DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS TÉZISFÜZETE

Hagyomány és reform az 1960-as és ’70-es évek matematikaoktatásában: Magyarország és Franciaország reformjainak összehasonlító elemzése

Tradition et réforme de l’enseignement des mathématiques à l’époque des mathématiques modernes: le cas de la Hongrie et de la France

Gosztonyi Katalin

Témavezető: Alain Kuzniak és Kosztolányi József

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
SORBONNE PARIS CITÉ

École doctorale „Savoirs scientifiques: épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines”
Laboratoire de didactique André Revuz

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet

2015.

A kutatás célja és előzményei

Varga Tamás munkásságát, és különösen az általa az 1960-as és ’70-es években vezetett „komplex matematikaoktatási reformprogramot” a magyar matematikaoktatás szakemberei a magyarországi matematikaoktatás kiemelkedő jelentőségű momentumának tekintik, amely máig értékes, sok szempontból aktuális és megőrzendő örökséget képvisel. Ennek ellenére – néhány rövid összefoglalón kívül – sem matematikaoktatás-történeti, sem didaktikai elemzés nem született eddig erről a témáról. Hasonló a helyzet azzal a tágabb értelemben vett „felfedeztető matematikaoktatási hagyománnyal”, amelybe Varga Tamás reformmozgalma illeszkedik: mind Magyarországon, mind nemzetközi szinten szinte közhelyszámba megy, hogy létezik egyfajta sajátos „magyar matematikaoktatási hagyomány”, amely a problémamegoldásra és a matematika „felfedeztetésére” helyezi a hangsúlyt, de ennek a hagyománynak részletes elemzése alig létezik. Az ilyen jellegű elemzések hiánya nem csak elméleti szempontból okoz problémát, hanem azért is, mert megnehezíti a „felfedeztető matematikaoktatás” fenntartását, széles körben való elterjesztését, és különösen a kezdő tanárok bevezetését annak módszereibe a tanárképzés során.

Varga Tamás reformjának elemzésével e hiány betöltéséhez kísérlek meg hozzájárulni, abban a reményben, hogy disszertációm mind a magyarországi didaktikai kutatások, mind a tanárképzés számára hasznos forrásul szolgálhat.

A kutatás elméleti alapjai és módszerei

Összehasonlító kutatás

Kutatásomat összehasonlító formában végeztem: Varga Tamás reformját a vele nagyjából egykorú francia „mathématiques modernes” reformhoz hasonlítottam. Az összehasonlítás szerepe egyrészt a magyar reform nemzetközi kontextusának tekintetbe vétele: mind Varga Tamás, mind egykori kollégái hangsúlyozzák ugyanis, hogy a „komplex matematikaoktatási reform” egy korabeli nemzetközi matematikaoktatási reformmozgalomba, a „New Math” mozgalomba illeszkedik, sok szempontból merít inspirációt a külföldi kísérletekből, habár sok szempontból el is tér azoktól. A francia reformmal való összehasonlítás különösen releváns, mivel Franciaország a nemzetközi mozgalom egyik vezető országa, és a New Math mozgalomra nagy hatást gyakorló Bourbaki-csoport hazája. Az összehasonlítás során azt kísérlem meg megmutatni, hogy bár a két ország reformja számos közös vonást mutat, amelyek feltehetően a közös nemzetközi kontextusra vezethetők vissza, számos különbség is felfedezhető köztük, ezek a különbségek pedig a két ország eltérő matematikai és matematikafelfogás– és –oktatásbeli hagyományaival magyarázhatók. Az összehasonlító kutatásnak ezenkívül abból a szempontból is jelentősége van, hogy segít a kutatásom tárgyától, Varga Tamás reformjától való eltávolodásban, objektívebb nézőpont felvételében.

A „komplex matematikaoktatási reformprogram" kidolgozásához vezető kísérleteket Varga Tamás 1963-ban kezdte meg, a programon alapuló új tanterv 1978-ban került bevezetésre. Franciaországban 1969-70-tól került bevezetésre a „mathématiques modernes" elnevezésű reform tanterve, ezt 1977-ben már egy új tanterv követte. Az összehasonlítás során ezért Varga Tamás tanterve mellett mindkét vele egykorú francia tantervet vizsgálom.

Varga Tamás először az alsó tagozaton végzett kísérleteket, ezeket később követték felső tagozatos kísérletek. Az általa vezetett reform az alsó tagozaton hozza a legjelentősebb változásokat, a felső tagozatot kisebb mértékben, a középiskolát[1] pedig nem érinti a munkássága. A francia reform ezzel szemben a felső tagozat és a középiskola szintjéről indult ki, onnan terjedt át fokozatosan az alsó tagozatra. A két reform jó összehasonlíthatósága érdekében ezért mind az alsó, mind a felső tagozat tanterveit és segédanyagait vizsgálom kutatásom során.

Kettős, történeti és didaktikai megközelítés

A magyar és a francia reformot egyrészt matematikaoktatás-történeti, másrészt didaktikai szempontból elemeztem. Matematikaoktatás-történeti szempontból egy oktatási reform annak történeti kontextusából eredő tényezők összjátékának eredményeként tekinthető: a reformot többek között a politikai, gazdasági, társadalmi, kulturális, tudományos, pedagógiai háttérből eredő hatások formálják. Didaktikai szempontból egy oktatási reform az oktatás különböző összetevőinek, a tantervnek, a tanítási módszereknek és a tanítás segédanyagainak átalakítását jelentik.

Mind matematikaoktatás-történeti, mind didaktikai szempontból rendszerszerű megközelítésről van szó. Matematikadidaktikai elemzésekhez többféle rendszerszemléletű elméleti modell is létezik: elsősorban az SMSO-modellből (Schmidt et al. 1996) és Chevallard kodeterminációs szinteket leíró modelljéből (2002a, b) inspirálódva dolgoztam ki kutatásomhoz egy háromszintű modellt, amely a disszertáció felépítését is meghatározta.

[1] A középiskola tantervével más, párhuzamos munkacsoport foglalkozott a vizsgált korszakban, az ő munkájukat azonban disszertációmban nem vizsgálom.

A történeti és az episztemológiai elemzés módszerei

Az első, matematikaoktatás-történeti részben a nemzetközi kontextust és a francia matematikaoktatást illetően elsősorban már meglévő matematikaoktatás-történeti kutatásokra támaszkodtam. A magyarországi történeti háttér feltárásához általános- és oktatástörténeti forrásokat, néhány matematikatörténeti művet, egykori kollégák írásos és szóbeli visszaemlékezéseit és a Varga Tamás-reform eredeti dokumentumait használtam fel.

A második, episztemológiai rész az első rész eredményein alapul. A történeti elemzés kimutatta, hogy a vizsgált korszak magyar és francia reformjaira – sok egyéb szereplő mellett – kiemelkedően nagy hatást gyakorolt matematikusok egy-egy csoportja és az általuk a matematika természetéről vallott elképzelések. Franciaországban elsősorban a Bourbaki-csoporthoz tartozó vagy ahhoz közel álló matematikusokról van szó, Magyarországon pedig többek között Péter Rózsáról, Kalmár Lászlóról, Rényi Alfrédről – de Varga Tamással és a felsoroltakkal kapcsolatban álltak olyan külföldön élő, magyar származású gondolkodók is, mint Pólya György és Lakatos Imre[2].

