DOKTORI (PHD) ÉRTEKEZÉS

Hagyomány és reform az 1960-as és ’70-es évek matematikaoktatásában: Magyarország és Franciaország reformjainak összehasonlító elemzése

Tradition et réforme de l’enseignement des mathématiques à l’époque des mathématiques modernes: le cas de la Hongrie et de la France

Gosztonyi Katalin

Témavezető: Alain Kuzniak és Kosztolányi József

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (Paris 7)
SORBONNE PARIS CITÉ

École doctorale „Savoirs scientifiques: épistémologie, histoire des sciences et didactique des disciplines”
Laboratoire de didactique André Revuz

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet

2015.

A disszertáció eredeti, teljes verziója francia nyelven készült. A jelen dolgozat az eredeti rövidített, magyar nyelvű verziója.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Sokaknak tartozom köszönettel azért, hogy ez a disszertáció elkészülhetett. Hálás vagyok mindenekelőtt két témavezetőm, Kosztolányi József és Alain Kuzniak támogatásáért. Habár lényegében nem ismertük egymást a doktori tanulmányaim megkezdése előtt, mindketten bizalmat szavaztak kutatási tervemnek, és a nyelvi, szervezésbeli és egyéb nehézségek ellenére vállalták a két országban folytatott kutatás vezetését, és végigkísértek a doktori disszertáció elkészítésének sokszor göröngyös útján. Magyar témavezetőm elsősorban a magyar matematikaoktatási hagyományok és a Varga Tamás reform mély ismeretével nyújtott jelentős támogatást, francia témavezetőmtől pedig a kutatás elméleti alapjainak és módszertanának kidolgozásában kaptam értékes segítséget.

Köszönettel tartozom Alain Bernard-nak is, aki matematikatörténészként az első kutatási terv megfogalmazásától a disszertáció megírásáig végigkísérte kutatómunkámat, és nagy segítséget nyújtott a történeti elemzés kidolgozásában. A vele való együttműködésem tette lehetővé, hogy részt vegyek „Séries de problèmes” című tudománytörténeti kutatóprojektben, és hogy gyakorló francia tanárokkal is kapcsolatba kerülhessek a doktori kutatás évei alatt, baráti támogatása pedig több nehéz pillanaton is átsegített az elmúlt évek során.

Hálás vagyok Máté Andrásnak is, akit egyetemi tanulmányaim kezdete óta ismerek. Matematikafilozófiai ismereteimet jelentős részben neki köszönhetem; kutatásom alapötlete pedig részben a vele folytatott, a Varga Tamást támogató matematikusok matematikafelfogásáról szóló beszélgetésekből nőtt ki. E disszertáció, és különösen annak második, episztemológiai része nem születhetett volna meg az ő támogatása nélkül.

Köszönettel tartozom Catherine Goldsteinnek is, aki egy kéthetes, a budapesti Eötvös Collegium és a párizsi École Normale Supérieure együttműködésében szervezett párizsi tanulmányút során először avatott be a matematikatörténeti kutatások rejtelmeibe, és aki először javasolta, hogy kezdjek doktori tanulmányokba. Az elmúlt évek során több hasznos és érdekes beszélgetést volt alkalmunk folytatni kutatásom matematikatörténeti aspektusairól.

Hálás vagyok Michèle Artigue-nak, aki, miután elhatároztam, hogy matematikadidaktikai kutatásokba kezdek, a Laboratoire de didactique André Revuz vezetőjeként fogadott, és támogatásáról biztosított. Doktori tanulmányaim megkezdéséhez pótolhatatlan segítséget nyújtott, ő mutatott be későbbi francia témavezetőmnek, érdeklődő támogatásával, tanácsaival pedig azóta is rendszeresen segíti a munkámat.

Számos további kutató segítségéért tartozom köszönettel, a teljesség igénye nélkül többek között Hélène Gispert, Renaud d'Enfert, Karine Chemla, Christine Chambris, Marie-Jeanne Perrin, Christophe Hache, Janine és Marc Rogalski, Claire Margolinas szántak időt arra, hogy kutatásomról beszélgessünk, és hasznos tanácsokkal lássanak el.

Külön köszönöm azoknak a segítségét, akik a reformok egykori aktív résztvevőiként osztották meg velem emlékeiket, és vitatták meg a reformokról készülő elemzéseimet: Magyarországon Halmos Istvánné, Szeredi Éva, Kovács Csongorné, Csahóczi Erzsébet, C. Neményi Eszter és Pálmay Lóránt, Franciaországban pedig Jeanne Bolon és Josette Adda.

Hálás vagyok a két kutatóintézet és doktori iskola: a szegedi Bolyai Intézet és Matematika- és Számítástudományi Doktori Iskola illetve a párizsi LDAR és École Doctorale Savoirs Scientifiques doktoriskola közösségének, amiért befogadtak és a doktori tanulmányaim évei alatt támogató közeget biztosítottak úgy is, hogy mindként intézetben csupán a doktori éveim felét töltöttem. Külön köszönöm az LDAR doktorandusz-közösségének az inspiráló közös műhelymunkát és a baráti támogatást, amely sokat segített párizsi hétköznapjaim során.

Köszönetemet szeretném kifejezni nagypapámnak, Deák Ervinnek, aki maga is matematikadidaktikus lévén fiatal koromtól megismertetett matematikadidaktikai kutatásokkal, és akitől részben tudatosan, részben valószínűleg öntudatlanul kutatói szemléletem számos elemét örököltem. A vele folytatott beszélgetések szintén érdemben gazdagították kutatómunkámat az elmúlt évek során.

Végül köszönöm barátaimnak és családomnak a praktikus és érzelmi támogatást, amelyet az elmúlt évek során nyújtottak: az ő támogató jelenlétük nélkül ez a disszertáció aligha jöhetett volna létre.

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

1 A KUTATÁS CÉLJAI, PROBLEMATIKÁJA

E disszertációban bemutatott kutatást elsősorban a matematika-tanárképzés során szerzett tapasztalataim inspirálták. Leendő matematikatanárként sokat hallottunk arról, hogy létezik egyfajta sajátosan magyar matematikatanítási hagyomány, amelynek középpontjában a problémamegoldás és a matematika „felfedeztetése” áll, és amelynek eredményessége elsősorban a tehetséges fiatal matematikusok nemzetközi sikerein mérhető. Sokat hallottuk Varga Tamás nevét is, aki az elbeszélések szerint a magyar matematikaoktatás történetének kiemelkedő alakja, és aki e „felfedeztető” matematikaoktatási hagyományt megkísérelte kiterjeszteni a közoktatásra. A magyar matematikatanítási közösség számos vezető alakja, tanárképzők, elismert tanárok vallják magukat Varga Tamás közvetlen vagy közvetett tanítványainak, a nevét őrzi többek között a matematikatanárok évente megrendezett konferenciája, egy díj és egy matematikaverseny is.[1] Az Varga Tamás által vezetett komplex matematikaoktatási reformkísérlet a róla szóló megemlékezések[2] szerint máig megőrizte aktualitását, értéket képvisel.

A fentiek ellenére[3] tanárjelöltként, kezdő tanárként igen keveset tudtunk meg arról, miben is áll ez a „magyar hagyomány”, és melyek Varga Tamás matematikaoktatási koncepciójának legfőbb elemei. Néhány rövid visszaemlékezésen túl érdemi történeti vagy didaktikai kutatás lényegében nem született e tárgyban. Úgy tűnik, a hagyomány megőrzése, továbbadása komoly nehézségeket támaszt, lényegében csak személyes tapasztalat útján oldható meg[4]: talán ennek köszönhető, hogy míg tanárok egy szűk elitjének körében tovább él, a tanárok szélesebb köre jóformán nem is ismeri.

Kutatásomnak ez a paradox helyzet – egyik oldalról egy hagyomány, amelynek megőrzését a matematikatanítási közösség alapvetően fontosnak találja, másik oldalról a továbbadás nehézségei, és a leíró elemzések hiánya – az egyik legfőbb inspirációs forrása. Disszertációm egyik legfőbb célja, hogy hozzájáruljon ezen űr betöltéséhez. Abban a reményben kezdtem

[1] Varga Tamás Napok : http://mathdid.elte.hu/html/vtn.html, Varga Tamás Díj http://www.vtamk.hu/magyar/oldalak/az_alapitvany/, et Varga Tamás Matematikaverseny http://www.mategye.hu/?pid=vargatamasverseny

[2] Pl. a Varga Tamás Napok konferenciakötetetei http://mathdid.elte.hu/html/vtn.html, illetve (Szendrei 2007).

[3] És annak ellenére is, hogy családom több tagja Varga Tamás híve, egykori kollégája vagy tanítványa.

[4] Nekem magamnak lehetőségem volt Varga Tamás néhány egykori kollégáját (Kovács Csongornét, Csahóczi Erzsébetet) tanítás közben megfigyelni. Fontos tapasztalatokat szereztem Pósa Lajos különböző táboraiban is, aki valószínűleg a „felfedeztető matematikaoktatás” mai legelismertebb és legnagyobb hatású képviselője Magyarországon (ld. pl. https://sites.google.com/site/matematikatabor/oktatasi-alapelveink).

kutatásaimba, hogy e munka hasznára válhat a magyarországi tanárképzésnek, amelynek fejlesztéséhez talán hasznos forrásul szolgálhat; hozzájárulhat egyúttal a magyar didaktikai kutatások fejlődéséhez is azáltal, hogy segít jobban megérteni a mögötte álló matematikaoktatási hagyomány alapelveit, lehetővé téve annak nemcsak fenntartását, hanem kritikus, de koherens továbbgondolását is, és adaptálását a mai kor kihívásaihoz. A „problémamegoldás”, a „felfedeztetés” (vagy „démarche d’investigation”, „inquiry based teachnig”) témái egyébként nemcsak magyar, de nemzetközi viszonylatban is aktuálisnak számítanak, olyan rokon törekvésekkel együtt, mint a „kompetenciaalapú” illetve a „gyakorlatorientált” oktatás. Reményeim szerint ezért Varga matematikaoktatási koncepciójának jobb megértése a fenti témákkal kapcsolatos nemzetközi didaktikai kutatásokhoz is hozzájárulhat.[5]

Egykori kollégáinak visszaemlékezései szerint[6] Varga Tamás aktívan követte korának nemzetközi reformtörekvéseit, amelyeket a „New Math” név alatt szokás összefoglalóan emlegetni. Varga ugyanakkor – kollégái szerint –, tanulva a külföldi kísérletek erényeiből és hibáiból, valami sajátosan eredetit, és más reformokhoz képest koherensebb, kiegyensúlyozottabb koncepciót dolgozott ki. Ezt a sokak által osztott véleményt figyelembe véve érdekesnek tűnt a „komplex matematikaoktatási reformot” annak nemzetközi kontextusában vizsgálni: hogy viszonyul a nemzetközi mozgalomhoz, és mennyiben örököse valamiféle sajátosan magyar hagyománynak?

Kutatásom problematikájának forrásai között meg kell még említenem azokat a tapasztalataimat, amelyeket Franciaországban, egyrészt egy vidéki gimnázium tanárasszisztenseként, másrészt egy didaktikai kutatócsoportnál vendégeskedve szereztem. Felfigyeltem a magyar és francia matematikaoktatás közötti néhány különbségre, és kíváncsi voltam az eredetükre. Megfigyelhettem azt is, hogy – Magyarországgal ellentétben – Franciaországban kiterjedt hagyományai vannak a matematikadidaktikai kutatásnak. Érdekelt, hogy mi lehet a forrása ennek a különbségnek a két ország között, holott mindkét ország büszke a matematikaoktatási hagyományaira. Érdekelt az is, hogyan tudnám a francia matematikadidaktika elméleteit, kutatási módszereit Varga Tamás művének elemzésére felhasználni.

[5] E témák az aktuális magyar és francia tantervek törekvései közt is megjelennek, ld. pl. http://eduscol.education.fr/cid48727/mathematiques-college.html, http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html illetve olyan nemzetközi összehasonlító mérésekben, mint a PISA: http://www.oecd.org/pisa/pisafaq/.

[6] Varga Tamás egykori kollégáival készített interjúink listája a bibliográfiában található. Ld. még (Szendrei 2007)

Végül felfigyeltem arra is, hogy bár Franciaországban is nagy jelentőséget tulajdonítanak a Vargáéval egy időben, az 1960-as és ’70-es években lezajlott reformfolyamatnak, a „mathématiques modernes” reformnak, azt sokkal kritikusabban szemlélik, mint a „komplex” reformot Magyarországon meghaladottnak, a történelem részének tekintik. E megfigyelések felvetetik azt a kérdést, hogy minek köszönhető a két reform eltérő megítélése, illetve mennyiben vezethetők vissza a két ország között megfigyelt egyéb különbségek a ’60-as és ’70-es évek reformmozgalmainak sajátosságaira.

Az itt felsorolt kérdések egy kezdő matematikatanár kíváncsiságából fakadnak, megválaszolásuk nyilvánvalóan meghaladja egy doktori disszertáció kereteit. Mégis fontos a megemlítésük, hiszen hozzájárultak kutatásom problematikájának pontosabb kidolgozásához.

2 A KUTATÁS PROBLEMATIKÁJA, ELMÉLETI ALAPJAI ÉS MÓDSZEREI

Kutatásom tehát egy meglehetősen általános kérdésből indul ki: hogyan lehetne leírni, jellemezni Varga Tamás reformját? Ahhoz, hogy egy ilyen kérdésre válaszolni tudjunk, pontosítanunk kell azt: mit jelent jellemezni egy reformot? Mit jelent leírni egy olyan összetett rendszert, mint egy matematikaoktatási reform?

A kérdés pontosítása elméleti és módszertani választások sorát igényli: ezen választások határozzák meg a kutatás pontos problematikáját. Az alábbiakban ezeket a választásokat mutatom be: leírom, miért összehasonlító formában végzem a kutatást, szót ejtek a disszertációban követett kettős, történeti és didaktikai megközelítésről és elmagyarázom, miért kizárólag írott források elemzésére korlátozom vizsgálataimat.

2.1 Összehasonlító kutatás

Elemzéseimet összehasonlító kutatás formájában végzem. E választásnak két fő oka van. Egyrészt az összehasonlító elemzés lehetővé teszi, hogy a „komplex matematikaoktatási reformot” annak nemzetközi kontextusában elemezzem. Másrészt az összehasonlítás egyfajta módszertani eszköz arra, hogy kilépjek az általam ismert hagyományból, megkíséreljek valamiféle távlatot teremteni személyes tapasztalataim és a kutatásom tárgya között. Kutatásomban tehát két országban, két párhuzamosan megvalósított reformot hasonlítok össze.

2.1.1 Összehasonlítás a francia reformmal

Mi indokolja a magyar reformnak a franciaországival való összehasonlítását? Mindenekelőtt természetesen egy praktikus szempont: a francia-magyar közös vezetésű doktori kereteiből adódik ez a választás. Ugyanakkor ennél mélyebb tudományos érvek is indokolnak egy ilyen összehasonlítást.

Mindenekelőtt egy módszertani szempont: a francia „mathématiques modernes” reform a magyarral ellentétben számos történeti és didaktikai kutatás tárgyát képezi, amelyeknek nem csak az eredményeit tudom felhasználni, de módszertani szempontból is mintaként szolgálnak számomra.

Szerepet játszanak történeti megfontolások is: Franciaország a nemzetközi reformmozgalom egyik vezető országa, amely számos más ország reformjára gyakorolt befolyást (vö. I. Rész §2.2). Varga Tamás ráadásul közvetlenül is kapcsolatban áll több francia kutatóval, többször hívják előadni, publikálni Franciaországba (Dumont & Varga 1973, Glaymann & Varga 1973) és ő is fordít francia műveket magyarra (Revuz 1963/1973). Varga egyébként maga veti föl, hogy a két reform a hasonló intézményi feltételek miatt kifejezetten alkalmas az összehasonlításra (Varga 1975, 48. o.).

A francia és a magyar reform összehasonlítása ráadásul különösen érdekesnek ígérkezik episztemológiai és didaktikai szempontból. A New Math időszakának egyik jellegzetessége, hogy különös figyelmet szentel a matematika természetével kapcsolatos megfontolásoknak, és annak a képnek, amelyek az oktatás közvetít a matematikáról (pl. Gispert 2010, Gispert & Schubring 2011). A francia reform esetében Bourbaki hatásának emlegetése közhelyszámba megy, nemcsak korabeli források erősítik meg, hanem történeti kutatások is (pl. Barbazo & Pombourcq 2010, d’Enfert & Gispert 2011). Varga Tamás viszont Pólya követőjének vallja magát (pl. Varga 1975, 37. o.), és mint láttuk, gyakran úgy hivatkoznak rá, mint valamiféle „felfedeztető matematikaoktatás” képviselőjére. Úgy tűnik tehát, hogy a két reform hátterében két különböző matematikafelfogás rajzolódik ki, amelyek közül az egyik a matematika axiomatikus-deduktív jellegére, a másik a heurisztikus módszerekre és a problémamegoldásra helyezi a hangsúlyt.

Ez a megfigyelés új kérdéseket is felvet: hogyan jellemezhető a két reform episztemológiai háttere? Mennyiben befolyásolja ez a háttér az egyes reformok sajátosságait: a tanterveket, a tanítási módszereket, a tanítás segédanyagait?

Ebből a szempontból kutatásom úgy is tekinthető, mint egyfajta esettanulmány egy a konkrét történeti kontextuson túlmutató probléma vizsgálatához: mi az összefüggés egy matematikaoktatási koncepció sajátosságai és a mögötte húzódó matematikafelfogás között?

