváltozáshoz szükséges idő; t = ?

A csiga ideális volta miatt annak tehetetlenségi nyomatéka, a kötél sulya, az esetleges surlódás, stb. elhanyagolható, ezért érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele és a csiga forgási energiájától eltekinthetünk.

A találkozás pillanatáig m szabadesést végez. A végsebessége a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_1^2 \qquad \text{ebből :} \qquad v_1 = \sqrt{2gh}$$

A h ut megtétele után elért v sebesség az ut megtételéhez szükséges t idő segitségével kifejezve: v = gt ,amelyet a szabadesésre érvényes összefüggéssel összehasonlitva az idő meghatározására felhasználhatunk:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Az ütközést közvetlenül megelőző és közvetlenül követő pillanatokra alkalmazva az impulzus megmaradásának tételét:

$$\frac{2}{7} Mv_1 = \left(\frac{2}{7} M + 2M \right) v_2 \text{ ,ebből: } v_2 = \frac{v_1}{8} = \frac{\sqrt{2gh}}{8}$$

Az ütközés után a jobboldali tulsuly, $\frac{2}{7}$ Mg erő hatására a $\frac{16}{7}$ M tömegü rendszer v_2 kezdősebességgel gyorsuló mozgást végez, ahol a gyorsulás a dinamika alaptörvénye szerint:

$$a = \frac{\frac{2}{7} Mg}{\frac{16}{7} M} = \frac{g}{8}$$

Ha a h utat t idő alatt teszi meg, akkor $h = v_2 t_2 + \frac{a}{2} t_2^2$

azaz $h = \frac{\sqrt{2hg}}{8} t_2 + \frac{g}{16} t_2^2$,amelyből:

$g t_2^2 + 2\sqrt{2hg} \cdot t_2 - 16h = 0$ másodfoku egyenlet pozitiv gyöke:

$$t = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A negativ gyök, azt az időtartamot jelenti, amellyel az ütközési pillanat előtt lett volna h a testek távolsága az ütközés helyétől, ha az ütközés előtt is az

$$s = \frac{\sqrt{2sg}}{8} t + \frac{g}{16} t^2$$ egyenlet által leirt módon történt volna a mozgás.

A keresett idő:

$$t = t_1 + t_2 = 3\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Látható, hogy a keresett idő független a tömegektől, de azok arányától nem.

19/. Surlódásmentes asztallapon fekvő M tömegü téglatest egy csigán átvetett fonál segitségével m tömegü testhez van kötve, amely h magasságban függ a földfelszin felett. Mekkora sebességre tesz szert a két test ? A csiga tömege surlódása, a fonál tömege és a közegellenállás elhanyagolható.

A megadott mennyiségek:

m

M

h

g

A meghatározandó mennyiség:

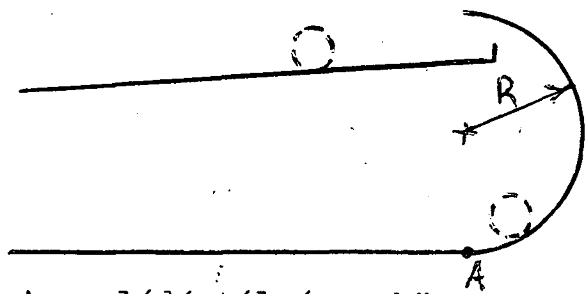
A rendszer sebessége mikor az m tömeg a talajhoz ér; v = ?

Mivel nincs surlódás és közegellenállás alkalmazható a mechanikai energia megmaradásának tétele. A helyzeti energia csökkenése egyenlő a talajszintnél elért mozgási energiával.

$$mgh = \frac{1}{2} /m = M/v^2 \quad \text{ebből: } v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + M}}$$

A megvalósitás feltétele, hogy kezdetben a fonál vizszintes szakasza nagyobb legyen mint h.

20/. Tekepálya vége az ábrán látható módon van kiképezve. Igy a tekegolyók visszajutnak a dobóhelyre. Mekkora sebességgel kell az A pontba jutnia a golyónak, hogy feljusson a visszavezető csatornába. Itt a forditó görbületi sugara 1 m. A surlódástól és a közegellenállástól tekintsünk el.



A megadott mennyiségek:

R = 1 m

$g = 10 \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

Az érkező golyó sebessége; $v = ?$
Alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét
A 2R magasságba való felemelkedéshez szükséges helyzeti energiát az érkező golyó mozgási energiájának kell fedeznie:

$$mg2R = \frac{1}{2} mv^2 \text{ ,ebből: } v = \sqrt{4gR}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{4 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \cdot 1\ m} = 6{,}32 \frac{m}{s}$$

21/ˣ. Mekkora függőleges irányu sebességet kell adnunk egy vizszintes,l hosszuságu,kifeszitett fonál végén levő testnek,hogy az a körpálya középpontjába /a felfüggesztési pontba/ essék ?
A megadott mennyiségek:
l
g
A meghatározandó mennyiség:
A sebesség,amellyel inditanunk kell a testet; $v_0 = ?$
Elegendő azt az esetet vizsgálni,amikor felfelé inditjuk a fonál végén levő testet,mert lefelé inditva az alsó félkör megtétele után azonos sebességgel indulna felfelé a másik oldalon.
A körmozgást fenntartó centripetális erő a fonál feszitő erejének és a sulyerő fonálirányu komponensének az eredője.A mozgás során a sulyerő fonálirányu komponense növekszik,a centripetális erő csökken /a sulyerő érintőirányu komponense lassitja a körmozgást/,tehát a fonál feszitő ereje csökken.Amikor a sulyerő fonálirányu komponense eléri a centripetális erő értékét a fonál feszitő ereje zérus.Tehát a fonál meglazul és a felfüggesztési ponton való áthaladás előtt nem fog megfeszülni,mert a vizszintes sebességkomponens állandó marad,mig a függőleges még erősebben csökken.
Ha a kezdősebesség v_0,és a fonál ellazulása pillanatában a sebesség v, a fonálnak a vzszintessel bezárt szöge α, akkor a centripetális erő és a sulyerő fonálirányu komponensének egyenlőségét

$$\frac{mv^2}{l} = mg.\sin\alpha \qquad /1/$$

alakban irhatjuk fel.
A mechanikai energia megmaradásának tételét felirva az inditás és a ferde hajitás kezdeti pillanataira:

$$\frac{mv_o^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + mgl.\sin\alpha \qquad /2/$$

A ferde hajitás utképletei adatainkkal:

$$l.\cos\alpha = tv.\sin\alpha \qquad /3/$$

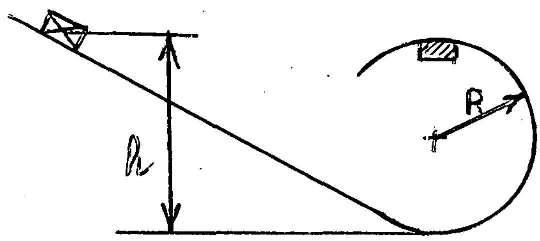
$$l.\sin\alpha = g\frac{t^2}{2} - tv.\cos\alpha \qquad /4/$$

/1/-ből és /2/-ből álló egyenletrendszerből v^2 -et és $\sin\alpha$ -t kifejezve, a /3/-ból kifejezett t-vel együtt /4/-be behelyettesitve nyerjük a végeredményt:

$$v_o = \sqrt{lg\sqrt{3}}$$

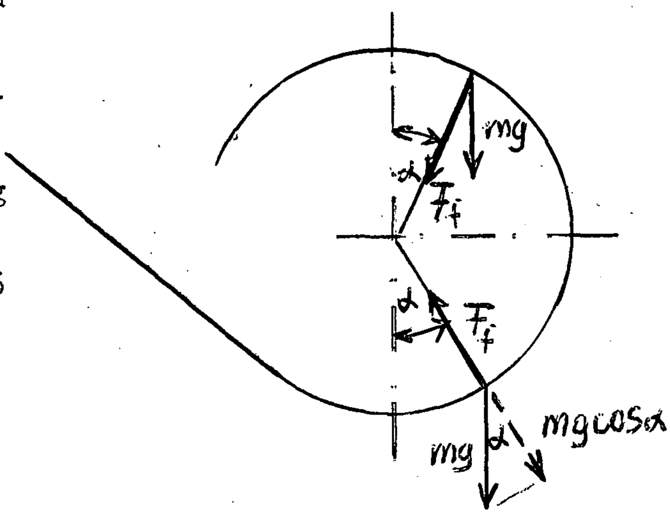
Tehát ekkora sebességgel kell inditanunk a testet, hogy a felfüggesztési ponton haladjon keresztül.

22/[x]. Lejtő lemezből hajlitott függőleges sikban fekvő R sugaru körpályában folytatódik. A lejtőről h magasságból kisméretü test csuszik le. Mekkora h esetén fog a test a körpálya belső felületén végigcsuszni ? /Az egész pályán eltekinthetünk a surlódástól/



A megadott mennyiségek:
R
m
g
A meghatározandó mennyiség:
Az inditás magassága; h = ?
Amig a test a körpálya belső felületén csuszik, R sugaru körpályán mozog. A centripetális erőt a pálya felülete által a testre kifejtett nyomóerő, valamint a testre ható nehézségi erőnek a pályára merőleges összetevője együttesen szolgáltatja. Ha α -val jelöljük azt a szöget, amelyet

a körpályán mozgó testhez huzott sugár a függőleges-sel alkot,akkor a nehézségi erőnek a pályára merőleges $mg.\cos\alpha$ összetevője /a körpálya alsó felében/ ellentétes irányu a pálya által a testre kifejtett nyomóerővel,mig a felső felében egyező irányu.Igy a pálya alsó felében:



$$F_{ny} - mg.\cos\alpha = m \frac{v^2}{R}$$

a pálya felső felében:

$$F_{ny} + mg.\cos\alpha = m \frac{v^2}{R}$$

Azt,hogy a test rajta marad a körpálya belső felületén az fejezi ki,hogy $F \geq 0$ /A felület nyomóerőt fejt ki a testre/ Ez a körpálya alsó felében biztosan teljesül.A körpálya felső felében akkor teljesül,ha $mg.\cos\alpha = m \frac{v^2}{R}$

Ez a körpálya legfelső pontjában,ahol $\alpha = 0^o$ / $\cos\alpha = 1$ / szintén teljesül,ha $mg \leq m \frac{v^2}{R}$,azaz $v^2 \geq Rg$

Mivel a surlódástól eltekinthetünk alkalmazható a mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgh - mg2R \text{ ,amelyből: } v^2 = g/2h - 4R/$$

Igy $v^2 \geq Rg$,ha $2h - 4R \geq R$,azaz $h \geq \frac{5}{2} R$

23/^{x}. Egy kör keresztmetszetü csapból függőleges irányban állandó sebességgel örvénymentesen viz folyik.Adjuk meg a vizoszlop átmérőjét a csaptól való távolság függvényében !

A megadott mennyiségek:

D

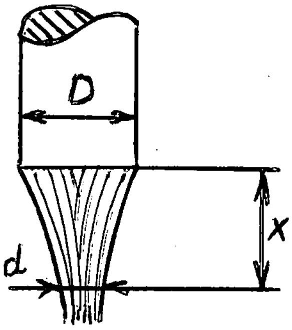
v_o

g

A meghatározandó mennyiség:

A vizoszlop átmérője; d = ?

Mivel a vizrészecskék közel szabadon esnek,a csaptól x távolságra lévő v sebességü cseppekre a mechanikai energia megmaradásának tétele felirható:



$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgx$,amelyből:

$v = \sqrt{v_o^2 + 2gx}$

Stacionárius áramlásról lévén szó $v_o q_o = vq$,vagyis :

$v_o\left(\frac{D}{2}\right)^2\pi = \sqrt{v_o^2 + 2gx}\left(\frac{d}{2}\right)^2\pi$ amiből:

$$d = \frac{D}{\sqrt[4]{1 + \frac{2gx}{v_o^2}}}$$

24/^{x}. Egy L hosszuságu surlódás nélküli kötél lecsuszik egy asztalról.A mozgás olyan nyugalmi helyzetből kezdődött, amelynél a lelogó rész hossza L_o volt.Határozzuk meg a kötél sebességét abban a pillanatban,mikor az utolsó rész éppen lecsuszik az ásztalról !

A megadott mennyiségek:

L

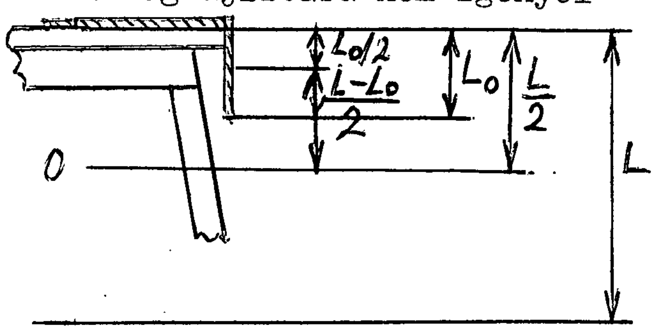
L_o

g

A meghatározandó mennyiség:

A kötél sebessége a teljes lecsuszás pillanatában ; v = ?

Mivel surlódás nincs és a kötél meghajlitása nem igényel munkavégzést,használhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét.Jelöljük a kötél vonalmenti sürüségét /hosszegységre vonatkoztatott tömeg/ ϱ -val.



Válasszuk a helyzeti energia zérus szintjét $\frac{L}{2}$ -vel az asztal szintje alatt. Induláskor a kötélnek csak helyzeti energiája van. Az asztalon levő rész tömege: $/L-Lo/\varrho$,helyzeti energiája pedig az $\frac{L}{2}$ magasság miatt: $/L - L_o/\varrho \frac{L}{2}$.

A másik rész helyzeti energiáját ugy számitjuk, mintha az a rész sulypontjában lenne egyesitve. E rész tömege: L_o ,a sulypont magassága pedig: $\frac{/L - L_o/}{2}$,helyzeti energiája tehát: $L_o \varrho g \frac{/L - L_o/}{2}$.

Amikor az utolsó rész lecsuszik az asztalról, a kötél sulypontja éppen $\frac{L}{2}$ -vel van az asztal alatt, vagyis a kötélnek ekkor nincs helyzeti energiája. A kötél helyzeti energiája mozgási energiává alakult, tehát:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} L \varrho v^2 = /L - L_o/ \varrho g \frac{L}{2} + L_o \varrho g \frac{/L - L_o/}{2}$$

amelyből:

$$v = \sqrt{\frac{L^2 - L_o^2}{Lg}}$$

A megvalósitás feltétele, hogy az asztal magassága nagyobb legyen L-nél.

25/^{x}. Egy L hosszuságu, sulyos, hajlékony kötél egy elhanyagolható tömegü, surlódásmentes csigán van átvetve ugy, hogy az egyik oldalon l_1 hosszuságu darabja lóg le. A kötelet elengedjük. Mennyi a kötél sebessége akkor, mikor az alsó kötélvég l távolságra van a csiga alatt ?

A megadott mennyiségek:

L

l_1

l

g

A meghatározandó mennyiség:

A kötél sebessége a kérdéses helyen; $v = ?$

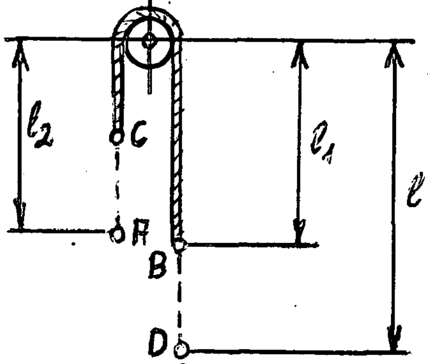
A probléma két részre bontható:

a/. A kötél még a csigán van a keresett esetben $/L > l/$

b/. A kötél már teljesen elhagyta a csigát a keresett esetben $/L<l/$

A kötél másik része $l_2 = L - l_1$. Legyen $l_1 > l_2$, akkor l_1, oldalán fog kötelünk a csigáról lecsuszni. Számitásainkban vegyük a kötél egységnyi hosszu darabját egységnyi tömegünek.

a/. Az ábrán látható, hogy induláskor a baloldali kötélvég A-ban, a jobboldali B-ben van. Amikor a kötél alsó vége l távolságnyira, D-be került, akkor felső vége C-be jutott. Lényegében az történt, hogy a kötél AC=BD= $l - l_1$ hosszuságu darabja AD= $l - l_2$ magasságából leesett. A helyzeti energia csökkenése $/l-l_1/g/l-l_2/$.



Az L tömegü kötél mozgási energiája $L\frac{v^2}{2}$. Alkalmazva a mechanikai energia megmaradásának tételét e két mennyiség egyenlő:

$$/l-l_1/g/l-l_2/ = L\frac{v^2}{2}$$

amelyből a keresett sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2g/l-l_1/./l-l_2/}{l_1 + l_2}}$$

b/. Ismét alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét.

A sulypont mélysége a csiga alatt induláskor:

$$\frac{\frac{1}{2}l_1 l_1 + \frac{1}{2}l_2 l_2}{L} = \frac{L^2 - 2l_1/L - l_1/}{2L}$$

A sulypont mélysége akkor, amikor az alsó kötélvég l mélységben van a csiga alatt:

$$l - \frac{L}{2}$$

Tehát a sulypont süllyedése:

$$l - \frac{L}{2} - \frac{L^2 - 2l_1/L - l_1/}{L} = l - L + \frac{l_1/L - l_1/}{L}$$

Ezt a távolságot szorozva a kötél Lg sulyával egyenlővé tesszük $\frac{Lv^2}{2}$ mozgási energiával:

$$lLg - L^2g + gl_1/L - l_1/ = \frac{Lv^2}{2}$$,ebből a keresett

sebesség:

$$v = \sqrt{2g/\,/l - L/ + \frac{l_1 . l_2}{l_1 + l_2}\,/}$$

26/. Egy 15 t tömegü, 3 $\frac{m}{s}$ sebességgel haladó vasuti kocsi ütközik és hozzákapcsolódik egy 10 t tömegü kocsihoz. Mekkora lesz a két kocsi közös sebessége, ha

a/. egyirányban haladva

b/. szembehaladva

kapcsolódnak össze ?

A megadott mennyiségek:

$m_1 = 15.10^3$ kg

$m_2 = 10.10^3$ kg

$v_1 = 3\ \frac{m}{s}$

$v_2 = 2\ \frac{m}{s}$

A meghatározandó mennyiség:

A közös sebesség az ütközés után; u = ?

Mivel az ütközés tartama alatt általában csak belső erők hatnak / a belső erők mellett az esetleges külső erők rendszerint elhanyagolhatók/ általában bármilyen /rugalmas, rugalmatlan, részben rugalmas/ ütközésnél érvényes az impulzus megmaradásának tétele.

A kocsik ütközése rugalmatlan, mert a két test közös sebességgel halad tovább.

$m_1v_1 + m_2v_2 = /m_1 + m_2/u$ -ból, az ütközés utáni közös sebesség:

$$u = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

A sebesség vektormennyiség ezért, ha m tömegü kocsi mozgásirányát választjuk pozitivnak, az ismert mennyiségekkel:

a/.

$$u = \frac{15.10^3 kg.3\ \frac{m}{s} + 10.10^3 kg.2\ \frac{m}{s}}{15.10^3 kg + 10.10^3 kg} = 2,6\ \frac{m}{s}$$

b/.

$$u = \frac{15.10^3 kg.3\ \frac{m}{s} - 10.10^3 kg.2\ \frac{m}{s}}{15.10^3 kg + 10.10^3 kg} = 1\ \frac{m}{s}$$

Tehát mindkét esetben az m_1 tömegü kocsi eredeti irányába haladnak tovább.

27/. [x] Az m_1 tömegü, v_1 sebességgel haladó golyó az m_2 tömegü nyugvó golyóba centrálisan ütközik. Számitsuk ki a golyók ütközés utáni sebességét, ha az ütközés tökéletesen rugalmas!

A megadott mennyiségek:

m_1

m_2

v_1

$v_2 = 0$

A meghatározandó mennyiségek:

A golyók ütközés utáni sebességei; $u_1 = ?$

$u_2 = ?$

Az ütközések közül azt az ideális határesetet nevezzük tökéletesen rugalmas ütközésnek, amely ütközés során a rendszert alkotó testek mozgási energiájának összege állandó marad.

Az impulzus megmaradásának tétele miatt:

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad /1/$$

A mozgási energia megmaradása miatt:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \qquad /2/$$

Az /1/ és /2/ egyenleteinket átalakitva:

$$m_1/v_1 - u_1/ = m_2 u_2 \qquad /3/$$

$$m_1/v_1^2 - u_1^2/ = m_2 u_2^2 \qquad /4/$$

/4/-et /3/-mal elosztva:

$$v_1 + u_1 = u_2 \qquad /5/$$

/3/-ból:

$$v_1 - u_1 = \frac{m_2}{m_1} u_2 \qquad /6/$$

/5/ és /6/ összeadásával és kivonásával:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad ; \quad u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \; .$$

28/. [x] Az m_1 tömegü, v_1 sebességü golyó centrálisan ütközik m_2 tömegü, v_2 sebességü golyóval. Számitsuk ki a golyók ütközés utáni sebességét, ha az ütközés tökéletesen rugalmas!

A megadott mennyiségek:

m_1

m_2

v_1

v_2

A meghatározandó mennyiségek:

A golyók ütközés utáni sebességei; $u_1 = ?$
$u_2 = ?$

Az impulzus megmaradásának tétele miatt:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \qquad /1/$$

A mozgási energia megmaradása miatt:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad /2/$$

/1/ és /2/ egyenleteinket átalakitva:

$$m_1/v_1 - u_1/ = m_2/v_2 - u_2/ \qquad /3/$$

$$m_1/v_1^2 - u_1^2/ = m_2/v_2^2 - u_2^2/ \qquad /4/$$

/4/-et /3/-mal elosztva:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \text{ azaz } v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \qquad /5/$$

/5/-ből és /3/-ból az ütközés utáni sebességek:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + M_2} v_2$$

$$u_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Látható, hogy az ütközés utáni sebesség az indexszám felcserélésére invariáns.

29/x. Mutassuk meg, hogy tökéletesen rugalmas ütközés esetén az ütközésben részt vevő testek rugalmas ütközése közben egymáshoz viszonyitott /relativ/ sebessége állandó marad.

A megadott mennyiségek:

m_1

m_2

v_1

v
A meghatározandó mennyiség:
Az ütközés utáni relativ sebesség; $u_2 - u_1 = ?$
Feltételeink azonosak a 28.feladat feltételeivel,ezért annak /5/ egyenletéből:

$$v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \text{ vagyis: } v = u$$

Ez azt jelenti,hogy a testek az ütközés után olyan sebességgel távolodnak egymástól,amilyen sebességgel ütközés előtt közelednek egymás felé.