A második részben az említett matematikusoknak a matematika természetéről és annak tanításáról szóló írásait vizsgáltam. A francia esetben e szerzőknek néhány kifejezetten matematikafilozófiai jellegű írása is hozzáférhető (pl. Bourbaki 1948), illetve e matematikusok művének matematikafilozófiai elemzésével foglalkozott már a nemzetközi szakirodalom (pl. Corry 2001). A magyar matematikusok esetében elsősorban matematikanépszerűsítő művekre, a matematika tanításáról szóló írásokra és a vizsgált szerzők levelezésére támaszkodtam.

[2] E magyar szerzők matematikafelfogása közötti összefüggésekre már többen felhívták a figyelmet (pl. Máté 2006, 2008, Gurka 2001).

A didaktikai elemzés elméleti alapjai és módszerei

A történeti elemzés arra is rámutatott, hogy a reformok egyszerre irányultak a tanterv és a tanítási módszerek átalakítására. A didaktikai elemzés során így mindkét tényezőt vizsgáltam. Az elemzéseket a francia matematikadidaktika különböző elméleteinek felhasználásával végeztem. A tantervek elemzésekor elsősorban az ún. *ökológiai megközelítés*re (Artaud 1997, Chevallard 2002) támaszkodtam, illetve egyes tantervi fejezetek vizsgálatához a geometriai és a valószínűségszámítási *paradigmák* fogalmát (Houdement és Kuzniak 2006, Parzysz 2011) is felhasználtam. Először a magyar általános iskolai tanterv illetve a francia *école primaire* és *collège* tanterv egészének főbb tartalmi elemeiről, felépítéséről, szervezőelveiről végeztem egy rövid, általános elemzést (III.2 fejezet), majd három választott tantervi fejezet felépítését elemeztem részletesebben:

- a természetes szám fogalmának bevezetése első osztályban (III.3. fejezet)
- a Pitagorasz-tétel a felső tagozatos geometria tantervben (III.4. fejezet)
- a kombinatorika és a valószínűségszámítás tanítása (III.5. fejezet)

Az elemzés másik fő tárgya a tanítás módszereinek reformja volt. Ezt a kérdést azonban közvetlenül nem állt módomban tanulmányozni abból a nyilvánvaló okból kifolyólag, hogy az 1960-as és 70-es évek tanítási módszerei közvetlenül nem megfigyelhetők. Több okból (mind bizonyos gyakorlati és módszertani nehézségek, mind az anakronizmus veszélyének elkerülése érdekében) eltekintettem attól, hogy a ténylegesen megvalósuló tanári gyakorlatot vizsgáljam: kutatásom tárgyát a reform kidolgozóinak a jó tanítási gyakorlatról kialakított elképzelései képezték, amelyeket írott források, elsősorban tankönyvek és tanári kézikönyvek elemzésével igyekeztem rekonstruálni.

Ez a megközelítés szükségessé tette a tankönyvek és tanári kézikönyvek elemzését. A kérdéses szövegek felépítésének, nyelvezetének, stílusának, bevezetőjének és használati útmutatójának vizsgálata hozzájárult hogy feltárjam, hogyan szolgálnak ezek a szövegek *forrásul* a tanárok számára, hogyan segítik a szerzők koncepciójának megfelelő tanári gyakorlat kialakítását.

Az így rekonstruált tanítási módszereket a *Didaktikai szituációk elméletének* (Brousseau 1998) segítségével elemeztem, elsősorban azt vizsgálva, mit jelent a gyerekek – a korszakban sokat hangoztatott – tevékenytetetése a különböző szerzők felfogásában, mi a tanár és a tanulók szerepe, felelőssége a matematikai ismeretek felépítésének folyamatában.

I. rész: matematikaoktatás-történet

A történeti elemzés megmutatja, hogy a két ország matematikaoktatási reformjai egy közös nemzetközi matematikaoktatási reformmozgalomba – a „New Math” mozgalomba – illeszkednek, és számos törekvésükben megegyeznek. A közös nemzetközi háttér, a két ország reformjainak alakítói között kimutatható közvetlen kapcsolat, a társadalmi-gazdasági háttérrel, a matematika, illetve pedagógia és a pszichológia fejlődésével összefüggésben álló közös törekvések magyarázatot adhatnak a két reform közötti számos hasonlóságra. A történeti kontextus vizsgálata azonban néhány lényeges különbségre is fényt derít mind az iskolarendszer korabeli változásait, mind a reformot alakítható résztvevők számát és összetételét, mind a reform lefolyását illetően, amelyek segíthetnek megmagyarázni a két reform között fennálló, a didaktikai elemzés során feltárt lényeges különbségeket. Az egyik legfontosabb magyarázó tényezőnek azonban a két reform hátterében álló matematikafelfogás-beli különbség tűnik.

II. rész: episztemológia

A történeti elemzés mutat rá többek között arra is, hogy mindkét ország reformjaira nagy hatást gyakorolt matematikusok egy-egy csoportja, nemcsak a reform matematikai tartalmát, hanem a reform által közvetített matematikafelfogást illetően is. Franciaország esetében elsősorban a Bourbaki-csoporthoz tartozó vagy ahhoz közel álló matematikusokról van szó (Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet), Magyarországon pedig mások mellett elsősorban Péter Rózsáról, Kalmár Lászlóról, Rényi Alfrédről. A második, episztemológiai részben e matematikusok matematikafelfogását és matematikaoktatásról vallott elképzeléseit elemzem, elsősorban matematikanépszerűsítő műveiken, filozófiai jellegű illetve matematikaoktatásról szóló írásaikon keresztül. Ebben a részben azt kísérlem meg megmutatni, hogy a mindkét országban koherens, de egymástól lényegesen eltérő matematikafelfogást képviselnek a reformot támogató matematikusok, amelyet Franciaország esetében „bourbakiánus”, Magyarország esetében – a Pólya György és Lakatos Imre felfogásával való rokonságra utalva – „heurisztikus” matematikafelfogásnak neveztem el.

A „bourbakiánus” felfogás szerint a matematika lényegénél fogva absztrakt és deduktív tudomány. A Bourbaki által tökéletesített „axiomatikus módszerben” a matematika ideális módszerét látja, amely a végsőkig vitt absztrakció segítségével a lehető legnagyobb világosságot és precizitást biztosítja e tudománynak. E szerint az elképzelés szerint a matematika egészének halmazelméleten alapuló újraszervezése illetve a modern formális nyelv egységes, koherens tudománnyá teszik a matematikát. Bourbaki megtalálta és kidolgozta a matematikához vezető „királyi utat”: a tanításnak tehát ezt az utat kell követnie, mielőbb beavatnia a tanulókat a modern matematika fogalmainak, módszereinek és nyelvének használatába. Az ilyen elveket követő matematikaoktatás jelentős „gondolkodásbeli megtakarítást” hoz a tanulók számára, és általános értelemben is gondolkodásra nevel. Ami a matematikai felfedezést illeti, ez természetesen igényel bizonyos intuíciót: azonban ez az intuíció a „bourbakiánus” matematikafelfogás szerint alapvetően személyes és irracionális, így nem tanítható. Leginkább még az axiomatikus módszer gyakorlása és a matematikai kutatás tárgyainak, tehát a struktúráknak a tanulmányozása táplálhatja.