2.1.2 A vizsgált időszak

Varga az 1960-as évek elejére vezeti vissza reformkísérletének gyökereit: Dienes Zoltán 1960-as előadássorozata után 1962-ben az UNESCO rendezett nemzetközi matematikaoktatási kongresszust Magyarországon. A következő évben, 1963-ban indította be Varga Tamás azokat a kísérleteket, amelyek végül a matematikaoktatási reform tervének kidolgozásához, és annak 1978-as hivatalos bevezetéséhez vezettek.

A francia „mathématiques modernes" reform a Lichnerovicz-vezette minisztériumi bizottság munkáját követően 1969-ben került bevezetésre középszinten (a *collège* a magyar felső tagozatnak, a *lycée* a magyar gimnáziumnak felel meg), és 1970-ben az elemi iskolában. 1977-ben a reform tantervét egy újabb tanterv váltotta fel.

A két reform lefolyása tehát némileg eltérő: mindkét reformfolyamat az 1960-as évekre vezethető vissza, de a magyar reform hivatalos bevezetése Franciaországban inkább a reformot követő újabb tantervvel esik egybe. Indokoltnak látszik tehát a két reform összehasonlítása, ugyanakkor francia oldalon az 1970-es évek változásainak és az 1977-es tantervnek a figyelembevétele is: ezért didaktikai elemzéseimben magyar oldalon az 1978-as tantervet, francia oldalon az 1969/70-es és az 1977-es tantervet veszem figyelembe.

2.1.3 A tanítás szintjei

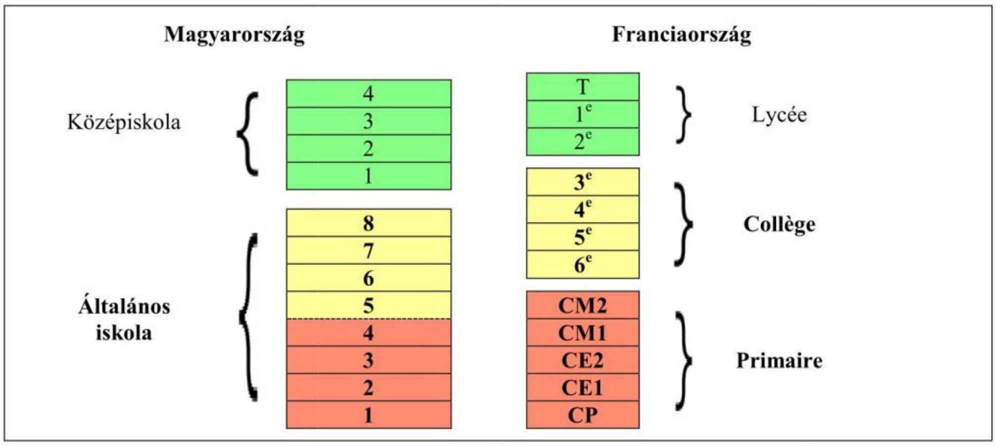
Ahhoz, hogy a tanítás szintjeit érintő választásaimat indokolhassam, mindenekelőtt a két ország korabeli iskolarendszeréről kell szót ejtenem. Mindkét iskolarendszer sokat változott a 20. század folyamán, a „New Math"-időszak reformjai is összefüggnek ilyen jellegű változásokkal: erről a történeti elemzés során (I. Rész) még bővebben lesz szó. Itt csak a vizsgált reformok idején fennálló iskolarendszert mutatom be vázlatosan.

Franciaországban 6-tól 15 éves korig tart ekkoriban a kötelező oktatás, Magyarországon 6-tól 14 éves korig. Franciaországban 5 évnyi *école primaire*-t követ 4 év az úgynevezett *collège*-ben. A *collèg*e az 1960-as és '70-es évek során komoly átalakuláson megy keresztül: a különböző típusú, és különböző társadalmi osztályokat kiszolgáló intézményekben először, az 1960-as évek elejétől a tantervet egységesítik, az egységes *collège* intézményének bevezetésére pedig 1975-ben kerül sor. A *collège* Franciaországban a középszintű tanulmányok alsó tagozatának számít, amelyet 3 évnyi további oktatás követhet különböző típusú intézményekben (többek között a gimnáziumban vagyis *lycée*-ben).

Magyarországon ugyanekkor a kötelező iskolai tanulmányok az egységes 8 osztályos általános iskolában zajlanak, amely alsó és felső tagozatra oszlik. Az általános iskolai tanulmányokat 4 évnyi középiskolai oktatás követheti különböző típusú intézményekben.

A magyar alsó tagozat tehát körülbelül megfelel a francia *école primaire*-nek, a felső tagozat pedig a francia *collège*-nek. Az előbbiben mindkét országban egyetlen tanító foglalkozik az osztályokkal (bár Franciaországban évente változik mind a tanító személye, mind az osztályok összetétele), az utóbbiban pedig szakosodott tanárok. Ugyanakkor néhány különbség is megfigyelhető a két rendszer között, amelyeknek a továbbiakban jelentősége lesz. A magyar általános iskola egységes intézmény, amelyben az osztályok nyolc évig együtt maradnak. Csupán az utolsó (nem kötelező) négy évet tekinti a rendszer „középiskolának", és csupán ez zajlik külön intézményben. Franciaországban viszont három független intézményben zajlik az oktatás, amelyek közül a második kettő számít „középiskolának" (így pl. a *collège* tantervei inkább a gimnáziumi tantervekkel készülnek együtt, mint az *école primaire* tanterveivel).

Az alábbi sematikus ábra bemutatja a két intézményrendszert (a különböző típusú párhuzamos intézmények ábrázolása nélkül[7]).



Az ábráról az is látszik, hogy a tanítás szintjeit máshogy számozzák Franciaországban, mint Magyarországon. A továbbiakban általában egységesen a magyar számozást fogom használni mindkét ország esetében, de néhány, kifejezetten a francia iskolarendszerről szóló bejegyzésben alkalmanként a francia elnevezésekre is utalni fogok. Az egyszerűség kedvéért, amikor a két ország intézményeiről egységesen beszélek, a magyar rendszernek megfelelő *alsó tagozat* és *felső tagozat* kifejezéseket fogom használni, de ilyenkor figyelembe kell

[7] Kutatásomban csak az általános jellegű oktatást vizsgálom, a szakképzéssel nem foglalkozom.

venni, hogy a francia esetben két különálló intézményről van szó. Amikor csak a francia intézményekről beszélek, megtartom a francia *école primaire* és *collège* kifejezéseket.

A francia reform „fölülről lefelé” zajlik: először a *lycée* és a *collège* szintjén vezetik be (1969-ben), csak azután az *école primaire*-ben (1970-ben), és az utóbbi szinten kevésbé kidolgozott és kevesebb változást hoz. Magyarországon a reform „iránya” ezzel épp ellentétes: Varga Tamás kísérletei először az alsó tagozatot érintik, és csak később terjednek ki a felső tagozatra. Az alsó tagozaton így több kísérlet zajlik, a reform újításai mélyebbek és átfogóbbak, mint a felső tagozaton – a középiskolát pedig Varga Tamás munkássága lényegében nem érinti.[8]

A két ország közötti különbséget figyelembe véve szükségesnek látszik, hogy a kötelező oktatás teljes időszakát tanulmányozzam: az alsó tagozat a francia reform szempontjából, a felső tagozat a magyar reform szempontjából nem volna elégséges. Nem tudom természetesen 8 vagy 9 év teljes tantervét részletekbe menően elemezni: ezért a tantervek rövid globális vizsgálata után néhány választott fejezetet tanulmányozok alaposabban (ld. §3). Nem foglalkozom ellenben a középiskolával, egyrészt kutatásom tárgyának behatárolása érdekében, másrészt azért, mert ezen a szinten nem egységesek a két ország iskolarendszerei és tantervei, harmadrészt pedig azért, mert Varga Tamás munkássága lényegében nem érinti a középiskolát.

2.1.4 Az összehasonlítás egyenlőtlenségének elkerülhetetlensége

Nemzetközi összehasonlító kutatások esetében mindig fennáll az elfogultság veszélye, különösen, ha az összehasonlítást egyetlen, az egyik országból érkező kutató végzi.[9] A jelen esetben is nyilvánvalóan fennáll ez a veszély: Magyaroszágon nőttem fel, tanulmányaimat is Magyarországon végeztem, a francia iskolarendszernek ellenben csak megfigyelője vagyok – így kutatásom két tárgyát nagyon eltérő szemszögből látom.

Nem csak egy kutatás eredményeinek értelmezése, de maguk a vizsgált kérdések és a választott kutatási módszerek is okozhatnak (sokszor rejtett) egyenlőtlenséget: a fentiekben láttuk, hogy a francia és a magyar reformok esetében az oktatás szintjeinek választása például

[8] A középiskolai oktatás reformjával egy Surányi János vezette kutatócsoport foglalkozott a Matematikai Kutatóintézetben, de a Varga Tamásénál végül lényegesen kisebb hatással. A Surányi-csoport munkája elsősorban a speciális matematika tagozatos osztályok tantervének kidolgozásában bizonyult eredményesnek (ld. pl. a Halmos Máriával készült interjút).

[9] A CERME9 konferencia összehasonlító kutatásokkal foglalkozó csoportja számos vitát folytatott ezzel a problémával kapcsolatban, ld. pl. (Clarke 2016).

erősen befolyásoló tényező. Hasonlóan nehéz olyan témákat választani, amelyek egyformán jelentősek mindkét tanterv szempontjából, ahogy azt később látni fogjuk.

A választott módszertan szintén számos problémát rejt az én kutatásom esetében is. A francia reform elemzéséhez gyakran meglévő francia kutatásokat használok fel, míg a magyar reformmal kapcsolatban nagyrészt én végzem ezeket az elemzéseket: így nem ugyanazt a típusú munkát végzem el a két esetben. Másrészt viszont a francia didaktikai kultúrából választom azokat a didaktikai elméleteket, amelyek az elemzéseim módszertanát meghatározzák: így felmerül az elméletek átvihetőségének kérdése egyik kultúráról a másikra.

Mindezeket a szempontokat figyelembe véve le kell szögezni, hogy az általam végzett összehasonlítás elkerülhetetlenül egyenlőtlen lesz. Ez azonban nem mond feltétlenül ellent kutatásom eredeti céljainak. Mint az feljebb megjegyeztem, az összehasonlító kutatás legfőbb célja épp az, hogy segítségével „kilépjek" a saját kultúrámból, és így mérsékeljem az azzal kapcsolatos eredendő, természetes elfogultságom hatásait. A kettős vezetésű doktori, amely lehetővé teszi, hogy két ország kutatóival konzultáljak rendszeresen, igen fontos *módszertani* tényező ebből a szempontból: a francia és magyar kutatókkal folytatott eszmecserék sokat segítettek a kutatás olyan jellegű megtervezésében, amely kiegyensúlyozottabb elemzéseket tesz lehetővé. Mindent összevetve pedig, annak tudatában, hogy a tökéletesen objektív elemzés nem lehetséges, arra törekszem, hogy az elfogultság veszélyével szemben kritikus maradjak, hogy azonosítsam azokat a tényezőket, amelyek egyenlőtlen megközelítéshez vezethetnek.

2.2 Kettős, történeti és didaktikai megközelítés

Kutatásom tárgyát kétféle, történeti és didaktikai irányból közelítem meg.

(1) A matematikaoktatás-történet egy oktatási reformot különböző, annak történeti kontextusából eredő tényezők összjátékának eredményeként értelmezi, elsősorban egy reform politikai, gazdasági, társadalmi, kulturális, tudományos és pedagógiai hátterének sajátosságait figyelembe véve (pl. Belhoste, Gispert & Hulin 1996, d'Enfert & Kahn 2010, 2011, Karp & Schubring 2014). Ennek megfelelően elemzéseim során a történeti kontextus számos elemét vizsgálni fogom (I. Rész), de különösen kettőre helyem a hangsúlyt: egyrészt a magyar és a francia reform *nemzetközi* kontextusát jelentő „New Math" *reformmozgalomra"*, másrészt *az egyes országok sajátos* „matematikaoktatási *hagyományaira*". A disszertáció címében szereplő „hagyomány" és „reform" kifejezések ebből a megfontolásból erednek.

Meg kell ugyanakkor jegyeznem, hogy a „hagyomány” szót nem véletlenül tettem idézőjelbe. Valójában nincs szó sem időben változatlan, sem homogén, az egész országra jellemző hagyományokról – ezek éppenséggel a vizsgált reformokkal összefüggésben fejlődnek a 20. század második felének folyamán. Az I. részben tárgyalt történeti elemzés részben arra szolgál, hogy azonosítsam azokat a főbb szereplőket, akik a magyar és a francia reformot befolyásolták. Rá fogok mutatni, hogy mindkét országban meghatározható matematikusoknak egy csoportja, akik a reform tervezésében többé vagy kevésbé aktív szerepet vállaltak, és arra nagy hatást gyakoroltak, elsősorban az általuk képviselt matematikafelfogás hangoztatásával. A reformoknak erre az episztemológiai hátterére különös hangsúlyt fogok helyezni elemzéseim során: igyekszem megmutatni, mi a szerepük ezeknek a megfontolásoknak a reformok különböző didaktikai jellemzőinek alakításában. Ebben a sajátos értelemben hivatkozom majd magyar és francia „hagyományokra”: habár ezek általánosabb és hosszabb távú hatását is okkal lehet feltételezni, egy ilyen jellegű kiterjedtebb vizsgálat meghaladná a jelen disszertáció kereteit.

(2) Didaktikai szempontból egy matematikaoktatási reform az oktatás különböző összetevőinek, a tantervnek, a tanítási módszereknek és a tanítás segédanyagainak átalakítását jelenti. Ezek az összetevők egy komplex, összefüggő rendszert alkotnak, amelynek különböző elemei kölcsönösen befolyásolják egymást. Ezen összetevők tanulmányozásához keresek alkalmas didaktikai elemzési eszközöket.

Elsősorban a francia didaktikai hagyomány eszköztárából válogatva a tanterveket az ún. „ökológiai megközelítés” (Artaud 1997), a tanítási gyakorlatot pedig a Didaktikai Szituációk Elméletének (Brousseau 1998) segítségével elemzem. A fentieken kívül bizonyos fejezetekben további didaktikai elméleteket is felhasználok. A didaktikai elemzésekehez felhasznált elméleteket a III. Rész 1. fejezetében ismertetem bővebben.

2.2.1 Rendszerszerű megközelítés

Mind a történeti, mind a didaktikai megközelítés esetében rendszerszerű szemléletről van szó. Különböző didaktikai kutatások többféle elméleti modellt is kidolgoztak, amelyek a matematikaoktatást különböző tényezők összefüggésében láttatják. Az egyik ilyen példa az TIMMS-kutatásokhoz kidolgozott ún. SMSO-modell (Schmidt et al. 1996). Schmidt és csoportja bevezeti a „pedagogical flow” fogalmát, amellyel egyfajta, a szerzők szerint az egyes országokra jellemző oktatási irányzatot kísérelnek meg leírni, amely egyaránt meghatározza a tantervek, a tanítási módszerek és a segédanyagok (tankönyvek, egyéb segédeszközök) sajátosságait. Az SMSO-modell egy oktatási rendszeren belüli komplex összefüggéseket ír le:

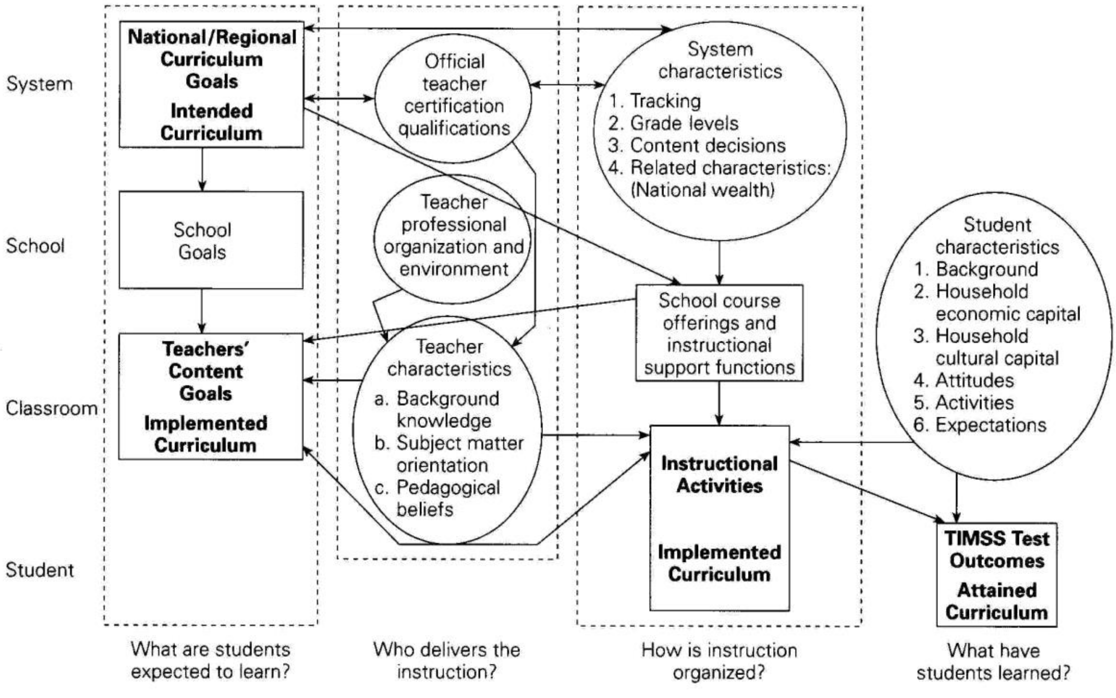
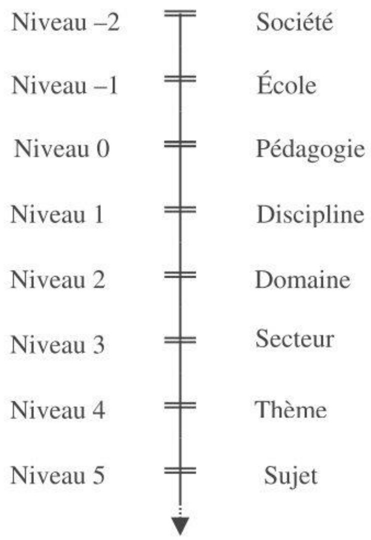


Figure 5.1: SMSO conceptual model of educational opportunity

Ez a modell azonban nem veszi figyelembe az oktatási rendszeren *kívüli*, politikai, gazdasági, társadalmi, kulturális tényezők hatásait, és nem tesz különbséget az egyes tantárgyak diszciplináris sajátosságai között sem.