30/. 4 m átmérőjü,belül üres félgömb átellenes felső pontjairól 3 kg-os és 2 kg-os tömegeket egyszerre engedünk el.Hogyan mozognak ütközésük után,ha a surlódás elhanyagolható és ütközésük teljesen rugalmatlan ?
A megadott mennyiségek:
$r = 2$ m
$m_1 = 2$ kg
$m_2 = 3$ kg
A meghatározandó mennyiségek:
A két tömeg emelkedésének közös magassága; $h = ?$
Mindkét tömeg a gravitációs erő hatására,a gömbfelület által előirt körpályán mozog: ütközésig ellentétes irányba,ütközés után az m kezdeti irányával azonos irányba, mert impulzusa m -nek nagyobb.
A két test leérkezési sebessége közös,csak ellentétes irányu,amelynek nagyságát a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva kaphatjuk:

$$mgr = \frac{mv^2}{2} \quad \text{azaz} \quad v = \sqrt{2gr}$$

Mint látható a leérkezési sebesség független a test tömegétől.
Az ütközésük utáni sebességet az impulzus megmaradásának tételéből kaphatjuk:

$$m_2 v - m_1 v = /m_1 + m_2/u \quad \text{azaz} \quad u = \frac{/m_2 - m_1/v}{m_1 + m_2}$$

Ütközés után az együttes tömeg továbbra is a gömbfelület által előirt körpályán mozog és h magasságig emelkedik,amelynek nagyságát a mechaniaki energia megmaradásának tételét alkalmazva kaphatjuk:

$$\frac{m_1 + m_2}{2} u^2 = /m_1 + m_2/gh$$ ebből az u se-

besség figyelembevételével:

$$h = \frac{/m_2 - m_1/^2 v_2^2}{2g/m_1 + m_2/^2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}^2 r$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$h = \left(\frac{3\ kg - 2\ kg}{3\ kg + 2\ kg}\right)^2 2\ m = 0{,}08\ m$$

31/.[x] A ballisztikus ingát lövedék sebességének meghatározására használják.Müködésének az az alapelve,hogy a lövedék,amelynek a sebességét meg akarjuk mérni az inga testébe ütközik.Ha az ütközési feltételek,s az inga tömege ismertek,akkor az inga kitérési szöge alapján kiszámitható a lövedék ütközés előtti v sebessége.Számitsuk ki a következő esetekben,feltéve,hogy az ingát l hosszuságu matematikai ingának tekinthetjük:

a/. a lövedék megakad az ingában

b/. a lövedék v' sebességgel visszapattan

c/. a lövedék sebességét elveszitve leesik

A megadott mennyiségek:

m = lövedék tömege

M = inga tömege

l

g

v'

α

A meghatározandó mennyiség:

A lövedék ütközés előtti sebessége; v = ?

a/. A lövedék becsapódása rugalmatlan ütközésnek tekinthető.Az M tömegü inga kezdeti sebessége zérus,igy az impulzus megmaradásának tétele szerint:

/Mivel a lövedék megakad az ingában,ütközés után a lövedék és az inga sebessége közös: u /

$$mv = /m + M/u \quad \text{ebből:} \quad u = \frac{m}{m + M} v \qquad /1/$$

Az ütközéskor az inga és a becspódott lövedék együttes mozgási energiája: $\frac{1}{2}/m + M/u^2$ a kilengés folyamán helyzeti energiává alakul.

$$\frac{1}{2}/m + M/ \frac{m^2}{/m + M/^2} v^2 = /m + M/g/l-l.\cos\alpha/$$

amelyből:

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl/1-\cos\alpha/} = 2 \frac{m + M}{m}/\sin\frac{\alpha}{2}/\sqrt{lg}$$

b/.Feltételezve,hogy az "ütközés" olyan rövid ideig tart,hogy ezalatt az inga nyugalmi helyzetéhez képest érdemben nem mozdul el,akkor ugy számolhatunk,hogy az ütközés alatt csak belső erők /a lövedék és az inga között fellépő erők/ hatnak.Tehát érvényes az impulzus megmaradásának tétele:

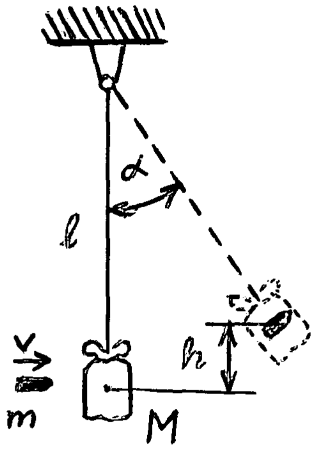
$$mv = Mu + mv' \quad \text{ebből:} \quad u = \frac{m}{M}/v - v'/ \qquad /2/$$

Az inga mozgási energiája:

$\frac{1}{2}Mu^2$ a kilengés folyamán helyzeti energiává alakul.

$\frac{1}{2}Mu^2 = Mgh$ ./2/-öt ebbe beirva,az ábra jelöléseit alkalmazva:

$$\frac{1}{2} \frac{m^2}{M^2} /v - v'/^2 = gl/1-\cos\alpha/$$



ebből:

$$v = \frac{2M\sqrt{lg}\,\sin\frac{\alpha}{2} + mv}{m}$$

c/. A "b" eset speciális esetének tekinthető,ahol v = 0

Ezért:

$$v = \frac{2M\ lg\ \sin\alpha}{m}$$

32/. Milyen magas dombra tud feljutni a kerékpáros,ha 36 $\frac{km}{h}$ sebességgel halad,és a domb alján abbahagyja a hajtást ? Milyen magasra jut fel,ha maga mellé ülteti 45 kp sulyu barátját ?/A surlódástól és a közegellenállástól eltekintünk/

A megadott mennyiségek:

$v = 10 \frac{m}{s}$

$g = 10 \frac{m}{s^2}$
$G = 45$ kp
A meghatározandó mennyiség:
A domb magassága amire mindkét esetben fel tud jutni a kerékpáros; $h = ?$
A feltételek biztositotta ideális körülmények miatt alkalmazható a mechaniaki energia megmaradásának tétele. A kerékpáros mozgási energiája helyzeti energiává alakul

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = mgh \quad \text{ebből:} \quad h = \frac{v^2}{2g}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$h = \frac{(10 \frac{m}{s})^2}{2.10 \frac{m}{s^2}} = 5 \text{ m}$$

Látható, hogy az elérhető szintkülönbség független a tömegtől, ezért a magasság mindkét esetben azonos.

33/^{x}. Egy 50 kg tömegü kerék vizszintes talajon gurul, majd a hozzá csatlakozó 30^o-os hajlásszögü emelkedőn 30 m utat tesz meg. Ha a kerékkel azonos sebességgel haladó 50 kg-os tömeget akasztunk a kerék tengelyére, amikor a kerék az emelkedőhöz érkezik, az emelkedőn megtett ut 20 m-re csökken. Mekkora volt a kerék kezdősebessége, ha mechanikai energia értéke változatlan marad ?
A megadott mennyiségek:
$m = 50$ kg
$\alpha = 30^o$
$s_1 = 30$ m
$s_2 = 20$ m
$g = 10$
A meghatározandó mennyiség:
A kerék sebessége a vizszintes talajon; $v = ?$
Bevezetve $h_1 = s_1 \sin\alpha$, $h_2 = s_2 \sin\alpha$ jelöléseket felirhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét, amely szerint a kerék mozgási és forgási energiája helyzeti energiává alakul át a lejtőn való emelkedés befejeztéig:

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} \Theta \omega^2 = mgh_1$$

Illetve a tömeg felakasztása miatt a második esetben:

$\frac{1}{2}2mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 = 2mgh_2$

Alkalmazva $\omega = \frac{v}{r}$ helyettesitést /r a gördülőkör sugara/ és $2r^2$ -el mindkét egyenletet megszorozva:

$$mr^2v^2 + \Theta v^2 = 2mr^2gh_1 \qquad /1/$$

$$2mr^2v^2 + \Theta v^2 = 4mr^2gh_2 \qquad /2/$$

összefüggéseket kapjuk./2/-ből /1/-et kivonva v könnyen kifejezhető:

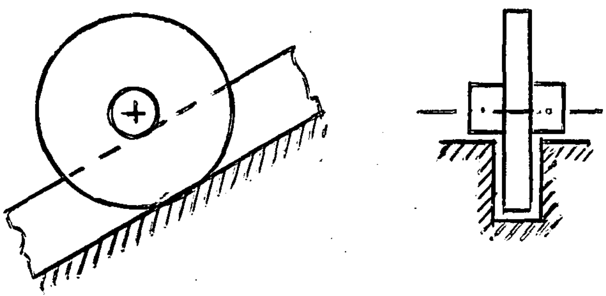
$$v = \sqrt{g/4h - 2h/}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{10\frac{m}{s^2}/40\ m - 30\ m/} = 10\frac{m}{s}$$

Ha v ismeretében kiszámitjuk a kerék tehetetlenségi nyomatékaát,amely $2mr^2$-nek adódik érdekes következtetéseket eszközölhetünk.

A kerületén koncentrált tömegü gyürü,a körhenger,a gömb tehetetlenségi nyomatékát mind $\Theta = kmr^2$ alakba irhatjuk, ahol k értékei rendre: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ .A k = 2 értékből következtetni lehet a kerék alakjára,mely arra a megállapitásra vezet,hogy a szóbanforgó kerék tömege nagyrészt a gördülőkörön kivül helyezkedik el.A mellékelt ábra mutatja a kerék és a lejtő kiképzésének egyik lehetséges alakját,elől és oldalnézetben.



34/^{x}. Egy 15 cm hosszu ceruzát hegyével az asztalra támasztva függőlegesen tartunk,majd elengedünk.Ugy dől el, hogy a hegy nem csuszik meg.Milyen sebességgel csapódik az asztalra a ceruza másik vége,ha a ceruza hegyén áthaladó,hosszára merőleges tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{3}ml^2$?

A megadott mennyiségek:

$l = 15$ cm

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$\Theta = \frac{1}{3} ml^2$

A meghatározandó mennyiség:
A ceruza végének sebessége az asztalra érkezéskor; $v = ?$

A ceruza eldőlése közben sulypontja $\frac{l}{2}$ -vel mélyebbre jut, ezért a ceruza helyzeti energiájának csökkenése: $mg\frac{l}{2}$ .A ceruza végpontja eldőlésekor a hegye körül forog.Ha az asztalhoz csapódáskor a forgás szögsebessége ω ,akkor az energia egyenlet,a mechanikai energia megmaradásának tételét felhasználva:

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 = mg\frac{l}{2} \quad \text{ebből:}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{\Theta}} = \sqrt{\frac{mgl}{\frac{1}{3}ml^2}} = \sqrt{\frac{3g}{l}}$$

A végpont sebessége:

$$v = l\omega = l\sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{3gl}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{3.10\frac{m}{s^2}.0,15\ m} = 2,12\frac{m}{s}$$

35/^{x}. Állandó keresztmetszetü,l hosszuságu,m tömegü,homogén rudat vizszintesen felfüggesztünk a két végén /A és B pontban/,sulytalan,rövid fonallal.

a/.Mekkora lesz a rudra ható "F_A" fonálerő abban a pillanatban,amikor B fonalat elégetjük ?

b/.Mekkora lesz a fonálerő amikor a rud az A pont függőlegesébe kerül ?

A megadott mennyiségek:

l

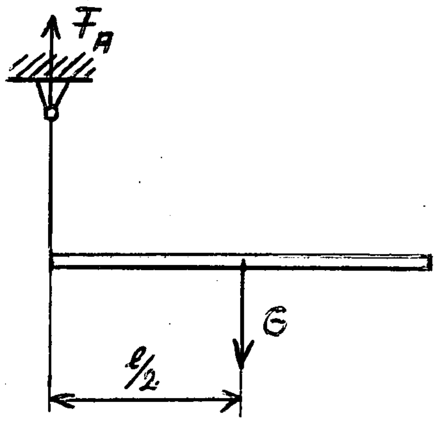
m

g

A meghatározandó mennyiség:
A fonálra ható erő a kérdéses időpillanatokban; $F_A = ?$

a/.A fonal elégetésének pillanatában a rudra két erő hat: a rud mg önsulya és a keresett F_A függőleges reakcióerő.A két erő eredője a sulypontot gyorsitja a dinamika alaptörvénye szerint:

$mg - F_A = ma$ /1/



A tartó mozgást is végez, ezért felirhatjuk,hogy a rud tehetetlenségi nyomatéka /Θ/ szorozva a szöggyorsulással /β/ egyenlő a forgatónyomatékkal: $\Theta\beta = mg\,\frac{l}{2}$ /2/

Figyelembe véve $\Theta = \frac{1}{3}ml^2$ és $\beta = \frac{a}{\frac{l}{2}} = \frac{2a}{l}$ összefüggéseket /2/ felirható $mg\frac{l}{2} = \frac{1}{3}\,ml^2\,\frac{2a}{l}$ alakban,ebből:

$a = \frac{4}{3}\,g$. A gyorsulás értékét behelyetesitve az /1/ egyenletbe: $F_A = \frac{mg}{4}$. Tehát az F_A reakcióerő az elégés pillanatában az eredeti érték felére,a rud sulyának negyedére csökken.

b/.Ha a rud függőleges helyzetbe kerül,az F_A a rud teljes sulyának és a ráható centripetális erőnek az összege lesz.

$$F_A = mg + \frac{mv_s^2}{\frac{l}{2}} = mg/\;1 + \frac{2v_s^2}{lg}\;/ \qquad /3/$$

A sulypont v_s sebességét a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva számithatjuk:

$$mg\frac{l}{2} = m\,\frac{v_s^2}{2} + \frac{\Theta_s\omega^2}{2} \qquad /4/$$

Ahol $\Theta_s = \frac{1}{12}\,ml^2$ és $\omega = \frac{2v_s}{l}$ figyelembevételével

/4/-ből: $v_s^2 = \frac{3}{4}\,gl$,ezt /3/-ba beirva:

$$F_A = mg/\;1 + \frac{2.\frac{3}{4}gl}{gl}\;/ = \frac{5}{2}\,mg.$$

Tehát az F_A reakcióerő 2,5-szeresére növekszik.

36/. Vizszintes tengely körül forgatható m tömegü,R sugaru korong kerületére csavart fonál végére m tömegü testet függesztünk,amely elengedésekor 0,9 m magasan van a talaj felett.Mekkora sebességgel éri el a test a talajt ? $/m = 2m_1/$

A megadott mennyiségek:

$h = 0{,}9$ m
$g = 10\ \frac{m}{s^2}$
m_1
R
$m = 2m_1$

A meghatározandó mennyiség:

m_1 tömeg sebessége a talaj elérésekor; v = ?

Az m_1 tömegü test m gh helyzeti energia csökkenése árán a fonálra függesztett testből és a korongból álló rendszer kinetikus energiához jut.Ha Θ a korong tehetetlenségi nyomatéka, ω pedig szögsebessége,felirva a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$m_1gh = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

A korong és a test kényszerkapcsolata miatt v = R /Az összekötő fonál miatt a test csak annyit eshet,amennyi fonál a korongról lecsavarodik/ felhasználásával:

$$m_1gh = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}/\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + m_1v^2/ =$$

$$= \frac{1}{2}/\frac{1}{2}mv^2 + m_1v^2/ \text{ amelyből: } v = \sqrt{2gh\frac{2m_1}{m+2m_1}}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{2.10\frac{m}{s^2}.0{,}9\ m.\frac{1}{2}} = 3\ \frac{m}{s}$$

Látható,hogy az elért sebesség független a korong sugarától,a tömegeknek is csak az arányától függ.

37/x. Egy M tömegü és r sugaru homogén hengerre sulytalan fonalat tekercselünk és a fonál szabad végét a mennyezeten rögzitjük.A henger surlódásmentesen csapágyazott,elhanyagolható átmérőjü tengelyére egy másik sulytalan fonál segitségével m tömegü testet függesztünk és a rendszert magára hagyjuk.Állapitsuk meg a testek gyorsulását és a fonalakban fellépő erőket.

A megadott mennyiségek:

M

r

m

g

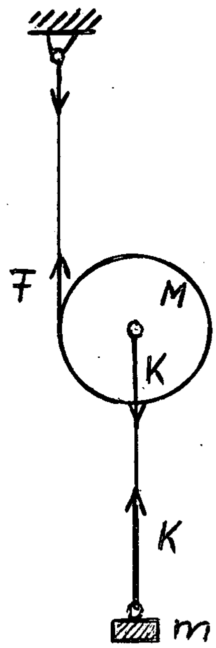
A meghatározandó mennyiségek:

M gyorsulása; $a_1 = ?$

m gyorsulása; $a_2 = ?$

A feltekercselt fonalban ébredő erő; $F_1 = ?$

Az m tömegü testet tartó fonalban ébredő erő; $F_2 = ?$



A mozgásegyenletek az m és M tömegü testek tömegközéppontjára, a dinamika alaptörvénye szerint:

$$Mg + F_2 - F_1 = Ma_1 \qquad /1/$$

$$mg + /-F_2/ = ma_2 \qquad /2/$$

Kényszerfeltétel a kötél nyujthatatlansága, ezért:

$$a_1 = a_2 = a$$

A gyorsulás meghatározása a mechanikai energia megmaradásának tételét felhasználva történhet.

A nyugalomból induló rendszer t idő alatt $h = \frac{a}{2}t^2$ utat tesz meg. Helyzeti energiának zérus szintjéül a t időpontban elfoglalt helyzetet választjuk. A rendszernek induláskor csak helyzeti energiája van.

A t időpontban a rendszer kinetikus energiája a henger forgási és mozgási valamint az m tömegü test mozgási energiájának összege.

A mechaniaki energia megmaradásának tétele:

$$/M + m/gh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 \qquad /3/$$

Az egyik kényszerfeltételt hallgatólagosan felhasználva $/ v_m = v_M = v /$, mig a tökéletes gördülés feltételéből a szögsebesség: $\omega = \frac{v}{r}$. Figyelembevéve még, hogy a henger tehetetlenségi nyomatéka: $\frac{1}{2}Mr^2$ a /3/ összefüggést v^2 -re rendezve:

$$v^2 = \frac{4/M + m/gh}{2m + 3M} \qquad /4/$$

A kezdősebesség nélküli gyorsuló mozgásra érvényes $v^2 = 2ah$ összefüggést /4/ -el összehasonlitva a gyorsulás:

$$a = \frac{2/m + M/g}{2m + 3M}$$

Ezt /1/ és /2/ egyenletbe behelyettesitve a fonalakban ébredő erők:

$$F_1 = \frac{M/m + M/g}{2m + 3M}$$

$$F_2 = \frac{mMg}{2m + 3M}$$

38/[x]. Vizszintes tengely körül forgatható m tömegü korongon átvetett fonál végére függesztett m ,m tömegü testek szintkülönbsége inditáskor 40 cm. Mekkora a korong szögsebessége akkor, amikor a két test azonos szintbe kerül, ha a korong sugara 10 cm és m = m valamint m = 2m ?

A megadott mennyiségek:

$h = 0{,}4$ m
$R = 0{,}1$ m
$g = 10 \frac{m}{s^2}$
$m_1 = m$
$m_2 = \frac{m}{2}$

A meghatározandó mennyiség:

A korong szögsebessége; $\omega = ?$

A két test ugy jut közös szintbe, hogy az m tömegü $\frac{h}{2}$ -vel süllyed, a másik ugyanennyivel emelkedik. E mozgás során a helyzeti energia $/m_1 > m_2/$ miatt/ $m_1\frac{gh}{2} - m_2\frac{gh}{2}$ -vel csökken, aminek árán a rendszer minden tagja kinetikus energiához jut. Felirhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$m_1\frac{gh}{2} - m_2\frac{gh}{2} = \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

A kényszerkapcsolat miatt $v_1 = v_2 = v$ és feltételezve, hogy a fonál nem csuszik meg $R\omega = v$.

$$(m_1 - m_2)\, g\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\left[\Theta\omega^2 + (m_1 + m_2)v^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2\omega^2 + (m_1 + m_2)R^2\omega^2\right] \text{ ebből:}$$

$$\omega^2 = \frac{2(m_1 - m_2)gh}{m + 2(m_1 + m_2)}\,\frac{1}{R^2} \quad \text{azaz} \quad \omega^2 = \frac{1}{4}\,\frac{gh}{R^2}$$

számitható tehát: $\omega = \frac{1}{2R}\sqrt{gh}$

Az ismert mennyiségekkel:

$$\omega = \frac{1}{2\cdot 0{,}1\ m}\sqrt{10\,\frac{m}{s^2}\,0{,}1\ m} = 10\ \frac{rad}{s}$$

39/. Mekkora sebességgel ér a 12 m hosszu, 30^o-os lejtő aljára a tetejéről csuszás nélkül legördülő hordó ?
/A gördülő ellenállástól eltekintünk;/

A megadott mennyiségek:

$l = 12$ m
$\alpha = 30^o$
$g = 10$

A meghatározandó mennyiség:

A hordó sebessége a lejtő aljára érkezéskor; $v = ?$

A gördülő mozgás ugy fogható fel, hogy a hordó tömegközéppontja haladó mozgást végez, ugyanakkor tömegközéppontja körül forog is.

A gördülő ellenállástól eltekintünk, ezért érvényes a mechanikai energia megmaradásának tétele.

A gördülő test kinetikus energiája a haladó mozgás /mozgási/ és a forgás /forgási/ energiájából tevődik össze:

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\omega^2 = mgh$$

A Θ tehetetlenségi nyomaték $\frac{1}{2}\,mr^2$, ahol r a hordó sugara, mig a csuszás nélküli gördülés azt jelenti, hogy a korong tömegközéppontjának v sebessége és a tömegközéppont körüli forgás szögsebessége között mindig fennáll a $v = r\omega$ összefüggés.

Ezeket, valamint a magasságra érvényes $h = l\cdot\sin\alpha$ öszszefüggést behelyettesitve:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\,\frac{v^2}{r^2} = mgl.\sin\alpha$$

látható,hogy független a hordó tömegétől:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}gl.\sin\alpha}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}\;10\frac{m}{s^2}12\ m\ \frac{1}{2}} = 8{,}94\,\frac{m}{s}$$

40/ˣ. Egy m tömegü,r sugaru,vékonyfalu cső α hajlásszögü lejtőn gurul lefelé.Mennyi lesz tengelyének a sebessége,ha a lejtőn az elindulástól számitva s utat tett meg ?

A megadott mennyiségek:

m

r

s

g

α

A meghatározandó mennyiség:

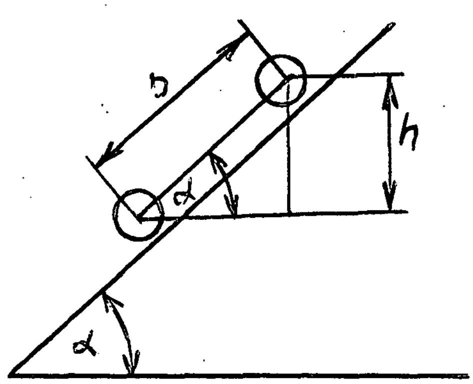
A cső sebessége; v = ?

A cső mozgását gördülő mozgásnak tekintve alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét:

$$mgh = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\omega^2$$

A függőlegesen megtett magasságkülönbség: h = s.sin

A forgás kerületi sebessége azonos a tengely haladási sebességével /nincs csuszás/ és kifejezhető $v = \omega r$ alakban.Ezeket felhasználva:



$$mgs.\sin\alpha = \frac{1}{2}\,mv^2 + \frac{1}{2}\,\Theta\,\frac{v^2}{r^2}$$

ebből a sebesség:

$$v = \sqrt{2gs.\sin\alpha \frac{1}{1 + \frac{\Theta}{m\,r^2}}}$$

A lejtőn végbemenő mozgás egyenletesen gyorsuló,mert állandó hajtóerő müködik.Hasonlitsuk össze eredményünket az a állandó gyorsulásu mozgásra érvényes sebességre vonatkozó összefüggéssel: $\sqrt{2as}$ .Az összehasonlitásból kitünik,hogy mozgásunk gyorsulása:

$$a = g.\sin\alpha \frac{1}{1 + \frac{\Theta}{mr^2}} .$$

Tehát a gördülő tárgy a lejtőn csökkentett gyorsulásu mozgást végez,a gyorsulása csökkenését a sin értéke és a g.sin mellett álló szorzó szabja meg.A tehetetlenségi nyomaték minden esetben arányos valamilyen módon a gördülő tárgy tömegével és a külső rádiuszának négyzetével. Ebből következik,hogy a nevezőben lévő $\frac{\Theta}{mr^2}$ tag csak a gördülő tárgy alakjától függ /homogén anyagnál/ de méretétől független.