A „heurisztikus” matemataikafelfogás ezzel szemben azt képviseli, hogy a matematika nem csak tartalmát, hanem formáját és módszereit illetően is folyamatosan változó tudomány, amely előre nem látható irányokba fog a jövőben is tovább fejlődni. A matematika megalapozását érintő nagy negatív eredményeket is tekintetbe véve a „magyar iskola” tagjai nem gondolják, hogy a modern formális nyelv és az axiomatikus módszer a matematika végső, ideális állapotát jellemezné: úgy tekintenek rájuk, mint egy problémák és válaszkísérletek során átvezető fejlődési folyamat egy állomására, és a tanításban is inkább e fejlődési folyamatra, mint annak 20. századi állapotára kívánják helyezni a hangsúlyt. Szerintük a matematika nem választható el fogalmainak szemléletes alapjaitól: a szemlélet táplálja a matematikai tapasztalatszerzést, és a tapasztalatok változatossága képezi a matematikai általánosítás, absztrakció alapját. A „heurisztikus” matematikafelfogás szerint a matematika dialogikus jellegű, társas tevékenység. A problémák és válaszkísérletek dialektikáján átvezető matematikai felfedezés folyamata szerintük legalább részben megérthető, és így tanítható is. A matematikai felfedezés egyúttal kreatív, játékos, örömteli alkotó tevékenység is, amely a művészi alkotással rokonítható. Ezeknek a matematikusoknak a szemében a matematika kritikus gondolkodásra nevel, de egyúttal problémamegoldásra is, a játékos felfedező tevékenység pedig a gyerekek kíváncsiságának ébren tartásában és a kutatás örömének megismerésében segít.

III. rész: a reformok didaktikai elemzése

A tantervek

A francia és a magyar reformtanterv felépítésének átfogó elemzése rámutat, hogy bár mindkét reform törekszik új, „modern” témakörök bevezetésére, illetve a tanterv koherenciájának biztostására, ez a két reform esetében eltérő módon valósul meg. A francia reform koherenciáját – a „bourbakiánus” matematikafelfogásnak megfelelően – az egységes formális nyelv és a halmazelméleten alapuló hierarchikus felépítés biztosítja – a *collège* utolsó két évfolyamán axiomatikus-deduktív formában. A magyar tanterv ezzel szemben 5 nagyobb témakörre osztja a tananyagot, amelyek párhuzamosan futnak végig az általános iskola teljes tantervén, és egymással dialektikus kapcsolatban állnak. A mindkét országban bevezetett új témakörökön (pl. halmazok, topológia) túl a francia reform elsősorban nagyobb axiomatikus rendszerek (valós számok, geometria) kidolgozására törekszik, a magyar viszont a tárgyalt témakörök változatosságára, a köztük lévő változatos kapcsolatok bemutatására: így kap helyet a tantervben többek között a kombinatorika, a valószínűségszámítás is.

Chambris (2008) a természetes szám fogalmának bevezetését vizsgálva a 20. századi francia tantervekben kimutatta, hogy a számfogalom és a mérés között fennálló szoros kapcsolat a „mathématiques modernes” reform tantervében megtörik, ez utóbbi ugyanis kizárólag a halmazelméletre építi a természetes szám fogalmát. A magyar reform ezzel szemben a természetes számfogalom kétféle felépítését írja elő, amelyek egymással párhuzamosan jelennek meg: egyrészt a halmazelméletre, másrészt a mérésre alapozva a számfogalmat. Így a „New Math” törekvéseinek megfelelően megjelenik a halmazelméleti alapú építkezés, ugyanakkor a matematika más területeivel is szoros összefüggésben alakul ki a számfogalom.

A második vizsgált tantervi példa, a felső tagozatos geometria tanterv és a Pitagorasz-tétel példája még jelentősebb eltérést mutat a két reform tanterve között. A francia tanterv hangsúlyozza a *collège* első és második fele közötti különbséget: míg a collège első felében (6-7. osztály) a hangsúly a tapasztalatszerzésen van, az „igazi” matematika tanulmányozása a *collège* második felében (8-9. osztály) kezdődik. Ez a radikális változás a geometria tanterv esetében különösen hangsúlyos: míg a *collège* első két évére fizikai jellegű kísérletezést, geometriai objektumokkal való ismerkedést ír elő a tanterv (G1 paradigma), a 8. osztálytól kezdve lényegében axiomatikus-deduktív módon épül a geometria, a valós szám (szintén axiomatikusan felépített) fogalmára alapozva, és a szemlélettől a lehető legnagyobb mértékben elvonatkoztatva (G3 paradigma). A geometria a „mathématiques modernes” reform tantervében egy algebrai úton felépített eszköz az euklideszi sík és tér leírására: ebben a felépítésben a Pitagorasz-tétel marginális szerepet tölt be, az euklideszi síkról szóló fejezet egyik tételeként jelenik meg sok egyéb tétel között, amely a merőleges vetítés egy tulajdonságát írja le. A magyar tanterv ezzel szemben a tanterv folytonosságára helyezi a hangsúlyt; a geometria tanterv esetében a paradigmák közti folytonos kapcsolat és fokozatos átmenet figyelhető meg a G1 paradigmától (fizikai objektumokkal végzett tevékenység) a G2 paradigma (elméleti objektumok vizsgálata, logikai levezetés, amelyhez az ábrák csak szemléltetésként szolgálnak) felé – a G3 paradigma (absztrakt, axiomatikus geometria), pedig egyáltalán nem jelenik meg a tantervben. Ez a fokozatos átmenet figyelhető meg a Pitagorasz-tétel tankönyvbeli bevezetésében is. A tétel maga pedig az egyik legfontosabb matematikai tételként jelenik meg a tantervben, amelynek azon kívül, hogy a derékszögű háromszögek egy fontos tulajdonságát írja le, szerepe abban is áll, hogy a tanterv egyik első tételeként a bizonyítás fogalmába bevezesse a tanulókat.

A legnagyobb eltérés a két tanterv között a kombinatorika és a valószínűségszámítás esetében figyelhető meg, hiszen ezek a témák a magyar tanterv szerves részét alkotják, a francia *école primaire* és *collège* reformtantervében viszont egyáltalán nem jelennek meg. Varga Tamás főbb érvei e témák bevezetésére, hogy lehetőséget biztosítanak a változatos tapasztalatszerzésre, a matematika különböző területei közötti kapcsolatok bemutatására, a problémamegoldásra és a matematikai absztrakció folyamatának bemutatására konkrét tapasztalatokból kiindulva. Ezek a szempontok mind szoros kapcsolatban állnak a magyar reformot meghatározó „heurisztikus” matematikafelfogással, a francia reform matematikafelfogása szempontjából viszont nem jelentős érvek, sőt, akár ellenérvként is feltűnhetnek: ez magyarázhatja e témák hangsúlyos szerepét a magyar, és hiányát a francia tanterv esetében. Az 1970-es évek franciaországi matematikaoktatási kísérletei – amelyek nagyobb jelentőséget tulajdonítanak a tapasztalatszerzésből kiinduló problémamegoldásnak, mint a „mathématiques modernes” reform – már időről időre beemelik a kombinatorikát és a valószínűségszámítást tananyagukba.