Egy másik didaktikai modell, a Chevallard (2002a, b) által leírt *kodeterminációs szintek* modellje tekintetbe veszi ezeket a tényezőket, azonban egyetlen lineáris, hierarchikus rendszerbe szervezi őket, nem vesz tudomást a különböző tényezők között fennálló bonyolult kölcsönhatásokról. Egy másik sajátossága Chevallard modelljének, amelynek következtében számomra csak korlátozottan hasznos, hogy kizárólag *intézményeket* vizsgál: az egyének ebben a modellben mint egyes intézmények képviselői jelennek meg, nem véve számításba személyiségüket, céljaikat és egyéni életútjukat.



2.2.2 A disszertáció elméleti modellje

Saját kutatásomhoz a fentieknél rugalmasabb, kevésbé szigorúan meghatározott modellt állítottam fel, amely ugyanakkor lehetővé teszi az összes kutatásom szempontjából fontos tényező figyelembevételét. E modellnek három szintjét határoztam meg: (1) egy reform történeti kontextusa, (2) az adott reform episztemológiai háttere, a reformot befolyásoló matematikusok által képviselt matematikafelfogás, végül (3) a reform didaktikai sajátosságai.

Ez a modell határozza meg a disszertáció szerkezetét és segít megfogalmazni a kutatás fő kérdéseit. A disszertáció egy-egy része a modell egyes szintjeinek felel meg. Az egyes részekben a következő kérdésekre keresem a választ:

1, Hogyan befolyásolják a történeti kontextus különböző elemei a „New Math” időszak magyar és francia reformjait?

2, Mi jellemzi a két reform episztemológiai hátterét? Melyek a reform főbb szereplőinek elképzelései a matematika természetéről és annak tanításáról a magyar és a francia esetben?

3, Melyek a két reform didaktikai sajátosságai, mi jellemzi a tantervüket, az általuk előírt tanítási módszereket és a tanítás segédanyagait? Azonosíthatunk valamiféle koherens „pedagogical flow”-t a magyar és a francia esetben?

4, Hogyan hatnak egymásra a modellben meghatározott különböző szintek? Hogyan befolyásolja a történeti kontextus és az episztemológiai háttér a két reform didaktikai sajátosságait?

2.3 A felhasznált források: írott dokumentumok elemzése

A kutatáshoz felhasznált források választására külön ki fogok térni az egyes részek bevezetőjében; egy a didaktikai elemzést érintő kérdésről azonban már itt, a bevezetésben szót kell ejtenem.

A tanítás gyakorlata kutatásom problematikájának egyik központi eleme – ugyanakkor tanulmányozása komoly módszertani nehézségeket vet fel. Az ilyen jellegű kutatás ugyanis osztálytermi megfigyelést igényelne, ami az 1970-es évek tanítási gyakorlatát illetően nyilvánvalóan nem lehetséges. Néhány videó fennmaradt ugyan ebből az időszakból, de ezek kis számú, kontextusukból kiragadott, jobbára mesterséges körülmények között (stúdióban és nem osztályteremben) készült felvételek. A korszak köznapi iskolai gyakorlatához tehát nehéz volna közvetlenül hozzáférni.

Le kell tehát szögeznem, hogy kutatásomnak nem célja a köznapi tanítási gyakorlat elemzése. Azt vizsgálom, hogy *a reform megalkotói milyen tanítási gyakorlatot gondolnak el*, elképzeléseik elemzéséhez pedig *kizárólag írott forrásokra* (tantervekre, tankönyvekre, tanári kézikönyvekre) támaszkodom, amelyek segítségével megkísérlem *rekonstruálni* az elgondolt tanítási módszereket. Természetesen nincs szó teljes rekonstrukcióról: forrásaim egyes kérdésekről részletesen szólnak, másokról hallgatnak, ezáltal különböző területeken kisebb vagy nagyobb önállóságot hagyva e segédanyagokból dolgozó tanároknak. Látni fogjuk, hogy a különböző segédanyagok között jelentős eltérések figyelhetők meg ebből a szempontból, ezek a különbségek pedig önmagukban is az egyes reformok lényeges jellemzőire mutatnak rá.

Volna esetleg egyéb mód is az 1970-es évek tanítási gyakorlatához való hozzáférésre: interjút lehetne például készíteni az egykori tanárokkal (vagy akár a tanulókkal), vagy mai tanítási órák megfigyeléséből lehetne az egykoriakra nézve következtetéseket levonni. Több okom is volt azonban arra, hogy ne próbálkozzam ilyesfajta módszerekkel (tehát, hogy kutatásomat első lépésben az írott források elemzésére korlátozzam, és a mai tanítási gyakorlat megfigyelését a kutatás perspektívái közé soroljam):

(1) Egyfajta módszertani elővigyázatosság: a tantermi megfigyelések egészen más módszertant igényelnek, mint a disszertációm többi részének elemzései. A doktori kutatás kiterjesztése ilyen jellegű elemzésekre, különösen két különböző országban, a kettős vezetésű doktorival járó utazások körülményei között túlságosan ambiciózusnak tűnt.

(2) Az anakronizmus veszélye: bár a vizsgált korszak nem nagyon távoli múlt (és valójában a korszak több fontos szereplőjét volt alkalmam tanítás közben megfigyelni), az oktatás sokféle változáson ment keresztül az 1970-es évek óta, és feltételezhető, hogy még az azóta folyamatosan tanító tanárok gyakorlata is sokat változott időközben. Ha tehát az 1970-es évek gyakorlatát a maiból kiindulva próbálnám értelmezni, az kétségkívül anakronizmushoz vezetne.

(3) A szövegelemzéssel kapcsolatos óvatosság: első kísérleteim az 1970-es évek oktatási segédanyagainak értelmezésére naiv módon, erősen táplálkoztak saját tapasztalataimból a tanítási módszereket illetően. Szembesülnöm kellett azonban azzal, hogy a magyar és a francia olvasók sokszor lényegesen eltérően interpretálták ezeket a szövegeket. Ez a felismerés szorított rá, hogy saját értelmezésem forrásait világosabbá tegyem, és rámutassak a szövegeknek azokra a sajátosságaira, amelyek az általam javasolt értelmezést alátámasztják. Ebből a szempontból kutatásom valójában bizonyos tudománytörténeti kutatások módszertanából merít ihletet: számos ilyen kutatás foglalkozik azokkal a tudományos vagy oktatási gyakorlatokkal, amelyekbe a forrásként elemzett szövegek illeszkednek, azonban e gyakorlathoz a történeti források nem férnek hozzá. Annak tudatában, hogy e gyakorlatok lényegesen eltérhetnek a kutató számára megszokottól, a tudománytörténészek az írott szöveg sajátosságaiból igyekeznek a mögöttük álló egykori gyakorlatra következtetni.[10] Az effajta óvatosság valójában hasonlónak tűnik ahhoz, amelyet az összehasonlító didaktikai kutatások megkövetelnek.

(4) A segédanyagok mint a tanári munka forrásai: a reformidőszak tanárai jelentős változásokkal szembesültek mindenféle szempontból: lényegesen változott a tanterv tartalma és szerkezete, a követendő tanítási módszerek stb. Habár mindkét országban szerveztek továbbképzéseket, a tanárok többsége mégis az írott forrásokra volt utalva a reformok megvalósításának során. Az írott forrásokat tanulmányozva kutatóként az akkori tanárokhoz hasonló helyzetbe helyezkedem: egy efféle vizsgálat segíthet megérteni, hogyan tudott egy tanár a neki kínált segédanyagokból dolgozni, hogyan tudta a tanári munkáját megtervezni, miben kapott támogatást, és melyek azok a nehézségek, amelyekkel a segédanyagok sajátosságai miatt kellett szembenéznie.

3 A DISSZERTÁCIÓ FELÉPÍTÉSE

A disszertáció, a feljebb bemutatott általános modellnek megfelelően, három fő részből áll:

- egy történeti részből
- egy episztemológiai részből
- egy didaktikai részből.

Az első két rész értelmezési keretül szolgál a disszertáció harmadik, lényegi részéhez, a didaktikai elemzéshez.

[10] Ld. pl. (Lamassé 2014) ill. a „séries de problèmes" projekt kötetének néhány tanulmányát (Bernard 2015).

A történeti részben a nemzetközi New Math reformmozgalomról szóló történeteti kutatások eredményeinek rövid összefoglalása után a francia és a magyar reform történeti kontextusát vizsgálom: a reformok politikai, társadalmi-gazdasági, matematikai és pedagógiai indítóokait, a két ország oktatási rendszerének változásait, a reformok fő szereplőit és a reformfolyamat dinamikáját. Franciaország esetében főleg meglévő matematikaoktatás-történeti kutatások eredményeit foglalom össze. Magyarország esetében e kutatásokat nagyobbrészt magam végzem, általános történeti és pedagógiatörténeti művekre, eredeti dokumentumokra és reform néhány résztvevőjének írott és szóbeli visszaemlékezéseire támaszkodva.

Az episztemológiai rész az előző részre támaszkodik. Miután a történeti elemzés kimutatta bizonyos matematikusok kitüntetett szerepét a két vizsgált reform koncepciójának megalapozásában, illetve a matematika természetéről szóló kiterjedt, explicit diskurzus létét a New Math mozgalom idején, a második részben az érintett matematikusok matematikafelfogását és tanításról vallott elképzeléseit vizsgálom meg behatóbban, néhány írásuk, elsősorban matematikanépszerűsítő művek és matematikatanításról szóló előadások szövegének elemzésén keresztül. A francia reform hátterében egyfajta „bourbakiánus" matematikafelfogás mutatható ki (amire nem csak a korabeli dokumentumok, de történeti kutatások is utalnak, pl. Barbazo & Pombourcq 2010), a magyar reform hátterében ugyanakkor egy ettől eltérő, de szintén markáns és koherens matematikafelfogás rajzolódik ki, amelyet Pólya és Lakatos nyomán „heurisztikus"-nak fogok nevezni.

A disszertáció harmadik, leghosszabb részének célja a francia és a magyar reform didaktikai elemzése. A harmadik rész bevezetéseképp külön fejezetben ismertetem didaktikai elemzéseim elméleti hátterét és módszertanát (1. Fejezet). A reformok tanulmányozását a tantervek tartalmának és szerkezetének átfogó elemzésével kezdem (2. Fejezet). Mivel a teljes általános iskola tantervéről van szó, ez az elemzés nem bocsátkozhat részletekbe: a részletesebb analízist három választott példa szolgálja.

A három példát különböző szempontok szerint választottam: a matematika különböző területeit és az oktatás különböző szintjeit érintik, továbbá más-más típusú segédanyagok és a tanítási gyakorlat más-más összetevői állnak az egyes fejezetek középpontjában.

Az első példa (3. Fejezet) a természetes szám fogalmának bevezetését vizsgálja 1. osztályban; itt a munkalapokat és alsó tagozatos tanári kézikönyveket elemzem. A második példa (4. fejezet) a felső tagozatos geometria tantervet, ezen belül is elsősorban a Pitagorasz-tétel tanítását vizsgálja a felsős tankönyvek és tanári kézikönyvek elemzésén keresztül. Az utolsó fejezet (5. Fejezet) középpontjában Varga Tamás közelebbi szakterülete, a kombinatorika és a valószínűségszámítás tanítása áll. Ezek a témák a francia „mathématiques modernes” reform alsó és felső tagozatos tantervében nem szerepelnek, az 1970-es évek matematikatanításában, különösen az ekkoriban folytatott kísérletekben azonban felbukkannak, így példaként szolgálhatnak a francia matematikatanítási elképzelések 1970-es években lezajlott változásainak elemzéséhez. A hivatalos dokumentumokon kívül ebben a fejezetben néhány didaktikai cikket is figyelembe veszek.

A példák választása nem magától értetődő, a két tanterv rendkívül eltérő felépítése miatt nehéz olyan példákat találni, amelyek egyformán jelentősek volnának a két reform szempontjából. Általában olyan példákat választottam, amelyek elsősorban a magyar reform sajátosságait segítenek megvilágítani, de törekedtem arra, hogy a példák valamilyen módon a francia reform szempontjából is relevánsak legyenek, és lehetővé tegyék, hogy mindkét reformról képet alkossunk. Az egyes példák választását a vonatkozó fejezetek bevezetőjében részletesebben is indoklom.

I. Rész
A két reform történeti kontextusa

1 BEVEZETÉS

Az eredeti, francia nyelvű disszertációban bemutatott részletes történeti elemzéseknek itt hely hiányában csak rövid összefoglalóját közlöm. Két fő szempont szerint választom ki a legfontosabb megállapításokat. Egyrészt a történeti elemzés segít meghatározni a további elemzések tárgyát: a reformmozgalmak legfőbb szereplőit, köztük nem csak a reformfolyamat vezetőivel, hanem a reformok hátterében álló matematikusokkal is, akiknek a matematikafelfogását a II. részben elemzem, vagy éppen az 1970-es évek francia matematikaoktatási kísérleteinek vezetőivel, akiknek a munkásságát a III. rész 3. és 5. fejezetében vizsgálom meg. A történeti elemzés mutat meg néhány, a bevezetőben már említett szempontot: milyen időszak dokumentumait érdemes vizsgálni, a tanítás mely szintjeit érinti a reform stb. A történeti elemzés igazolja ezenkívül azt is, hogy a két reform vezetői valóban ugyanabban a nemzetközi reformmozgalomban vesznek részt, és számos közös vonást ez a közös háttér magyaráz.

A történeti elemzés másik fontos célja a reformok politikai, társadalmi-gazdasági, iskolarendszerbeli, kulturális és tudományos hátterének feltárása, annak vizsgálata, hogy az egyes országok reformjának sajátos történeti kontextusa hogyan befolyásolja a reformok sajátosságait, mennyiben magyarázza a francia és a magyar reform között felismerhető hasonlóságokat és eltéréseket.

A történeti háttér elemzése nem korlátozódik az 1960-as és 1970-es évekre: bár a 20. század teljes matematikaoktatás-történetét nem tanulmányozhattam, több jel mutatott arra, hogy mind a nemzetközi, mind a francia, mind a magyar esetben érdemes a „New Math” időszakát a megelőző századforduló matematikaoktatási reformjaihoz hasonlítani, ahogy azt több matematikaoktatás-történeti kutatás is teszi (pl. Belhoste, Gispert & Hulin 1996, Gispert & Schubring 2011). Az ezzel kapcsolatos eredményekre a dolgozat magyar nyelvű verziójában csak egészen röviden fogok utalni. Az 1960-as és ’70-es évek reformjainak értelmezéséhez pedig szükségképpen figyelembe kellett venni a második világháború utáni évtizedek politikai, gazdasági, társadalmi változásait, és az iskolarendszer ezzel összefüggő átalakulását.

A nemzetközi és a francia történeti kontextus elemzésében meglévő matematikaoktatás-történeti kutatásokra támaszkodtam, ezek eredményeit foglalom össze. A magyar matematikaoktatással kapcsolatban viszont alig zajlott ilyen jellegű kutatás. Ebben az esetben ezért általános történeti és oktatástörténeti forrásokon kívül elemzésemben eredeti dokumentumokra, illetve a reformmozgalom résztvevőinek írásos és szóbeli visszaemlékezéseire hagyatkoztam (a kutatás során készült interjúk listáját a bibliográfia tartalmazza).

A nemzetközi reformmozgalom rövid ismertetése után (§2) a fenti szempontok szerint foglalom össze először a francia (§3), majd a magyar reform (§4) történeti kontextusával kapcsolatos legfontosabb megállapításokat.

2 A NEMZETKÖZI „NEW MATH" MOZGALOM

A matematikaoktatás megújításának ügyében már a 20. század elején indult egy nemzetközi együttműködés, amely elsősorban Felix Klein nevéhez köthető. Ezzel összefüggésben alakult meg többek között a ma ICMI (International Commission on Mathematics Instruction) néven ismert matematikaoktatással foglalkozó nemzetközi szervezet. Ebben a 20. század eleji mozgalomban jelentős szerepet játszottak a korabeli francia matematikaoktatási reformtörekvések, illetve a magyar matematikaoktatás is képviseltette magát, elsősorban Beke Manó személyében. Az előző századfordulón egyébként mind Franciaországban, mind Magyarországon jelentős átalakuláson ment keresztül az oktatási rendszer és azon belül a matematikaoktatás; a 20. század eleji és az 1960-70-es évek reformmozgalmai közötti összefüggések, hasonlóságok és különbségek vizsgálata számos érdekes tanulsággal szolgál[11].