A gördülő tárgy gyorsulását a lejtő hajlásszögén kivül a tárgy alakja szabja meg,de a tárgy mérete nem számit. Ha a tárgy rádiusza kisebb,akkor kisebbedik a tehetetlenségi nyomatéka,de a kisebb rádiusz miatt növekszik a tengely körüli forgásnak a szögsebessége,és ugyanannyi marad a forgásból származó kinetikai energiája.

Vékony falu cső esetében a tehetetlenségi nyomaték $\Theta = mr^2$ a gyorsulás $a = \frac{1}{2}g.\sin\alpha$ .Az s ut megtétele utáni sebesség: $v = \sqrt{2as} = \sqrt{gs.\sin\alpha}$

41/. 30^o-os lejtőn 10 cm,illetve 12,1 cm magasságból egyszerre inditunk R sugaru ,m tömegü golyókat.A lejtő aljától milyen távolságban érik egymást utol a golyók ?

A megadott mennyiségek:

$h_1 = 0{,}1$ m
$h_2 = 0{,}121$ m
m
R
$\alpha = 30^\circ$
$g = 10\,\frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:
A lejtő aljának és a golyók találkozási helyének távolsága; $x = ?$

A golyók a lejtőn t_1 illetve t_2 idő alatt érnek le v_1 illetve v_2 végsebességgel, és ezekkel a sebességekkel folytatják utjukat.

A golyók gördülésére a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva:

$$mgh_1 = \frac{1}{2}\Theta\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \qquad \text{és}$$

$$mgh_2 = \frac{1}{2}\Theta\omega_2^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad \text{-ből}$$

$v_1 = R\omega_1$, $v_2 = R\omega_2$ és $\Theta = \frac{2}{5}mR^2$ figyelembevételével:

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh_1} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{10}{7}gh_2}$$

A gördülések ideje:

$$t_1 = \frac{2h_1}{v_1 \cdot \sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7}{10}\frac{h_1}{g}}$$

$$t_2 = \frac{2h_2}{v_2 \cdot \sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7}{10}\frac{h_2}{g}}$$

A másik golyó t idő alatt utoléri az elsőt, ha

$$v_2 t = v_1 (t + t_2 - t_1) \qquad \text{vagyis}$$

$$t = \frac{v_1 (t_2 - t_1)}{v_2 - v_1} = \frac{v_1}{v_2 - v_1}\,\frac{2}{\sin\alpha}\left(\frac{h_2}{v_2} - \frac{h_1}{v_1}\right)$$

Az utolérésig megtett ut:

$$x = v_2 t = \frac{2}{\sin\alpha}\,\frac{h_2 v_1 - h_1 v_2}{v_2 - v_1} = \frac{2\sqrt{h_1 h_2}}{\sin\alpha}$$

Az utolérésig megtett ut; az ismert mennyiségekkel:

$$x = \frac{2\sqrt{0{,}1\ \text{m} \cdot 0{,}121\ \text{m}}}{\frac{1}{2}} = 0{,}44\ \text{m}$$

42/^{x}. Egy m tömegü, r sugaru gömb kezdősebesség nélkül, tisnta gördüléssel halad az R sugaru félhengerben. Mekkora erő nyomja a félhengert a legalsó pontjában ?

A megadott mennyiségek:

m
r
R

A meghatározandó mennyiség:

A henger legalsó pontjában ható nyomóerő; F = ?

A gömb a hengert saját sulyán kivül /henger legalsó pontjában/ a ráható centrifugális erővel is nyomja:

$$F = mg + \frac{mv^2}{R-r}$$

A centrifugális erő nevezőjében azért szerepel R-r, mert a sulypont ekkora sugaru pályán mozog.

A v sebességet a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva határozhatjuk meg:

$$mg/R-r/ = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

Figyelembe véve, hogy $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$ és $\omega = \frac{v}{r}$

$$mg/R-r/ = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}\, mv^2 \quad \text{azaz}$$

$$v^2 = \frac{10}{7}\,\frac{g/R-r/^2m}{/R-r/m} = \frac{10}{7}g/R-r/$$ ezért a nyomóerő képlete:

$$F = mg + \frac{10}{7}\,\frac{g/R-r/m}{R-r} = \frac{17}{7}mg$$ alaku lesz. Tehát a keresett nyomóerő a sulyerő $\frac{17}{7}$ szerese.

43/. Ha ismerjük a harmonikus rezgőmozgást végző test kitérését mint az idő függvényét, fejezzük ki a sebességet az idő függvényében !

A megadott mennyiség:

$x = A\sin\omega t$

A meghatározandó mennyiség:

A sebesség az idő függvényében; v = v/t/ = ?

A mechanikai energia megmaradásának tétele szerint:

$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2}kA^2$ ebből; $v_x^2 = \frac{k}{m}/A^2 - x^2/$ mivel $x = A\sin\omega t$

$$v_x^2 = \frac{k}{m} A^2/1-\sin^2\omega t/ = \frac{k}{m} A^2\cos^2\omega t \quad ,azaz$$

$$v_x = \sqrt{\frac{k}{m}} A \cos\omega t.$$

44/. Harmonikus rezgőmozgást végző rugó mekkora kitérésnél fog egyenlő mennyiségü kinetikus és potenciális energiával rendelkezni ?

A megadott mennyiség:

$x = A\sin\omega t$

A meghatározandó mennyiség:

Az a kitérés amelynél a két energia egyenlő; $x = ?$

A feltétel szerint:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_x^2$$

A mechanikai energia megmaradásának tételéből a 44-es feladat szerint:

$$v_x^2 = \frac{k}{m}/A^2 - x^2/ \quad ,ezt figyelembe véve:$$

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k/A^2-x^2/$$

$$kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \quad ,azaz a keresett kitérités:$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

45/.[x] Sulymérésre szolgáló rugós mérleg tányérját 160 pond erő nyomja össze egy cm-rel.Peckek megakadályozzák, hogy a tányér nyugalmi helyzeténél magasabbra kerüljön. A mérlegtányérra 50 cm magasságból 500 g-os tömeget ejtünk.Mi történik,ha a tányér tömege elhanyagolható ?

A megadott mennyiségek:

$F = 160$ pond

$s = 1$ cm

$h = 50$ cm

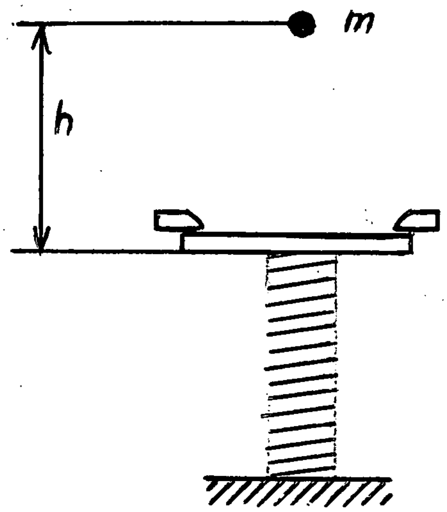
$m = 500$ g

A meghatározandó mennyiség:

A jelenség vizsgálata.

Először számitsuk ki,hogy mennyi energiája van összenyomott vagy kihuzott állapotban a rugónak.A rugóállandó $k=\frac{F}{s}$

ahol F az s kitéréshez tartozó rugóerő.Egyik végén rögzitett rugó másik végére erősitsünk egy m tömegü testet. Ezt a testet mozditsuk el x távolságra,majd hagyjuk magára.Ekkor a rendszer harmonikus rezgőmozgást fog végezni,melynek körfrekvenciája: $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$



A rezgés amplitudója x.Az x kitéréshez tartozó rugóenergia a mechanikai energia megmaradásának tétele miatt éppen egyenlő lesz a nulla kitéréshez tartozó mozgási energiával:

$\frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}m/x\omega/^2 = \frac{1}{2}k\ x^2$

A test ráesik a tányérra,a rugó összenyomódik,majd visszadobja a testet az eredeti magasságba,ugyanis a rugó nem tárolhat energiát /mert nincs tömege/ és az energiák öszszege állandó kell,hogy maradjon.

AZ m tömeg helyzeti energiáját h cm-rel a mérlegtányér nyugalmi helyzete felett vegyük zérónak.Ha a rugó maximális rövidülése x,a test energiája az eredeti helyzet alatt x + h mélységben -mg/h +x/ helyzeti energia.A rugónak ekkor $\frac{1}{2}kx^2$ energiája van.A két energia összege zérus,mert ennyi volt kezdetben a rendszer összes energiája:

$$-mg/h + x/ + \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

Ezen egyenlet pozitiv gyöke $x \approx 21,2$ cm ,vagyis a rugó maximálisan ennyivel nyomódik össze.

Mivel egy sulytalan rugó addig mozog,amig hossza nem éri el a nyugalmi hosszt,vagy amig külső erő hat rá,a feladatban nincs szükség a peckekre.

46/^{x}. Függőleges helyzetben alátámasztott 2 kp/cm direkciós erejü sulytalan rugóra annak szabad végétől 1,8 m magasságból 40 dkg tömegü testet ejtünk.Mekkora kezdősebességgel kell a testet elinditanunk,hogy a rugó 20 cm-rel összenyomódjék ? Hogyan módosul a megoldás,ha a rugó felső végén 50 dkg tömegü rugalmatlan teher van rögzitve ?

A megadott mennyiségek:

$k = 2000\ N/m$

$m = 0{,}4\ kg$

$h = 1{,}8\ m$

$h_o = 0{,}2\ m$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$M = 0{,}5\ kg$

A meghatározandó mennyiség:

Az m tömegü test kezdősebessége; v_o = ?

Ha a rugó felső végén nincs M tömeg,akkor az egész folyamatra alkalmazhatjuk a mechanikai energia megmaradásának tételét.Mivel egy,nyugalmi helyzetéhez viszonyitva h_o -lal összenyomott vagy megnyujtott rugó energiája $\frac{1}{2}kh_o^2$,azért

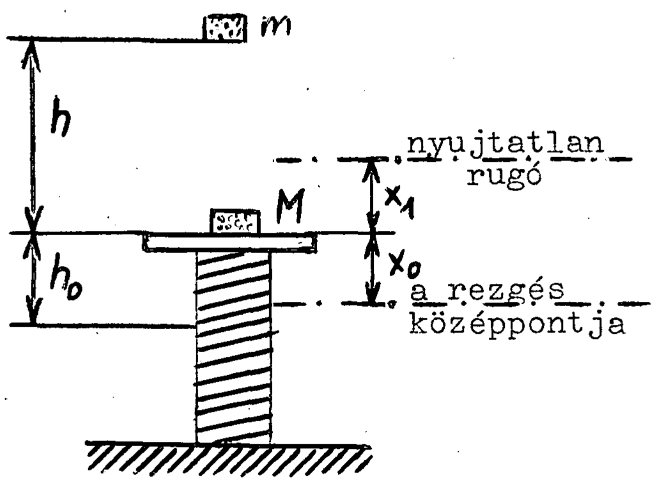
$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mg/h + h_o/ = \frac{1}{2}kh_o^2 \quad \text{,ebből:}$$

$$v_o = \sqrt{\frac{k}{m}h_o^2 - 2g/h + h_o/}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_o = \sqrt{\frac{2000\ N/m}{0{,}4\ kg}\cdot 0{,}2^2 m^2 - 2.10\ /1{,}8\ m + 0{,}2\ m/} \approx$$

$$\approx 12{,}6\ \frac{m}{s}$$



Ha a rugón M tömegü rugalmatlan teher nyugszik, akkor az m tömeg ezzel rugalmatlanul ütközik,tehát a mechanikai energia hővé alakul át.Az ütközéséig terjedő folyamatra még alkalmazható a mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \frac{1}{2}\ mv^2$$

amelyből: $v = \sqrt{v_o^2 + 2gh}$,ahol v a test ütközés előtti sebessége.

Az m tömeg M-mel való rugalmatlan ütközése előtti és utáni időpillanatokra felirható az impulzus megmaradásának tétele:

$$mv = c/m + M/$$

amiből az ütközés utáni c közös sebesség: $c = \frac{mv}{m + M}$

Ütközés után a tömegek mozgási energiája $\frac{1}{2}\,/m + M/c^2$ a helyzeti energia megváltozása $/m + M/gh_o$ .A rugó helyzeti energiájának megváltozása: $\frac{1}{2}k/x_1 + h_o/^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$,az ábra jelöléseivel,ugyanis a rugó már az ütközés pillanatában is rendelkezett helyzeti energiával,mivel M sulyereje $x_1 = \frac{Mg}{k}$ hosszusággal nyomta össze.

A mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$\frac{1}{2}/m + M/c^2 + /m + M/gh_o = \frac{1}{2}k/x + h_o/^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Behelyettesitve c és x értékét:

$$\frac{1}{2}\,\frac{m^2}{m + M}/v_o^2 + 2gh/ + /m + M/gh_o = \frac{1}{2}k\left[/\,\frac{Mg}{k} + h_o/^2 - /\frac{Mg}{k}/^2\right]$$

Amelyből:

$$v_o = \sqrt{k\frac{m + M}{m^2}\,h_o^2 - 2\,\frac{m + M}{m^2}gh_o - 2gh}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_o = \sqrt{2000\tfrac{N}{m}\,\frac{0{,}4\text{ kg} + 0{,}5\text{ kg}}{/0{,}4\text{ kg}/^2}/0{,}2\text{ m}/^2 - 2\,\frac{0{,}4\text{ kg} + 0{,}5\text{ kg}}{/0{,}4\text{ kg}/^2}\cdot .10\quad 0{,}2\text{ m} - 2.10\tfrac{m}{s^2}1{,}8\text{ m}} \approx 20{,}1\,\frac{m}{s}$$

A v_o kifejezésnek csak akkor van értelme,ha a négyzetgyök alatt nemnegativ szám áll,vagyis

$$k\,\frac{m + M}{m^2}h_o^2 - 2\,\frac{m + M}{m}gh_o - 2gh \geq 0$$

Ha ez teljesül,akkor minden v_o esetén a rugó h_o -nál jobban összenyomódik.

A rugó minimális összenyomódása is kifejezhető az előbbi egyenlőtlenségből: $h_o \geq /g + g^2 + 2\frac{kgh}{m + M}\,/\,\frac{m}{k}$

A v_o iránya egyaránt mutathat felfelé és lefelé,mert felfelé dobva el az m tömeget az eldobás helyén lefelé is v_o sebességgel halad keresztül.

47/. 1 m hosszu fonalra felfüggesztett 20 dkg tömegü golyót nyugalmi helyzetéből 45^o-os szöggel kitéritjük, majd magára hagyjuk.Mekkora sebességgel halad át a golyó a nyugalmi helyzeten ?

A megadott mennyiségek :

$m = 0,2$ kg

$l = 1$ m

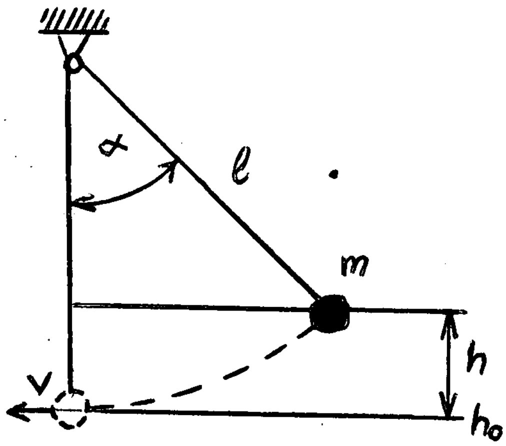
$\alpha = 45^o$

$g = 10 \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A golyó sebessége a nyugalmi helyzeten való áthaladáskor;

$v = ?$



A golyó helyzeti energiája mozgási energiává alakul,amely a mechanikai energia megmaradásának tétele szerint $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ alaku,ahol $h_o=0$ amelyből $v = 2gh$ figyelembe véve $h = l/1 - \cos\alpha/$ ábránkról leolvasható összefüggést:

$$v = \sqrt{2gl/1 - \cos\alpha/}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{2.10\frac{m}{s^2}1\ m/1 - \frac{\sqrt{2}}{2}/} = 2,4\frac{m}{s}$$

Látható,hogy az elért sebesség az m tömegtől független.

48/.[x] Egy 1 m hosszu fonálingát,melyen 200 g tömeg függ,vizszintes helyzetéig kimozditunk.Mekkora függőleges irányu kezdősebességet kell adnunk,hogy a függőlegestől mért 60^o-os kitérésnél a fonál elszakadjon ? A fonál 0,8 kp terhelésnél szakad el.

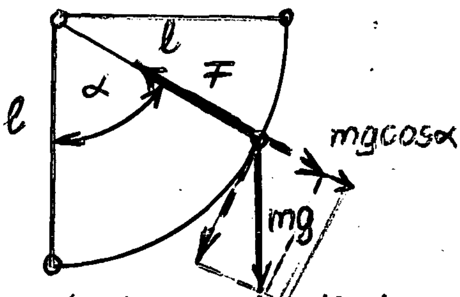
A megadott mennyiségek:

$l = 1$m

$m = 0,2$ kg

$\alpha = 60^{\circ}$
$g = 10\,\frac{m}{s^2}$
$F_s = 8\ N$

A meghatározandó mennyiség:
A tömegnek adandó kezdősebesség; $v_o = ?$
A tömeg körpályán mozog. A körpályán tartáshoz /a centripetális gyorsulás létrehozásához/ szükséges centripetális erőt a fonál fejti ki a testre. De a fonál által a testre kifejtett erő ezenkívül még e testre ható nehézségi erőnek a fonál irányába eső / $mg.\cos\alpha$ / összetevőjét is kiegyensulyozza.



$$F = mg.\cos\alpha + m\frac{v^2}{l}$$

Ha a surlódástól és a közegellenállástól eltekintünk a v sebességet a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva határozhatjuk meg. A $h_o = 0$ miatt testünknek a kritikus helyzetben csak mozgási energiája van.

$$\frac{1}{2}mv_o^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 \text{ ebből:}$$

$v_o^2 = v^2 - 2gh$,figyelembevéve a fonálerőből:

$$v^2 = \frac{Fl}{m} - gl.\cos\alpha$$,és ábránkról: $v_o = \sqrt{\frac{8\ N.1\ m}{0,2\ kg} - 3.10\frac{m}{s^2}\frac{1}{2}.1\ m} = 5\,\frac{m}{s}$ az ismert mennyiségek felhasználásával, mert $v_o = \sqrt{\frac{Fl}{m} - 3gl.\cos\alpha}$

49/. Egymás mellett azonos l hosszuságu könnyü rudra felfüggesztett m_1 illetve m_2 tömegü golyók egymást érik. Az m_1 tömegü golyót 90°-kal kitéritett helyzetből elengedve, a két golyó tökéletesen rugalmasan ütközik. Mekkora szöggel tér ki a megütött, illetve az ütköző golyó, ha $m_1 = 2m_2$?
A megadott mennyiségek:
l
$m_1 = 2m_2$

$\alpha = 90^{\circ}$

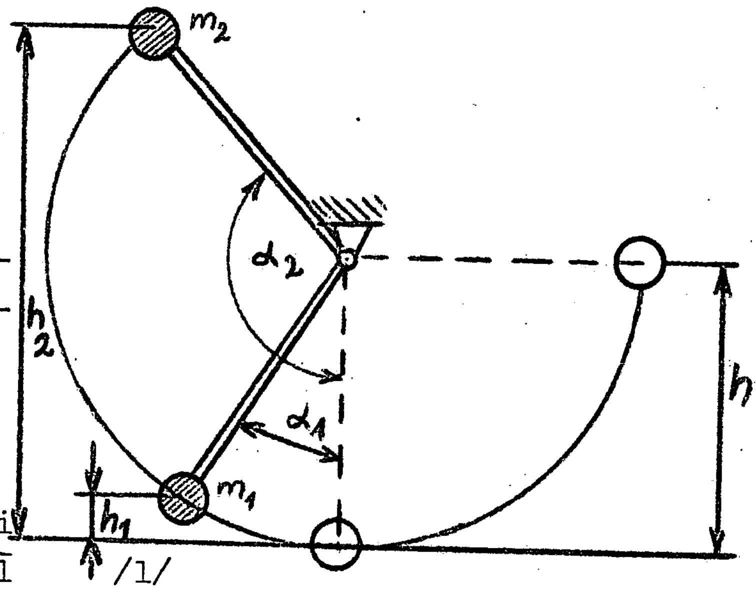
m_2

A meghatározandó mennyiségek:

A golyók kitéréseinek szögei; $\alpha_1 = ?$

$\alpha_2 = ?$

Mivel az ütközés rugalmas és a közegellenállástól valamint a surlódástól /felfüggesztési pontban lehet/ eltekinthetünk érvényes a mechaniaki energia megmaradásának tétele és az impulzus megmaradásának tétele is. A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva az ütköző golyóra:



$m_1 gh = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

összefüggésből az ütközési sebesség: $v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl}$ /1/

A 28. feladat eredményét felhasználva a megütött golyónak ütközés utáni sebessége:

$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$ amelyet az /1/ összefüggéshez hasonló gondolatmenettel nyerhető: $u_2 = \sqrt{2gh_2}$ összefüggésben felhasználva $\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2 = 2gh_2$, ebből:

$$h_2 = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l^2 = \frac{16}{9} l \qquad /2/$$

ábránk szerint:

$$h_2 = l/1 - \cos\alpha_2/ \qquad /3/$$

/2/ és /3/ összefüggéseket összehasonlítva:

$\cos\alpha_2 = 1 - \frac{16}{9}$, azaz $\alpha_2 \approx 141^{\circ}$

A 28. feladat eredményét az ütköző golyóra felhasználva kapjuk annak ütközési sebességét:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

amelyet az /1/ összefüggéshez hasonló gondolatmenettel nyerhető $u_1 = \sqrt{2gh_1}$ -nél felhasználva $\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 v_1^2 = 2gh_1$,

ebből: $h_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, l = \frac{1}{9} l$ /4/

ábránk szerint: $h_1 = l/1 - \cos\alpha_1/$ /5/

/4/ és /5/ összefüggéseket összehasonlitva $\cos\alpha_1 = 1 - \frac{1}{9}$

azaz: $\alpha_1 \approx 27{,}3^\circ$

50/. Egymás mellett azonosan 1 m hosszuságu fonálra felfüggesztett egyenlő tömegü golyók egyikét 90°-kal kitéritett helyzetből függőleges irányu v_o kezdősebességgel lefelé meglökjük. A golyók teljesen rugalmatlanul ütköznek és a felfüggesztés szintjéig emelkednek. Mekkora volt a v_o kezdősebesség ?