Tankönyvek, tanári kézikönyvek és az elvárt tanári gyakorlat

Az 1960-as és ’70-es években az alsó tagozat számára nem annyira tankönyvek, mint inkább munkalapok készülnek, amelyeket részletes tanári kézikönyvek egészítenek ki. A kézikönyvek hangsúlyozzák, hogy a munkalapok a tananyagnak csupán egy részét alkotják, amellyel való munkát különböző tárgyakkal, matematikatanítási segédeszközökkel (pl. logikai készlet, Dienes-készlet, színes rudak, stb.) végzett tevékenységnek kell kiegészítenie. Bár a munkalapok sok hasonlóságot is mutatnak, a tanári kézikönyvek felépítésében lényeges eltérések figyelhetők meg. A „mathématiques modernes” reformhoz kapcsolódó egyik legelterjedtebb francia tankönyvsorozat, Eiller *Math et calcul* sorozata például részletes tanmenetet javasol tanári kézikönyvében, a tananyagot leckékre bontva mutatja be, először az elméleti matematikai hátteret, majd a javasolt feladatokat leírva. A feladatok leírása részletes, jól strukturált, tartalmazza a feladat célját, a szükséges eszközöket, az órai megvalósítás módját. Így a tanári kézikönyv kész tananyagot kínál a tanároknak, kevés felelősséget, önállóságot hagyva számukra. Az 1977-től megjelent kísérleti tankönyvsorozat, az ERMEL szintén kész tanmenetet és részletesen kidolgozott feladatokat kínál, azonban nem bontja a tananyagot leckékre: a szerzők indoklása szerint a tanárok önálló óratervezése lényeges feltétele a színvonalas tanári munkának.

A reformhoz tartozó hivatalos magyar tanári kézikönyvsorozat – a francia példáktól eltérően – nem elkülönítve, hanem együtt tárgyalja a tananyag elméleti alapjait és a javasolt feladatokat. Minta-tanmenetet ugyan ajánlanak a kézikönyvek, ugyanakkor arra biztatják a tanárokat, hogy inkább önállóan dolgozzanak ki tanmenetet a tanulók sajátos igényeit figyelembe véve. A megadott mintatanterv így csak példa, amelyet a kézikönyvek sajátos felépítése miatt jóval nehezebb egy az egyben gyakorlatba ültetni, mint a francia kézikönyvek esetében. Hasonló a helyzet a feladatok leírásával is: a magyar kézikönyv sok esetben inkább feladat-ötleteket tartalmaz, mint részletesen kidolgozott feladatokat, számos lehetséges variációt mutat be és tanácsokat ad a megvalósításhoz, azonban a részletek kidolgozását a tanárokra hagyja, és önálló feladatalkotásra is biztatja őket. Összességében tehát elmondható, hogy a magyar tanári kézikönyv mind a feladatok kidolgozásában, mind a hosszú távú tanítási folyamatok tervezésében nagyobb önállóságot vár el a tanároktól, mint a kortárs francia kézikönyvek.

A felső tagozaton mindkét országban tankönyvek segítik a tanári munkát, az ezeket kísérő tanári kézikönyvek viszont sokszor jóval kevésbé részletesek, mint az alsó tagozatos megfelelőik. A tankönyvek előszavának illetve a tanári kézikönyvek útmutatásainak elemzése rámutat, hogy a francia reform tankönyveinek célja elsősorban a tananyag elméleti bemutatása: több szerző szerint a tankönyv abban segíti a tanulókat, hogy az órákat követően átismételjék, megértsék a tananyagot. A tankönyvek, különösen a *collège* második felében matematikai értekezés formáját öltik, a tananyag axiomatikus-deduktív jellegű tárgyalását követően a fejezetek végén találhatók rövidebb feladatgyűjtemények. A magyar reform tankönyvei ezzel szemben fiktív tanulói párbeszédeket tartalmaznak, amelyekben a tanulók problémák sorozatát megvitatva jutnak el valamilyen új matematikai fogalom felépítéséhez. A tanári kézikönyv kommentárja alapján ezek a fiktív dialógusok a tanítási gyakorlat mintáinak tekinthetők: a kézikönyv hasonló viták provokálását javasolja az osztályteremben.

A tankönyvekben és tanári kézikönyvekben leírt feladatokat, szituációkat a *didaktikai szituációk elméletének* eszközeivel vizsgálva elmondható, hogy a francia „mathématiques modernes” reform tankönyvszerzői, bár elméletben ajánlják az aktív pedagógiai módszerek bevezetését a tanítási gyakorlatba, ehhez kevés segítséget nyújtanak; és a látszólag tanulói aktivitásra épülő feladatok sem kínálnak tényleges *adidaktikai potencialitást*, nincs olyan probléma és retrokatív miliő a leírt szituációkban, amely a tanulók önálló fogalomépítéséhez vezetne. A leírt szituációk sokkal inkább a tanár által bevezetett fogalmak illusztrációjaként szolgálnak; a tankönyvek által kínált *didaktikai szerződés* érdemben nem különbözik a *tanári előadást* jellemző szerződéstől. Az 1970-es évekbeli ERMEL-sorozatban leírt szituációk ezzel szemben igen közel állnak ahhoz a modellhez, amelyet Brousseau *adidaktikai szituációnak* nevez: olyan problémát és retroaktív miliőt tartalmaznak, amely a tanulók számára lehetőséget biztosít az önálló matematikai fogalomépítésre közvetlen tanári beavatkozás nélkül.

A magyar tanári kézikönyv szintén arra biztatja a tanárokat, hogy minél nagyobb felelősséget hagyjanak a tanulókra a fogalomépítés folyamatában – ez azonban nem annyira *adidaktikai szituációk*, sokkal inkább egy kollektív kutatási folyamat keretében, tanár-diák dialógusok során valósul meg. A kézikönyvek számos tanácsot tartalmaznak arra nézve, hogyan tudja a tanár úgy irányítani ezeket a dialógusokat, hogy segítse a közös kutatási folyamat előrehaladását, de abban minél nagyobb önállóságot hagyjon a tanulóknak. Hasonló célt látszanak szolgálni a felső tagozatos tankönyvekben leírt fiktív tanulói dialógusok is. Ezt a Varga Tamás reformjában megjelenő didaktikai szerződést *felfedeztető* szerződésnek neveztem el.

Konklúzió és kutatási perspektívák

Az összehasonlító elemzés rámutat, hogy bár a két reform tartalmaz közös elemeket, amelyek a közös nemzetközi reformmozgalomra vezethetők vissza (mint bizonyos új matematikai témák, például a halmazelmélet vagy a logika bevezetése, alsó tagozatban a segédeszközök használata vagy az „aktív pedagógiai módszerek” szerepének hangsúlyozása), a francia és a magyar reform között számos lényeges különbség is megfigyelhető. Ezek a különbségek jelentős részben visszavezethetők a matematikafelfogásbeli különbségekre: a „bourbakiánus” és a „heurisztikus” matematikafelfogás *matematikai paradigmákként* szolgál a két reform számára, befolyásolva azok sajátosságait.

Így a francia reformban nagy szerepet kap a matematika hierarchikus, axiomatikus felépítése, a deduktív módszer és a modern formális nyelv, az „aktív módszerek” pedig – a reform vezetőinek eredeti szándékai ellenére – kevéssé működőképesek ebben a kontextusban. A segédanyagok vagy nem tartalmaznak tanulói aktivitásra való utalást, vagy olyan didaktikai szituációkat írnak le, amelyekben a tanulók tevékenysége csupán az új fogalmak vagy módszerek illusztrálását szolgálja, de nem biztosít számukra önállóságot a matematikai fogalomalkotás folyamatában. A magyar reform ezzel szemben a matematika különböző területei közti dialektikus kapcsolatokra helyezi a hangsúlyt, a deduktív módszerek helyett a fogalmak lassú, fokozatos általánosítása és absztrakciója, illetve a heurisztikus módszerek kerülnek előtérbe. A tanítási módszerek terén pedig a magyar reformban egyrészt a feladatok problémasorozatokba rendezése, másrészt a tanár és a tanulók közti dialógus kap központi szerepet.