A két világháború között, részben a Franciaország és Németország közötti politikai feszültségek miatt a nemzetközi együttműködés visszaszorult, a második világháború után, az '50-es évektől kezdve azonban ismét megélénkült (Gispert & Schubring 2011). Ekkor indult meg az a több évtizeden át zajló mozgalom, amelyet „New Math" vagy „mathématiques modernes" néven szokás emlegetni, és amely, bár az USA-ból és Nyugat-Európából eredtt, a világ minden táján kifejtette a hatását[12].

A reformmozgalmat számos különböző tényező motiválta: politikai, gazdasági, társadalmi szempontok fonódtak össze matematikai, pszichológiai és pedagógiai szempontokkal[13]. A „New Math" mozgalom elindulását szokás az ún. „Szputnyik-sokkhoz" kötni: a Szovjetunió 1957-ben fellőtte az első Szputnyikot, az USA és néhány Nyugat-Európai ország politikai

[11] A 19-20. század fordulóján lezajlott, matematikaoktatással kapcsolatos folyamatokról valamivel részletesebben írtam a disszertáció eredeti, francia verziójában – e téma kifejtésére azonban a rövidebb magyar verzióban nincs mód.

[12] Az *Educational Studies* 1978-as kötete megkísérel áttekintést adni a világ különböző országaiban zajló matematikaoktatási reform folyamatokról. A kötetben egyébként egy Magyarországgal foglalkozó cikk is található (Halmos & Varga 1978)

[13] Ezekről pl. Gispert 2010 ad áttekintést.

vezetése pedig, attól tartva, hogy lemarad a hidegháborús technológiai versenyben, ebből az eseményből azt a következtetést vonta le, hogy fejlesztenie kell a matematikai és természettudományos oktatást. Azonban az iparosodott társadalmakban, gazdaságokban a hidegháborús versenytől függetlenül is növekvő igény mutatkozott a matematikailag képzett szakemberekre (a vasfüggöny mindkét oldalán). A második világháborút követő évtizedekben egyúttal az oktatási rendszer is számos társadalomban átalakult: az oktatás tömegesedése, demokratizálódása az egyes tantárgyak, így a matematika oktatása terén is változásokat tett szükségessé.

Ezekkel a politikai, társadalmi, gazdasági folyamatokkal párhuzamosan a matematikusok részéről is megfogalmazódott az igény a matematikaoktatás megreformálására. A matematika 20. századi intenzív fejlődésének köszönhetően a közoktatásbeli és az egyetemi matematika tanterv között egyre nőtt a szakadék: az 1950-es évektől mind matematikusok, mind matematikatanári szervezetek felszólaltak a matematikaoktatás korszerűsítéséért. A „modern matematika" egyik legfontosabb modelljének világszerte a francia Bourbaki-csoport művét tekintették. Jelentős hatást gyakoroltak továbbá a matematika oktatására a pszichológia eredményei, különösen Piaget munkássága, aki maga is felismerni vélt a Bourbaki által leírt „matematikai struktúrák" és az általa feltárt emberi „gondolkodásbeli struktúrák" közötti összefüggéseket. Ezenkívül az „aktív pedagógia" módszerei is fontos szerepet játszottak a reformmozgalomban: az 1960-as és '70-es években számos általános iskolások számára tervezett tevékenytedtető matematikaoktatási eszköz terjedt el, az ún. logikai készlettől Dienes játékaiig.

A matematikaoktatás megújításával több nemzetközi szervezet is foglalkozott. A CIEAEM (Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement mathématique) 1952-ben jött létre Caleb Gattegno vezetésével. A szervezetben több francia matematikus is vezető szerepet játszott, köztük a Bourbaki-tag Jean Dieudonné, a francia egyetemi oktatást Bourbaki szellemében megújító Gustave Choquet, illetve a francia „mathématiques modernes" reform későbbi vezetője, André Lichnerowicz is. A szervezet megalapításában egyébként maga Piaget is részt vett. A CIEAEM első, 1955-ben megjelent könyvében e szereplők mindegyike közölt a matematikaoktatás megújításával foglalkozó tanulmányokat.

A CIEAEM mellett a második világháború után az ICME tevékenysége is megélénkült. Ezenkívül több nemzetközi szervezet foglalkozott a matematikaoktatás kérdéseivel, különösen az OECD és az UNESCO. A különböző szervezetekben különböző szempontok érvényesültek: míg például a CIEAEM az axiomatikus matematika tanítását helyezte a középpontba, az ICME eleinte nagyobb hangsúlyt fektetett a társadalmi-gazdasági szempontokra és a matematika alkalmazásaira (minderről ld. Gispert 2010).

A különböző szervezetek számos nemzetközi konferenciát rendeztek, a különböző oktatási kísérletek eredményei nemzetközi publikációk révén terjedtek. Franciaország, elsősorban a CIEAEM-en keresztül vezető szerepet játszott az 1960-as és ’70-es években kibontakozó nemzetközi reformmozgalomban. A mozgalom, bár az USA-ból és Nyugat-Európából indult ki, nem korlátozódott a „nyugati blokkra”: bár a „keleti blokk” matematikaoktatási reformmozgalmairól alig érhető el kutatás, a korabeli nemzetközi publikációkból, a konferenciák résztvevőinek névsorából jól látható, hogy több kelet-európai ország is képviseltette magát, különösen Lengyelország Krygovska és Magyarország Varga Tamás személyében[14].

3 A „MATHÉMATIQUES MODERNES” REFORM FRANCIAORSZÁGBAN: A TÖRTÉNETI KONTEXTUS ELEMEI

3.1 Viták a matematikaoktatásról az 1950-es és ’60-as években

A franciaországi reformot hasonló társadalmi-gazdasági, matematikai és pedagógiai-pszichológiai jellegű motívumok vezérelték, mint a nemzetközi mozgalmat.

A 20. század második felében a francia oktatási rendszer jelentős átalakuláson ment keresztül. A második világháború után még fennállt a 19. században kialakult, hierarchizált, többrétegű oktatási rendszer, amely az intézményeket különböző „rendekbe” (*ordre*) sorolta. Az ún. „secondaire” az elméleti jellegű elitképzés helyszíne volt, a „primaire” a nagyobb tömegek számára is elérhető, gyakorlatiasabb képzést nyújtó oktatás terepe, illetve külön „rendet” képviselt a szakképzés is. A 20. század közepén az 5 éves elemi iskola már egységes volt, de ezután a tanulók a különböző „rendekhez” tartozó intézményekben folytatták tanulmányaikat, amelyek konzerválták a társadalmi különbségeket (Gispert 2008).

A második világháborút követő három évtized fontos politikai törekvése volt a 10-15 éves tanulók oktatáshoz való hozzáférésének kiszélesítése és a képzés egységesítése: ennek egyik célja a gazdaság és az ipar által támasztott, képzett munkaerőre vonatkozó igények kielégítése volt, a másik pedig az oktatás demokratizálása, egyenlő hozzáférés biztosítása az oktatáshoz minden fiatal számára, függetlenül azok származásától és lakóhelyétől. Az 1959-es Berthoin-féle reform egységesítette a különböző típusú intézmények tantervét a felső tagozaton, az

[14] Ld. pl. a CIEAEM honlapján olvasható megemlékezéseket. http://www.cieaem.org/?q=node/18

1975-ös Haby-féle reform pedig bevezette az egységes „collège” intézményét a 6-9. évfolyamok számára. Az 1969-70-es „mathématiques modernes” reform tehát ennek az egységesítési folyamatnak a kontextusába illeszkedik (ld. pl. d’Enfert & Kahn 2010, 2011).

Az oktatási rendszer átalakulása sokrétű hatást gyakorolt az egyes tantárgyak tananyagának fejlődésére. Ami az elemi iskolát illeti, a képzés célja itt megváltozott: míg korábban a tanulók többsége az elemi iskola végén befejezte tanulmányait, amelynek így a hétköznapi életben szükséges gyakorlati tudást kellett biztosítania, a tanulók a reformok következtében továbbtanultak, így az elemi iskolának ettől kezdve elsősorban a felsőbb fokú tanulmányokra kellett felkészítenie. Ez lehet az egyik magyarázata a „mathématiques modernes” reformban is a hétköznapi életre való utalások visszaszorulásának, és a matematikai fogalomépítés előtérbe helyezésének (ld. pl. III. Rész 3. fejezet). A „collège” szintjén a tananyag egységesítése, az egyenlő hozzáférés biztosítása került előtérbe: a matematikai formális nyelvnek a reformban betöltött központi szerepe éppen az egységesítő, kontextustól független jellegével állhat összefüggésben (vö. II. Rész, III. Rész 4. fejezet). Érdemes hozzátenni ehhez azt is, hogy a „secondaire” rendje, az elitoktatás hagyományosan absztrakt, formális jellegű, míg a „primaire” konkrét, gyakorlatias jellegű volt: a „mathématiques modernes” reform által képviselt absztrakt matematikaoktatás így az elit jellegű képzés kiterjesztéseként, tehát egyfajta demokratizáló gesztusként is értelmezhető. D’Enfert és Gispert (2012) szerint azonban ebben rejlik bevezetésének egyik legfőbb akadálya is: a tanárok döntő többsége ugyanis a korábbi „primaire” rendben dolgozott, számukra pedig idegen volt a matematikaoktatás új szemlélete.

Fontos megjegyezni, hogy a matematikának a kor francia kultúrája meghatározó jelentőséget tulajdonított, nem csak, nem is elsősorban gyakorlati szerepe, sokkal inkább a gondolkodást fejlesztő jellege miatt. A bölcsész- és társadalomtudományokban az 1950-60-as években uralkodó strukturalista irányzat a matematikát az emberi gondolkodás modelljének tekintette, s benne látta a modern kultúra alapjait: a matematika így a latin nyelv hagyományos, kultúrát megalapozó szerepét volt hivatott átvenni (ld. pl. Gispert 2008).

Az 1950-es és 160-as évek Franciaországában a korszerű, modern matematika mintájának a Bourbaki álnéven dolgozó csoport műve, *A matematika elemei* számított. Mint láttuk (§2), az ’50-es évektől több jelentős francia matematikus is aktívan részt vett a matematikatanítás megújítását célul kitűző nemzetközi mozgalmakban. Ők Franciaországon belül is kiálltak a matematikatanítás bourbakiánus szellemben történő megújítása: az axiomatikus módszer tanítása, a modern matematikai témák (pl. halmazelmélet, topológia) oktatásba való beemelése, az algebrai eszközök és a modern formális nyelv előtérbe helyezése mellett (vö. II.

Rész). Törekvéseiket aktívan támogatta a francia középiskolai matematikatanárok egyesülete, az APMEP (Assotiation des professeurs de mathématiques de l'enseignement public) is. Az APMEP szemináriumokat, konferenciákat szervezett, oktatási kísérleteket támogatott, a készülő reformra vonatkozó javaslatokat, állásfoglalásokat tett közzé, amelyek jelentős hatást gyakoroltak az 1969-től bevezetett reformra (ld. Barbazo & Pombourcq 2010). Az egyik legjelentősebb ilyen állásfoglalás az 1968-ban kiadott *charte de Chambéry* (vö. II. Rész).

A matematika tananyag megújításának kérdései összekapcsolódnak a tanítási módszerek reformjának igényével is. Ez egyébként nem csak a matematika tanítására jellemző: az iskolarendszer átalakításával összefüggésben számos pedagógiai jellegű reformtörekvés fogalmazódott meg (ld. d'Enfert & Kahn 2010, 2011). A matematika tanításával kapcsolatban egyébként már az 1920-30-as évektől kezdve felmerült az „aktív pedagógia" módszereinek bevezetése, az 1945-ös tantervi utasítás is előírja használatukat. A fogalom jelentése azonban a „mathématiques modernes" reform támogatói számára némileg átalakult. Az 1945-ös utasítás az „aktív pedagógiát" egyfajta „felfedeztető" módszerként írja le, amely a tanulók passzív szerepe helyett a tanár és a tanulók közötti párbeszédre építve motiválja a tanulók munkáját, szerepet biztosít nekik a feladatok megoldásában. A „mathémémaiques modernes" reform támogatói inkább azt hangsúlyozzák, hogy a tanulót a matematikuséhoz hasonló „kutatói" pozícióba kell hozni, amelynek révén szerepet kap a matematikai fogalomalkotás folyamatában. Ez a megközelítés erősen épít Piaget pszichológiai kutatásaira, a konstruktivista szemléletű pszichológiára. (d'Enfert 2010).

Ezek a pedagógiai-pszichológiai jellegű törekvések elsősorban az elemi iskolai oktatást érintik. Az APMEP az alsó és felső tagozatos oktatás közti koherenciát keresve az 1960-as évektől az elemi iskolai oktatás kérdéseire is kiterjesztette tevékenységét, a francia pedagógiai intézetben (IPN, később INRP) pedig Nicole Picard vezetésével kezdődtek matematikaoktatási kísérletek, amelyek többek között Piaget, Gattegno és Dienes elgondolásaira építettek.

A franciaországi reform előkészítésében tehát számos különböző szereplő vett részt sokrétű, részben összefüggő, de egymásnak néha ellentmondó törekvésekkel.

3.2 A „mathématiques modernes" reform

1966-ban André Lichnerowicz vezetésével létrejön egy minisztériumi bizottság, amelynek feladata a reform előkészítése. A bizottság tagjai eleinte elsősorban matematikusok, egyetemi és gimnáziumi tanárok. A bizottság létszáma gyorsan növekszik, egy időben a 40-et is eléri, tagjai között megjelennek fizikusok és fizikatanárok, szakfelügyelők, elemi iskolai tanítók, a szakképzés, az ipar és a könyvkiadók képviselői. A matematikusok azonban a bizottság munkája során végig domináns szerepet töltenek be (d'Enfert & Gispert 2011, 33. o).

A bizottság által előkészített tantervet 1969-től kezdve fokozatosan, évfolyamról évfolyamra vezetik be a 6. és a 10. osztálytól (a collège és a középiskola első évfolyamától kezdve). A bizottság munkája később terjed ki az elemi iskolára, amelynek új tanterve 1970-ben kerül bevezetésre.

A reformmal összefüggő tanárképzés és –továbbképzés előkészítése is bekerül a bizottság feladatai közé: az APMEP javaslatait követve, 1968 őszén hozzák létre az első IREM-eket (Institut de recherche de l'enseignement des mathématiques), először Párizsban, Lyonban és Strassburgban, majd évről évre egyre több városban. Ezek az intézmények, amelyekben matematikusok, matematikatanárok, pszichológusok dolgozhatnak együtt vegyes munkacsoportokban, az alapítók szándéka szerint egyszerre szolgálnak a reformmal kapcsolatos továbbképzéseknek és a reform továbbfejlesztésének színhelyéül (Barbazo & Pombourcq 2010).

A Lichnerowicz-bizottság megalakulásakor a reform terve a matematikaoktatásban érintett szereplők körében széleskörű támogatásnak örvend. A tantervek – és különösen a 8. és 9. osztályos tanterv – megjelenését azonban egyre hevesebb viták övezik. Szakszervezetek, tanáregyesületek, a bizottság tagjainak egy része is kifejezi nemtetszését. A vita odáig fajul, hogy 1972-ben a sajtó egy tanító öngyilkosságát is a reform hatásának tulajdonítja (d'Enfert 2011, 73. o.). A bizottság végül 1972-ben, Lichnerowicz lemondása után felfüggeszti munkáját (d'Enfert & Gispert 2011).

3.3 A reform utóélete az 1970-es években

Az eredeti tervek szerint a „mathématiques modernes" reform hosszabb távú, fokozatos tantervmódosításokon keresztül alakuló folyamat lett volna. Fokozottan igaz ez az elemi iskolai tantervre, ahol a szerzők a szakszervezetek kérésének megfelelően hangsúlyozzák a korábbi tantervekkel való folytonosságot, az újítások fokozatos bevezetését, a lassú átmenetet. Az 1969-70-es tantervet övező viták eredményeként azonban a reformot sokan kudarcként ítélik meg[15] – az új, 1977-es tanterv több kérdésben (különösen az axiomatikus módszer és a formális nyelv szerepének megítélésében) is elhatárolódik a „mathématiques modernes" reformtól.

[15] Ld. pl. (Walusinsky 1986, Bkouche, Charlot & Rouge 1991).

A reform körül kialakult, a matematikaoktatás fejlesztését célul kitűző mozgalom azonban tovább fejlődik (erről ld. pl. Barbazo & Pombourcq 2010). Az 1970-es évek során sorra nyílnak az IREM-ek, amelyek a matematikatanár-továbbképzés biztosítása mellett számos matematikaoktatási kísérletnek is helyet adnak, és az első matematikadidaktikai kutatások helyszínéül szolgálnak. Guy Brousseau például ilyen körülmények között, a Bordeaux-i IREM, illetve az École Jules Michelet-ben kialakított kísérleti iskola kötelékében dolgozza ki a francia didaktika egyik első és meghatározó elméletét, a Didaktikai Szituációk Elméletét (Brousseau egyik '70-es évekbeli kísérletét a III. Rész 5. fejezetében elemzem). A francia pedagógiai intézetben, az INRP-ben is tovább folynak a '60-as években megkezdett kutatások: az itt végzett kísérleti munka eredményeként jelennek meg 1977-től kezdve az ERMEL-kötetek, amelyek nem csak kutatási beszámolóként, hanem tanári kézikönyként is szolgálnak elemi iskolai tanítók számára (vö. III. Rész 3. fejezet).

Így elmondható, hogy bár maga a „mathématiques modernes" reform nem volt hosszú életű, és törekvéseinek csak egy része épült be tartósan a francia matematikaoktatásba, a reform körül kialakult, a matematikaoktatás fejlesztését célzó mozgalom hosszútávon is fennmaradt, és a matematikaoktatás folyamatos fejlesztésén túl a matematikadidaktikai kutatások létrejöttében is szerepet játszott.