A megadott mennyiségek:

$l = 1$ m

m

$\alpha_1 = 90^\circ$

$\alpha_2 = 90^\circ$

$g = 10 \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A kitéritett golyó kezdősebessége; $v_o = ?$

Az impulzus megmaradásának tétele minden ütközésre érvényes, de a mechanikai energia megmaradási tétele esetünkben nem, ezért olyan részekre bontjuk a feladatot amelyekre alkalmazható.

Ha a legmélyebb pontban a helyzeti energiát zérusnak tekintjük a golyók helyzeti energiája a felfüggesztés szintjének elérésekor 2mgl, mig a két m tömegü v_k sebességü golyónak az ütközést követő pillanatban mozgási energiája: $\frac{1}{2} m v_k^2 \cdot 2 = m v_k^2$ a mechaniaki energia megmaradásának tétele erre a részfolyamatra már érvényes:

$$m v_k^2 = 2mgl \quad \text{amelyből:} \quad v_k = \sqrt{2gl} \qquad /1/$$

Az ütközésre az impulzus megmaradásának tételét alkalmazva: $2mv_k = mv_1$, ahol v_1 a kitéritett golyó sebessége az ütközéskor, igy

$$v_k = \frac{v_1}{2} \qquad /2/$$

Az ütközés előtti és a meglökés pillanatára felirható a kitéritett golyó mechanikai energiáinak megmaradásának tétele:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_o^2 + mgl \qquad \text{ebből:}$$

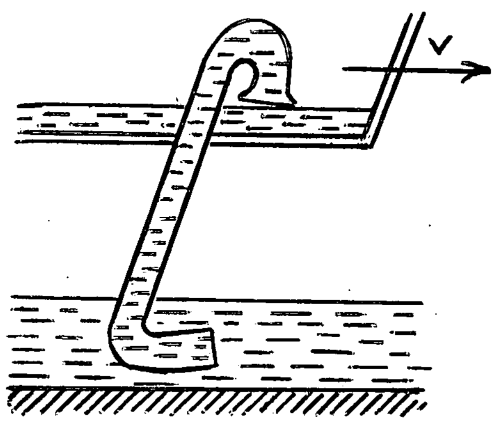
$$v_o = \sqrt{v_1^2 - 2gl} \qquad \text{/1/-et és /2/-t behelyettesitve:}$$

$$v_o = \sqrt{6gl}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_o = \sqrt{6 \cdot 10\frac{m}{s^2}1\ m} \approx 7{,}74\frac{m}{s}$$

51/. A gőzmozdony vizkészletét menetközben ugy egészitheti ki, hogy a sinek mentén vizzel teli csatornát létesitenek és a gőzmozdony /az ábra szerint/ olyan csővel van felszerelve, amelynek menetirányba irányuló nyitott vége a csatornába lóg. Mekkora magasságba emelhető fel igy a viz, ha a vonat sebessége 36 km/h és a viz viszkozitásától eltekintünk ?



A megadott mennyiségek:

$v = 10\ \frac{m}{s}$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

Az emelkedésnél elérhető szintkülönbség; h = ?

Feltételezve, hogy folyadékunk összenyomhatatlan, az áramlás stacionárius és a feladat megfogalmazásában biztositott surlódásmentességet figyelembevéve érvényes a Bernoulli-egyenlet:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + gh_1 = p + \frac{1}{2}\varrho v_o^2 + \varrho gh_o$$

mert a légnyomás minimális eltérésétől eltekinthetünk /a surlódás elhanyagolása lényegesen nagyobb hibát okoz/. Figyelembevéve, hogy a csatornában levő viz v_o sebessége zérus és a szintkülönbség $h = h_1 - h_o$ a Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 = \varrho gh \qquad \text{ebből:} \qquad h = \frac{v^2}{2g}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$h = \frac{(10\ \frac{m}{s})^2}{2.10\ \frac{m}{s^2}} = 5\ m$$

52/. Egy 120 m mély furólyukból feltörő 0,8 g/cm^3 sürüségü olaj a föld felszine felett 25 m magasra szökik fel. Mekkora a nyomás a furólyuk mélyén,ha a surlódástól és a légellenállástól eltekintünk ?

A megadott mennyiségek:

$\varrho = 0,8\ g/cm^3 = 800\ kg/m^3$

$g = 10\ \frac{m}{s^2}$

$p = 1\ atm \quad 10^5\ N/m^2$

$h = 25\ m$

$h_o = -120\ m$

A meghatározandó mennyiség:

Az olaj nyomása a furólyuk mélyén; p_o = ?

Feltételezve,hogy az összenyomhatatlan olaj stacionáriusan áramlik és a megfogalmazás által biztositott surlódásmentességet figyelembevéve érvényes a Bernoulli-egyenlet:

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho gh + p = \frac{1}{2}\varrho v_o^2 + \varrho gh_o + p_o$$

Az olajsugár tetőpontján valamint a furólyuk mélyén az olajsugár kezdetén /120 m mélyen/ az olaj sebessége zérus, amit figyelembevéve:

$$p_o = p + \varrho g/h - h_o/$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$p_o = 10^5\ \frac{N}{m^2} + 800\ \frac{kg}{m^3}\ .10\frac{m}{s^2}/25\ m + 120\ m/ = 1,26.10^6\ \frac{N}{m^2} \approx$$

$$\approx 12,6\ atm$$

53/. Egy vizszintes cső tágabb részében a viz 1,5 atm nyomás mellett 8 $\frac{m}{s}$ sebességgel stacionáriusan áramlik. Mekkora a viz sebessége a cső szük részében,ha ott a nyomás 1,4 atm és a surlódástól eltekinthetünk ?

A megadott mennyiségek:

$p_1 = 1,5\ atm \approx 1,5.10^5\ \frac{N}{m^2}$

$p = 1,4 \text{ atm} \approx 1,4.10^5 \frac{N}{m^2}$

$v_1 = 8 \frac{m}{s}$

$\varrho = 1 \text{ kg/dm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$

A meghatározandó mennyiség:

A viz sebessége a cső szük részében; $v = ?$

A feladat feltételei alapján alkalmazható a Bernoulli-egyenlet, amelynél figyelembevéve, hogy a magasságkülönbség zérus:

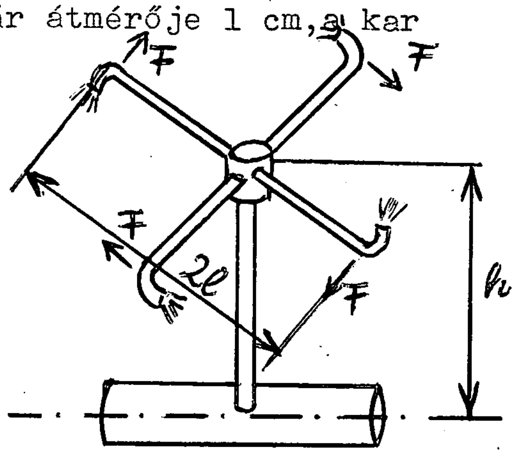
$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2 \qquad \text{alakból:}$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2/p_1 - p_2/}{\varrho} + v_1^2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2/1,5.10^5 \frac{N}{m^2} - 1,4.10^5 \frac{N}{m^2}/}{10^3 \text{ kg/m}^3} + /8 \frac{m}{s}/^2} \approx 9,165 \frac{m}{s}$$

54/^{x} Az ábrán feltüntetett Segner kerék asurlódás miatt csak akkor tud megindulni, ha a kereket $h = 1$ m mélységben tápláló nagy cső középvonalán a viz legalább 2,1 at tulnyomással rendelkezik. Mekkora a surlódás forgatónyomatéka, ha a kerékből távozó vizsugár átmérője 1 cm, a kar hossza 0,6 m ?



A megadott mennyiségek:

$h = 1$ m

$\varrho = 1 \text{ kg/dm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$

$l = 0,6$ m

$d = 0,01$ m

$p = 2,1 \text{ at} = 2,1.10^5 \text{ N/m}^2$

$g = 10 \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A surlódás forgatónyomatéka; $M = ?$

A megindulás pillanatában a surlódás forgatónyomatékának nagysága egyenlő az F impulzuserők forgatónyomatékával:

$M = 4Fl$ /az impulzuserők két erőpárt alkotnak/

Az impulzuserők nagysága: $F = \varrho A v^2$, ahol ϱ a kiömlő viz

sürüsége, A a keresztmetszet, v a kiömlési sebesség.
A kiömlési sebességet a vastag cső középvonalán felvett 0 indexü és a kiömlésnél felvett 1 indexü pontokra felirt Bernoulli-egyenlet alkalmazásával határozhatjuk meg. A Bernoulli-egyenlet érvényességéhez fel kell tételeznünk, hogy az áramlás stacionárius és a viz viszkozitásától eltekintünk.

$$p_o + \frac{1}{2}\varrho v_o^2 + gh_o = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho g h_1$$

ahol $v = v$; $h - h_o = h$; $p_o - p = p$; $v_o = 0$ figyelembevételével:

$$v^2 = \frac{2/p - \varrho gh/}{\varrho}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v^2 = \frac{2/2,1.10^5 \text{ N/m}^2 - 10^3 \text{ kg/m}^3 . 10 \frac{m}{s^2} . 1 \text{ m}/}{10^3 \text{ kg/m}^3} = 400 \frac{m^2}{s^2}$$

A surlódás forgatónyomatéka:

$$M = 4\varrho \frac{d^2\pi}{4} v^2 l$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$M = 4.10^3 \text{ kg/m}^3 . \frac{/0,01 \text{ m}/^2 . 3,14}{4} . 400 \frac{m^2}{s^2} . 0,6 \text{ m} = 75,36 \text{ Nm}$$

55/^{x}. A 108 km/h sebességü vihar mekkora erővel emeli felfelé a 20 cm-szer 30 cm-es tetőfedő cserepet ?
A megadott mennyiségek:
$\varrho_{lev} = 1,2928$ kg/m^3
$g = 10$
$a = 0,2$ m
$b = 0,3$ m
$v = 108$ km/h $= 30 \frac{m}{s}$
A meghatározandó mennyiség:
A cserépre ható emelőerő; $F = ?$
Az emelőerőt a mozgó levegőrétegnek a padlástérben lévő normális nyomásu levegőhöz viszonyitott nyomáskülönbsége

hozza létre. $F = A\Delta p = ab\Delta p$

A nyomáskülönbséget a Bernoulli-egyenlet alkalmazásával határozhatjuk meg. Figyelembevéve, hogy magasságkülönbség nincs, és a padlástérben a levegő sebessége zérus a Bernoulli-egyenlet: $p + \frac{1}{2}\varrho v^2 = p_o$ alakot veszi fel, amelyből $\Delta p = p_o - p = \frac{1}{2}\varrho v^2$, igy az emelőerő:

$$F = \frac{ab\,\varrho v^2}{2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$F = \frac{0{,}2\ \text{m} \cdot 0{,}3\ \text{m} \cdot 1{,}2928\ \text{kg/m}^3 \cdot /30\ \text{m/s}/^2}{2} = 34{,}8\ \text{N}$$

Tehát a tetőfedő cserép akkor emelkedik fel, ha 3,48 kg-nál kisebb a tömege, ami a gyakorlatban az adott méreteknél kivétel nélkül teljesül.

56/. Mekkora a repülőgép sebessége, ha az ábrán vázolt Prandtl-féle csőben a higanyszintek különbsége 10 mm ?

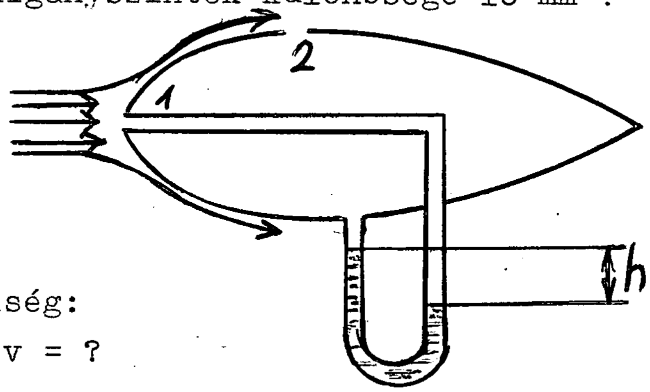
A megadott mennyiségek:

$h = 10\ \text{mm} = 10^{-2}\text{m}$

$\varrho_{lev} = 1{,}29\ \text{kg/m}^3$

$\varrho_{Hg} = 1{,}36 \cdot 10^4\ \text{kg/m}^3$

$g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$



A meghatározandó mennyiség:

A repülőgép sebessége; $v = ?$

A mérőfejen felvett 1 indexü és 2 indexü pontokra felirt Bernoulli - egyenlet segitségével határozhatjuk meg a sebességet.

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho_{lev} v_1^2 + \varrho_{lev} gh = p_2 + \frac{1}{2}\varrho_{lev} v_2^2 + \varrho_{lev} gh_2$$

A cső 1 indexü nyilásánál összetorlódik a levegő, ezért az U-alaku manométercsőnek az "1" nyilással összekötött szárában a p_1 teljes nyomás hat, mig a "2" nyilással összekötött ágban a p_2 sztatikus nyomás.

A magasságkülönbséget elhanyagolva $/h_2 - h_1 = 0/$, valamint figyelembevéve,hogy az 1 indexü pontban nincs sebességkülönbség /v_1 = 0/ a Bernoulli-egyenlet rendezésével:

$$v = \sqrt{\frac{2/p_1 - p_2/}{\varrho_{lev}}}$$

összefüggést kapjuk,ugyanis a mérőkészülék felső része a gépből kinyulik és igy v a mérőfej és a levegő egymáshoz viszonyitott sebessége,azaz a repülő sebessége. A nyomáskülönbség a higanyszintek különbségéből adódik: p - p = gh ,amivel a sebesség:

$$v = \sqrt{\frac{2\varrho_{Hg}gh}{\varrho_{lev}}}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{\frac{2.1,36.10^4\ kg/m^3.10\frac{m}{s^2}10^{-2}m}{1,29\ kg/m^3}} \approx 46\ \frac{m}{s}$$

A repülőgép sebessége 166,6 km/h.

57/x. Az ábrán látható vizszintes cső A_1,illetve A_2 területü keresztmetszetei felett csatlakozó függőleges csövekben Δh szintkülönbséget észlelünk.Határozzuk meg a vizszintes csőben időegység alatt surlódás és ellenállás nélkül áthaladó ϱ sürüségü folyadék mennyiségét !

A megadott mennyiségek:

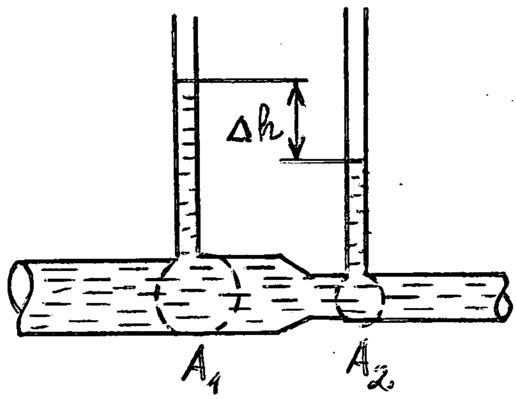
A_1

A_2

Δh

g

ϱ



A meghatározandó mennyiség:
Az időegység alatt áthaladó folyadékmennyiség; Q = ?

Legyen v_1 és v_2 a folyadék sebessége az A_1 és A_2 keresztmetszetü helyen.Az áramlás stacionárius,ezért: $Q = v_1A_1 = v_2A_2$ .Másrészt a feladat feltételei lehetővé teszik a Bernoulli-egyenlet alkalmazását,amely az A_1 és A_2 keresztmetszetekre:

$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$,ahol

$p_1 = \varrho g h_1$, $p_2 = \varrho g h_2$ hidrosztatikai nyomásokban szereplő magasságokra igaz a $\Delta h = h_1 - h_2$ összefüggés. A Bernoulli-egyenlet felirásánál már figyelembe vettük, hogy a keresztmetszetek közötti magasságkülönbség zéró.

A Bernoulli-egyenletből:

$$\frac{1}{2}\varrho /v_2^2 - v_1^2/ = \varrho g/h_1 - h_2/ = \varrho g\Delta h ,$$

amely a kontinuitási egyenlet figyelembevételével:

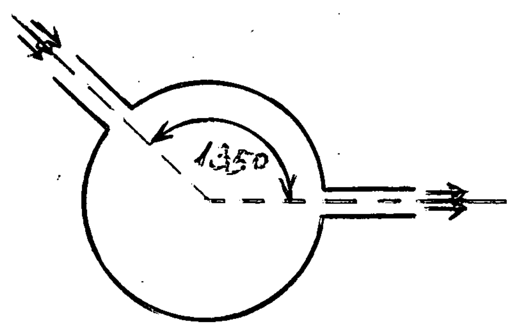
$$\left(\frac{Q}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{Q}{A_1}\right)^2 = 2g\Delta h \qquad \text{azaz:}$$

$$Q = \sqrt{2g\Delta h \frac{A_1^2 \cdot A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}} = A_1 A_2 \sqrt{\frac{2g\ h}{A_1^2 - A_2^2}} \quad \text{,amely}$$

a folyadék sürüségétől független.

58/. Az ábrán látható vizszintes sikban fekvő csőidomban viz áramlik. A viz egyenletes $2\frac{m}{s}$ sebességgel lép be az $1\ m^2$-es felületen és a $0,4\ m^2$-es felületen lép ki. A viz nyomása belépéskor, valamint a külső légköri nyomás egyaránt 1 at. Számizsuk ki surlódásmentes áramlást feltételezve a viz nyomását kilépéskor.

A megadott mennyiségek:



$v_1 = 2\frac{m}{s}$

$A_1 = 1\ m^2$

$A_2 = 0,4\ m^2$

$p_1 = 1\ at = 10^5\ N/m^2$

$\varrho = 10^3\ kg/m^3$

A meghatározandó mennyiség:

A kilépő viz nyomása; $p_2 = ?$

Feltételezve, hogy folyadékunk összenyomhatatlan, az áramlás stacionárius és a feladat megfogalmazásában biztositott surlódásmentességet figyelembevéve érvényes a Bernoulli-egyenlet:

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + \varrho gh = p_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + \varrho gh_2$$

Mivel a csőidom vizszintesen helyezkedik el szintkülönb-

ség nincs,azaz: $h_1 = h_2$.
A viz sebességét kilépéskor a kontinuitási egyenlet alkalmazásával határozhatjuk meg:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2, \text{azaz: } v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2}$$

A Bernoulli-egyenlet ekkor

$$p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\varrho\left(\frac{A_1 v_1}{A_2}\right)^2 \quad \text{alaku,melyből}$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2/1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}/$$

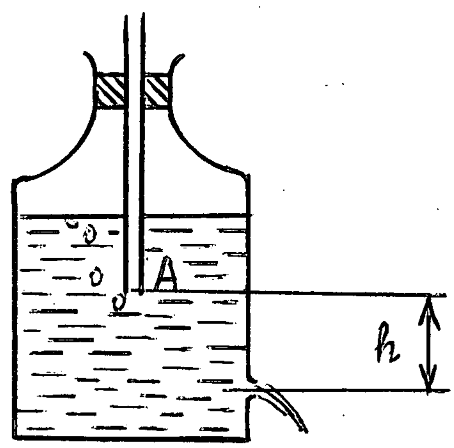
Az ismert mennyiségekkel:

$$p_2 = 10^5 N/m^2 + \frac{1}{2}.10^3 kg/m^3./2\frac{m}{s}/^2./1 - \frac{/1\ m^2/^2}{/0,4\ m^2/^2} =$$

$$= 0,995.10^5 N/m^2 = 0,995 \text{ at.}$$

Ez az érték kisebb a környező nyomásnál,tehát a kiömlés nem történhetik a szabadba,hanem csak valamilyen csővezetékbe,amelyben a nyomásviszonyokat más /a feladatban nem tárgyalt/ körülmények határozzák meg.

59/. Az ábrán vázolt Mariotte-féle palack nyilásának és a jól záró dugon át a folyadékba nyuló nyitott cső végének szintkülönbsége 20 cm.



Mekkora kezdetben a viz kifolyási sebessége a palackból ?
A megadott mennyiségek:
$h = 0,2$ m
$g = 10\ \frac{m}{s^2}$
A meghatározandó mennyiségek:
A kifolyási sebesség; $v = ?$
A felszin süllyedésénél a levegő kitágulása miatt a folyadékba a cső alsó /A/ nyilásánál külső levegő hatol be,amely buborékok alakjában felszáll.Ezért az A nivón a nyomás mindig egyenlő a légköri nyomással,és igy a kiömlési sebességet /ameddig a felszin A alá nem süllyed/ az állandó h magasság szabja meg.

A kiömlési sebességet az A nivóra felvett 1 indexü és a kiömlési nyilásnál felvett 2 indexü pontokra felirt Bernoulli-egyenlet alkalmazásával határozhatjuk meg. A Bernoulli-egyenlet érvényességéhez fel kell tételeznünk, hogy az áramlás stacionárius és a viz viszkozitásától eltekintünk.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \text{, ahol } p_1 = p_2$$

/mindkét pontban a légköri nyomás hat/ $h_1 - h_2 = h$ és $v_1 = 0$ /a felszin süllyedésének sebessége az A nivón/ amelyek figyelembevételével

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2$$

innen a folyadék kiömlési sebessége:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{2 \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}2\ m} = 2\frac{m}{s}$$

Ha az edényben foglalt folyadék felszine alatt h mélységben levő nyilás keresztmetszete igen kicsiny az edényhez képest, akkor a felszin süllyedésének sebessége gyakorlatilag zérusnak vehető. Érvényes a $v = \sqrt{2gh}$ összefüggés amelyet Torricelli ugy fogalmazott meg, hogy a folyadék kiömlési sebessége a sürüségtől függetlenül akkora, mintha a kiömlő folyadék a h magasságból szabadon esett volna.
A változatlan szintkülönbséget közönséges tartályban például utántöltéssel is biztosithatjuk.

60/. Számitsuk ki az ábrán látható tartályból kiömlő ρ sürüségü folyadék sebességét, ha a tartályban p_1 a tartályon kivül p_0 a nyomás. A tartály keresztmetszete a kifolyónyiláshoz képest végtelen nagynak tekinthető, a felszin magassága a kifolyó nyilás fölött/nem változik/ h.