A Varga Tamás reformjáról szóló elemzés a „komplex matematikaoktatási” koncepció több meghatározó és sajátos elemére is rávilágított: az egyik ilyen szempont a matematikafelfogás, a tanterv, a segédanyagok és a tanítási módszerek sajátosságai közti szoros összefüggés; a másik a feladatok problémasorozatba rendezése; a harmadik pedig a tanítási módszerek között a tanár-diák dialógus elsődleges szerepe. E szempontok további vizsgálata érdemben hozzájárulhat a problémamegoldást és a felfedeztető matematikaoktatást középpontba helyező nemzetközi kutatásokhoz.

A szerzőnek az értekezés tárgyköréhez kapcsolódó publikációi

2013 Matematikafelfogás és matematikaoktatás összefüggései a magyar matematikaoktatási hagyományban. In. Zvolenszky et al. (Eds.), *Nehogy érvgyűlölők legyünk: Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* (pp. 152-163). Budapest : L'Harmattan.

2014 Séries de problèmes. L'exemple des *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter. *Bulletin APMEP 2014* n°507 p. 25-32.

2014 Résolution de problèmes et séries de problèmes dans *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter. *Actes du Week-end des Jeunes Chercheurs ARDM*. IREM de Paris, 2014.

2014 Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques en Hongrie entre 1945 et 1978. In. D. Butlen et al. (Eds.), *Rôles et places de la didactique et des didacticiens des mathématiques dans la société et dans le système éducatif. Actes de la XVIIe école d'été de didactique des mathématiques, Nantes, du 19 au 26 août 2013* (pp. 577-585). Grenoble . La Pensée Sauvage.

2014 Quelques réflexions sur la possibilité de l'enseignement de l'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants en Hongrie. In A. Bernard et al. (Eds.), *SHST 2013-UPEC : sciences humaines en sciences et techniques – Les sciences humaines dans les parcours scientifiques et techniques professionnalisants : quelles finalités et quelles modalités pratiques ?* EDP-Sciences, SHS web of conferences. DOI : http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20141304003

2015 Séries de problèmes dans une tradition d'enseignement des mathématiques en Hongrie au 20e siècle. In A. Bernard (Eds.), *Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures.* EDP-Sciences, SHS web of conferences. DOI: http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20152200013

2015 [Alain Bernard-ral] Series of problems, at the crossroad of research, pedagogy and teacher training. In E. Barbin, U.T. Jankvist & T.H Kjeldsen (Eds.), *History and epistemology of mathematics education. Proceedings of the sevens european summer university ESU 7, Copenhagen, Danemark 14-18 July 2014*. (pp. 141-152). Aarhus University. http://conferences.au.dk/ESU-7/

2016 The 'New Math' reform and pedagogical flows in Hungarian and French mathematics education. In K. Krainer & N. Vondrov´a (Eds.). *CERME 9 –Proceedings of the Ninth Congress of the ˇ European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic*. (pp.1709-1716). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288002

[megjelenés alatt] Mathematical Culture and Mathematics Education in Hungary in the XXst century. In B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures*. Basel : Springer Birkhauser.

Irodalomjegyzék

Általános jellegű hivatkozások

Alexits Gy. (1949). Célkitűzéseink. *Matematikai Lapok* 1(1), 1-2.

Andrews, P. & Hatch, G. (2001). Hungary and its caracteristic pedagogical flow. In J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(2), 26-40. http://www.bsrlm.org.uk/informalproceedings.html

APMEP (1968). Charte de Chambéry. Étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques. *Supplément au Bulletin de l'APMEP*, 263-264.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique de la didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz, M.-H. Salin (Eds.) *Actes de la 9e école d'été de didactique des mathématiques* (pp.101–139). Houlgate : IUFM de Caen.

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem Solving in France: Research and Curricular Perspectives. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 365-382.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics, *ZDM*. 45(6) 797-810.

Balogh, M. (2013. december) *Varga Domokos, az « abszolút pedagógus »*. Előadás a Magyar Pedagógiai Társaságnak a Varg(h)a fivérekről szóló szemináriumán. http://pedagogiai-tarsasag.hu/?p=3913

Barbazo, E. & Pombourcq, P. (2010*). Cent ans d'APMEP*. Brochure APMEP, n°192.

Batanero, C. (2016) Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.). *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic.* (pp.34-49). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01280506

Báthory, Z. (2001). *Maratoni reform. A magyar közoktatás reformjának története, 1972-2000*. Budapest : Önkonet.

Békés, V. (Ed.) (2004). *A kreativitás mintázatai*. Recepció és kreativitás. Budapest : Áron Kiadó.

Belhoste, B., Gispert, H. & Hulin, N. (Eds.) (1996). *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : Vuibert & INRP.

Bernard, A. (ed.) (2015). *Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures*. EDP Sciences, SHS Web of Conferences vol. 22.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In. C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak, *En amont et en aval des ingénieries didactiques. 15e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer.

Bishop, M.-F., d'Enfert, R., Dorison, C. & Kahn, P. (2011). Réformes du système éducatif et rénovation pédagogique dans les années 1960 : le cas des classes de transition. In d'Enfert & Kahn (2011) pp. 99-120.

Bkouche, R., Charlot, B. & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : Armand Colin.

Bolon, J. (2012). L'ouverture de l'APMEP à l'enseignement élémentaire. *Bulletin de l'APMEP*, 499, 298-305. http://www.apmep.fr/L-ouverture-de-l-APMEP-a-l

Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris : Actes Sud, Collection « L'humanisme scientifique de demain ».
Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.
Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. (Előadás a Montreali Egyetem Docteur Honoris Causa címének elnyerése alkalmából.) http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/
Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.
Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of mathematical behavior*, 20, 363-411.
Brousseau, G. (2012). Des dispositifs d'apprentissage aux situations didactiques en Mathématiques. *Éducation et didactique*, 6(2), 101-127.
Brousseau, G. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 163-170). Dordrecht : Springer.
Carranza, P. & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in French education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* Actes de l'ICMI Study 18 et du 2008 IASE Round Table Conference. Consulté sur http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=Joint_ICMI-IASE_Study_2008
Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Doktori disszertáció, Université Paris Diderot.
Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 30(3), 317-366.
Chevallard, Y. (1980). Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. *Recherches*, 41, 71-99. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=99
Chevallard, Yves (2002a). Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)* (pp. 3-32). Grenoble: La Pensée Sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52
Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53
Choquet, G. (1961). Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire. Brochure de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Paris.
Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.
CIEAEM (1974), *L'enseignement des probabilités et des statistiques.* CR de la 26e rencontre, Bordeaux août 1974. IREM de Bordeaux.
Clarke, D. (2016). *The role of comparison in the construction and deconstruction of boundaries*. Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.). *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic* (pp.1702-1708). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288000
Corry, L. (2001). The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond. http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/truth.html
Császár, Á. (1977). Péter Rózsa. *Matematikai Lapok*, 25(3-4), 257-258.