4 VARGA TAMÁS REFORMJA MAGYARORSZÁGON: A TÖRTÉNETI KONTEXTUS ELEMEI

4.1 A történeti kontextus néhány eleme

A magyar matematikai kultúra és a matematikaoktatás a 19. század utolsó évtizedeiben és a 20. század elején indult látványos fejlődésnek: míg a 19. század közepéig csupán elvétve zajlott Magyarországon nemzetközi szinten is jelentős matematikai kutatás, a 20. századi magyar matematikatörténet bővelkedik világszínvonalú matematikusokban. A disszertáció magyar verziójában nem tudok kitérni arra, hogyan befolyásolhatta ez a századfordulón kialakuló matematikai kultúra Varga Tamás reformját – csupán utalás-szinten jegyzem meg, hogy a Varga Tamást támogató matematikusok számos alkalommal hivatkoznak például Beke Manóra vagy Fejér Lipótra, Varga Tamás pedig reformját részben a Felix Klein-féle függvényközpontú matematikaoktatási reformprogram (vö. §2) örökösének tekinti (Varga 1975, 5-6. o.). A Varga Tamás-reform több jellegzetes vonása is legalább az előző századforduló óta jellemzi a magyar matematikai kultúrát, ideértve például a problémamegoldás központi szerepét, a kreatív gondolkodásra helyezett hangsúlyt, vagy a szemléletességre való törekvést. A 20. századi magyar matematikai kultúra kialakulásának körülményeit, társadalmi, gazdasági és kulturális hátterét több tanulmány is vizsgálta – e történet mélyebb feltárása áttételesen a Varga Tamás-reform megértéséhez is közelebb vihet.[16]

A reform ennél közvetlenebb történeti kontextusát azonban a második világháborút követő évtizedek jelentik. E dolgozat keretében nem áll módomban, hogy a korszak politikai, társadalmi, gazdasági változásait és ezek reformra gyakorolt hatását a teljesség igényével próbáljam meg feltárni – disszertációmban csupán néhány olyan jelenségre kísérlem meg felhívni a figyelmet, amelyek a Varga Tamás reform sajátosságaira hatást gyakorolhattak, és amelyek segítenek a francia reform történetével való összehasonlításban.

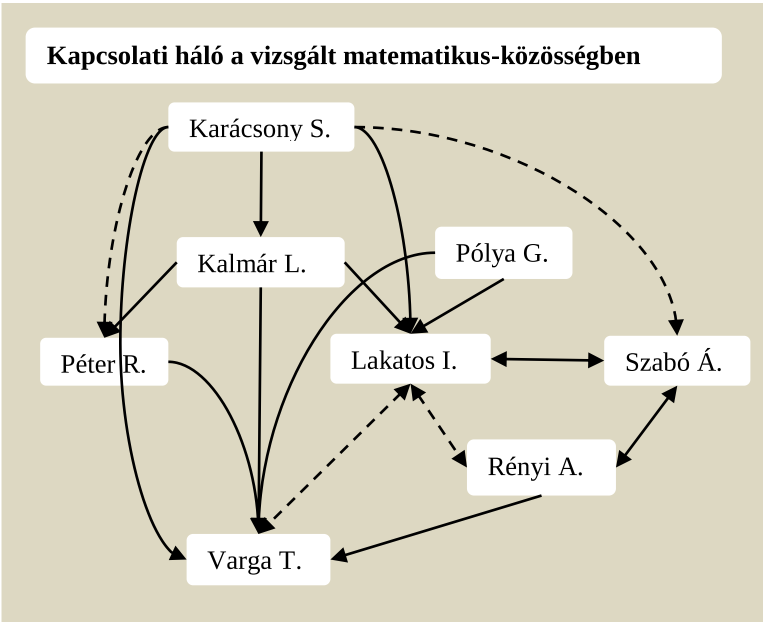
E tényezők közül mindenekelőtt az oktatási rendszer 1946-os reformját kell megemlítenem. A második világháborút követő rövid demokratikus időszak egyik meghatározó törekvése az oktatási rendszer demokratikusabbá tétele, az egységes 8 osztályos általános iskola létrehozása volt: a francia *collège* történetéhez hasonlítva így Magyarországon jóval korábban, már a ’40-es években létrejött az egységes felső tagozat. Bár Varga maga is hivatkozik e reform jelentőségére saját programjának előzményei között (Halmos & Varga 1978, 225. o.), az 1960-as és ’70-es évek matematikaoktatási reformmozgalma valójában már egy másik, az oktatási rendszert érintő folyamat keretei közé illeszkedik. Amint azt Báthory (2001) kifejti, az ’50-es évek szigorú központosítása és ideológiailag meghatározott oktatásirányítása után a ’60-as évektől, és különösen egy 1972-es párthatározattól kezdve megindult az oktatási rendszer lassú, óvatos liberalizációja. Az oktatás fejlesztésében a korábbinál több szakmai műhely kapott szót, elsősorban az Országos Pedagógiai Intézet (OPI) és a Tudományos Akadémián létrehozott oktatásügyi bizottság keretei között. Az 1972-es párthatározat többek között a korábbinál rugalmasabb tanterveket és több alternatív, választható tankönyvet javasol; a kommunista ideológia szerepe csökken, ehelyett nagyobb teret kapnak a szociológiai szempontú megfontolások, például a társadalmi mobilitással kapcsolatos kérdések. Látni fogjuk, hogy Varga Tamás reformprogramja ebből a szempontból úttörőnek tekinthető: már az 1960-as évektől minél nagyobb tanári autonómiára, rugalmas, a tanulók szükségleteihez igazodó tantervre, differenciálásra, az egyéni különbségek figyelembevételére törekszik.

[16] A disszertáció francia nyelvű változatában, illetve egy angol nyelvű tanulmányban (Gosztonyi megjelenés alatt) bővebben is kitérek ezekre a kérdésekre. A századforduló magyar matematikai kultúrájáról ld. pl. (Békés 2004, Frank 2011, Hersh & John-Steiner 1993)

4.2 Magyar matematikusok a Karácsony-körben

A második világháborút követő demokrácia éveiben számos civil, kulturális és értelmiségi mozgalom kelt életre. A korszak egyik jelentős szerveződése az a Karácsony Sándor körül (valójában már évekkel korábban) kialakult értelmiségi kör, amely az oktatás- és nevelésügy különböző problémáival foglalkozott[17]. A Karácsony-kör munkájában több jelentős magyar matematikus is részt vett, például Kalmár László, Péter Rózsa, Surányi János, és a fiatal Varga Tamás is; de Karácsonnyal kapcsolatban volt a fiatal Lakatos Imre, illetve a későbbi matematikatörténész Szabó Árpád is. Az említett matematikusokat és matematikával foglalkozó gondolkodókat sokrétű barátság és szakmai kapcsolatok kötik össze, amelyeknek 1950-től kezdve a Rényi Alfréd vezette Matematikai Kutatóintézet is terepet adott.[18] Lakatos és Szabó munkásságának forrásait vizsgálva többen is rámutattak már e kapcsolatok jelentőségére, különösen Karácsony és Kalmár kapcsolatát, illetve az ő Lakatosra gyakorolt hatásukat emeli ki Gurka (2001), Máté (2006) és Szabó (2013).

Karácsony a kommunista diktatúra megszilárdulása után, az 1940-es évek végétől kezdve „nemkívánatos személynek" minősült, és Varga Tamás írásaiban ennek megfelelően igen kevés utalást találunk személyére. Varga fiatalkori levelezésében azonban rendszeresen felbukkan Karácsony neve (ld. Szabó 2005), és mind kollégái, mind családtagjai alátámasztják Karácsony szerepét Varga Tamás



I.1. ábra: Kapcsolatok, hatások a vizsgált személyiségek között, a Karácsony-körben és a magyar matematikus-közösségben. *A normál nyilak az elsődleges és másodlagos források által alátámasztott hatásokat jelzik, a szaggatott nyilak a feltételezhető hatásokat.*

[17] Karácsonyról és a Karácsony-körről bővebben ld. (Kontra 1992). Kalmár, Péter Rózsa, Varga részvételéről a Karácsony körben Kontra (1992) ír, Surányi János részvételéről pedig a fiától Surányi Lászlótól értesültem (2013. december 29.).

[18] Kalmár például rendszeresen tartott itt szemináriumokat; mind Lakatos, mind Szabó az intézet munkatársa volt hosszabb-rövidebb ideig. Lakatos 1953-tól 1956-os emigrálásáig: Varga és Rényi megbízásából ekkoriban fordította magyarra Pólya Györgytől *A gondolkodás iskoláját*. Szabó Árpádot pedig 1957-ben, az ELTE kényszerű elhagyása után hívta Rényi a Matematikai Kutatóintézetbe. Surányi János pedig a Intézetben működő, a speciális matematikatagozat tantervéért felelős munkacsoport vezetője volt, amely Varga Tamás OPI-beli csoportjával is szorosan együttműködött.

gondolkodásának fejlődésében.[19] Kalmár, Péter Rózsa, Rényi szerepe ennél könnyebben azonosítható: többé vagy kevésbé közvetlenül, de mindannyian kiállnak Varga Tamás reformprogramja mellett, ő pedig több helyen is szót ejt a reformra gyakorolt hatásukról (pl. Halmos & Varga 1978, 226. o).

Kalmár, Péter Rózsa és Rényi több jelentős, máig rendszeresen kiadott matematikanépszerűsítő művet írtak, Kalmár pedig egy-két kifejezetten matematikafilozófiai témájú írásnak is szerzője. A disszertáció II. Részében ezen írások elemzésével kísérlem meg rekonstruálni azt a sajátos matematikafelfogást, amelyet ez a csoport képvisel – a III. Részben pedig arra igyekszem rámutatni, hogy ez a matematikafelfogás Varga reformjára is jelentős hatást gyakorolt.

4.3 Varga Tamás kísérletei és az 1978-as magyar reform

A Varga Tamás vezette „komplex matematikaoktatási reformkísérlet” közvetlen előzményeként mind ő, mind kollégái két eseményt jelölnek meg: egyrészt Dienes Zoltán 1960-as budapesti előadássorozatát, másrészt az UNESCO által 1962-ben Magyarországon rendezett szimpóziumot (pl. Klein 1980, 30-31. o., Szendrei 2007). Varga Tamás, aki már a ’40-es évek óta foglalkozott tankönyvírással és próbálkozott matematikaoktatási kísérletekkel, ekkor ismerkedik meg a nemzetközi „New Math” mozgalom törekvéseivel és addigi eredményeivel. A szimpózium után a belga W. Servais-vel együtt őt kérik fel, hogy készítse el szimpózium a konferenciakötetét: ez a munka aztán nemzetközi ismertséget hoz a számára, amelynek köszönhetően az 1960-as évek végétől számos országban megfordul és publikál[20], beleértve Franciaországot is (vö. III. Rész, 5. Fejezet).

A „komplex matematikaoktatás” címet viselő kísérletsorozat az UNESCO-szimpóziumot követő évben, 1963-ban indul egy budapesti általános iskola két első osztályában. A kísérleti folyamatba évről évre újabb osztályok, iskolák kapcsolódnak be, először Budapesten, majd vidéken is. 1967-től a kísérlet a felső tagozatra is kiterjed. A kísérleti osztályok száma gyorsuló ütemben nő, 1971-re már mintegy 100 iskola vesz részt a programban (a kísérletek történetéről bővebben ld. pl. Klein 1980, 31-32. o).

A kísérletet az Országos Pedagógiai Intézetből irányítja Varga Tamás. Közvetlen munkatársai eleinte Gádor Endréné és Pálfy Sándor (Szendrei 2005, 428. o.), majd a csoporthoz több frissen végzett fiatal tanár is csatlakozik: Halmos Mária és C. Neményi

[19] Halmos Mária (interjú 2013 január 3-án), ill. a családtagok beszámolója egy a Varga-fivérekről szóló szemináriumon (2013. december 10. ld. http://pedagogiai-tarsasag.hu/?p=3913).

[20] A kandidátusi értekezéséhez (Varga 1975) készült önéletrajzából és bibliográfiájából többek között angol, francia, olasz, amerikai, kanadai, lengyel kapcsolatok olvashatók ki.

Eszter Varga legközelebbi munkatársaivá válnak, és a reform számos tankönyvének, tanári kézikönyvének ők a szerzői. Egyikük az OPI-ban alakult csoportban dolgozik, míg másikuk a korábban már említett, a Matematikai Kutatóintézetben működő és Surányi János vezette csoport munkatársa.

Varga reformkísérlete nem az egyetlen matematikaoktatási kísérlet az 1960-as évek Magyarországán (ld. pl. Forrai et al. 1972). A legismertebb alternatív projekt talán Lénárd Ferenc „variációs módszere" (Lénárd 1972). 1968-ban Szendrei János vezetésével létrejön egy minisztériumi bizottság, amelynek feladata, hogy megvizsgálja a folyamatban lévő kísérleteket, és ezek alapján javaslatot dolgozzon ki a matematikaoktatás országos szintű reformjára. A bizottság Varga Tamás komplex matematikaoktatási kísérletét választja a leendő reform alapjául, erre építve dolgoz ki 1972-ben egy ideiglenes tantervet.[21] Az ideiglenes tantervet a következő években fokozatosan egyre több iskola vezeti be, majd 1978-tól válik kötelezővé minden iskola számára.

A reform bevezetését számos, gyakran igen heves vita kíséri.[22] Ugyanakkor Varga Tamás széleskörű támogatást élvez, többek között a korábban már említett akadémiai bizottság matematikai albizottsága is kiáll a koncepciója mellett („Fehér könyv" 1976, 1. o). Bár a magyar reform a '80-as évektől szintén számos módosítást, korrekciót ért meg, és alkotói csak korlátozottan látják sikeresnek[23], úgy tűnik, mégis maradandóbb a hatása, mint francia megfelelőjéé. Az általános iskolai tanterv, az alsó tagozatban használt munkalapok számos eleme a 2000-es évekig folytonosságot mutat Varga tantervével (ld. pl. Pálfalvi 2000). Varga Tamás művét ma a magyar matematikaoktatási szakemberek jelentős része értékes, megőrzendő örökségnek tekinti. Egykori kollégái szerint a részleges kudarc oka nem annyira a reformprogram sajátosságaiban, inkább a rugalmatlan iskolarendszerben és a tanárok felkészítésének elégtelenségében rejlik: ezek a tényezők tették szükségessé a '80-as évektől bevezetett kompromisszumokat.

A reform utóéletének alaposabb vizsgálata további elemzést igényelne. A francia „mathématiques modernes" reformmal való összehasonlítás mindenesetre felveti a kérdést, minek köszönhető a '70-es évek reformjával való nagyobb folytonosság Magyarországon, mint Franciaországban, miért övezi máig nagyfokú egyetértés Varga Tamás elképzeléseit, miközben a magyar reformprogram kritikus továbbfejlesztése – ellentétben a francia

[21] A bizottság munkájával kapcsolatos információk a bizottság egyik tagjától, Pálmay Lóránttól származnak (2012. július 26.)

[22] Ld. pl. az OPI munkacsoportjának egy cikkét (1983), amely egy hosszú, a Köznevelés c. folyóirat lapjain folyó vita lezárásaként jelent meg.

[23] Interjú Halmos Máriával, Kovács Csongornéval és Csahóczi Erzsébettel (2013. november 10.).

didaktikai kutatások ’70-es évek óta töretlen dinamikájával – Magyarországon alig valósult meg? E kérdésekre e disszertáció keretében nem kísérelhetek meg válaszolni: ugyanakkor a III. Rész didaktikai elemzései rávilágítanak majd a reformok néhány olyan sajátosságára, amelyek közrejátszhatnak e jelenség magyarázatában.

II. RÉSZ
EPISZTEMOLÓGIA: MATEMATIKAFELFOGÁS ÉS MATETEMATIKATANÍTÁSRÓL VALLOTT ELKÉPZELÉSEK A REFORMOK HÁTTERÉBEN

1 BEVEZETÉS[24]

A történeti elemzés megmutatta, hogy mind Franciaországban, mind Magyarországon több matematikus is részt vesz a reformmozgalomban: Franciaországban aktívabb szerepet játszanak kutató matematikusok, Magyarországon inkább a háttérből támogatják Varga Tamás reformkísérletét. Hatásuk megnyilvánul a reform tantervének tartalmában (erre a III. rész 4. és 5. fejezetében látunk majd példát), de legalább ennyire érinti a matematika természetével kapcsolatos elgondolásokat is, amelyek, mint láttuk, a reform körüli viták egyik meghatározó témáját alkotják.

A II. részben azt vizsgálom, milyen matematikafelfogást képviselnek a francia és a magyar reform hátterében álló matematikusok. A III. rész elemzései fognak rámutatni, hogyan befolyásolja ez az episztemológiai háttér a két reform didaktikai jellemzőit. Hangsúlyoznom kell ugyanakkor, hogy nincs szó az egyes országok *összes* matematikusára jellemző, homogén felfogásról: mint azt az I. részben láttuk, a reformmozgalmat mindkét vizsgált országban intenzív vita kíséri, és ez részben a matematikafelfogást is érinti. A matematikus-közösségnek csupán egy része támogatja a megvalósuló reformokat: itt csupán annak a néhány matematikusnak a matematika természetével és tanításával kapcsolatos elgondolásairól lesz szó, akik a francia illetve a magyar reform legelkötelezettebb támogatói, és akik – a történeti elemzés megállapításai szerint – a legnagyobb hatást gyakorolták ezekre.