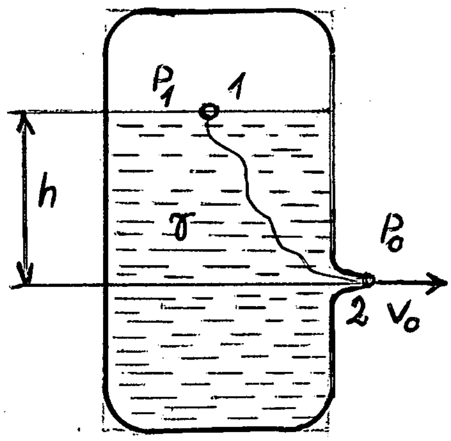
A megadott mennyiségek:

p_0
p_1
$h_0 = 0$
$h_1 = h$

A meghatározandó mennyiség:

A kiömlő folyadék sebessége; $v_o = ?$

Mivel a tartály keresztmetszete a kifolyónyiláshoz képest végtelen nagynak tekinthető, a felszin süllyedési sebessége elhanyagolható /$v_1 = 0$/ , tehát a vizsgált jelenség stacionáriusnak tekinthető. Mivel az áramvonalak nyugvó térből jönnek az áramlás örvénymentes is, igy ha a folyadék viszkozitásától eltekintünk alkalmazható a Bernoulli-egyenlet, amely a felszin egyik pontjára /"1" indexü mennyiségek/ és a folyadék kilépési pontjára /"0" indexü mennyiségek/ felirva:



$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_o + \frac{1}{2}\rho v_o^2 + \rho g h_o \text{ , amely}$$

$v_1 = 0$ és $h_o = 0$ miatt $\quad p_1 + \rho g h = p_o + \frac{1}{2}\rho v_o^2$ alaku, amiből: $\quad v_o = \sqrt{2gh + \frac{2/p_1 - p_o/}{\rho}}$

Ha a tartály nyitott, azaz: $p_1 = p_o$, akkor

$$v_o = \sqrt{2gh}$$

61/. Egy tartályban 1 m magasságu vizrétegen 4 m magasságu 0,9 g/cm^3 sürüségü kőolajréteg helyezkedik el. Mekkora kezdetben a viz kifolyási sebessége a tartályfenéken lévő nyiláson, ha a belső surlódástól eltekintünk ?

A megadott mennyiségek:

$h_1 = 1$ m

$h_2 = 4$ m

$\rho_2 = 0{,}9$ g/cm^3 = 900 kg/m^3

$\rho_1 = 1$ g/cm^3 = 1000 kg/m^3

$g = 10 \frac{m}{s^2}$

A meghatározandó mennyiség:

A kifolyási sebesség: $v = ?$

Mivel csak a kezdeti sebességet kivánjuk meghatározni változatlan szintkülönbséggel számolhatunk,az áramlás a vizsgált időpillanatban biztosan stacionárius,a folyadék összenyomhatatlanságának feltételezésével teljesülnek a Bernoulli-egyenlet speciális eseteként ismert Torricelli tétel feltételei.

A h_2 magasságu kőolajréteg olyan h_2' magas vizoszloppal helyettesithető amelynek nyomása azonos a kőolajréteg nyomásával:

$$\varrho_2 g h_2 = \varrho_1 g h_2' \quad \text{ebből} \quad h_2' = \frac{h_2 \varrho_2}{\varrho_1}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$h_2' = \frac{4\ \text{m}.900\ \text{kg/m}^3}{1000\ \text{kg/m}^3} = 3{,}6\ \text{m}$$

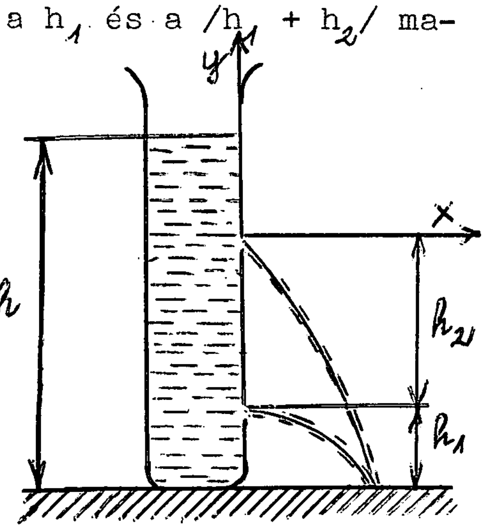
Igy a Torricelli tételben szereplő magasságkülönbség:

$h = h_1 + h_2'$ azaz a kifolyási sebesség: $v = \sqrt{2g/h_1 + h_2'/}$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v = \sqrt{2.10\frac{m}{s^2}4{,}6\ m} \approx 9{,}79\frac{m}{s}$$

62/x. Milyen h magasságig kell az ábrán látható edényt olyan összenyomhatatlan folyadékkal feltölteni,amelynek viszkozitásától eltekintünk,hogy a h_1 és a $/h_1 + h_2/$ magasságban levő két nyiláson kiömlő folyadéksugár az edény fenekének magasságában találkozzék ?



A megadott mennyiségek:

h_1

h_2

g

A meghatározandó mennyiség:

A folyadékoszlop magassága; h = ?

A feladat megfogalmazásában biztositott feltételek elegendőek a Bernoulli-egyenlet alkalmazásához,amelyből a kezdeti időpontra érvényes Torricelli tétele.

Használjunk olyan koordináta rendszert melynek origója a felső nyilásnál van,abszcisszá tengelye vizszintes és a kifolyó folyadék irányába mutat,ordinátatengelye függőlegesen felfelé mutat.

Ha a folyadékszint ordinátáját h -al jelöljük Torricelli tétele szerint a kiömlő folyadéksugarak vizszintes kezdősebessége $\sqrt{2gh_3}$,illetve $\sqrt{2g/h_2 + h_3/}$

A kiömléstől számitott t idő mulva egy-egy folyadékrészecske koordinátái:

$$x_f = \sqrt{2gh_3}\,.t \qquad y_f = -\frac{1}{2}gt^2$$

illetve:

$$x_a = \sqrt{2g/h_2 + h_3/}\,.t \qquad y_a = -h_2 - \frac{1}{2}gt^2$$

Az első egyenletekből t-t kifejezve,a második egyenletekbe helyettesitve megkapjuk a folyadékrészecskék pályagörbéinek egyenleteit:

Igy
$$y_f = -\frac{1}{4}\frac{x_f^2}{h_3} \qquad \text{illetve:} \quad y_a = -h_2 - \frac{1}{4}\frac{x_a^2}{h_2 + h_3}$$

Ahhoz,hogy a két folyadéksugár az edény fenekének magasságában találkozzék,az szükséges,hogy az $y = -h_1 - h_2$ helyettesitési érték mellett a görbék egyenletében az x koordináták négyzete egyenlő legyen.

Tehát az $y = -h_1 - h_2$ helyettesités után a két egyenletből x^2-et kifelyezve,felirhatjuk a nyert mennyiségek egyenlőségét:

$$4h_3/h_1 + h_2/ = 4h_1/h_2 + h_3/ \quad \text{,ahonnan } h_3 = h_1$$

vagyis $h = 2h_1 + h_2$

63/^x. A Halley-üstökös olyan elleipszispályán kering, amelynek fél nagytengelye 2700 millió km,fél kistengelye 728 millió km.A keringési ideje 76,02 év.Mekkora a sebessége napközelben és naptávolban ?

A megadott mennyiségek:

$a = 2,7.10^9$ km

$b = 7,28.10^8$km

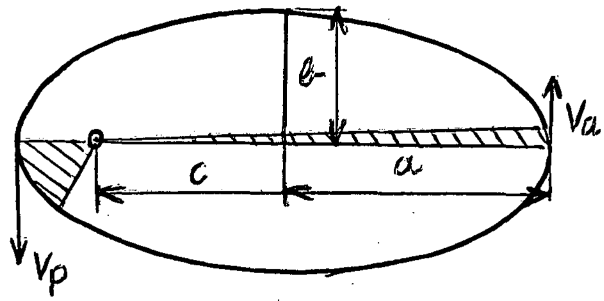
$T = 76,2$ év $= 2,4.10^9$ sec

A meghatározandó mennyiségek:

Az üstökös sebessége napközelben; $v_p = ?$

Az üstökös sebessége naptávolban; v_a = ?

Az ellipszispálya fél nagytengelyéből és fél kistengelyéből meghatározhatjuk az exentricitást, ami miként az ábrán látható szükséges a Nap és az üstökös távolságának meghatározásához.



$c = \sqrt{a^2 - b^2} =$

$= \sqrt{/2,7.10^9 km/^2 - /7,28.10^8 km/^2}$

$c = 2,6.10^9 km$

Az üstökös távolsága a Naptól napközelben: $a - c = 2,7.10^9$ km $- 2,6.10^9$ km $= 10^8$km

Az üstökös távolsága a Naptól naptávolban: $a + c =$

$= 2,7.10^9$ km $+ 2,6.10^9$ km $= 5,3.10^9$ km

Kepler felületi tétele szerint a területi sebesség minden pillanatban ugyanannyi, ezért az ellipszis ab területéből és az üstökös keringési idejéből meghatározható területi sebességet összehasonlitva a kérdéses helyzetekben a pillanatnyi sebességekkel kifejezett területi sebességgekkel:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{v_p /a - c/}{2} \quad \text{és}$$

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{v_a /a + c/}{2}, \quad \text{amelyekből az üstökös}$$

pillanatnyi sebessége

napközelben: $$v_p = \frac{2\pi ab}{T/a - c/}$$

naptávolban: $$v_a = \frac{2\pi ab}{T/a + c/}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_p = \frac{2.3,14.2,7.10^9 \text{ km}.7,28.10^8 \text{ km}}{2,4.10^9 \text{sec}/2,7.10^9 \text{km} - 2,6.10^9 \text{km}/} = 51,4 \text{ km/s}$$

$$v_a = \frac{2.3,14.2,7.10^9 \text{ km}.7,28.10^8 \text{ km}}{2,4.10^9 \text{sec}/2,7.10^9 \text{km} + 2,6.10^9 \text{km}/} = 0,97 \text{ km/s}$$

64/. A Nap körül ellipszispályán keringő bolygó sebessége napközelben /perihélium/ a legnagyobb, és naptávolban /afélium/ a legkisebb. Bizonyitsuk be, hogy az ellipszis kistengelyének végpontjában levő sebessége a legnagyobb és a legkisebb sebességek mértani középarányosa!

A megadott mennyiségek:

v_p

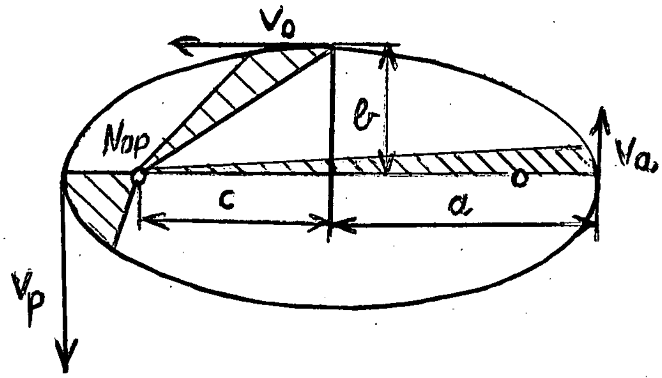
v_a

v_o

x_p

x_a

x_o



A meghatározandó mennyiség:

A sebességekről bizonyitandó, hogy $v_o = v_p v_a$.

Figyelembe véve az ábra jelöléseit, amely szerint az ellipszis fél nagytengelye a, a fél kistengelye b, az excentricitás $c = a^2 - b^2$, a napközelben a Naptól való távolság $x_p = a - c$, naptávolban a Naptól való távolság $x_a = a + c$, a kistengely végpontjában a Naptól való való távolság $x_o = b$. Kepler felületi tétele szerint a területi sebesség minden pillanatban ugyanannyi, melyet T-vel jelölve a kérdéses helyzetekben:

$$T = \frac{v_p/a - c/}{2} \qquad \text{perihéliumban}$$

$$T = \frac{v_a/a + c/}{2} \qquad \text{aféliumban}$$

$$T = \frac{v_o b}{2} \qquad \text{a kistengely végpontjában.}$$

Kifejezve a pillanatnyi sebességeket:

$$v_p = \frac{2T}{a - c}, \quad v_a = \frac{2T}{a + c} \quad \text{és} \quad v_o = \frac{2T}{b}$$

amelyekkel a mértani középérték:

$$\sqrt{v_p v_a} = \sqrt{\frac{4T^2}{/a - c/./a + c/}} = \frac{2T}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{2T}{b} = v_o$$

65/. A Nap vonzóerejének hatására egy mesterséges bolygó ε numerikus excentricitásu ellipszist ir le. Mekkora a sebessége naptávolban, ha napközelben v_p a sebessége ?

A megadott mennyiségek:

ε

v_p

A meghatározandó mennyiség:

A mesterséges bolygó sebessége naptávolban; v_a = ?

Jelölje a mesterséges bolygó ellipszispályájának a fél nagytengelyét a, fél kistengelyét b, excentricitását c, akkor az excentricitás: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

a numerikus excentricitás: $\varepsilon = \frac{c}{a}$

Kepler felületi tétele szerint a területi sebesség minden pillanatban ugyanannyi, amelyet a perihéliumban és az aféliumban levő mesterséges bolygóra alkalmazva:

$$\frac{v_p/a - c/}{2} = \frac{v_a/a + c/}{2} \quad \text{amelyből:}$$

$$v_a = v_p \frac{a - c}{a + c} = v_p \frac{1 - \frac{c}{a}}{1 - \frac{c}{a}} = v_p \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

66/^{x}. Az 1966 évi Ikeya-Seki üstökös naprádiusznyi, azaz 700000 km távolságban haladt el a Nap felszine mellett és keringési ideje 1000 év. Mennyi a sebessége napközelben és naptávolban ?

A megadott mennyiségek:

T = 1000 év

$R = 7.10^5$ km

$r = 1,5.10^8$ km

A meghatározandó mennyiségek:

Az üstökös sebessége napközelben; v_p = ?

Az üstökös sebessége naptávolban; v_a = ?

Legyen a pályaellipszis fél nagytengelye a, fél kistengelye b, az excentricitása $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, akkor a T keringési idő alatt surolt terület a pályaellipszis πab területe. Kepler felületi tétele szerint a területi sebesség minden pillanatban ugyanannyi, igy:

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{v_p/a - c/}{2}$$

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{v_a/a + c/}{2}$$ amelyekből:

$v_p/a - c/T = v_a/a + c/T = 2\pi ab$ innen

egyrészt:

$$v_p/a - c/T . v_a/a + c/T = /2\pi ab/^2$$ és mivel

$$a^2 - c^2 = b^2$$

$$v_p v_a = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \qquad /1/$$

másrészt:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{a + c}{a - c} \qquad /2/$$

A pillanatnyi sebességekre /1/ és /2/-ből álló egyenletrendszer megoldásai:

$$v_p = \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{a + c}{a - c}}$$

$$v_a = \frac{2a\pi}{T}\sqrt{\frac{a - c}{a + c}}$$

A pályaellipszis adatait Kepler III. törvényének segitségével határozhatjuk meg:

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{/1000 \text{ év}/^2}{/1 \text{ év}/^2}$$, amelyből: $a = 100\ r$, ahol

r a Föld átlagos távolsága a Naptól.

A feladat adatai szerint a-c két naprádiusszal egyenlő, s igy: $a - c = 2R$

$a + c = 200r - 2R$ amelyet figyelembevéve az üstökös pillanatnyi sebessége napközelben:

$$v_p = \frac{200r\pi}{T}\sqrt{\frac{200r - 2R}{2R}}$$

naptávolban:

$$v_a = \frac{200r\pi}{T}\sqrt{\frac{2R}{200r - 2R}}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_p = \frac{200.1,5.10^8 km.3,14}{3,14.10^{10} sec}\sqrt{\frac{200.1,5.10^8 km - 2.7.10^5 km}{2.7.10^5 km}} = 437\ \frac{km}{s}$$

$$v_a = \frac{200.1,5.10^8 km.3,14}{3,14.10^{10} sec}\sqrt{\frac{2.7.10^5 km}{200.1,5.10^8 km - 2.7.10^5 km}} = 0,02\ \frac{km}{s}$$

67/. Az 1958 márciusában Föld körüli pályára állitott Vanguard mesterséges holdnak a Föld felszinétől mért legnagyobb magassága 3970 km, legkisebb magassága 625 km volt. Mekkora volt e mesterséges hold sebessége a pályának a Föld középpontjától mért legtávolabbi, legközelebbi és a Föld felszine felett 1630 km magasságban levő pontjában ?

A megadott mennyiségek:

$h_1 = 3970$ km

$h_2 = 625$ km

$h = 1630$ km

$R = 6370$ km

$\gamma = 6,67.10^{-17} Nkm^2/kg^2$

$M = 5,976.10^{24}$ kg

A meghatározandó mennyiségek:

A mesterséges hold sebessége perigeumban; $v_p = ?$

A mesterséges hold sebessége a pogeumban; $v_a = ?$

A mesterséges hold sebessége a Föld felszine felett h magasságban; $v_h = ?$

Kepler felületi tétele szerint a mesterséges hold területi sebessége minden pillanatban ugyanannyi, amely figyelembevéve, hogy a földközeli és földtávoli pontokban a hold sebessége merőleges a vezérsugárra

$$\frac{1}{2}\, v_p/R + h_2/ = \frac{1}{2}\, v_a/R + h_1/ \quad \text{alakba irható.}$$

Másrészt a gravitációs erőtér konzervativ volta miatt érványes a mechanikai energia megmaradásának tétele:

$$-\gamma\frac{Mm}{R+h_2}+\frac{1}{2}mv_p^2=-\gamma\frac{Mm}{R+h_1}+\frac{1}{2}mv_a^2$$

ahol m a mesterséges hold tömege.

Rendezve a sebességnégyzetek különbségére:

$$v_p^2-v_a^2=2\gamma M\left/\frac{1}{R+h_2}-\frac{1}{R+h_1}\right/$$ amely a Kepler

tételből származó

$$v_a=\frac{R+h_2}{R+h_1}v_p$$ helyettesitéssel:

$$v_p^2=\sqrt{\frac{2\gamma M}{2R+h_1+h_2}\frac{R+h_1}{R+h_2}}$$,és

$$v_a^2=\sqrt{\frac{2\gamma M}{2R+h_1+h_2}\frac{R+h_2}{R+h_1}}$$ összefüggések megha-

tározását teszi lehetővé.Ezekből a mesterséges hold sebessége perigeumban:

$$v_p=\sqrt{\frac{2\gamma M}{2R+h_1+h_2}\frac{R+h_1}{R+h_2}}$$

apogeumban:

$$v_a=\sqrt{\frac{2\gamma M}{2R+h_1+h_2}\frac{R+h_1}{R+h_2}}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_p=\sqrt{\frac{2.6,67.10^{-17}Nkm^2/kg^2.5,976.10^{24}kg/6370km+3970km/}{/2.6370km+3970km+625km/./6370km+625km/}}=$$

$= 8,34$ km/sec

$$v_a=\sqrt{\frac{2.6,67.10^{-17}Nkm^2/kg^2.5,976.10^{24}kg/6370km+625km/}{/2.6370km+3970km+625km/./6370km+3970\,km/}}=$$

$= 5,6$ km/sec

A Föld felszine felett h magasságban levő mesterséges hold sebességét szintén a mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva határozhatjuk meg:

$$-\gamma\frac{Mm}{R+h_1}+\frac{1}{2}mv_a^2=-\gamma\frac{Mm}{R+h}+\frac{1}{2}mv_h^2$$,amelyből:

$$v_h^2=2\gamma M\left/\frac{1}{R+h}-\frac{1}{R+h_1}\right/+v_a^2$$,ami v_a^2 már meghatáro-

zott értékét figyelembevéve:

$$v_h^2 = 2\gamma M/\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R+h_1}/ + 2\gamma M \frac{1}{2R+h_1+h_2} \cdot \frac{R+h_2}{R+h_1}$$

amelyből:

$$v_h = \sqrt{2\gamma M/\frac{1}{R+h} - \frac{1}{2R+h_1+h_2}/}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$v_h = \sqrt{\frac{2.6{,}67.10^{-17}\,Nkm^2/kg^2.5{,}976.10^{24}\,kg.}{./\frac{1}{6370\ km + 1630\ km} - \frac{1}{2.6370\ km + 3970\ km + 625\ km}/}} = 7{,}35\frac{km}{sec}$$

68/. Mekkora lesz a $C_1, C_2, \ldots, C_k, \ldots, C_n$ kondenzátorokból álló rendszer eredő kapacitása,ha a kondenzátorokat először párhuzamosan,majd sorba kapcsoljuk.

A megadott mennyiségek:

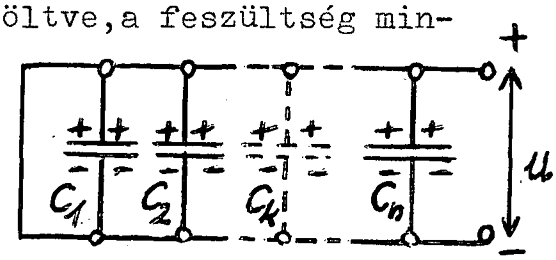
C_1
C_2
$\vdots$
C_k
$\vdots$
C_n

A meghatározandó mennyiségek:

A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorokból álló rendszer eredő kapacitása; $C_p = ?$

A sorosan kapcsolt kondenzátorokból álló rendszer eredő kapacitása; $C_s = ?$

Párhuzamos kapcsolás esetén az azonos jellegü töltéssel rendelkező lemezeket kapcsoljuk össze.Az egyik lemezt földelve és a másikat U potenciálra töltve,a feszültség mindegyik kondenzátoron ugyanakkora.



Az egyes kondenzátorokon a töltések:

$$Q_1 = C_1 U$$
$$Q_2 = C_2 U$$
$$\vdots$$
$$Q_k = C_k U$$

A töltésmegmaradás törvénye szerint a kondenzátorokon lévő összes töltés $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k + \ldots + Q_n$
Az eredő kapacitás, vagyis annak az egyetlen kondenzátornak a kapacitása, amelyet a kondenzátorok helyére kötve, az össztöltés és a feszültség nem változik meg:

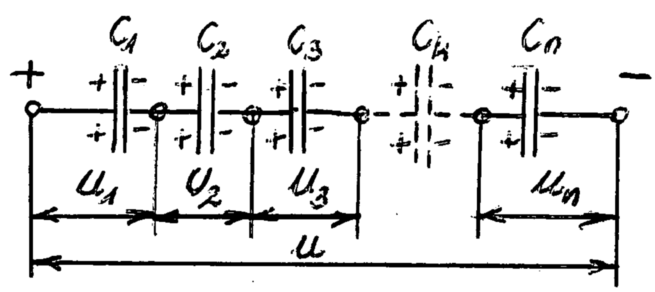
$$C_p = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k + \ldots + Q_n}{U} =$$

$$= \frac{C_1U + C_2U + \ldots + C_kU + \ldots + C_nU}{U}$$

azaz: $C_p = C_1 + C_2 + \ldots + C_k + \ldots + C_n$

Eszerint párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása az kondenzátorok kapacitásainak összege.

Soros kapcsolás esetén az ellentétes jellegü töltéssel rendelkező lemezeket kötjük össze. Az egyes kondenzátorok feszültségeinek összege adja meg a rendszer teljes feszültségét. Ha a kondenzátorsor két legsélső lemezére + Q, illetve -Q töltést viszünk, a megosztás következtében a töltésmegmaradásának törvénye szerint mindegyik fegyverzeten Q abszolut értékü töltés halmozódik fel. Az egyes kondenzátorok feszültségei:



$$U_1 = \frac{Q}{C_1},\ U_2 = \frac{Q}{C_2}, \ldots, U_k = \frac{Q}{C_k}, \ldots, U_n = \frac{Q}{C_n}$$

A teljes feszültség: $U = \frac{Q}{C}$ az előzőek alapján:

$\frac{Q}{C_s} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \ldots + \frac{Q}{C_k} + \ldots + \frac{Q}{C_n}$ -ből a rendszer eredő

kapacitására az

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_k} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$ összefüggést kapjuk.

Eszerint sorosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitásának reciproka a kondenzátorok kapacitásainak reciprokainak összege.