Császár, Á. (1993). Varga Tamás élő matematikája. *Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés* 1 (pp. 7-15). Budapest : Calibra.
Dieudonné, J. (1955). L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre. Piaget et al. 1955, pp. 47-61.
Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.
Dieudonné, J. (1981). L'abstraction et l'intuition mathématique. In *Choix d'œuvres mathématiques* (Tome 1, pp. 6-21). Paris : Hermann.
Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.
Antibi, A. (2005). *Ecole Michelet Corem – Entretien avec Nadine Brousseau*. IREM de Toulouse.
d'Enfert, R. (2010). Mathématiques modernes et méthodes actives : les ambitions réformatrices des professeurs de mathématiques du secondaire sous la Quatrième République. In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 115-130.
d'Enfert, R. (2011). Une réforme ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970). In d'Enfert & Kahn 2011, pp. 53-74.
d'Enfert, R. & Gispert, H. (2012). Une réforme à l'épreuve des réalités: le cas des mathématiques modernes au tournant des années 1970. *Histoire de l'Éducation*, 131, 27–49.
d'Enfert R. & Kahn P. (Eds.) (2010). *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Quatrième République*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.
d'Enfert R. & Kahn P. (Eds.) (2011). *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République (années 1960).* Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.
Dumont, M. & Varga, T. (1973a). *Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Fiches de travail.* Paris : O:C:D:L.
Dumont, M. & Varga, T. (1973b). *Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Guide et cemmentaires.* Paris : O:C:D:L.
« Fehér könyv » (1976). A Magyar Tudományos Akadémia állásfoglalásai és ajánlásai a távlati műveltség tartalmára és az iskolai nevelőtevékenység fejlesztésére. Budapest : MTA.
Forrai, T., Jakab, A., Kiss, P., Pelle, B., Surányi, J., …, & Varga. T. (1972). *Új utak a matematika tanításában 1. Néhány hazai és külföldi kísérlet*. Budapest : Tankönyvkiadó.
Frank, T. (2011). Teaching and Learning Science in Hungary, 1867–1945: Schools, Personalities, Influences. *Science & Education*, 21(3), 355-380.
Gáll, Gy. (2004). Béla Kerékjártó (A biographical sketch). *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2(2), 231-263.
Gallai, T. & Péter, R. (1949). *Matematika a középiskolák I. osztálya számára*. Budapest : Tankönyvkiadó.
Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Doktori disszertáció, Université Claude Bernard, Lyon.
Gergely, A. (Ed.) (2003). *Magyarország története a 19. században.* Budapest : Osiris.
Gispert, H. (2008). *L'enseignement des mathématiques au XXe siècle dans le contexte français*. http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Gispert08-reformes/Gispert08.htm
Gispert, H. (2010). Rénover l'enseignement des mathématiques, la dynamique internationale des années 1950. In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 131-144

Gispert, H. & Schubring, G. (2011). Societal, Structural, and Conceptual Changes in Mathematics Teaching: Reform Processes in France and Germany over the Twentieth Century and the International Dynamics. *Science in Context*, 24(1), 73–106.

Gispert, Hélène (2014). Mathematics education in France: 1800-1980. In A. Karp & G. Schubring 2014 pp. 229-240.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les Probabilities á L'école*. Paris : CEDIC. (Első kiadás 1973.)

Gordon Győri, J., Halmos, M., Munkácsy, K. & Pálfalvi, J. (Eds.) (2007). *A matematikatanítás mestersége – mestertanárok a matematikatanításról*. Budapest, Gondolat.

Gosztonyi, K. (megjelenés alatt). *Mathematical culture and mathematics education in Hungary in the XXth century*. In. B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures*. Springer : Birkhäuser.

Gosztonyi, K. (2013). Matematikafelfogás és matematikaoktatás összefüggései a magyar matematikaoktatási hagyományban. In. Zs. Zvolenszky et al. (Eds.). *Nehogy érvgyűlölők legyünk. Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* (pp. 152-163). Budapest : L'Harmattan.

Gosztonyi, K. (2014). Séries de problèmes. L'exemple des *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter. *Bulletin de l'APMEP*, 507, 25-31.

Gosztonyi, K. (2015). Séries de problèmes dans une tradition d'enseignement des mathématiques en Hongrie au 20e siècle. In. Bernard (2015). DOI : http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20152200013

Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Paideia. Presses Universitaires de Rennes / INRP.

Gurka, D. (2001). Kalmár László szerepe Lakatos Imre matematikafilozófiájának alakulásában. In *Recepció és kreativitás*. http://www.phil-inst.hu/recepcio/htm/3/310_belso.htm

Hajós, Gy. (1960). *Bevezetés a geometriába*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Halmos, M. & Varga, T. (1978). Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realisation Hungary. *Educational Studies in Mathematics*, 9(2), 225-244.

Henry, M. (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. Définition classique, approche fréquentiste et modélisation. *Repères IREM*, 74, 67-89.

Hersant, M. & Perrin-Glorian M.-J. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2), 241-258.

Hersh, R., & John-Steiner, V. (1993). A Visit to Hungarian Mathematics, *The Mathematical Intelligencer*, 15(2), 13-26.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-195.

Houzel, C. (2004). Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du 20e siècle. *SMF Gazette*, 100, 52-63.

Kalmár, L. (1967). Foundations of Mathematics: Whither Now? In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 186-194). Amsterdam : North-Holland Publishing.

Kalmár, L. (1986). A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig.. In A. Varga (Ed.). *Integrállevél* (pp. 32-61). Budapest : Gondolat. (Első megjelenés: 1942 In S. Karácsony (Ed.) *A másik ember felé*. Debrecen : Exodus.)

Kántor-Varga, T. (2006). *Biographies*. In Horváth János ed., *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century*. Bolyai Society Mathematical Studies 14 (pp. 563-608). Budapest Berlin [etc.] : János Bolyai Mathematical Society Springer-Verlag.
Kántor-Varga, T. & Schubring, G. (2008). *Emanuel Beke*. http://www.icmihistory.unito.it/portrait/beke.php
Kardos, J. & Kornidesz, M. (1990). *Dokumentumok a magyar oktatáspolitika történetéből II. (1954-1972)*. Budapest : Tankönyvkiadó.
Karp, A. & Schubring, G. (Eds.) (2014). *Handbook on the history of mathematics education*, New York : Springer.
Katona, Gy. & Tusnády, G. (1970). Rényi Alfréd pedagógiai munkássága. *Matematikai Lapok*, 21(3-4), 243-244.
Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 44(4), 563-571.
Klein, S. (1980). *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*. Budapest : Akadémiai Kiadó
Kontra, Gy. (1992). *Karácsony Sándor*. Budapest : Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum.
Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses génèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.
Kosztolányi, D. (1933). *Esti Kornél*. Budapest : Genius. http://mek.oszk.hu/00700/00744/00744.htm
Lakatos, I. (1976a). *Proofs and Refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.
Lakatos, I. (1976b). A Rainessance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science* 27/3, p. 201-223.
Lamassé, S. (2014). Relationships between French « Practical Arithmetics » and Teaching ? In. A. Bernard & C. Proust (Eds.), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History : Problems and Perspectives* (pp. 125-154). Dordrecht : Springer.
Láng, T. (1976, le 12 février). Nem számtan : Matematika. Beszélgetés egy új oktatási módszerről [entretien avec Tamás Varga]. *Magyar Nemzet*, p. 5.
Le miracle hongrois (2009). *Tangente*, 126, 10-26.
Lénárd F. (1972). Modellalkotás variációk segítségével a gondolkodás rugalmasságának fejlesztésére az alsófokú matematikatanítás első éveiben. In. Forrai, T., Jakab, A., Kiss, P., Pelle, B., Surányi, J., …, &Varga. T. 1972, pp. 55-78.
Lichnerowicz, A. (1955). Introduction de l'esprit de l'algèbre modern dans l'algèbre et la géométrie élémentaires. In. Piaget et al. 1955, pp. 63-74.
Lichnerowicz-bizottság (1967). Rapport préliminaire de la commission ministérielle. *Boulletin APMEP 258*, pp. 245-270.
Margolinas, C. (1993). *De l'importance du* vrai et du faux *dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. HDR, Université de Provence - Aix-Marseille I.
Mashaal, M. (2002). *Bourbaki, une société secrète des mathématiciens*. Paris : Pour la science.
Mérei, F. & V. Binét, Á. (1970). *Gyermeklélektan*. Budapest : Gondolat Kiadó.
Máté, A. (2006). Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics. *Perspectives on Science,* 14(3), 282-301.