Franciaországban mind korabeli források, mind történeti elemzések a Bourbaki-csoportra[25] vezetik vissza a „mathématiques modernes" reformra jellemző matematikafelfogást (pl. APMEP 1968, Barbazo & Pombourcq 2010, Gispert 2010). Valójában azonban a Bourbaki-csoport tagjai nem képviselnek egységes véleményt ebben a kérdésben.[26] A Bourbaki-csoport kevéssé foglalkozott a közoktatás reformjával, leginkább Dieudonné vállalt aktív szerepet a folyamatban, akit Corry (2001) Bourbaki legfőbb „szóvivőjének" nevez, és aki az oktatástól

[24] A Varga Tamás-reform episztemológiai hátterének elemzéséről szóló fejezet egy korábbi változatáért ld. (Gosztonyi 2013).

[25] A Nicolas Bourbaki álnév mögött rejtőző csoportot 1935-ben hozta létre néhány fiatal matematikus, eredetileg azzal a céllal, hogy közösen korszerű egyetemi analízis-tankönyvet írjanak. Alapító tagjai Claude Chevalley, Jean Dieudonné, René de Possel, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Jean Delsarte, André Weil, a fizikus Jean Coulomb és Charles Ehresmann (Houzel 2004, 53. o.). A projekt azonban hamar kinőtte eredeti kereteit, és a csoport munkásságának középpontjába az *Éléments de mathématique* című, a matematika legfontosabbnak ítélt területeit átfogó rendszerező értekezés írásának a programja került. Az *Éléments* köteteit évtizedeken keresztül jelenttette meg a fokozatosan változó összetételű csoport, ezen keresztül meghatározó szerepet töltve be a matematika 20. századi fejlődésében, különösen az 1950-60-70-es években.

[26] Episztemológiai szempontból a legtöbbet hivatkozott forrás valószínűleg a Bourbaki neve alatt 1948-ban megjelent, Dieudonné által fogalmazott *L'architecture des mathématiques* című programadó írás – ugyanakkor a szintén Bourbaki-tag Weil ugyanabban a gyűjteményes kötetben megjelent cikke lényegesen más matematikafelfogást képvisel.

függetlenül is számos programadó írásban fejtette ki a matematikáról alkotott véleményét. A reformfolyamatban legaktívabb matematikusok rajta kívül Gustave Choquet, aki maga nem Bourbaki-tag, de igen közel állt a csoporthoz – annyira, hogy Revuz (1996, 75. o.) szerint neki köszönhető a Bourbaki-féle analízis bevezetése az egyetemi oktatásba az 1950-es évek során –, illetve André Lichnerovicz, aki a reformot előkészítő bizottság vezetője. A francia reform episztemológiai hátterének leírásához a témáról szóló néhány történeti elemzés mellett e három matematikusnak a matematika természetéről és tanításáról szóló írásait veszem figyelembe.

Amikor tehát a továbbiakban „bourbakiánus" matematikafelfogásról beszélek, ez a kifejezés nem a Bourbaki-csoport eredeti elképzeléseire utal – amelyeket nem vizsgálok, de amelyekről tudható, hogy nem egységesek –, hanem arra a matematika-képre amelyet a reform aktív résztvevői Bourbaki *Elemei*ből és a fent említett matematikusok programadó írásaiból maguknak megalkottak, és a reform számára követendő mintaként tűztek ki.

A magyar reform hátterében nem áll olyan expliciten megnevezett matematikus-csoport, mint amilyen Bourbaki a francia esetben. Ugyanakkor Varga Tamás többször is hivatkozik matematikus-támogatóira, többek között Kalmár Lászlóra, Péter Rózsára, Rényi Alfrédra, helyenként Hajós Györgyre, Turán Pálra stb. Pólya György mint a reform egyik fő inspirációs forrása jelenik meg, Surányi János pedig maga is az egyik matematikaoktatás fejlesztésével foglalkozó kutatócsoport vezetője (ld. I. Rész).

Mint azt az I. részben láttuk, több tanulmány (Gurka 2001, Máté 2006, Szabó 2013) is felhívta már a figyelmet arra, hogy a fenti matematikusok közül többen (Kalmár László, Péter Rózsa, Surányi János, illetve maga a fiatal Varga Tamás) részt vettek az 1940-es években a Karácsony Sándor körül kialakult, nevelési kérdésekkel foglalkozó kör munkájában. Ugyanezek a matematikusok fontos támogatói voltak az 1960-70-es években Varga Tamás által vezetett matematikaoktatási reformprogramnak. Ugyanakkor a fent említett tanulmányok alapvetően nem matematikaoktatással foglalkoznak: Máté András Szabó Árpád és Lakatos Imre munkásságának összefüggéseit elemzi, és helyezi el abban a szellemi közegben, amelyet az 1940-es években Karácsony Sándor környezete (akivel mindketten kapcsolatban álltak), később pedig a Rényi Alfréd alapította Matematikai Kutatóintézet jelenthetett; Gurka Dezső Lakatos matematikafilozófiájának magyarországi előzményeit vizsgálva Karácsonynak, a Karácsony-kör néhány tagjának és különösen Kalmár Lászlónak a Lakatosra gyakorolt feltételezhető hatását elemzi, Szabó Máté pedig a Karácsony és Kalmár elgondolásai közötti összefüggéseket vizsgálja. Ezek a tanulmányok egyrészt arra mutatnak rá, hogy az említett matematikusoknak a matematikáról vallott nézetei számos ponton rokonságot mutatnak

Lakatos illetve Szabó elméleteivel (s különösen Kalmár elképzelései több szempontból is a lakatosi matematikafilozófia előzményeinek tekinthetők); másrészt arra, hogy a matematika természetéről illetve matematikaoktatásról folytatott elmélkedésüknek a Karácsony-kör már az 1940-es években közös terepet biztosított.[27]

Kalmár, Péter Rózsa és Rényi is számtalanszor felszólaltak matematikatanítással összefüggő kérdésekkel kapcsolatban, és mindhármuknak jelentek meg különféle nagyközönségnek szóló, máig sikeres matematikanépszerűsítő írásai is.[28] Matematikafelfogásuk elemei nagyrészt a matematikatanítással kapcsolatos, illetve a fent említett matematikanépszerűsítő jellegű írásaikból olvashatóak ki.[29] Ezen írásokat elemezve azt igyekszem megmutatni, hogy e gondolkodói kör matematikafelfogása és matematikatanítással kapcsolatos elképzelései koherens koncepciót alkotnak, amely azonban lényegesen eltér a francia reform mögött húzódó „bourbakiánus" felfogástól, és amelyet – Pólya és Lakatos nyomán – „heurisztikusnak" fogok nevezni.

Az eddig említett szerzőkön kívül bevonom az elemzésbe Pólya György néhány művét is, annak ellenére, hogy Pólya tudományos pályáját külföldön futotta be, és így nyilvánvalóan nem vehetett részt sem a Karácsony-körben, sem a 20. század második felének magyar matematikai közéletében. Tanulmányait azonban még Magyarországon végezte, heurisztikáról, problémamegoldásról alkotott elgondolásai szoros rokonságban látszanak állni a korábban említett matematikusok felfogásával, s művei később nemcsak Lakatos matematikafilozófiájára, de a Varga Tamás vezette matematikaoktatási reformra is nagy hatást gyakoroltak.[30]

A „heurisztikus" matematikafelfogás főbb princípiumainak azonosítása után Péter Rózsa *Játék a végtelennel* című művének példáján vizsgálom azokat. Péter Rózsa matematikanépszerűsítő könyve nem csak rendkívüli hazai és nemzetközi sikere miatt fontos

[27] Karácsony személyes, e matematikusokra gyakorolt hatásáról ugyanakkor keveset tudunk, bár Kalmár László és Varga Tamás levelezésében is található arra vonatkozó utalás, hogy a Karácsonytól tanultak sokat jelentettek számukra. Gurka és Szabó kísérletet tesznek arra, hogy Karácsony feltételezhető hatásának néhány elemét rekonstruálják (Gurka 2001, Szabó 2013), erre ki fogok még térni a későbbiekben.

[28] Pontosabban Kalmárnak inkább a matematikai témákat szemléletesen, közérthető módon magyarázó levelei ismertek, melyeknek csak egy része, és csupán Kalmár halála után jelent meg nyomtatásban, elsősorban az *Integrállevél* című válogatáskötetben. Péter Rózsa *Játék a végtelennel*je a matematikanépszerűsítő irodalom több nyelvre lefordított és számtalanszor kiadott, igazi klasszikusa; Rényi különböző, nagyközönséghez szóló írásai közül pedig, melyek többek között az *Ars mathematica* című gyűjteményes kötetben jelentek meg, talán a *Dialógusok a matematikáról* és a *Levelek a valószínűségről* a legjelentősebb.

[29] Ez alól kivételt képez Kalmár 1967-es tanulmánya, egy Londonban, Lakatos által szervezett matematikafilozófiai konferencián elhangzott előadás szövege.

[30] Máté András felhívja a figyelmet arra, hogy éppen Lakatos fordította *A gondolkodás iskolájá*t magyarra az 50-es években Rényi kutatóintézetének munkatársaként, a fordítást aztán Varga Tamás ellenőrizte és adta ki 1957-ben (Máté 2008). Egyrészt Lakatos ekkor ismerkedett meg Pólya munkásságával, amely később nagy hatást gyakorolt tudományfilozófiájára, másrészt ez a fordítás tette lehetővé, hogy *A gondolkodás iskolája* a magyar matematikaoktatással foglalkozók körében is közismertté váljon.

példa elemzésem számára, hanem azért is, mert az 1978-as reform tankönyvei és tanári kézikönyvei expliciten hivatkoznak rá (ld. III. Rész 3. fejezet).

2 FRANCIAORSZÁG ÉS A „BOURBAKIÁNUS" MATEMATIKAFELFOGÁS

2.1 A „bourbakiánus" matematikafelfogás

2.1.1 Az axiomatikus módszer és a matematikai struktúrák

Dieudonné 1948-ban, Bourbaki neve alatt, *L'architecture des mathématiques* címmel publikálta azt a cikket, amely Bourbaki talán legismertebb programadó írásává vált (Corry 2001, 25. o.). A cikk a matematika egységének problémájából indul ki, utalva a matematikai kutatások számának rendkívül gyors növekedésére. Az „axiomatikus módszer" elsősorban erre a problémára adott válaszként jelenik meg: lehetővé teszi ugyanis a matematika ágainak a korábbinál jóval koherensebb rendszerezését (Bourbaki 1948, 37. o.). A módszer abban áll, hogy egy matematikai elmélet tárgyainak megvilágítjuk azokat az alapvető tulajdonságait, amelyekből kiindulva az összes többi tulajdonság tételként levezethető. Majd ezen elsődleges tulajdonságokat axiómaként tekintve olyan formális axiómarendszer építhető, amely az eredeti matematikai „tárgyak" egyéb sajátosságait már nem veszi figyelembe, és így az elmélet bármely más, hasonló alapvető tulajdonságokkal rendelkező tárgyra kiterjeszthető. (Bourbaki 1948, Corry 2001 26-27. o.)

Corry rámutat, hogy ez az ún. „axiomatikus módszer", amelyet Bourbaki – nem egészen indokoltan – Hilbertre vezet vissza, nagyjából megfelel az *Éléments*-ban követett módszernek.

> These books present the various domains discussed on them as defined by a list of apparently meaningless axioms, and all the results are derived with reference only to these axioms, while explicitly excluding any kind of motivation or intuition. The trademark of these texts is that they exclude any external references (though there are many cross-references) as well as any reliance on figures, even in domains which are so strongly geometrically motivated as topology. The axiomatic image of mathematics more closely associated to the name of Bourbaki – and the one I will refer to here – is the image according to which mathematics is a series of formal theories, at the basis of which stand axioms without any specific, intuitive meaning, and the results of which are supported by formally constructed proofs without any appeal to external intuitions. (Corry 2001 pp. 27-28)

Bourbaki felfogásában az axiomatikus módszer szorosan kötődik a „matematikai struktúra" fogalmához, bár a két fogalom nem teljesen azonos. Corry (2001, 29. o.) hangsúlyozza hogy míg az előbbi Hilbertre vezethető vissza, az utóbbit Van der Waerden *Moderne Algebra* című műve inspirálta, amely az algebrai struktúrákat szigorúan axiomatikus módon definiálja. Bourbaki ezt a módszert kívánta kiterjeszteni a matematika egészére.

> It can now be made clear what is to be understood, in general, by a mathematical structure. The common character of the different concepts designated by this generic name, is that they can be applied to sets of elements who's nature has not been specified; to define a structure, one takes as given one or several relations into which these elements enter […] ; then one postulates that the given relation, or relations, satisfy certain conditions (which are explicitly stated and which are the axioms of the structure under consideration.) To set up the axiomatic theory of a given structure, amounts to the deduction of the logical consequences of the axioms of the structure, excluding every other hypothesis on the elements under consideration (in particular, every hypothesis as to their own nature). (Bourbaki 1948/1950, 226. o.)

Az *Architecture des mathématiques*-ban Dieudonné különböző típusú, algebrai, topologikus és rendezési struktúrákat különböztet meg és ezek hierarchikus rendszeréről beszél, amelynek csúcsán az ún. „anyastruktúrák", a legáltalánosabb és legalapvetőbb struktúrák állnak (Bourbaki 1948, 43. o.). A cikk szerint a matematika jövőbeni feladata az így feltárt struktúrák és a köztük lévő kapcsolatok tanulmányozása.

2.1.2 Absztrakció és formális nyelv

A „bourbakiánus" felfogásban központi szerepet játszik a matematika absztrakt jellege. Dieudonné ugyan elismeri, hogy bizonyos matematikai fogalmaknak lehet valamiféle intuitív gyökere, de szerinte már a legegyszerűbb matematikai fogalmak is „erősen absztraktak" (Dieudonné 1955, 48. o.), ettől válnak ténylegesen matematikai fogalmakká. A matematikának a „végsőkig vitt" absztakció (Dieudonné 1955, 61. o.), a fogalmak „kiürítése" adja az igazi, univerzális erejét – ezek a fogalmak aztán alkalmasnak bizonyulhatnak a való világ jelenségeinek leírására, azonban ez már nem a matematikára, hanem annak alkalmazásaira tartozik.

> From an axiomatic point of view, mathematics appears thus as a storehouse of abstract forms – the mathematical structures ; and it so happens – without our knowing why – that certain aspects of empirical reality fit themselves into these forms, as if through a kind of preadaptation. Of course it can not be denied that most of these forms had originally a very definite intuitive content; but it is exactly by deliberately throwing out this content, that it has been possible to give these forms all the power which they where capable of displaying and to prepare them for new interpretations and for the development of their full power. (Bourbaki 1948/1950, 231. o.)

Dieudonné elutasít mindenféle, a matematika tárgyainak természetéről folytatott metafizikai reflexiót. Szerinte a matematika tárgyai kizárólag a struktúrák, az absztrakt formák.

Ebben a felfogásban e formák hordozója, a *formális nyelv* különös figyelmet érdemel. Bourbaki munkásságának valóban lényeges eleme a matematika nyelvének megújítása, egyfajta koherens formális nyelv kidolgozása az *Éléments*-hoz – ugyanakkor a vizsgált matematikusok episztemológiai jellegű írásaiban kevés szó esik a matematika nyelvének sajátosságairól. Bourbaki híveire viszont jellemző, hogy a matematikát annak formális nyelvével azonosítják: ezt a gondolatot a „mathématiques modernes”-reform számos tankönyvszerzőjének írásában megfigyelhetjük majd.

2.1.3 Modernitás és örökérvényű igazságok

Corry (2001) hangsúlyozza, hogy Bourbaki a matematikát örökérvényű igazságok hordozójaként fogja fel. Nemcsak a tartalmat, a matematikai tételeket tekinti tökéletesen bizonyosnak, de a Bourbaki művében tökéletesített axiomatikus módszerre is úgy tekint, mint amely a lehető legnagyobb precizitást és áttekinthetőséget biztosítja a matematikai fogalmaknak és bizonyításoknak, megszabadítva azokat mindenfajta kétértelműségtől és homályosságtól, amelyek a matematika megalapozási problémáit okozhatták. A matematika formája és módszerei tehát Bourbaki szerint elérték fejlődésük csúcsát, a jövőben lényegüket tekintve változatlanok maradnak.

Ez a megközelítés jellemzi Bourbaki (vagy legalábbis Dieudonné) matematikatörténetről alkotott elképzeléseit is. Habár hangsúlyozza, hogy a matematika élő és fejlődő tudomány, ez a fejlődés felfogása szerint nem érinti többé Bourbaki művének alapjait.[31]

A matematikatörténet e teleologikus megközelítése a „bourbakiánus” matematikusok oktatásról vallott elképzelésein is tetten érhetők. Dieudonné indulatosan szólal fel az ellen, hogy az oktatás a matematika egy megkövesedett, avult képét közvetítse a tanulók felé, és a *modernitás* elsőségét hangsúlyozza a *régivel* szemben. Ahogy Choquet mondja, „létezik királyi út” a matematikához (Choquet 1964, 11. o), amelyet Bourbakinak sikerült feltárnia – miért kényszerítenénk hát a tanulókat a bonyolult és fölösleges, csupán történeti értékű fogalmak elsajátítására, ha a modern matematika fogalmai lényeges „gondolkodásbeli megtakarítást” nyújthatnak számukra?