68/. Egy 6μF-os kondenzátort 10000 V feszültségre töltünk fel, majd a feltöltés után lekapcsoljuk a feszültségforrásról. Ezután párhuzamosan kapcsolunk vele egy 3μF-os kondenzátort. Mekkora lesz e két kondenzátorból álló rendszer feszültsége az állandósult állapotban ? Mekkora energia vész el az átmeneti állapot alatt ?

A megadott mennyiségek:
$C_1 = 6\mu F = 6.10^{-6}$ F
$C_2 = 3\mu F = 3.10^{-6}$ F
$U_1 = 10000$ V
A meghatározandó mennyiségek:
A két kondenzátorból álló rendszer feszültsége az állandósult állapotban; U = ?
Az energiaveszteség; ΔE = ?
Az U_1 feszültségre feltöltött C_1 kapacitásu kondenzátor fegyverzetein a töltésmennyiség $Q = U_1C_1$. A két kondenzátort párhuzamosan kapcsolva az eredő kapacitás $C = C_1 + C_2$
A töltésmegmaradásának törvénye szerint a töltés mennyisége változatlan, ezért az uj feszültség:

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{U_1C_1}{C_1 + C_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$U = \frac{10000\,V.6.10^{-6}\,F}{6.10^{-6}F + 3.10^{-6}F} = \frac{2}{3}.10^4\ V$$

Kezdeti állapotban az energia:

$$E_o = \frac{1}{2}\,U_1^2C_1$$

A kiegyenlitődés utáni energia:

$$E = \frac{1}{2}\,U^2C = \frac{U^2C^2}{2/C_1 + C_2/^2}/C_1 + C_2/$$

Az energiaveszteség:

$$\Delta E = E_0 - E = \frac{1}{2} U_1^2 C_1 - \frac{1}{2} \frac{U_1^2 C_1^2}{C_1 + C_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} E_0$$

A megadott mennyiségekkel:

$$\Delta E = \frac{3.10^{-6}\ F}{6.10^{-6}\ F + 3.10^{-6}\ F} \frac{1}{2} /10000\ V/^2 .6.10^{-6}\ F = 100\ J$$

69/^{x}. Van három kondenzátorunk, amelyek rendre 1 μF, 2 μF, és 5 μF kapacitásuak. Az elsőt 200 V, a másodikat 300 V, a harmadikat 100 V feszültségre töltjük és a három kondenzátort sorba kapcsoljuk oly módon, hogy pozitiv fegyverzethez negativ kerüljön. Mekkora lesz az egyes kondenzátorokon a töltés és a feszültség, ha a sorbakapcsolás után a szabad fegyverzeteket összekötjük ?

A megadott mennyiségek:

$C_1 = 1\,\mu F$
$C_2 = 2\,\mu F$
$C_3 = 5\,\mu F$
$U_1 = 200$ V
$U_2 = 300$ V
$U_3 = 100$ V

A meghatározandó mennyiségek:

A kondenzátorokon a töltés összekapcsolás után; $Q_1' = ?$
$Q_2' = ?$
$Q_3' = ?$

A kondenzátorokon a fezsültség összekapcsolás után; $U_1' = ?$
$U_2' = ?$
$U_3' = ?$

Legyen az összekapcsolás előtt a kondenzátorok bal, illetve jobb oldali fegyverzetének töltése Q_1, illetve $-Q_1$
Q_2, illetve $-Q_2$
Q_3, illetve $-Q_3$,

akkor az egyes vezetődarabokra a töltésmegmaradás törvé-

nye:
$$Q_1 - Q_3 = Q_1' - Q_3'$$
$$Q_2 - Q_1 = Q_2' - Q_1' \qquad /1/$$
$$Q_2 - Q_3 = Q_2' - Q_3'$$
alakban irható.

Továbbá a kondenzátorok kapacitásának változatlansága miatt:

$$C_1 = \frac{Q_1}{U_1} = \frac{Q_1'}{U_1'}$$
$$C_2 = \frac{Q_2}{U_2} = \frac{Q_2'}{U_2'} \qquad /2/$$
$$C_3 = \frac{Q_3}{U_3} = \frac{Q_3'}{U_3'}$$

Másrészt: $U_1' + U_2' + U_3' = 0$ /3/

Az /1/,/2/,/3/ egyenletekből álló egyenletrendszerből

$$Q_1' = \frac{C^2/C + C/U - C\,C\,C/U + U/}{C\,C + C\,C + C\,C}$$ és

$$U_1' = \frac{C/C + C/U - C\,C/U + U/}{C\,C + C\,C + C\,C}$$

Q_2', Q_3', U_2' és U_3' az indexek ciklikus felcserélésével adódik:

$$Q_2' = \frac{C_2^2/C_1 + C_3/U_2 - C_1C_2C_3/U_1 + U_3/}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_2C_1}$$

$$U_2' = \frac{C_2/C_1 + C_3/U_2 - C_1C_3/U_1 + U_3/}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_2C_1}$$

$$Q_3' = \frac{C_3^2/C_1 + C_2/U_3 - C_1C_2C_3/U_1 + U_2/}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_2C_1}$$

$$U_3' = \frac{C_3/C_1 + C_2/U_3 - C_1C_2/U_1 + U_2/}{C_2C_3 + C_1C_3 + C_2C_1}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$Q_1' = \frac{/1\mu F/^2/2\mu F + 5\mu F/200\ V - 1\mu F.2\mu F.5\mu F/300\ V + 100\ V/}{2\mu F.5\mu F + 1\mu F.5\mu F + 2\mu F.1\mu F} =$$
$$= -\,1{,}53.10^{-4}C$$

$$Q_2' = \frac{/2\mu F/^2/1\mu F + 5\mu F/300\ V - 1\mu F.2\mu F.5\mu F/200\ V + 100\ V/}{2\mu F.5\mu F + 1\mu F.5\mu F + 2\mu F.1\mu F} =$$

$$= 2{,}47.10^{-4} C$$

$$Q_3' = \frac{/5\mu F/^2/1\mu F + 2\mu F/100\ V - 1\mu F.2\mu F.5\ F/200\ V + 300\ V/}{2\mu F.5\mu F + 1\mu F.5\mu F + 2\mu F.1\mu F} =$$

$$U_1' = \frac{1\mu F/2\mu F + 5\mu F/200\ v - 2\mu F.5\mu F/300\ V + 100\ v/}{2\mu F.5\mu F + 1\mu F.5\mu F + 2\mu F.1\mu F} = -\ 153\ V$$

$$U_3' = \frac{5\mu F/1\mu F + 2\mu F/100\ V - 1\mu F.2\mu F/200\ V + 300\ V/}{2\mu F.5\mu F + 1\mu F.5\mu F + 2\mu F.1\mu F} = 29\ V$$

$$U_2' = \frac{2\ F/1\mu F + 5\mu F/300\ V - 1\mu F.5\mu F/200\ V + 100\ V/}{2\mu F.5\mu F + 1\mu F.5\mu F + 2\mu F.1\mu F} = 124\ V$$

A negativ előjel azt jelenti,hogy a pólusok megfordulnak.

70/. A C_1 és C_2 kapacitásu kondenzátorokat kezdetben Q_1 és Q_2 töltéssel töltünk fel.Vizsgáljuk a felhalmozott elektromos energia változását,ha a két kondenzátort párhuzamosam kötjük!

A megadott mennyiségek:

C_1
C_2
Q_1
Q_2

A meghatározandó mennyiség;

Az enrgia változása; ΔW = ?

Legyen a C_1 kondenzátor A fegyverzetén Q_1 töltés,a C_2 kondenzátor B fegyverzetén Q_2 töltés.Ha az A és B valamint az átellenes fegyverzeteket összekötjük,a töltésmegmaradás törvénye miatt az A és B fegyverzeteken lévő töltések összege nem változik.A párhuzamosan kapcsolt kondenzátorok eredő kapacitása $C_1 + C_2$.

Igy a végső állapot energiája $\frac{1}{2}\ \frac{/Q_1 + Q_2/^2}{C_1 + C_2}$

Az elektromos tér energiaváltozása:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\frac{(Q_1 + Q_2)^2}{C_1 + C_2} - \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1^2}{C_1} + \frac{Q_2^2}{C_2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{(C_2Q_1 - C_1Q_2)^2}{C_1C_2(C_1 + C_2)}$$

Amiből látható,hogy $\Delta W \leq 0$,azaz az elektromos tér energiája nem növekszik.Az energiaváltozás akkor és csak akkor zérus,ha $Q_2C_1 - C_2Q_1 = C_1C_2(U_2 - U_1) = 0$
Ebben az esetben a kondenzátorok eredetileg egyenlő feszültségre voltak feltöltve,és az egyforma töltésü fegyverzeteket kötöttük össze.Minden más esetben csökken az elektromos tér energiája.

71/. Sikkondenzátor 10 mm távolságu,5 dm^2 felületü lemezei közül az egyikre 6 relativ dielektromos állandóju 3 mm vastag üveg szigetelést ragasztunk.A kondenzátort 10 kV feszültségre töltjük,majd az energiaforrásról lekapcsoljuk.A lemezek távolságát felére csökkentjük.Mekkora munkát végzünk,és mennyivel változik meg a kondenzátor feszültsége ?

A megadott mennyiségek:

$\varepsilon_1 = 6$
$\varepsilon_2 = 1$
$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
$U = 10^4$ V
$F = 0{,}05$ m^2
$d_1 = 0{,}003$ m
$d_2 = 0{,}007$ m
$d_2' = 0{,}002$ m

A meghatározandó mennyiségek:

A munkavégzés a lemezek távolságának csökkentésénél; W = ?
A kondenzátor feszültségének változása; U = ?
Lemezes kondenzátor kapacitása akkor,ha a lemezek között kétféle dielektrikum van,ugy számolható,mintha két homogén dielektrikumu kondenzátor volna sorbakapcsolva.
Egy kondenzátor kapacitása:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r F}{d}$$

A kétféle dielektrikumu kondenzátor kapacitása:

$$C = \varepsilon_0 F \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

Ha a kondenzátor lemezeinek távolságát megváltoztatjuk, a kondenzátor kapacitása:

$$C' = \varepsilon_0 F \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2'} \text{ -re változik,}$$

de a lemezeken levő töltésmennyiség a töltésmegmaradás törvénye miatt változatlan marad, azaz $Q = UC = U'C'$, ebből a kondenzátor megváltozott feszültsége a kapacitások figyelembevételével:

$$U' = U\frac{C}{C'} = U\frac{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2'}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

A kondenzátor feszültségének változása:

$$\Delta U = U' - U = U\frac{\varepsilon_2 d_1 - \varepsilon_1 d_2'}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$\Delta U = 10^4\ V \frac{1.0{,}003\ m - 6.0{,}002\ m}{1.0{,}003\ m + 6.0{,}007\ m} = -6{,}7.10^{-4}\ V$$

Tehát a kondenzátorunk feszültsége 6,7 kV-tal csökken.
A kondenzátor összenyomásakor végzett munka a kondenzátor energiájának megváltozásával egyenlő, amely:

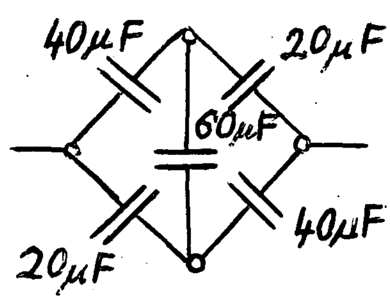
$$\Delta W = \frac{1}{2}\ UQ = \frac{1}{2}\,\Delta U.U\,\varepsilon_0 F \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$\Delta W = \frac{1}{2}/-6{,}7.10^{-4}V/.10^4 V.8{,}854.10^{-12}\frac{AS}{Vm}.0{,}05m^2 \frac{6.1}{1.0{,}003\ m + 6.0{,}007\ m} = -1{,}97\ J$$

Tehát a kondenzátor erőtere végzett 1,97 joule munkát.

72/.ˣ Határozzuk meg az ábra szerint összekapcsolt kondenzátorok eredő kapacitását!

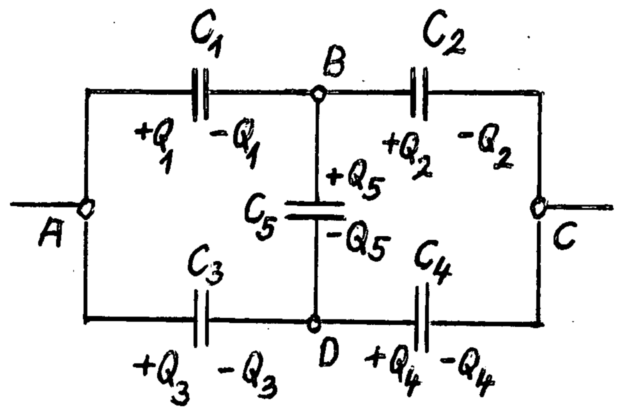


A megadott mennyiségek:

$C_1 = 40\ \mu F$

$C_2 = 20\ \mu F$

$C_3 = 20\,\mu F$
$C_4 = 40\,\mu F$
$C_5 = 60\,\mu F$
A meghatározandó mennyiség:
A kondenzátorrendszer eredő kapacitása; $C = ?$
A kondenzátorok kapcsolása áttekinthetőbb a mellékelt ábra szerinti kapcsolásban, ahol a $Q_1, Q_2, .., Q_5$ illetve $-Q_1, -Q_2, .., -Q_5$ töltések a kondenzátorok fegyverzetén, a rendszer A pontjára vitt + Q, illetve a C pontjára vitt - Q töltésekkel való feltöltések eredménye. Azonos kondenzátorokhoz tartozó fegyverzeteken a különböző előjelü, de azonos nagyságu töltések elektromos megosztás eredményei. /Az 5-ös jelü kondenzátoron lehetséges, hogy éppen forditott előjelü a feltöltődés, mert egyenlőre az előjelet önkényesen vettük fel, ami azért megengedett, mert ez a számitást nem befolyásolja/



A B /illetve D/ pontban összekapcsolt kondenzátorlemezeken csak megosztás révén keletkezhetett töltés, azaz a töltésmegmaradás törvénye szerint:

$$-Q_1 + Q_2 + Q_5 = 0 \qquad /1/$$
$$-Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0 \qquad /2/$$

Másrészt az A illetve C pontokra vitt töltések:

$$Q = Q_1 + Q_3 \quad ; \quad -Q = -Q_2 - Q_4 \quad \text{innen:}$$
$$Q = Q_1 + Q_3 = Q_2 + Q_4 \qquad /3/$$

További összefüggések kaphatók a kapcsolásban valamely zárt "hurok" mentén körbejárva, a kondenzátorok /előjelesen vett/ feszültségeit összegezve, ugyanis ezen összegek szükségképpen zérusak.

Például az A ponttól önmagáig az ADBA kapcsolás mentén levő kondenzátorok feszültségeinek előjeles összegeire

$$\frac{Q_3}{C_3} - \frac{Q_5}{C_5} - \frac{Q_1}{C_1} = 0 \qquad /4/$$

Hasonlóan a CBDC hurokra:

$$-\frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_5}{C_5} + \frac{Q_4}{C_4} = 0 \qquad /5/$$

Felhasználva még azt,hogy az A és C pontok között a feszültség:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4} \qquad /6/$$

Az /1/,...,/6/ egyenletrendszerből a kondenzátorrendszer eredő kapacitása meghatározható.Mivel a $C_1,\dots,C_5$ kapacitások nagysága feladatunkban egymáshoz viszonyitva nem relativprimek lényegesen egyszerüsödik megoldásuk,ha értéküket a /4/,/5/ egyenletekbe behelyettesitjük.Még felhasználva a /2/ és /3/ egyenletekből kapható

$$Q_5 = Q_4 - Q_3$$
$$Q_2 = Q - Q_4$$
$$Q_1 = Q - Q_3$$

összefüggéseket a /4/, /5/ egyenletek

$$11\,Q_3 - 2\,Q_4 = 3\,Q$$
$$-2\,Q_3 + 11\,Q_4 = 6\,Q$$

alakba hozhatók,amelyekből:

$$Q_3 = \frac{5}{13}Q \qquad \text{és} \qquad Q_4 = \frac{8}{13}Q$$

Végül a /6/ összefüggésbe helyettesitve:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q_3}{C_3} + \frac{Q_4}{C_4}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$\frac{Q}{C} = \frac{\frac{5}{13}Q}{20\,\mu F} + \frac{\frac{8}{13}Q}{40\,\mu F}$$

amelyből: $C = \frac{260}{9}\mu F$

Tehát az eredő kapacitás: $C = \frac{260}{9}\mu F$

73/. Egy akkumlátor sarkaira párhuzamosan kapcsolt három vezetéken rendre 1 A,1,6 A,2,7 A erősségü egyenáram folyik.Mekkora áramot ad le az akkumulátor ?

A megadott mennyiségek:

$I_1 = 1$ A

$I_2 = 1{,}6$ A

$I_3 = 2{,}7$ A

A meghatározandó mennyiség:

Az akkumulátor által leadott áram erőssége; I = ?

Alkalmazhatjuk Kirchhoff csomóponttörvényét,amely szerint:

$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

A megadott mennyiségekkel:

$$I = 1\text{ A} + 1{,}6\text{ A} + 2{,}7\text{ A} = 5{,}3\text{ A}$$

74/. Az iskolai árammérő müszer belső ellenállása 20 ohm,5 mA áramerősség mellett pedig végkitérést mutat a müszer.Mekkora ellenállást /söntöt/ kell az árammérővel párhuzamosan kapcsolni a méréshatár 1 A-re való kiterjesztéséhez ?

A megadott mennyiségek:

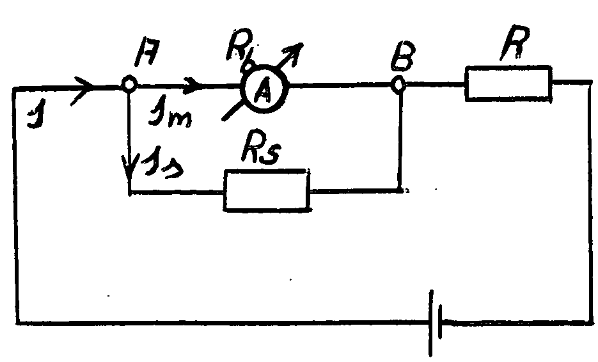
$R_b = 20$ ohm

$I_m = 0{,}005$ A

$I = 1$ A

A meghatározandó mennyiség:

Az alkalmazandó sönt ellenállás nagysága; R_s = ?



A müszerrel a kiégetés veszélye nélkül mérhető I áramerősségnek csak I_m nagyságu része haladhat át a müszeren,a többi része,I_s pedig a söntön folyik keresztül. Kirchhoff csomóponttörvénye szerint fennáll az

$$I = I_m + I_s \qquad /1/$$

összefüggés.

Az A és B csomópontok között a feszültség a müszeren és a söntágon egyenlő, ezért Ohm törvényének felhasználásával felirható az

$$I_s R_s = I_m R_b \qquad /2/$$

összefüggés.

Ha a müszer mérési határát n-szeresére kivánjuk növelni / azaz: $I = nI_m$ / akkor /1/-ből:

$$I_s = /n-1/I_m \text{ ,és igy}$$

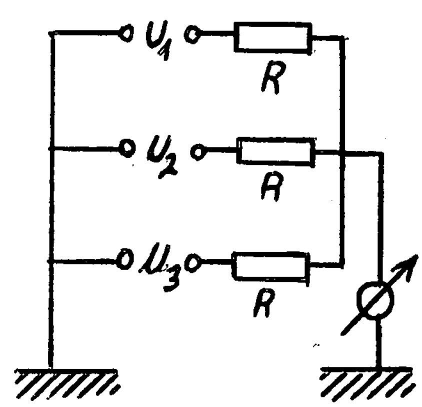
/2/-ből:

$$R_s = \frac{R_b}{n-1}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$R_s = \frac{20 \text{ ohm}}{\frac{1 \text{ A}}{0{,}005 \text{ A}} - 1} \approx 0{,}1 \text{ ohm}$$

75/. Milyen kapcsolat van az U_1,U_2,U_3,Földhöz viszonyitott feszültségek között,ha az egyenlő nagyságu R ellenállások közös pólusa és a Föld közé kapcsolt müszer nem mutat áramot ?



A megadottmennyiségek:

U_1

U_2

U_3

R

A meghatározandó mennyiség:

Összefüggés keresése az U_1, U_2, U_3 feszültségek között.

Az áram-,illetve feszültségmérő müszeren gyakorlatilag zérus fezsültség esik,illetve zérus áram folyikkeresztül.

Igy az egyes ágakban folyó I_1,I_2, I_3 áramokkal Kirchhoff csomóponttörvénye:

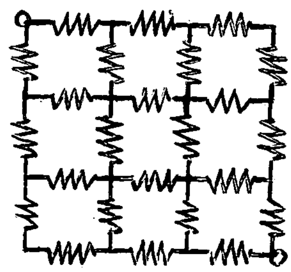
$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Mivel a müszeren eső feszültség zérus az egyes ágakra az

$U_1 - I_1R = 0$
$U_2 - I_2R = 0$
$U_3 - I_3R = 0$
összefüggések érvényesek,amelyekből az áramerősségeket kifejezve és behelyettesive az áramerősségekre felirt Kirchhoff törvénybe / a közös R-rel szorozva/

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0 \quad \text{adódik.}$$

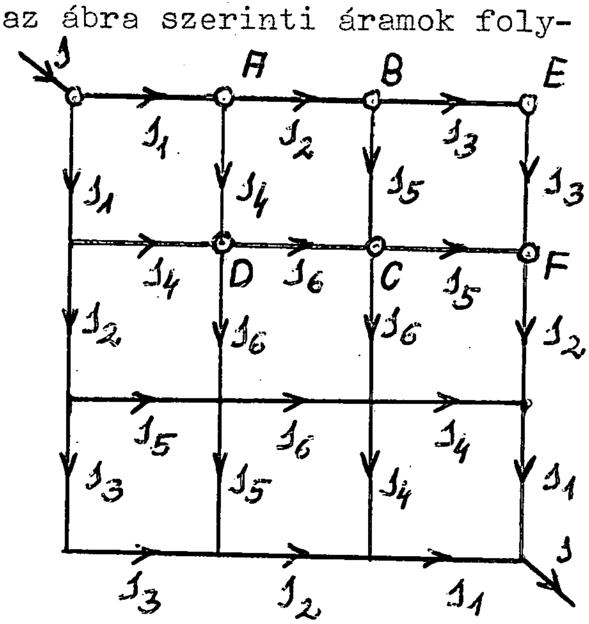
76/^{x}. Mekkora a két szemközti csucs között mérhető ellenállás,ha az ábrán látható négyzetháló alaku elrendezésben minden ellenállás nagysága R ?



A megadott mennyiség:
R

A meghatározandó mennyiség:
Az ellenállásháló eredő ellenállása; $R_e = ?$

A hálózat szimmetriája miatt az ábra szerinti áramok folynak az egyes ellenállásokon.