Máté, A. (2008). Kalmár László és Péter Rózsa – matematikusok a filozófiáról. In P. G. Szabó (Ed.), *Kalmárium II* (pp. 56-71). Szeged : Polygon.

Molnár, L. & Zsidi, V. (2006). *Magyarországi világi felsőoktatási intézmények a kezdetektől 1945/1948-ig*. Budapest : Magyar Felsőoktatási Levéltári Szövetség.

Moulin, M. (2014). *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques*. Doktori disszertáció, Université Claude Bernard, Lyon.

Németh, A. & Pukánszky, B. (1996). *Neveléstörténet*. Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó.

OPI Matematikai Osztály (1983). A torzulás-vita tanulságai. *Köznevelés*, 39(20), 16-19.

Paumier, A.-S. (2014). *Laurent Schwarz et la vie collective des mathématiques*. Doktori disszertáció, Uniersité Paris 6.

Pálfalvi, J. (2000). *Matematika didaktikusan*. Budapest : Typotex.

Pálfalvi, J. (2007). Egy szép példa Varga Tamástól. In M. Halmos, & J. Pálfalvi (Eds.), *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* (pp. 3-4). Budapest : Nyitott Könyvműhely.

Palló, G. (Ed.) (2004). *A honi Kopernikusz-recepciótól a magyar Nobel-díjakig*. Recepció és kreativitás. Budapest : Áron Kiadó.

Parzysz, B. (1997). Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd'hui. M. Henry (Ed.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 17–38). APMEP / ADIREM.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 16, 127-147.

Pelay N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Doktori disszertáció, Université Claude Bernard – Lyon 1.

Péter, R. (2004). Matematika és művészet – nem két ellentétes pólus. In S. Róka & D. Valcsicsák (Eds.), *A jövő a számtantudósoké. Magyar szerzők írásai a matematikáról* (pp. 195-213). Budapest : Noran.

Péter, R. (2010). *Játék a végtelennel*. Budapest : Typotex. (Első megjelenés 1944, Budapest : Dante Könyvkiadó.)

Piaget, J., Beth, E.W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G., & Gattegno, C. (1955). *L'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.

Pintér, K. (2012). *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*. Doktori disszertáció, Université de Szeged.

Pólya, Gy. (1969). *A gondolkodás iskolája*. Gondolat : Budapest. (Eredeti megjelenés 1945-ben *How to solve it?* címmel. Princeton University Press.)

Pólya, Gy. (1988). *A matematikai gondolkodás művészete*. Budapest : Gondolat. (Eredeti megjelenés 1954-ben *Mathematics and Plausible Reasoning* címmel. Princeton: Princeton University Press.)

Pólya, Gy. (1961). Leopold Fejér. Leopold Fejér, *Journal of the. London Mathematical Society*, 36, 501-506.

Pólya György (1981). *Mathematical discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York : John Wiley & Sons. (Első megjelenés 1962-ben.)

Popper, K. (1997). *A tudományos kutatás logikája*. Budapest: Európa Könyvkiadó. (Originalement publié sous le titre *Logik der Forschung*. Vienne : Springer 1934)

Prékopa, A., Kiss, E., Staar, Gy., & Szenthe, J. (2004). *Bolyai-emlékönyv*. Budapest : Vincze Kiadó.

Radtka, C. (2014). *Construire la société scientifique par l'école. Angleterre, France et Pologne au prisme des manuels de sciences pour les élèves ordinaires (1950-2000)*. Doktori disszertáció, Centre Alexandre Koyré.

Rényi, A. (1966). *Valószínűségszámítás*. Budapest : Tankönyvkiadó Vállalat.

Rényi, A. (1965) *Dialógusok a matematikáról*. Budapest : Akadémiai Kiadó.

Rényi, A. (1967). *Levelek a valószínűségről*. Budapest, Akadémiai Kiadó.
Rényi, A. (2005). *Ars Mathematica. Rényi Alfréd összegyűjtött írásai*. Budapest : Typotex. (Első megjelenés 1973, Budapest : Magvető.)
Rényi, Zs. (2013). *Dialógusok egy matematikusról*. Szeged : Polygon
Revuz, A. (1973). *Modern matematika, élő matematika* (T. Varga trad.). Budapest : Gondolat. (Eredeti megjelenés 1963-ban *Mathématique moderne mathématique vivante* címmel. Paris : OCDL.)
Revuz, André (1996). La prise de conscience bourbakiste, 1930-1960. In. Belhoste-Gispert-Hulin eds. *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Vuibert & INRP, Paris pp. 69-76.
Robert, A. & Rogalsky, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies),* 2 (4), 505-528.
Romsics, I. (2010). *Magyarország története a XX. században.* Budapest : Osiris.
Savoye, A. (2010). Réforme pédagogique, réforme disciplinaire: l'expérience des Classes nouvelles dans l'enseignement du second degré (1945-1952). In d'Enfert & Kahn 2010, (pp. 51-64).
Scharnitzky, T., & Török, T., (2002). Emlékek Varga Tamásról. In M. Halmos, M & J. Pálfalvi (Eds.), *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* 6 (pp. 3-8). Budapest : Műszaki Könyvkiadó.
Schmidt, W., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., … Wolfe, R.G. (1996). *Characterising Pedagogical Flow*. Dordrecht : Kluwer.
Servais, W. and Varga, T. (Eds.) (1971). *Teaching school mathematics. A Unesco source book.* Middelsex : Penguin Books.
Sfard, A. (2015). Partcipationiste discourse on mathematics learning. In. D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, …, C. Mangiante-Orsola (Eds.), *Actes de la 17e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 79-96). Grenoble : La Pensée Sauvage.
Szabó, M. (2013). Karácsony Sándor nyelvfelfogásának hatása Kalmár László korai matematikafilozófiájára. In Zvolenszky et al. (Eds.), *Nehogy érvgyűlölők legyünk. Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* (pp. 164-173). Budapest : L'Harmattan.
Szabó, P. G. (Ed.) (2005). *Kalmárium.* Szeged : Polygon.
Szalay, M. & Urbán, J. (1980). Surányi János matematikai munkássága. *Matematikai Lapok*, 28(1-3), 101-119.
Szénássy, B. (2008). *A magyarországi matematika története a XX. század elejéig.* Szeged : Polygon.
Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról*. Budapest : Typotex.
Szendrei, J. (2007). *In memory of Tamás Varga*. Consulté sur http://www.cieaem.org/?q=node/18
Turán, P. (1970). Rényi Alfréd. *Matematikai Lapok*, 21(3-4), 199-210.
Varga, T. (1963). *A komplex matematikatanítási kísérlet 1–4. osztályos terve.* Kézirat, Halmos M. gyűjteménye.
Varga, T. (1967a). *Combinatorials and probability for young children, I. Sherbrooke Matehematics Project*. University of Sherbrooke.
Varga, T. (1967b). *Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematikatanításban*. Országos Pedagógiai Intézet. Kézirat, Halmos M. gyűjteménye.
Varga, T. (1970). Probability through games. A sample of three games. In *New Trends in Mathematics Teaching II*. Paris : UNESCO.
Varga, T. (1972). Logic and probability in the lower grades. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 346-357.