Ezt fejezi ki Dieudonné elhíresült „À bas Euclide” (le Euklidésszel) jelszava is. A geometria tanítása egyébként is kedves példája a „bourbakiánus” matematikusoknak”. Felfogásukat jól jellemzi Choquet 1964-ben megjelent, *L'enseignement de la géométrie* című könyvének előszavából az alábbi részlet. A könyvet egyébként Choquet a középiskolai

[31] Erről bővebben ld. (Corry 2001, 36-37. o.)

tanárok figyelmébe ajánlja, és hatása valóban kimutatható az 1969-es geometria tanterven (vö. III. rész 4. fejezet):

> Az Euklidesz-Hilbert-féle axiómarendszer a hosszúság, a szög, a háromszög fogalmain alapul. Csodálatos módon elfedi a tér vektoriális szerkezetét, annyira, hogy a vektor fogalmáról számos évszázad nem is vett tudomást. Az a tény, hogy egy háromszög egy paralelogramma fele, kétezer éven át senkit nem gátolt meg abban, hogy a hangsúlyt a háromszög magasságainak, oldal- és szögfelezőinek tanulmányozására, a háromszög egybevágóságának eseteire és a háromszögek metrikus tulajdonságaira helyezze. Látták ugyan a háromszöget, de nem látták a paralelogrammát, amely elvezethetett volna a vektor fogalmához.
>
> A háromszög természetesen mindig megőrzi érdekességét, mint a legegyszerűbb síkbeli sokszög, és mert egy és pontosan egy síkot határoz meg. Ugyanakkor erélyesen fel kell lépni minden olyasféle tévelygéssel szemben, amelyet magával ragadnak a háromszög nevezetes pontjai, és bár néha elegáns, de valójában haszontalan metrikus tulajdonságai.
>
> Ehelyett azokat az alapvető fogalmakon alapuló módszereket kell előnyben részesítenünk, amelyekre kétezer év matematikájának végre sikerült rávilágítania: a halmaz, a rendezési és ekvivalencia-relációk, az algebrai szabály, a vektortér, a szimmetria, a transzformációk fogalmait.
>
> Ezek a módszerek az algebra egyszerű és hatékony eszközeit igen korán használhatóvá teszik, ezáltal gondolkodásbeli megtakarítást kínálva; ezenkívül, alapvető fogalmakra hivatkozván, tanulóink mentális struktúráit is gazdagítják, így készítve fel őket a jövő kihívásaira. (Choquet 1964, 10. o. Saját fordításom.)

Choquet tehát a megfelelő axiómarendszer választásának fontosságát hangsúlyozza, amely a modern algebra eszközein alapul. Általánosságának köszönhetően ez a módszer szerinte jelentős „gondolkodásbeli megtakarítást” nyújt a tanulóknak, miközben gondolkodásra nevel. Látni fogjuk, hogy a francia reform követi javaslatait, és lényegesen visszaszorítja a geometriai idomok szerepét a tantervben, hogy az affin és euklideszi tér axiomatikus algebrai felépítésének adjon helyt.

2.1.4 Az axiomatikus módszer és a gondolkodásra nevelés

Visszatérő gondolat a francia reformhoz közel álló matematikusoknál – amint ez a fenti idézetből is nyilvánvaló –, hogy a matematikaoktatás fő feladata szerintük a gondolkodásra nevelés. Annak a fajta gondolkodásnak, amely a matematika tanulásán keresztül sajátítható el, az ő felfogásukban az „axiomatikus módszer” alkotja a lényegét: a bizonyítás és a matematikai fogalmak rendszerezése. A felfedezés, a problémamegoldás alig játszik szerepet ebben a koncepcióban. Dieudonné ugyan hangsúlyozza, hogy a matematikai felfedezésekhez szükség van valamiféle intuícióra – ugyanakkor az efféle intuíció szerinte személyes és irracionális jellegű, lényegében megmagyarázhatatlan (és így aligha tanítható). Dieudonné egyúttal a modern matematikai felfedezésekhez szükséges intuíciót az absztrakcióhoz köti: szerinte ha valami, akkor elsősorban az absztrakciós folyamat és az axiomatikus módszer képes táplálni a kutató intuícióját (Bourbaki 1948, 42-43. o., Dieudonné 1981). Így szerinte a matematikai felfedezés képességét is az axiomatikus módszer gyakorlása segíti leginkább elő.

2.2 Matematikafelfogás a reform hátterében

Dieudonné és Choquet világossá teszik, hogy javaslataik az egyetemre és a középiskola felső osztályaira korlátozódnak, az alsóbb szintű oktatást azonban nem érintik, hiszen ehhez nem érzik magukat kompetensnek. Néhány megjegyzésben azért utalnak a *collège*-beli (felső tagozatos) oktatásról vallott elképzeléseikre is. Szerintük a 16-17 éves diákok számára az algebrai jellegű, formális, axiomatikus megközelítés a lehető leghasznosabb, ugyanaz, amely matematikai szempontból is ideálisnak tekinthető – a kisebb gyerekek azonban erre pszichológiailag nem érettek, nekik az alapvető matematikai fogalmakkal tapasztalat és kísérletezés útján kell ismerkedniük. A 13 és 16 éves kor közötti időszak[32] átmenetinek tekinthető, ekkor kezdi egy gyerek megérteni, mi az a bizonyítás: ekkortól lehet a deduktív érveléshez hozzászoktatni (Choquet 1964, 9-11. o.). Choquet geometriatanításról szóló összegzése szerint

> […] ismerünk egy királyi utat, amely a vektortér és a skaláris szorzat fogalmán alapul; de ezeket a fogalmakat nem lehet minden előzmény nélkül bevezetni, mintha az égből pottyantak volna, különösen nem abban az életkorban, amikor a gyerekek még nincsenek birtokában az algebrai művelet fogalmának. (Choquet 1964, 11. o.)

Egyfajta ellentmondás figyelhető meg tehát a matematika absztrakt természete és a gyerekek pszichológiai adottságai között. A két szempont közti feszültségre többek között Lichnerowicz (1955) is felhívja a figyelmet, később pedig ez a dilemma válik a reform matematikai és pszichológiai ambícióit övező vita egyik fő forrásává. A III. részben látni fogjuk, hogy a különböző tantervek és tankönyvek különféle megoldásokat keresnek erre a problémára, és a „mathématiques modernes" reform ilyen jellegű kísérletei intenzív kritika tárgyát képezik az 1970-es évek során. De a reformot megelőző időszakra inkább az optimizmus jellemző e kérdéssel kapcsolatban: a „bourbakista" matematikafelfogás és a pedagógiai ambíciók közötti összhangot hangsúlyozza többek között a Lichnerovicz-bizottság első jelentése (Boulletin APMEP 258, 245-270. o.), és a matematikatanárok egyesületének (APMEP) 1968-as nyilatkozata, a *charte de Chambéry* is. Ez utóbbi nyilatkozat nem csak

[32] Ez az időszak a francia *collège* második felének felel meg.

explicíten hivatkozik Bourbakira, de számos gondolatot és konkrét kifejezést átvesz Dieudonné 1948-as programadó írásából.

3 MAGYARORSZÁG ÉS A „HEURISZTIKUS" MATEMATIKAFELFOGÁS

3.1 A magyar matematikusok elgondolásai

3.1.1 A matematika fejlődő tudomány

Bourbakival ellentétben a „magyar iskola" tagjainak írásaiban gyakran kap fontos szerepet a matematika történetiségének gondolata: az, hogy a matematika folyamatosan fejlődő, változó tudomány, nemcsak tartalmát, hanem problémáit, formáját és módszereit illetően is. Ezt a fejlődési folyamatot szerintük az oktatás során is fontos megmutatni. Ez nem feltétlenül jelenti azt, hogy a matematika tényleges történetét kéne vizsgálni, tanítani: inkább a fejlődési folyamatok egyfajta racionális rekonstrukciójáról van szó – ahogy azt Lakatosnál, a *Bizonyítások és cáfolatokban* is látjuk.

Rényi például a *Dialógus a matematikáról*ban illetve a *Levelek a valószínűségről*ben történeti kontextusba helyezi mondanivalóját azáltal, hogy fiktív platóni dialógusok vagy éppen pascali levelek formájában írja műveit. Ezt azzal indokolja, hogy írásai tárgyát „in statu nascendi", azaz „a keletkezés frissességében" igyekezett bemutatni (Rényi 2005, 156. o.).

Kalmár *A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig című tanulmányában* ezt írja:

> […] a kérdést nem történeti szempontból tárgyalom, ezt tegye olyan valaki, aki otthon van a matematika történetében. Hanem azt az utat írom le, amelyet az egyes matematikus jár meg, hogy a matematikai fogalmak és tételek egzakt rendszerét a maga számára kiépítse. Mégpedig úgy írom le, ahogy utólag látom, amikor visszatekintek rá. Tudom, hogy sokszor nem azt az utat látom már, amelyen valóban jártam, hanem azt, amelyen rövidebben eljuthattam volna oda, ahol most állok. (Kalmár 1942/1986 38. o.)

Kalmár szerint a tanulókat (a cikk témájának megfelelően az egyetemi hallgatókat) hasonló fejlődési folyamaton kell végigvezetni.

> Mármost akármeddig jutottunk ebben a fejlődésben és akármi is a véleményünk a további lépésekről, azzal tisztában kell lennünk, hogy ha valakit be akarunk vezetni a matematikába, segítenünk kell, hogy ezt az utat végigjárja. (Kalmár 1942/1986 54. o.)

Péter Rózsa *Játék a végtelennel*je is egyfajta fejlődési folyamaton vezeti végig olvasóját: problémákat, kérdéseket vet fel, megoldásokat, válaszkísérleteket mutat, melyek aztán újabb és újabb kérdésekhez vezetnek. A könyv záró szakaszát nem csupán azért érdemes hosszabban idézni, mert szép példája a matematika fejlődésközpontú megközelítésének, hanem azért is, mert utal arra, milyen kapcsolatban állhat ez a szemlélet Kalmár és Péter Rózsa matematikai munkásságával:

> Itt kell befejeznem az írást: a mai matematikai gondolkodás korlátaiba ütközünk. Korunk a tudatosítás kora, e téren a matematika is megtette a magáét: ő maga tárta fel saját képességeinek határait.
>
> De vajon végleges akadályokba ütközünk-e? A matematikatörténet minden eddigi zsákutcájából volt kivezető út. Church bizonyításának is van egy igen elgondolkoztató pontja: pontosan meg kellett fogalmaznia, hogy mit tekintsünk „ma elképzelhető matematikai okoskodás”-nak, ha erre a fogalomra a matematika eljárásait akarta alkalmazni. Amint valamit megfogalmazunk, már körül is határoltuk. És minden kerítés szűk. A felbukkanó eldönthetetlen problémák kibújnak alóla.
>
> A kereteket majd bizonyára tágítani fogja a jövő fejlődés, ha ma még nem is látjuk: hogyan. Az örök tanulság: a matematika nem sztatikus, zárt, hanem élő, fejlődő valami; bárhogyan próbáljuk zárt formába merevíteni, talál magának rést: elevenen robban ki belőle. (Péter 1944/2010 293.)

Mind Kalmár, mind Péter Rózsa kutatásaiban központi szerepet kapnak a matematika megalapozásának problémáit illető nagy negatív eredmények, mint Gödel vagy Church tételei.[33] Ezekből az eredményekből az ő értelmezésükben az következik, hogy a matematika sosem lehet tökéletesen megalapozott, zárt rendszer; a fejlődése során felmerülő újabb és újabb problémák pedig a matematika nyelvét, formáját, bizonyítási módszereit sem hagyják érintetlenül.

3.1.2 A tapasztalatszerzés és a szemlélet szerepe – a matematika „kvázi-empirizmusa” és a „plauzibilis következtetés”

Kalmár szerint a matematika fogalmai mindig tapasztalatból, szemléletből erednek:

> Utunk kiindulópontja a szemlélet. A mértani fogalmakról: pont, vonal, felület, irány, szög, hosszúság, terület, térfogat stb. mindenki elismeri, hogy szemlélettartalmakból fakadtak. Ha a dolog mélyére nézünk, rájövünk, hogy az aritmetika fogalmaival is hasonlóan állunk: öt kréta, fél alma világos szemlélettartalmakat jelölnek. Vannak azonban a matematikának egészen elvont fogalmai, amelyekről azt tartja a szakemberek közvéleménye, hogy semmi közük a szemlélethez. Talán a legelvontabb ága a matematikának a halmazelmélet […] s lám a fogalomalkotás legkezdetlegesebb fokán a halmazokat is szemléletesen, zsákféléknek képzeljük el, amelyekbe valaki betette elemeiket. (Kalmár 1942/1986 39. o.)

Amint láttuk, Dieudonné a matematikai fogalmak absztrakt természetére helyezi a hangsúlyt, még a legegyszerűbb matematikai fogalmak esetében is – Kalmár ezzel szemben azt

[33] Erről bővebben ld. (Máté 2008)

hangsúlyozza, hogy még a legabsztraktabb fogalmak esetében is számolnunk kell a szemlélet szerepével. A matematikai szemlélet szerinte folyamatosan fejlődik, és nem korlátozódik a konkrét, érzékszervi tapasztalatokra: a matematikai fogalmak mélyebb megértése, deduktív levezetés és az újabb fogalmak tovább táplálják azt a képet, amelyet a matematikus formál magában kutatása tárgyáról.

A szemlélet, a szemléletesség, alapvetően fontos e gondolkodói közösség minden tagja számára[34], s tankönyvírás, tananyagszerkesztés közben is ezt tekintik az egyik legfőbb szempontnak. Kalmár nem csak elméletben hangsúlyozza ennek jelentőségét: a matematikai témákat barátok vagy akár kollégák számára magyarázó levelei híresek Kalmár szemléletes stílusáról.[35] E stílus hatása felismerhető Péter Rózsa *Játék a végtelennel*jében is, aki könnyed, élvezetes olvasmány formájában igyekszik közvetíteni a matematikai kutatás örömét olvasói felé, és a formális, precíz matematikai bizonyításokat nemegyszer szemléletes analógiákkal pótolja.

Kalmár egy későbbi cikkében (1967) még tovább megy, ami a matematika empirikus alapjait illeti[36]. A szóbanforgó tanulmány, amely egy Lakatos által Londonban szervezett tudományfilozófiai konferencia kötetében jelent meg, a *Foundation of mathematics – wither now?* címet viseli. Kalmár a matematika megalapozásának problémáit tárgyalva számba veszi a klasszikus matematikafilozófiai iskolákat, a logicista, formalista és intuicionista megközelítést, és megállapítja, hogy egyik sem nyújt kielégítő választ a felmerült problémákra. Szigorú matematikai érvekkel kritizálja egy tisztán formális és deduktív matematika létének lehetőségét:

> The most important of these negative results [of proof theory] are Löwenheim's and Skolem's theorems, Gödels's incompleteness theorems, the existence of non-standard models, and Gödel's and Cohen's results on the independence of Cantor's Continuum Hypothesis in the usual axiomatic systems of Set Theory. These negative results showed that we have to give up the classical idea that the primitive ideas of a branch of mathematics can be implicitly defined by a system of axioms; instead, we now think that an axiom system defines the common properties of all models of it, standard and non-standard, a point of view adopted long ago in Algebra. Soon we will speak of 'an arithmetic of natural numbers' or 'a set theory', just as we now speak of a group or a ring. (Kalmár 1967 p. 191)

[34] Gurka többek között ebben, a szemléletességre, képiségre való törekvésben véli felismerni Karácsony Sándornak a Karácsony-kör tagjaira illetve Lakatosra gyakorolt hatását (Gurka 2001).

[35] A legnevezetesebb talán az integrálszámítást magyarázó levél, mely a már említett 1986-os, Kalmár írásait tartalmazó válogatáskötetben jelent meg, s a kötet címét (*Integrállevél*) is adta.

[36] (Máté 2008) részletesen elemzi e cikket.

Kalmár szerint ideje elfogadni, hogy a matematika nem lehet sem tisztán deduktív, sem teljesen infallibilis tudomány; szükségképpen megőriz bizonyos empirikus elemeket mind fogalmainak, mind módszereinek megalapozásában, és elkerülhetetlenül fallibilis marad.

A konferenciakötet tartalmazza az előadásokat követő vitákat is: Lakatos Kalmár előadásához fűzött hozzászólásában veti fel először a matematika „kvázi-empirikus" természetére vonatkozó javaslatát. Ez a hozzászólás az alapja[37] későbbi, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?* című cikkének (Lakatos 1976b), ahol „kvázi-euklideszi" és „kvázi-empirikus" tudományos elméleteket különböztet meg, és javaslatot tesz a matematika episztemológiájának „kvázi-empirikus" megalapozására.

Lakatos egyébként Pólya művéből is meríthet inspirációt ebben a témában. Pólya, bár a matematika infallibilizmusát nem vonja kétségbe, már *A gondolkodás iskolájá*ban (Pólya 1945/1969) megkülönbözteti a matematika két oldalát, egyrészt a rendszerezőt és deduktívat, másrészt a kísérletezőt és induktívat, mely utóbbi szerinte a matematikai felfedezés sajátja. Későbbi, *A matematikai gondolkodás művészetében* című művében (1954/1988) mélyebben is kifejti ezt a megkülönböztetést, hangsúlyozza a „plauzibilis következtetések" jelentőségét a matematikai felfedezés folyamatában, és megalkotja a plauzibilis következtetések szillogizmusait.

3.1.3 A heurisztika, avagy a felfedezés logikája

Láttuk korábban, hogy Dieudonné a matematikai felfedezés folyamatát alapvetően irracionálisnak tekinti – és koránt sincs egyedül e véleményével[38]. Pólya ezzel szemben arra a felvetésre alapozza „heurisztikáját", hogy ezek a folyamatok részben megérthetők, racionálisan rekonstruálhatók – és ennek megfelelően tanulhatók is. Természetesen nincs szó biztos, tévedhetetlen módszerekről. De a matematikai felfedezésekről szerinte nem csupán annyit lehet mondani, hogy azok egy-egy zseni utánozhatatlan művei: Pólya szerint léteznek szerinte a felfedezésnek olyan módszerei, amelyek hatékonyabbá tehetik a kutatást, és amelyek példák megfigyelésével, elemzésével és kitartó gyakorlással elsajátíthatók.