Kirchhoff csomóponttörvénye alapján:

$$\begin{aligned} I &= 2I_1 \\ I_2 &= I_3 + I_5 \\ I_1 &= I_2 + I_4 \\ 2I_4 &= 2I_6 \end{aligned} \qquad /1/$$

Másrészt Kirchoff huroktörvénye
ABCD-re:
$$R/I_2 + I_5 - I_6 - I_4/ = 0$$
CDEF-re: /2/
$$R/\,2I_5 - 2I_3/ = 0$$

Ha a hálózatra kapcsolt feszültség U,akkor Ohm törvénye szerint:

$$R_e = \frac{U}{I} \quad \text{,ahol} \quad U = R/\,I_1 + I_2 + I_3 + I_3 + I_2 + I_1/$$

melyet az /1/ és /2/ egyenletrenszerekkel együtt figyelembevéve:

$$R_e = \frac{U}{I} = 2R\,\frac{I_1 + I_2 + I_3}{I} = 2R\,\frac{\frac{1}{2}I + \frac{2}{7}I + \frac{1}{7}I}{I} =$$

amelyből:

$$R_e = \frac{13}{7} R$$

77/. Három ellenállást párhuzamosan kapcsolunk.Közülük kettő értékét ismerjük: 20 ohm,illetve 5 ohm.Mekkora a harmadik ellenállás,ha az eredő ellenállás 1 ohm ?

A megadott mennyiségek:

R_1 = 20 ohm

R_2 = 5 ohm

R = 1 ohm

A meghatározandó mennyiség:

A harmadik ellenállás; R = ?

Valamennyi párhuzamosan kapcsolt ellenállás végpontjai között a feszültség ugyanakkora: $U_1 = U_2 = U_3 = U$

Ha a párhuzamosan kötött ellenállásokon I_1, I_2, I_3 erősségü áramok folynak,akkor Ohm törvénye szerint:

$I_1 R_1 = I_2 I_2 = I_3 R_3 = U$ azaz áramelágazás esetén az egyes ágakban folyó áramerősségek forditottan arányosak az egyes ágak ellenállásával.

Az R_1?R_2,R_3 ellenállások eredőjén azt az R ellemállást értjük,amelyet a páhuzamosan kötött ellenállások helyére kötve a főágban folyó áram erőssége változatlan marad.

Az egyes ágakban az áramerősségek:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad ; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad ; \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

A főágban folyó áram erőssége:

$$I = \frac{U}{R}$$

Kirchhoff csomóponttörvénye szerint: $I = I_1 + I_2 + I_3$

azaz: $\frac{U}{R} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$ ebből: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$

Tehát a párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének reciproka egyenlő az egyes ellenállások reciprokának összegével.

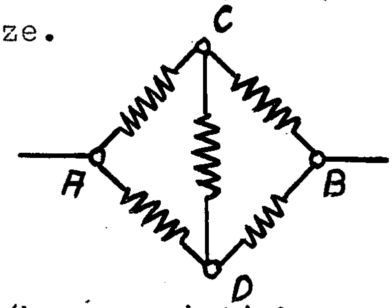
A harmadik ellenállást kifejezve:

$$R_3 = \frac{RR_1R_2}{R_1R_2 - R/R_1 + R_2/}$$ összefüggést kapjuk.

Az ismert mennyiségekkel:

$$R_3 = \frac{1\ \text{ohm}.20\ \text{ohm}.5\ \text{ohm}}{20\ \text{ohm}.5\ \text{ohm} - 1\ \text{ohm}/20\ \text{ohm} + 5\ \text{ohm}/} = 1\tfrac{1}{3}\ \text{ohm}$$

78/. Öt darab vezetéket,amelyek ellenállása egyenlő,az ábrának megfelelő módon kapcsolunk össze. Mekkora a rendszer eredő ellenállása ?



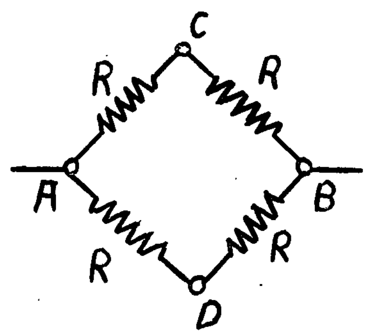
A megadott mennyiségek:

R

A meghatározandó mennyiség:

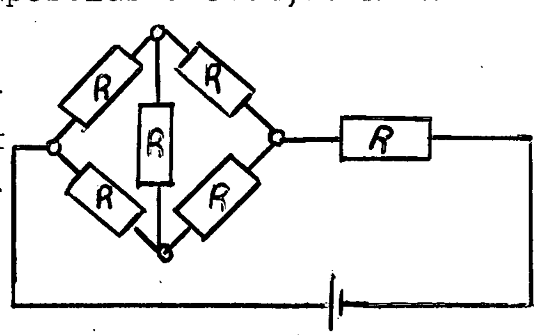
R_e = ?

Ellenállás rendszerünk felépithető az ábra szerinti kapcsolásból,a C,D csomópontok közé kapcsolt R ellenállás segitségével.A tökéletes szimmetria miatt A és C csomópontok,illetve A és D csomópontok között azonos erősségü áram folyik,igy Ohm törvénye alapján meghatározható feszültségesések ezen szakaszokon egyenlőek. Tehát C és D csomópontok között nincs feszültségkülönbség,a beiktatandó R ellenálláson nem folyik áram.Igy az eredeti rendszer eredő ellenállása azonos a hiányos rendszer eredő ellenállásával,amely:



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \qquad \text{ebből:} \quad R_e = R$$

79/. Az ábra szerinti kapcsolás esetén,ha R ellenállások értéke egyenlő,akkor a főágban I erősségü áram folyik.Hányszorosára változik ez az áram,ha két,átellenesen fekvő ellenállás értékét megkétszerezzük ?



A megadott mennyiségek:

R

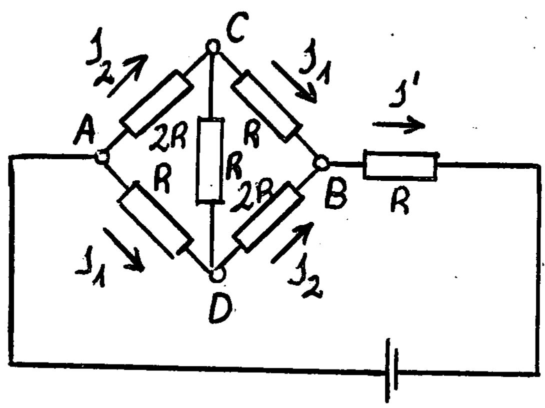
I

A meghatározandó mennyiség:

Az áramerősségek aránya; I'/I = ?

Az első esetben az ábra szerinti C és D csomópontok feszültsége /szimmetrikus elrendezés miatt/ egyenlő, ezért a közöttük levő, átlósan elhelyezett ellenállást kiiktathatjuk, hiszen ezen úgysem folyik át áram. Az ACB ág, valamint az ADB ág ellenállása 2R, ezért a két párhuzamosan kapcsolt ág eredője R, amely sorba van kapcsolva a különálló R ellenállással. Igy az egész áramkör ellenállása 2R és a feszültség Ohm törvénye alapján: $U = 2RI$

A két ellenállás megkétszerezése után C és D csomópontok feszültsége különböző, az őket összekapcsoló ellenálláson áram folyik át, melyet jelöljünk I_3-mal. /ezért most ez az ellenállás nem vehető ki/ Az A csomópontban a teljes I' áramerősség I_1 és I_2 részre oszlik szét. A feszültségesés az A-C csomópontok között a 2R ellenálláson át ugyanannyi, mint az ADC uton:



$2RI_2 = RI_1 + RI_3$, azaz $2I_2 = I_1 + I_3$ /1/

Alkalmazhatjuk Kirchhoff csomóponttörvényét az A és D csomópontokra:

$$I' = I_1 + I_2 \qquad /2/$$

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad /3/$$

Az /1/,/2/,/3/ egyenletekből álló egyenletrendszerünket I_1, I_2, I_3-ra megoldva:

$$I_1 = \frac{3}{5} I'$$

$$I_2 = \frac{2}{5} I'$$

$$I_3 = \frac{1}{5} I'$$

Ezeket felhasználva az egész feszültségesés az A és B csomópontok között:

$$2RI_2 + RI_1 = \frac{7}{5} RI' ,$$

amelyet I' áramerősséggel osztva Ohm törvénye miatt, a hálózat A és B csomópontok közötti részének eredő ellenállását kapjuk: $\frac{7}{5}R$. Ezzel sorba kapcsolva a különálló R ellenállást az áramkör teljes ellenállása /a két szembenfekvő ellenállás megkétszerezése után/: $\frac{7}{5}R + R = \frac{12}{5}R$, ebből

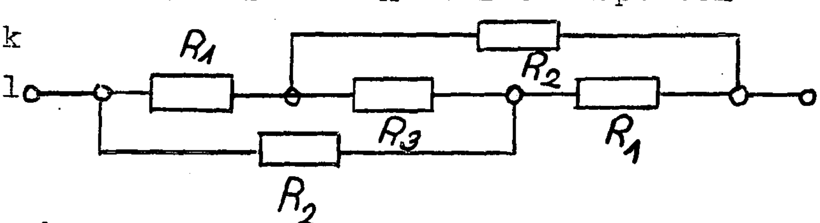
Ohm törvényének alkalmazásával az áramerősség /az áramkör változatlan nagyságu teljes feszültségét felhasználva/:

$$I' = \frac{U}{\frac{12}{5}R} = \frac{2RI.5}{12R} = \frac{5}{6}I$$

Igy tehát az áramerősségek aránya:

$$I'/I = \frac{\frac{5}{6}I}{I} = \frac{5}{6}$$

80/^{x}. Mennyi az eredő ellenállás az A és B csomópontok között, ha az ábrának megfelelő jelöléssel $R_1 = 5R$, $R_2 = 3R$, $R_3 = 10R$?



A megadott mennyiségek:

$R_1 = 5R$

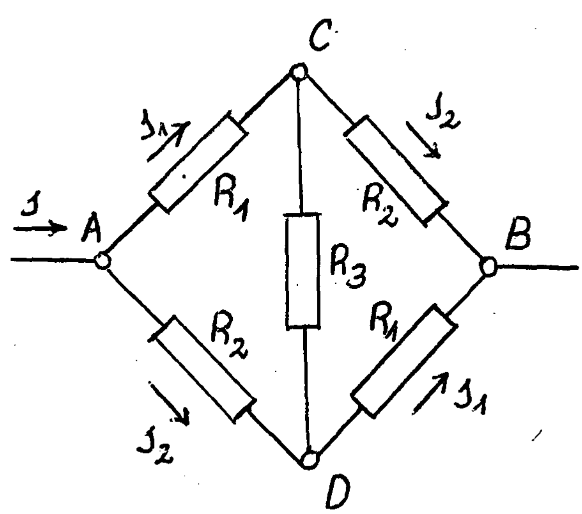
$R_2 = 3R$

$R_3 = 10R$

A meghatározandó mennyiség:

AZ eredő ellenállás; R = ?

Rendezzük át az ábrát:



Ugynevezett kiegyensulyozatlan Wheatstone-hidról van szó. Szimmetria következtében az egymással szemben elhelyezett R_1 és R_2 ellenállásokon átfolyó áramerősségek egyenlők. Az ágak áramerősségeit az ellenállások indexeinek megfelelően jelöljük I_1, I_2,

I_3-mal.

Kirchhoff csomóponttörvényét a D csomópontra alkalmazva:

$$I_2 = I_1 + I_3 \qquad /1/$$

A feszültségesés A csomóponttól C csomópontig az egyenes uton ugyanannyi, mint az ADC uton:

$$R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \qquad /2/$$

Az /1/,/2/ egyenletrendszerben ismeretleneknek tekintjük I_1-et és I_2-t. Ezekre megoldva az egyenletrendszer, az ellenállások értékeinek felhasználásával:

$$I_1 = \frac{13}{2} I_3,$$

$$I_2 = \frac{15}{2} I_3.$$

Az A csomóponttól B csomópontig a teljes feszültségkülönbség /ACB uton számolva/, a megfelelő ágakon átfolyó áramerősségek felhasználásával:

$$U = R_1 I_1 + R_2 I_2 = 5R\frac{13}{2}I_3 + 3R\frac{15}{2}I_3 = 55RI_3$$

Kirchhoff csomóponttörvényét az A csomópontra alkalmazva, a teljes áramerősséget kapjuk:

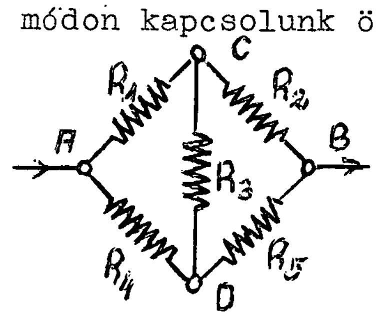
$I = I_1 + I_2$, amely a megfelelő ágakon átfolyó áramerősségek felhasználásával:

$$I = \frac{13}{2}I_3 + \frac{15}{2}I_3 = 14I_3$$

Az eredő ellenállás Ohm törvénye alapján:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{55RI}{14I} = \frac{55}{14}R .$$

81/^{x}. Öt darab vezetéket, amelyek ellenállása rendre R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 az ábrának megfelelő módon kapcsolunk össze. Az áram A csomóponttól B csomópontig folyik. Mekkora az egész rendszer ellenállása ?



A megadott mennyiségek:

R_1

R_2

R_3
R_4
R_5
A meghatározandó mennyiség:
Az eredő ellenállás; $R = ?$
Legyenek az egyes ellenállásokon folyó áramerősségek rendre I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.
A C és D csomópontokban való elágazásokra Kirchhoff csomóponttörvényét alkalmazva:

$$I_1 = I_2 + I_3$$
$$I_5 = I_3 + I_4$$

A feszültségesés az ACD uton ugyanannyi, mint egyenesen, az AD uton:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = I_4 R_4$$

A feszültségesés a CDB uton ugyanannyi, mint egyenesen, a CB uton:

$$I_3 R_3 + I_5 R_5 = I_2 R_2$$

Az öt szereplő áramerősség közül egyet, például I_2-t ismertnek tekintve megoldjuk a négyismeretlenes egyenletrendszert. Kifejezve például I_1-et és I_4-et:

$$I_1 = \frac{R_2R_4 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5}{R_1R_5 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5} I_2 \qquad \text{és}$$

$$I_4 = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_5 + R_2R_3}{R_1R_5 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5} I_2$$

A teljes áramerősség, amely A csomópontban elágazik, Kirchhoff csomóponttörvénye alapján:

$$I = I_1 + I_4$$

A feszültségesés A és B csomópontok között, az ACB uton:

$$U = I_1 R_1 + I_2 R_2$$

Az eredő ellenállás Ohm törvénye szerint:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{I_1R_1 + I_2R_2}{I_1 + I_4}$$ amiből, felhasználva I_1-re

és I_4-re kapott összefüggéseinket I_2-vel egyszerüsitve az eredő ellenállás:

$$= \frac{R_1R_2R_4 + R_1R_2R_5 + R_1R_3R_4 + R_1R_3R_5 + R_1R_4R_5 + R_2R_3R_4 + R_2R_3R_5 + R_2R_4R_5}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_5 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4 + R_3R_5 + R_4R_5}$$

A számlálóban az ellenállások hármas szorzatai szerepelnek, a lehetséges tiz kombináció helyett csak nyolc; a hiányzók $R_1R_2R_3$ és $R_3R_4R_5$. A nevezőben az ellenállások kettes szorzatai szerepelnek, a lehetséges tiz kombináció helyett csak nyolc; a hiányzók R_1R_4 és R_2R_5. A kapcsolási ábrán látható, hogy a hiányzó négy tag különleges helyzetü.

- - -

82/^{x} Bizonyitsuk be, hogy ha egy E elektromotoros erejü, R_0 belső ellenállásu teleppel táplált Wheatstone-hid hidágának megszakitása esetén valamelyik ágban az áramerősség nem változik meg, akkor a hid ki van egyenlitve.

A megadott mennyiségek:

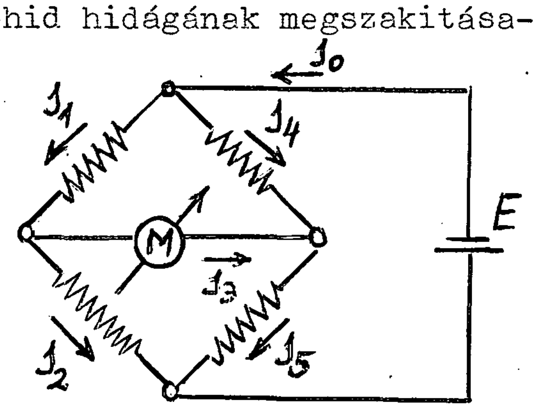
E

R_0

A meghatározandó mennyiség:

Bizonyitandó, hogy ha van a Wheatstone-hidnak olyan ága, amelyben a fenti beavatkozás esetén nem változik meg az áramerősség, akkor a hid ki van egyenlitve.

Tegyük fel, hogy a feladat állitásával ellentétben egy kiegyenlitetlen Wheatstone-hid hidágának megszakitásakor az egyik, például /az ábra szerinti indexezéssel jelölve/ az 1-es ágának árama változatlan. Az ábrán látható kiegyenlitetlen Wheatstone-hidra Kirchhoff csomópont-



törvényét alkalmazva:

$$I_1 + I_4 = I_0 \qquad /1/$$

$$I_2 + I_3 = I_1 \qquad /2/$$

$$I_2 + I_5 = I_0 \qquad /3/$$

Másrészt a megfelelő ellenállásokat az áramokka l azonos indexezéssel ellátva Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = I_4R_4 + I_5R_5 \qquad /4/$$

$$I_0R_0 + I_1R_1 + I_2R_2 = E \qquad /5/$$

Az /1/,/2/,..,/5/ egyenletrendszerből I_0, I_1, I_2, I_4, I_5-,t e-hát I_3 kivételével az összes áramerősség meghatározható, például az I_1:

Az /1/,/2/,/3/ egyenletekből

$$I_2 = I_1 - I_3$$

$$I_4 = I_0 - I_1$$

$$I_5 = I_0 - I_1 + I_3$$

amelyeket /5/4/ egyenletekbe helyettesitve:

$$I_1R_1 + I_1R_2 - I_3R_2 = I_0R_4 - I_1R_4 + I_0R_5 - I_1R_5 + I_3R_5 \qquad /6/$$

és $I_0R_0 + I_1R_1 + I_1R_2 - I_3R_2 = E$ /7/ /6/-ot rendezve az áramok szerint:

$$I_1/R_1 + R_2 + R_4 + R_5/ = I_0/R_4 + R_5/ + I_3/R_2 + R_5/$$

,amelyből /7/ segitségével I_0-at kiküszöbölve:

$$I_1/R_1 + R_2 + R_4 + R_5/R_0 - I_3/R_2 + R_5/R_0 =$$

$$= - I_1/R_1 + R_2/;/R_4 + R_5/ + I_3/R_4 + R_5/R_2 + E/R_4 + R_5/ ,$$

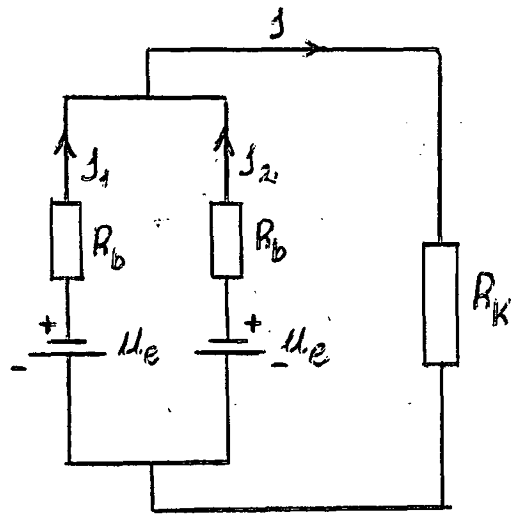
ahonnan I kifejezve:

$$I_1 = \frac{I_3\left[R_2/R_4 + R_5/ + R_0/R_2 + R_5/\right] + E/R_4 + R_5/}{R_0/R_1 + R_2 + R_4 + R_5/ + /R_1 + R_2/\cdot/R_4 + R_5/}$$

azaz $I_1 = aI_3 + bE$ alaku, ahol a és b 0-tól különböző konstansok, amelyek nem függnek a hidág ellenállásától, tehát a

a hidág megszakitásakor változatlanok.
Megszakitáskor $I_3 = 0$ lesz, tehát I_1 csak ugy maradhat változatlan, ha I_3 eredetileg zérus volt, azaz a hid kiegyenlitett volt.

83/. Két azonos 1,8 V elektromotoros erejü 50 ohm belső ellenállásu telepet párhuzamosan kapcsoltunk, majd 75 ohm terhelő ellenállást kapcsoltunk rá. Mekkora a terhelő ellenálláson folyó áram erőssége ?



A megadott mennyiségek:

$U_e = 1,8$ V

$R_b = 50$ ohm

$R_k = 75$ ohm

A meghatározandó mennyiség:
A terhelő ellenálláson folyó áram erőssége; $I = ?$

Az ábra jelöléseivel Kirchhoff csomóponttörvénye alapján: $I_1 + I_2 = I$

Mivel a párhuzamosan kapcsolt két telep elektromos szempontból azonos, ezért mindkettőn azonos nagyságu áram folyik: $I_1 = I_2$

A külső áramhurokra -az óramutató járásának megfelelő körüljárással- Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva $U_e = I_1 R_b + I R_k$

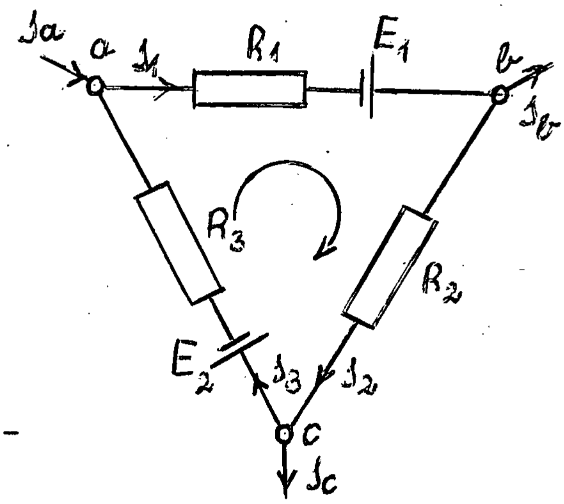
A három összefüggésből a kérdéses áramerősséget meghatározhatjuk:

$$I = \frac{U_e}{0,5R_b + R_k}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$I = \frac{1,8 \text{ V}}{0,5.50 \text{ ohm} + 75 \text{ ohm}} = 0,018 \text{ A}$$

84/ˣ. Az ábrán megadott kapcsolásban az elhanyagolható belső ellenállásu telepek elektromotoros ereje $E_1 = 6$ V , $E_2 = 12$ V ,az ellenállások $R_1 = 1$ ohm,$R_2 = 6$ ohm, $R_3 = 3$ ohm nagyságuak,a hurokhoz a csomópontokban kapcsolódó vezetőkben $I_a = 3$A , $I_b = 4$ A áram folyik.Meghatározandó a hurok egyes ágaiban és a c csomóponthoz kapcsolódó vezetőben folyó áram erőssége valamint a két-két csomópont közötti feszültségek.