Varga, T. (1973). A valószínűségszámítás tanítása. *Kapcsolat*, 22-23, 45-71.
Varga, T. (1975). *Komplex matematikatanítás. Kandidátusi alkotás ismertetése.* MTA.
Varga, T. (ca. 1980). *A valószínűség a magyar általános iskolában*. Kézirat, Halmos M. gyűjteménye.
Varga, T. (1982). New topics for the elementary school math curriculum. In. Th. C. O'Brien (Ed.), *Toward the 21st Century in Mathematics Education* (pp. 12-34). Teachers' Center Project, Southern Illionis University at Edvardsville.
Varga, T. (1987). Az egyszeregy körül. *Kritika*, 25(12), 28-31.
Varga Tamás műveinek jegyzéke (1982). *Matematikai Lapok*. 30(1-3) pp. 5-7
Walusinski, G. (1986). L'instructive histoire d'un échec : les mathématiques modernes (1955 – 1972). *Bulletin de l'APMEP*, 353. consulté sur http://www.apmep.fr/L-instructive-histoire-d-un-echec

Tantervek

Francia tantervek

Évszám	Szint	Tanulmányozott kiadás
1945	primaire	http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes.htm
1945	collège	
1960	collège	Monge, M. & Guinchan M (1963), *Mathématiques. classe de 6e* Paris : Belin. Monge, M. & Guinchan M (1964), *Mathématiques. classe de 5e* Paris : Belin
1964	collège	Monge, M. & Guinchan M (1965), *Mathématiques. classe de 4e* Paris : Belin Monge, M. & Guinchan M (1966), *Mathématiques. classe de 3e* Paris : Belin
1969	collège	Ministère de l'éducation nationale (1972). *Mathématiques. Classes du premier cycle*. (2e edition). Paris : INRDP.
1970	primaire	*Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire* http://www.formapex.com/repertoires/550-programmes-textes-officiels
1977	primaire	Ministère de l'éducation (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle préparatoire*. Centre national de documentation pédagogique. Ministère de l'éducation (1979). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle élémentaire*. Centre national de documentation pédagogique. Ministère de l'éducation (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle moyen*. Centre national de documentation pédagogique.
1977	collège	Ministère de l'éducation (1977). *Classes de sixième et de cinquième*. Centre national de documentation pédagogique. Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1979) *« Faire » des mathématiques. Classe de 4e. Livre du maître* (pp. V-VIII). Paris : CEDIC. Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e. Livre du maître* (pp. 4-6). Paris : CEDIC.

Magyar tantervek

Évszám	Szint	Tanulmányozott kiadás
1945	alsó és felső tagozat	Művelődésügyi Minisztérium (1946), *Tanterv az általános iskola számára*. Budapest Országos Köznvelési Tanács.
1962	alsó és felső tagozat	Művelődésügyi Minisztérium (1962), Tanterv és utasítás az általos iskolák számára. Budapest : Tankönyvkiadó.
1978	Alsó és felső tagozat	Szebenyi P. ed. (1978), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve*. Budapest : OPI.

Tankönyvek és tanári kézikönyvek

Francia tankönyvek és tanári kézikönyvek

Alsó tagozat

Brousseau, G. & Felix, L. (1972). *Mathématique et thèmes d’activité à l’école maternelle*. Collection Première mathématique. Paris : Hachette.

Eiller, R., Mertz, J. & Guyonnaud, M. T. (1971). *Math et calcul cours préparatoire.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Mertz, J. & Guyonnaud, M. T. (1972). *Math et calcul cours préparatoire. Document de travail pour le maître*. (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Guyonnaud, M. T., Mertz, J., Ravenel, R. & Ravenel, S. (1977). *Math et calcul cours préparatoire.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Guyonnaud, M. T., Mertz, J., Ravenel, R. & Ravenel, S. (1977). *Math et calcul cours préparatoire. Livre du maître*. (gr. 1) Paris : Hachette.

ERMEL (Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire) (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cylce préparatoire.* (gr. 1) Paris : SERMAP OCDL.

ERMEL (1978). Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cylce élémentaire - Tome 2. (gr. 2) Paris : SERMAP OCDL.

Picard, N. (1970), *À la conquète du nombre I. Classe de CP*. (gr. 1). Paris : OCDL.

Felső tagozat

Collection Mauguin (1976). *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Librairie Istra.

Collection Mauguin (1980). *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Librairie Istra.

Collection Monge (1969), *Mathématiques. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Belin.

Collection Monge (1969), *Mathématiques. Classe de sixième. Guide pédagogique.* (gr. 6) Paris : Belin.

Collection Monge (1971), *Mathématiques. Classe de quatrième.* (gr. 8) Paris : Belin.

Collection Monge (1972), *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Belin.

Collection Monge (1978), *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Belin.

Collection Queyzanne-Revuz (1969), *Mathématique. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1969), *Mathématique. Classe de sixième. Livre du professeur* (gr. 6) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1971), *Mathématique. Classe de quatrième.* (gr. 8) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1972), *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1972), *Mathématique. Classe de troisième. Livre du professeur.* (gr. 9) Paris : Nathan.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1979) *« Faire » des mathématiques. Classe de 4e. Livre du maître*. (gr. 8) Paris : CEDIC.
Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e*. (gr. 9) Paris : CEDIC.
Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e. Livre du maître.* (gr. 9) Paris : CEDIC.
Polle, R. & Clopeau G.-H. (1973), *Mathématique. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Delagrave.
Polle, R. & Clopeau G.-H. (1972), *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Delagrave.

Magyar tankönyek és tanári kézikönyvek

Alsó tagozat

C. Neményi, E. & Varga, T. (1978) *Matematika munkalapok. 1. osztály*. (gr. 1) Budapest: Tankönyvkiadó.
C. Neményi, E., Göndöcs, L., Merő, L., & Merő, L. & Varga, T. (1978), *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához*. (gr. 1) Budapest : Tankönyvkiadó.

Felső tagozat

Eglesz I., Kovács, Cs., Radnainé Szendrei, J., & Sztrókayné Földvári, V. (1981). *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához*. (gr. 5) Budapest : Tankönyvkiadó.
Eglesz, I., Kovács, Cs., & Sztrókayné Földvári, V. (1979*). Matematika általános iskola 5.* (gr. 5) Budapest : Tankönyvkiadó.
Eglesz, I., Kovács, Cs., & Sztrókayné Földvári, V. (1981*). Matematika általános iskola 6.* (gr. 6) Budapest : Tankönyvkiadó.
Kovács, Cs., Sz. Földvári, V., & Szeredi, É. (1980). *Matematika 7*. (gr. 7) Budapest : Tankönyvkiadó.
Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1979), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály*. (gr. 6) Budapest : Tankönyvkiadó.
Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1981), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 7. osztály*. (gr. 7) Budapest : Tankönyvkiadó.
Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1984), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 8. osztály*. (gr. 8) Budapest : Tankönyvkiadó.

Interjúk

Jeanne Bolon, 2013. március 28.
Josette Adda, 2015. január 20.

Pálmay Lóránt, 2012. július 26.
Halmos Mária, 2013. január 2.
Halmos Mária, Csahóczi Erzsébet, Kovács Csongorné, 2013. november 10.
C. Neményi Eszter, 2013. december 5.
Deák Ervin, 2013. december 28.
Surányi László, 2013. december 29.