A megadott mennyiségek:

$E_1 = 6$ V

$E_2 = 12$ V

$R_1 = 1$ ohm

$R_2 = 6$ ohm

$R_3 = 3$ ohm

$I_a = 3$ A

$I_b = 4$ A

A meghatározandó mennyiségek:

A hurok egyes ágaiban folyó áramok erőssége; $I_1 = ?$

$I_2 = ?$

$I_3 = ?$

A c csomópontban kapcsolódó vezetőben folyó áram erőssége;

$I_c = ?$

Két-két csomópont közötti feszültségek: $U_{ac} = ?$

$U_{cb} = ?$

$U_{ba} = ?$

Alkalmazhatjuk Kirchhoff csomóponttörvényét az a,b,c csomópontokra:

$$I_a + I_3 = I_1$$

$$I_b + I_2 = I_1 \qquad /1/$$
$$I_c + I_3 = I_2$$

valamint a teljes körre Kirchhoff huroktörvényét:

$$E_2 - E_1 = U_1 + U_2 + U_3 \qquad /2/$$

ahol U_1, U_2, U_3 az R_1, R_2, R_3 ellenállásokon eső feszültségek.
Ohm törvénye szerint $U_1 = I_1 R_1$

$$U_2 = I_2 R_2 \qquad /3/$$
$$U_3 = I_3 R_3$$

Az /1/ egyenletrendszerből:

$$I_c = I_a - I_b$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$I_c = 3\ A - 4\ A = -1\ A$$

Az /1/,/2/,/3/ egyenletrendszerekből kifejezhető az ágakban folyó áramok egyike,például I_3 :

$$I_3 = \frac{E_2 - E_1 - I_a R_1 - I_c R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$I_3 = \frac{12\ V - 6\ V - 3\ A.1\ ohm - /-1\ A/.6\ ohm}{1\ ohm + 6\ ohm + 3\ ohm} = 0{,}9\ A$$

Az /1/ egyenletrendszerből az 1 és 2 jelü ágban folyó áramok erőssége:

$$I_1 = I_a + I_3$$
$$I_2 = I_c + I_3$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$I_1 = 3\ A + 0{,}9\ A = 3{,}9\ A$$
$$I_2 = -1\ A + 0{,}9\ A = -0{,}1\ A$$

A /3/ egyenletrendszerből az R_1, R_2, R_3 elelnállásokon eső feszültségek:

$$U_1 = R_1 I_1$$
$$U_2 = R_2 I_2$$
$$U_3 = R_3 I_3$$

A két csomópont közötti feszültség:

$U_{ac} = U_3 - E_2$

$U_{cb} = U_2$

$U_{ba} = U_1 + E_1$

Az ismert mennyiségekkel:

$U_1 = 1\ \text{ohm}.3,9\ A = 3,9\ V$

$U_2 = 6\ \text{ohm}./-\ 0,1\ A/ = -\ 0,6\ V$

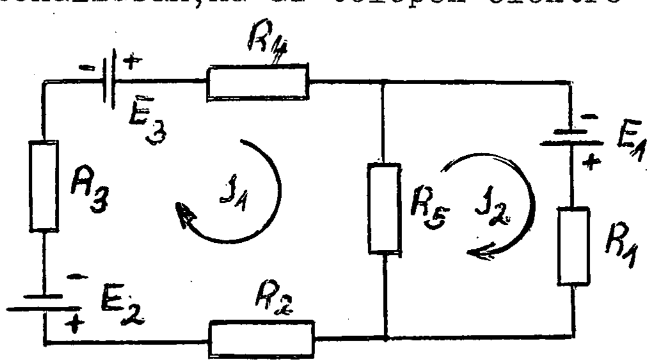
$U_3 = 3\ \text{ohm}.0,9\ A = 2,7\ V$

$U_{ac} = 2,7\ v - 12\ V = -\ 9,3\ V$

$U_{cb} = -\ 0,6\ V$

$U_{ba} = 3,9\ V + 6\ V = 9,9\ V$

85/[x] Mekkora a feszültség az ábrán megadott kapcsolás $R_5 = 12$ ohm nagyságu ellenállásán, ha az telepek elektromotoros ereje rendre $E_1 = 3$ V, $E_2 = 2$ V, $E_3 = 2,4$ V, az ellenállások pedig $R_1 = 1$ ohm $R_2 = 4$ ohm, $R_3 = 1$ ohm, $R_4 = 2$ ohm nagyságuak ?



A megadott mennyiségek:

$E_1 = 3$ V
$E_2 = 2$ V
$E_3 = 2,4$ V

$R_2 = 4$ ohm

$R_1 = 1$ ohm

$R_3 = 1$ ohm
$R_4 = 2$ ohm
$R_5 = 12$ ohm

A meghatározandó mennyiség:

Az R ellenálláson eső feszültség; U_5 = ?
A két zárt áramkörre /az ábra szerinti feltételezett áramirányokkal/ alkalmazhatjuk Kirchhoff huroktörvényét:

$$E_3 - E_2 = R_2 I_1 + R_3 I_1 + R_4 I_1 + R_5 / I_1 - I_2 /$$

$$E_1 = R_1 I_2 + R_5 / I_2 - I_1 / \qquad \text{amelyekből:}$$

$$I_1 = \frac{/R_1 + R_5/./E_3 - E_2/ + E_1 R_5}{/R_2 + R_3 + R_4/./R_1 + R_5/ + R_1 R_5} \qquad \text{és}$$

$$I_2 = \frac{R_5/E_3 - E_2/ + E_1/R_2 + R_3 + R_4 + R_5/}{/R_2 + R_3 + R_4/./R_1 + R_5/ + R_1 R_5}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$I_1 = \frac{/\,1\ \text{ohm} + 12\ \text{ohm}/./2{,}4\ \text{V} - 2\ \text{V}/ + 3\ \text{V}.12\ \text{V}}{/4\ \text{ohm} + 1\text{ohm} + 2\text{ohm}/./1\text{ohm} + 12\text{ohm}/ + 1\text{ohm}.12\text{ohm}} =$$

$$= 0{,}4\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{12\text{ohm}/2{,}4\ \text{V} - 2\ \text{V}/ + 3\ \text{V}/4\text{ohm} + 1\text{ohm} + 2\text{ohm} + 12\ \text{ohm}/}{/4\text{ohm} + 1\text{ohm} + 2\text{ohm}/./1\text{ohm} + 12\text{ohm}/ + 1\text{ohm}.12\ \text{ohm}} =$$

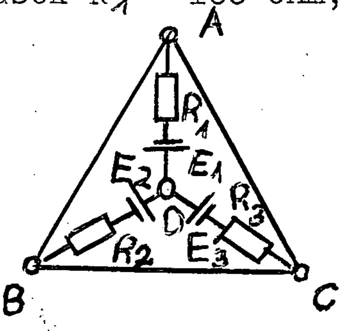
$$= 0{,}6\ \text{A}$$

Az R ellenálláson átfolyó áram erőssége Kirchhoff csomóponttörvényének alkalmazásával: $I_2 - I_1$ ezét az R ellenálláson eső feszültség: $U_5 = R_5/I_2 - I_1/$

Az ismert mennyiségekkel:

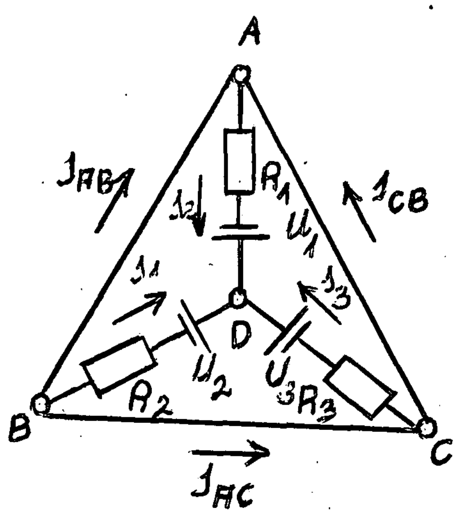
$$U_5 = 12\ \text{ohm}/0{,}6\ \text{A} - 0{,}4\ \text{A}\,/ = 2{,}4\ \text{V}$$

86/.[x] Az ábrán megadott kapcsolásban az elhanyagolható belső ellenállásu telepek elektromotoros ereje: E_1 = 100 V E_2 = 235 V, E_3 = 325 V, az ellenállások R_1 = 100 ohm, R_2 = 70 ohm, R_3 = 50 ohm.
Meghatározandó a hálózat egyes ágaiban folyó áram erőssége.



A megadott mennyiségek:

$E_1 = 100$ V
$E_2 = 235$ V
$E_3 = 325$ V
$R_1 = 100$ ohm
$R_2 = 70$ ohm
$R_3 = 50$ ohm



A meghatározandó mennyiségek:
A hálózat egyes ágaiban folyó áramok erőssége; $I_1 = ?$
$I_2 = ?$
$I_3 = ?$
$I_{AB} = ?$
$I_{AC} = ?$
$I_{CB} = ?$

Az áramirányokat válasszuk meg ugy,hogy a D csomópont felé mutassanak.A D csomópontra alkalmazhatjuk Kirchhoff csomóponttörvényét:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad /1/$$

Az A,B,C csomópontok azonos feszültségen vannak,mivel ideális vezető köti össze őket.
Kirchhoff huroktörvényét alkalmazva:

$$E_1 + I_1R_1 = E_2 + I_2R_2 = E_3 + I_3R_3 \qquad /2/$$

Az /1/,/2/ egyenletekből I_3-at,majd I_2-t kiküszöbőlve:

$$I_1 = \frac{(E_2 - E_1)R_3 + (E_3 - E_1)R_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

Mivel az áramkör szimmetrikus,az I ,I áramerősségeket az 1,2,3 indexek ciklikus cseréjével kaphatjuk:

$$I_2 = \frac{(E_3 - E_2)R_1 + (E_1 - E_2)R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$I_3 = \frac{(E_1 - E_3)R_2 + (E_2 - E_3)R_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

Az ismert mennyiségekkel:

$$I_1 = \frac{/235\ V - 100\ V/50\ ohm + /325\ V - 100\ V/70\ ohm}{100ohm.70ohm + 70ohm.50ohm + 50ohm.100ohm} =$$

$$= 1,452\ A$$

$$I_2 = \frac{/325\ V - 235\ V/100\ ohm + /100\ V - 235\ V/50\ ohm}{100ohm.70ohm + 70ohm.50ohm + 50ohm.100ohm} =$$

$$= 0,145\ A$$

$$I_3 = \frac{/100\ V - 325\ V/70\ ohm + /235\ V - 325\ V/100\ ohm}{100ohm.70ohm + 70ohm.50ohm + 50ohm.100ohm} =$$

$$= -\ 1,597\ A$$

Mivel a vezetékek ideálisak,a Kirchhoff törvények nem határozzák meg az AB,BC,CA ágakban folyó áramerősségeket, csak ezek összegét,illetve különbségét./irányitástól függően/ Például $I_{AB} + I_{CB} = I_2$

Tetszőlegesen kis ellenállások behelyezésével /tehát a reális esetben is/ már egyértelmüen meghatározott áramok folynak minden ágban.

V. BEFEJEZŐ MEGJEGYZÉSEK

A kidolgozott feladatok szerkezetét nem szándékoztunk megbontani az alábbi megjegyzésekkel,amelyek ismerete a feladatok fizikai tartalmának értékelését megkönnyitheti.

a/.A klasszikus mechanika mozgástörvénye szerint valamely tömegpont /pontszerünek tekinthető test/ impulzusának időegységre eső megváltozását minden időpontban a tömegpontra ható erők eredője határozza meg.Mivel az impulzus a tömeg és a sebesség /az elmozdulás idő szerinti differenciálhányadosa/ szorzata,ezért ha térben és időben ismerjük a testre ható erőket,a test mozgásának meghatározása,a mozgásegyenletek megoldása már "csak" matematikai probléma.Bonyolultabb erők esetén ez azonban igen nehéz számitási feladat lehet,sokszor olyan hosszadalmas is /pl az ürhajózás pályaszámitásai/,hogy ésszerü idő alatt csak a modern számitógépek segitségével oldható meg.Éppen ezért nagyon lényeges,hogy sokszor a mozgásra igen értékes információkat nyerhetünk a mozgásegyenletek megoldása nélkül is,akkor,ha a fellépő erők speciális feltételeket teljesitenek.Legtöbb esetben ez az információ a mozgások folyamán bizonyos mennyiségek állandó voltában,azaz megmaradási elvek,tételek alakjában jelentkezik.

b/.A mechanikai energia megmaradásának tételét alkalmazva tudnunk kell,hogy az olyan erő,amely a mozgó testet valamely pályára kényszeriti,mindig merőleges a pályára, és igy munkája mindig zérus.Ezért az energia-tétel alkalmazásakor az ilyen kényszererők egyszerüen figyelmen kivül hagyhatók./Surlódásmentes felület által kifejtett erő merőleges a felületre./

c/. A klasszikus mechanika alapján talán feleslegesnek tünik az impulzus megmaradásának és az impulzusmomentum megmaradásának megkülönböztetése,de egyrészt az invarianciaelvek független következményei,másrészt az elemirészecskék spinje mutatja,hogy egy részecskének abban a vonatkozási rendszerben is lehet impulzusmomentuma,amelyben nyugszik.

d/.Kötél /ellentétben a merev ruddal/ forgatónyomatékot nem tud továbbitani,ezért kötélben mindig kötélirányu huzóerő ébred.Ez belátható,ha a merev test egyensulyának feltételeként számontartott

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

összefüggéseket alkalmazzuk a kötél egy darabjára.

e/.Csuszó gördüléssel bekövetkező forgó mozgással kapcsolatos feladatok megoldására nem érdemes az energiatételt alkalmazni.Kinematikai és dinamikai elemzésből a probléma megoldása kényelmesebben adódik.

f/.Szigoruan a mechanikai energia megmaradásának tételének érvényességi körét meg nem haladó feladatokat dolgoztunk fel.

g/.Mivel a Bernoulli-egyenletet azon folyadéktér bármely két pontjára alkalmazhatjuk,ahol érvényessé teszik a feltételek,a pontok kiválasztását a következő célszerüségi szempontok döntik el:

az egyes tagok ismertek vagy könnyen kiszámithatók legyenek

az egyenletben csak egy ismeretlen legyen.

h/.Az eredő kapacitás és az eredő ellenállás meghatározását kivánó feladatok tárgyalását mellőztük /az alapfeladatok kivételével/ bár az elektromos töltés megmaradásának illetve Kirchhoff csomóponttörvényének következményei.

i/.Egyes feladatok megoldása jelentősen egyszerüsödik, ha felhasználjuk a problémában található szimmetriákat. /ütközési feladatok,áramkörök/ Óvatosnak kell lenni azonban,mert a helytelenül alkalmazott szimmetria-meggondolások nagyon nehezen felderithető hibákra vezetnek.

j/.Gyakran előfordul,hogy látszólag kevesebb adaot ismerünk,mint amennyi a feladat megoldásához szükséges.A hiányzó adatot,adatokat célszerü paraméternek tekintenünk, és ha a megoldás során alkalmazott valamilyen algebrai átalakitás közben"kiesik" /összegük zérus,egyszerüsithető vele,stb./ akkor a megoldás,azaz a fizikai jelenség lefolyása ettől a fizikai mennyiségtől független.Amennyiben a végképletben ezen paraméter,paraméterek szerepelnek a feladat megfogalmazása hiányos.

k/.A feladatokban szereplő fizikai mennyiségek mérőszámainak megválasztásánál tudatosan döntöttünk olyan számértékek mellett,hogy az eredmények nem legyenek kerek egész számok,mert a fizikai valóság leirásánál ezek előfordulásának valószinüsége kicsi.

A dolgozatban összegyüjtött feladatok megoldása minden esetben a megmaradási tételek következetes alkalmazásával történt.

Azokat a feladatokat melyeknél a megmaradási tételek érvényességéhez szükséges feltételek teljesülnek minden esetben megoldhatjuk,ha az első fejezetben részletezett analitikus megközelitést a megmaradási tétel felirásával kezdjük és tárgyi tudásunk elegendő az ismeretlenek kiküszöböléséhez szükséges összefüggések felismeréséhez. Az ismeretlen mennyiségek meghatározásához szükséges összefüggések felismerésére kedvező hatással van egyrészt az,hogy a megmaradási tételekből látható,mely mennyiségek szükségesek még,másrészt a megmaradási tétel keresett mennyiségünket gyakran nem is tartalmazza közvetlenül,ekkor a megmaradási tétel ismeretlen mennyisége és a feladat ismeretlen mennyisége között kell összefüggést keresnünk.

A nehezebb feladatok csoportjába azokat a feladatokat sorolhatjuk,amelyekben matematikai természetü nehézségek találhatók,illetve bizonyos kényszerkapcsolatokból származó összefüggések a feladat szövegében nincsenek külön hangsulyozva.

A feladatok kiválasztásánál és kidolgozásánál igyekeztünk a feladatok fizikai tartalmának hangsulyozására,figyelembe véve,hogy a jó fizikai feladatnak nem szabad bonyolult és a numerikus megoldásban indokolatlanul hosszadalmas matematikai részletet /részleteket/ tartalmaznia. Ez a szempont akadályozta meg olyan feladatok ismertetését,amelyek módszerünkkel ugyan megoldhatók,de más gondolatmenettel lényegesen egyszerübben juthatunk célhoz.

Kidolgozott feladataink jelentős része a megmaradási tételek alkalmazása nélkül is megoldható /például a mechanikai energia megmaradásának tétele,az impulzus megmaradásának tétele a Newton-féle axiómákból származtatható/,amely jelentős didaktikai eszközként használható a problémák több oldali megközelitése miatt,bár dolgozatunkban a megmaradási tételekre való összpontositás miatt ennek részletezésétől eltekintettünk.

F e l h a s z n á l t   i r o d a l o m

1/.Atkin,I.M.-Karplus,R: Felfedezés vagy meglátás
Fizikai Szemle 1966/1

2/.Bayer István: A fizikatanitás eredményességének vizsgálata az általános iskola VII. osztályában
A természettudományok tanitása 1959/3

3/.Bayer István: A fizikatanitás eredményességének vizsgálata az általános iskola VIII. osztályában
A természettudományok tanitása 1960/3

4/.Bodócs István: A bolygómozgás területi elvének és sebességének egyszerü levezetése
Középiskolai Matematikai Lapok 1959/nov.

5/.Bodó Zalánné: Megmaradási tételek a klasszikus mechanikában
Középiskolai Matematikai Lapok 1970/szept.

6/.Dr Budó Ágoston
Dr Pócza Jenő: Kisérleti fizika I.
TK.Bp.1965

7/.Dr Budó Ágoston: Kisérleti fizika II.
TK.Bp.1968

8/.Buvári András: Feladat fetisizmus és a fizikai tartalom
Fizikai Szemle 1969/12

9/.Buvári András: Megjegyzések a fizikai egyenletek elméletéhez
A fizika tanitása 1967/2

10/.Dér-Radnai-Soós: Fizikai feledatok I-II.

TK.Bp.1971-1973

11/.Dr Gálfi László: Szimmetriák és megmaradási törvények a fizikában
Természet Világa 1971/504p

12/.Gnödig Péter: Hasonlóság a fizikában
Fizikai Szemle 1972/8

13/.Gorjacskin E.N.: A fizikatanitás módszertana
Közoktatási Kiadó Bp. 1951

14/.Középiskolai Matematikai Lapok: Uj megoldóinknak
1964/nov.

15/.Landa,L.N.: A tanulók racionális gondolkodási módszerekre való tanitása és az algoritmusok problémája
Magyar Pszichológiai Szemle 1962/2

16/.Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás
Akadémiai Kiadó Bp.1963

17/.Major János: A dinamikai példák megoldásáról
Középiskolai Matematikai Lapok 1965/febr.

18/.Dr Makai Lajos: A fizika tanitása
TK.Bp.1959

19/.Dr Makai Lajos
Kakuszi László: Fizika a gimnáziumok II.osztálya számára 10235/1
TK.Bp.1972

20/;Dr Makai Lajos:
Várszegi Márton: Fizika a gimnáziumok II. osztálya számára 10235
TK.Bp.1970

21/.Mencsinszkája,N.A.: Az ismeretek alkalmazásának pszichológiája a tanulók iskolai gyakorlatában
Magyar Pszichológiai Szemle 1961/3

22/.Mihály László: Sztatikai Feladatok megoldása Középiskolai Matematikai Lapok 1971/jun.

23/. Modern fizikai kisenciklopédia
Gondolat Kiadó Bp.1971

24/.Nagy János
Nagy Jánosné
Dr Bayer István: Fizika a gimnáziumok IV. osztálya számára 10435
TK.Bp.1972

25/.Nagy János
Nagy Jánosné
Soós Károly: Fizika a gimnáziumok III. osztálya számára 10335 és 10335/1
TK.Bp.1968-1973

26/.Nagy László: Az ismeretek gyakorlati alkalmazásának sajátosságai fizikai feladatok megoldásában.
Kandidátusi értekezés,Kézirat 1965

27/.Nagy László: Fizikai elvek felismerése gyakorlati szituációban
Pedagógiai Szemle 1964/2

28/.Nagy László: Testek gördülése,a haladó és forgómozgás együttes fellépése III.Energetikai jellemzés
Középiskolai Matematikai Lapok 1969/jan.

29/.Papp István: A fizika megmaradási törvényei és világnézeti tartalmuk
A fizika tanitása 1971/1

30/.Pálfai Pál: Felvételi tájékoztató és példatár
TK.Bp.1970

31/.Párkányi László: Fizikai példatár középiskolásoknak.Mechanika I
Tk.Bp.1972

32/.Párkányi-Tasnádi: Fizikai példatár középiskolásoknak.Mechanika IV. TK.Bp.1972

33/.Pólya György: A gondolkodás iskolája Gondolat Kiadó Bp.1969

34/.Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II. TK.Bp.1967-1968

35/.Rosza A: A gondolkodás rugalmasságának és alkotó jellegének fejlesztése Magyar Pszichológiai Szemle 1967/2

36/.Simonyi Károly: Elméleti villamosságtan TK.Bp.1958

37/.Soóky Sándor: A fizikai feladatokról Köznevelés 1954/8

38/.Szlavszkaja,K.A.: A gondolkodás folyamata és az ismeretek aktualizálása. O.P.K.-D 14396/a

39/.Sz.P.Sztrelkov,J.A.Elain,I.A.Jakovlev: Fizikai feladatok I TK.Bp.1952

40/.Vermes Miklós: Fizikai versenyfeladatok I-II TK.Bp.1966

41/.Vize Lászlóné: A fizika feladatmegoldás néhány kérdése O.P.I. 1965

42/.Dr Wiedemann László: Feladatmegoldások és ezek módszertani kérdései a középiskolában.A fővárosi szakfelügyelők tapasztalataiból. Bp.1968

43/.Wigner Jenő: Események,természettörvények és invarianciaelvek Fizikai Szemle 1965/1

44/. Wigner Jenő: Szimmetriák és reflexiók
Gondolat Kiadó Bp.1972

45/. C.N.Yang: A paritás megmaradásának tétele és más szimmetria-törvények
Fizikai Szemle 1959/1

46/. Weaver,H.E.-Madden, E.N.: "Direction" in Problen Solving
The Journal of Psichology
1949/27

47/. Кудрявцев, Т.В.: К вопросу о применении знаний на практике.
Вопросы психологии 1959/5

48/. Зыкова, В.И.: Психологический анализ применения геометрических знаний к решению задержанием.
Сб. Психология применения знаний 1958/М. 231-260.

Köszönetet mondok Dr Makai Lajos docens Urnák a disszertáció megirásához nyujtott segitségéért és értékes tanácsaiért.

Takács Gábor