> Nem hiszek abban, hogy a találgatás megtanulásának van biztos módszere. Mindenesetre, ha van is ilyen módszer, én nem ismerem, és természetesen nem is teszek úgy, mintha a következő oldalakon azt mutatnám be. A plauzibilis okoskodás eredményes használata gyakorlati jártasságot igényel, ezért, mint minden gyakorlati dolog, utánzással és gyakorlással tanulható. Minden tőlem telhetőt meg fogok tenni a plauzibilis okoskodás megtanulására szomjazó olvasó kielégítésére, de amit fel tudok ajánlani, azok csak utánzásra való példák és lehetőségek a gyakorlásra. (Pólya 1954/1988, 11. o.)

[37] Ld. a kérdéses cikk első lábjegyzetét.
[38] Ld. pl. (Popper 1997, 35-37. o.).

Véleményét nem csak követője, Lakatos osztja, hanem úgy tűnik, a „magyar iskola” számos tagja is. Kalmár hasonló jellegű gondolatokat fejt ki 1942-es cikkében (287. o.); valójában Rényi is hasonló elveket követ, amikor műveinek tárgyát „in statu nascendi”, „a keletkezés frissességében” mutatja be; Péter Rózsa pedig a *Játék a végtelennel*ben szintén azt tűzi ki célul, hogy olvasóit bevezesse a matematikai felfedezések folyamatának élményébe. A felfedezés motorjai e szerzők mindegyikének esetében a problémák. Ennek megfelelően matematikatanítással kapcsolatos elképzeléseik középpontjában is a problémamegoldás és a heurisztikus módszerek állnak.

Ahogy azt a francia esetben is láttuk, a matematikatanítás egyik fő célja a „magyar iskola” matematikusainak szemében is a gondolkodásra nevelés.

> A matematika nem csupán a mérnöki pályához és a tudományos ismeretekhez vezető szükséges út, hanem nyújthat élvezetet és feltárhatja a legmagasabb szintű értelmi tevékenység távlatát is. (Pólya 1945/1969, 15. o.)

A „bourbakiánus” felfogással ellentétben azonban a „matematikai gondolkodás” az ő szemükben nem korlátozódik a bizonyítás módszereire: nagy jelentőséget tulajdonítanak a problémamegoldás és a felfedezés szerintük elsajátítható „módszereinek” is, amelyek bár nem kínálnak biztos megoldást, de szerintük lényeges szerepet játszanak a problémamegoldás hatékonyságának fejlesztésében.

3.1.4 Dialógus

Kalmár a matematikai egzaktság fejlődésének beindulását némileg meglepő fordulattal magyarázza:

> Úgy vélem, a legfőbb indítóok a szemlélettől való elszakadásra az, hogy az ember, a matematikus is, társas lény. (Kalmár 1942/1986 41. o.)

Okkal feltételezhetjük, hogy ezen a ponton szintén Karácsony Sándor „társaslélektani rendszerének” hatása jelenik meg.[39] Talán elég itt csak arra utalni, hogy a kötet címe, amelyben ez a Kalmár-tanulmány először megjelent, *A másik ember felé* (Karácsony 1942). Az idézet így folytatódik:

> Szereti másokkal is közölni azt, ami megkapja, ami élmény számára. Ekkor éri az első csalódás. Kiderül, hogy ami nekem szemléletem alapján világos, arra a másik esetleg értetlenül mered […]
> Ezen a legegyszerűbb úgy segíteni, hogy egy-egy matematikai meggondolás elmondása előtt felsorolom azokat a fogalmakat és a fogalmaknak azokat a tulajdonságait, amelyekre mint szemléletem alapján számomra evidens dolgokra fogok hivatkozni. Akinek bizonyítok, egyenként

[39] Erről ld. még (Gurka 2001)

megvizsgálja, szemléletével ellenőrzi, világosak-e számára is ezek az »alapigazságok«. […] (Kalmár 1942/1986 41. o.)

E – még hosszabban folytatódó – leírás feltűnően emlékeztet a platóni dialektikus vita gyakorlatára. A görög dialektika és matematika közötti összefüggés gondolatát később Szabó Árpád fejtette ki részletesen, és ez a gondolat nagy hatást gyakorolt Rényire is[40], aki népszerűsítő műveinek egy részét dialógus formájába öntötte. Feltehetően nem független a fentiektől az sem, hogy Lakatos a *Bizonyítások és cáfolatokat* (Lakatos 1976/1998) osztálytermi dialógusként írta meg (Máté 2006).

Úgy tűnik, hogy a dialógus-forma szoros összefüggésben áll a fejlődés bemutatásának gondolatával. A *Dialógusok a matematikáról* utószavában például ezt olvashatjuk:

> A szókratészi dialógus ugyanis nemcsak formájában, hanem tartalmában is dialektikus, hiszen a gondolatokat keletkezésükben, fejlődésükben mutatja be, az elvont gondolatokat mintegy dramatizálja, ezáltal a figyelmet ébren tartja, és a megértést megkönnyíti. (Rényi 2005 99. o.)

A dialógus-forma, a dramatizálás az oktatás szempontjából is központi gondolatnak tűnik. Tanár és diák partnerei egymásnak, közös tevékenységük során együtt alkotnak matematikát. Pólya javaslata szerint:

> Még akkor is, ha a tanár maga mondja el az osztály előtt egy feladat megoldását, dramatizálja kissé a gondolatmenetet, tegye fel saját magának is azokat a kérdéseket, amelyeket a tanulóknak szokott feltenni. (Pólya 1945/1969 25.)

Mint korábban rámutattam, Péter Rózsa *Játék a végtelennel*je is hasonló elvek szerint épül fel: olyan kérdések, problémafelvetések sorozatára igyekszik felfűzni műveit, melyek az előzményekből természetesen adódnak, és akár a tanulónak, olvasónak is az eszébe juthattak volna.

3.1.5 A formális nyelv visszafogott használata

A fentiektől nem független a Karácsony-kör matematikusainak a formális matematikai nyelv használatáról alkotott véleménye sem. Kalmár 1942-es tanulmánya végighalad a matematikai egzaktság fejlődési fokain a szemléletestől a formális axiomatikáig. Elutasítja azonban a pusztán formális axiomatikán alapuló matematikai alkotás lehetőségét:

> A formális axiomatikára még fokozottabb mértékben áll az, hogy csak elvben van meg; a valóságban a maga kedvéért űzni puszta játék volna, nem matematika. Jelentősége abban áll, hogy mint munkaelv, jó szolgálatot tesz a Hilbert-féle bizonyításelméletben olyan kérdések vizsgálatához, hogy

[40] A *Dialógusok* utószavában Rényi maga is hivatkozik Szabó Árpádra [Rényi 2005, 100. o.]

> ellentmondástalan-e a számtan, vagy, hogy meg lehet-e a számtannak (vagy valamely más rendszernek) minden problémáját oldani. (Kalmár 1942/1986 49. o.)

A formalizálásnak pedig, mint korábban láttuk, egyfajta kommunikációs szerepe van Kalmár szerint, az eredmények közvetítését, egy közösség többi tagjának meggyőzését segíti. A ma elfogadott matematikai nyelv éppúgy egy fejlődési folyamat eredménye, éppúgy problémák sorozatára adott válaszul alakult ki, ahogy a matematikai fogalmak vagy tételek: ebből viszont következik, hogy ha a tanítás során a diákokat a matematika fejlődésének logikája szerinti úton kívánjuk végigvezetni, ennek a matematikai nyelv használatára is ki kell terjednie.

A „heurisztikus" matematikafelfogás képviselői valóban számtalanszor felszólalnak mindenfajta öncélú formalizálás ellen, különösen a közoktatásban. Ez nem azt jelenti, hogy mindenfajta formalizálást elutasítanának, inkább azt, hogy szerintük nagyon ügyelni kell, hogy a formális nyelvhasználatot mindig nagyon lassan, jól megalapozottan és kellően motiválva vezessük be, amikor a formális nyelv mögött rejtőző fogalmi tartalmat már alaposan megértették a diákok. Érdemes ezzel kapcsolatban például *A gondolkodás iskolájának* a jelölésről szóló szócikkét megvizsgálni: Pólya, miután hosszan tárgyalja azt a kérdést, hogyan lehet ügyes és hatékony jelöléseket bevezetni, megjegyzi:

> Nemcsak a legreménytelenebb fickóknak lehet averziójuk az algebrával szemben, hanem egészen értelmes diákoknak is. A jelölésekben mindig van valami önkényes és mesterkélt; új jelölés megtanulása új teher az emlékezőtehetség számára. Az értelmes diák visszautasítja a teher vállalását, ha nem látja, kap-e érte ellenszolgáltatást. Az értelmes diáknak az algebra iránti ellenszenve igazolást nyer, ha nincs tág lehetősége arra, hogy saját tapasztalatából győződjön meg arról, hogy a matematikai jelek nyelve segíti az értelmet. A tanár fontos feladata, sőt mondhatni, egyik legfontosabb feladata, hogy segítsen neki ilyen irányú tapasztalatokat szerezni. (Pólya 1945/1969 159.)

Péter Rózsa szintén sokszor kritizálja az úgymond „formalista" matematikaoktatást. Egy előadásában[41] kifejti, hogy az absztrakt algebrával kezdve a tanítást, a matematika csupán üres vázként, „zörgő csontvázként" tűnik fel. Az absztrakt algebra igazi jelentőségét csupán az odavezető út ismeretében lehet értékelni: épp a különböző matematikai fogalmak fokozatos általánosítása, a köztük lévő kapcsolatok, analógiák felismerése adja az algebra gazdagságát (Péter 2004, 200-201. o.)

[41] Az előadás a Képzőművészeti Főiskolán hangzott el, szövege az Andrásfai Béla által gondozott hagyatékban maradt fenn, de a kötet, amelyben megjelent, nem közli elhangzásának eredeti dátumát.

3.1.6 Művészet, játék, kreativitás

A „magyar iskola" matematikusainak írásaiban rendszeresek az affektív jellegű például kíváncsiságra, örömre vonatkozó utalások. Ez különösen Péter Rózsára jellemző, aki matematikai tevékenysége mellett többek között Rilkét fordított és filmkritikákat írt, és rendszeresen kiállt a „két kultúra": matematika és művészet egysége mellett (ld. pl. Péter 2004). Péter Rózsa szerint a két terület legfőbb közös vonása, hogy mindkettő az emberi szellem szabad alkotása; a *Játék a végtelennel*ben pedig számtalanszor hangsúlyozza, hogy a matematikai kutatás egyik fő hajtóereje a kíváncsiság és a felfedezés öröme. Ez utóbbi mű kifejezett célja hogy megmutasson valamit a matematikus és a művész számára „közös hangulati forrásból" (Péter 1944/1969, 10. o.). A mű címe önmagában is kifejezi hogy Péter Rózsa a játékosságnak központi szerepet tulajdonít a matematikában. Könyvében a játék, a kíváncsiság, a felfedezés öröme és az alkotás szabadsága a matematikai kutatás fő hajtóerőiként tűnnek fel.

3.2 Péter Rózsa *Játék a végtelennel*-jének példája

Péter Rózsa *Játék a végtelennel*-je szemléletesen illusztrálja a fent jellemzett matematikafelfogást. Külön elemzésre nem csak rendkívüli és töretlen sikere miatt érdemes[42], hanem azért is, mert a Varga Tamás-reformhoz kapcsolódó tanári kézikönyv kifejezetten hivatkozik rá. Péter Rózsa matematikanépszerűsítő műve ezáltal túllép eredeti szerepkörén, matematikai és didaktikai hivatkozási alapot képez a matematikaoktatást megújító törekvések számára. A későbbiekben utalni fogok arra, hogy mennyiben jelenthetett e könyv inspirációs forrást az 1970-es évek tankönyveinek és tanári kézikönyveinek megírásához.[43]

A könyv két fejezetét elemezve azt kíséreltem meg megmutatni (Gosztonyi 2014, 2015), hogy az irodalmi stílusban megírt, irodalmi és matematikatörténeti utalásokban bővelkedő, olvasmányos és látszólag egyszerű szöveg valójában problémák és válaszkísérletek sorozatából szőtt szofisztikált szerkezetre épül. A negyedik fejezet Péter Rózsa egy tanítási élményét írja le, amely abból fakadt, hogy egy felső tagozatos tanítványa kíváncsi kérdését ahelyett, hogy közvetlenül megválasztolta volna, felvetette az egész osztálynak. Leírása szerint a gyerekek gyorsan megtalálják a kérdésre a választ, ügyesebben megmagyarázva a

[42] Számos magyar nyelvű kiadása mellett legalább 12 idegen nyelvre is lefordították, legfrissebb francia nyelvű kiadása 2014-ben jelent meg.

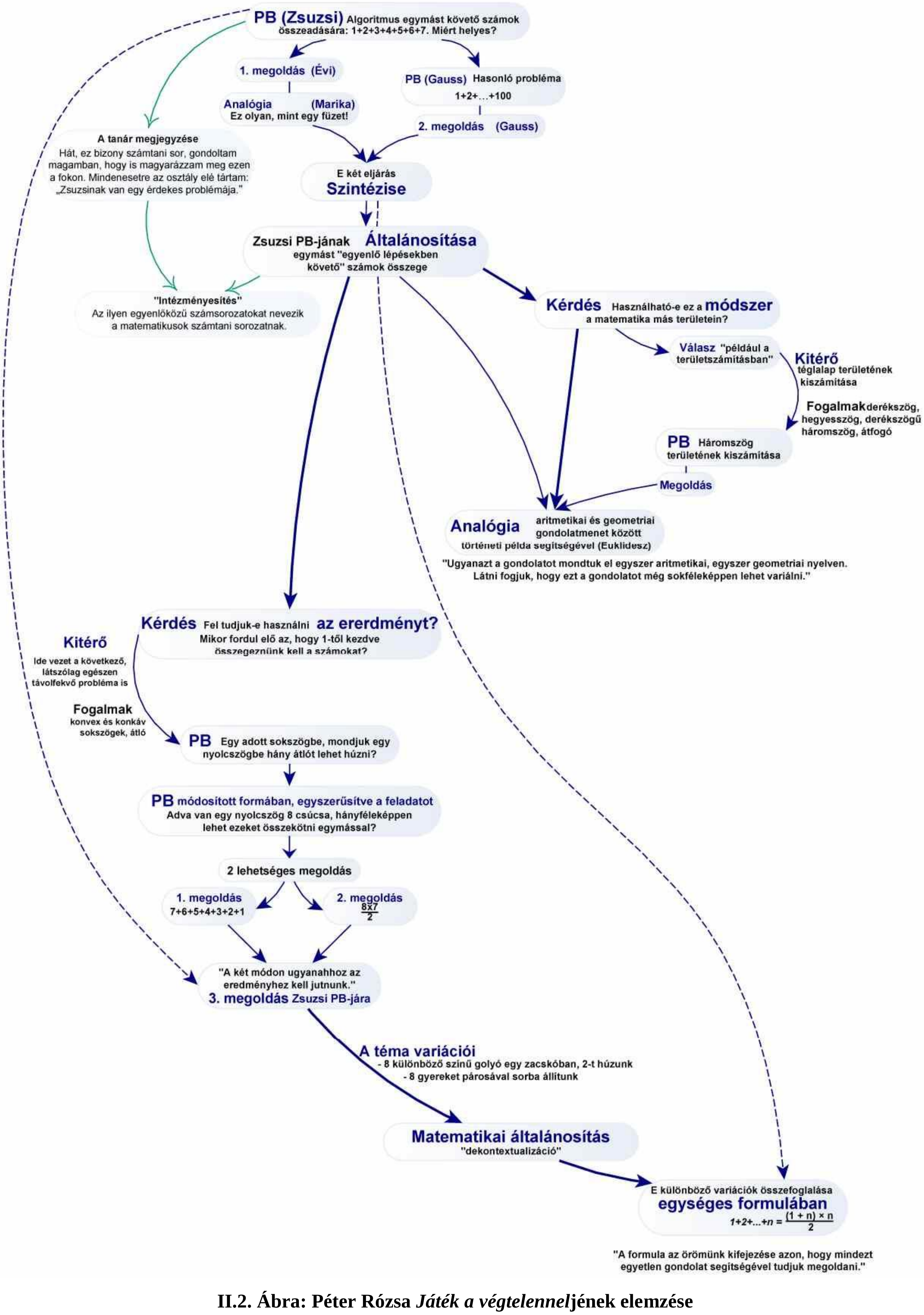
[43] Itt meg kell jegyeznem, hogy néhány évvel a *Játék a végtelennel* megjelenése után Péter Rózsa maga is írt tankönyvet Gallai Tibor matematikussal és néhány más szerzőtárssal (Gallai & Péter 1949). Középiskolai tankönyvről lévén szó, disszertációmban e könyveket nem elemzem, jelzem azonban, hogy valószínűleg ezek is hatást gyakoroltak a Varga Tamás-reform szellemére (interjú Deák Ervinnel).

keresett összefüggést, mint ahogy ő maga tette volna. Itt azonban nem ér véget a kutatási folyamat. Az első, konkrét probléma megválaszolása után felvet egy ahhoz hasonlót, amelyet a hagyomány Gaussnak tulajdonít; majd a probléma fokozatos általánosítása után a felső tagozatos osztály eljut a számtani sorozat összegének fogalmához. A megoldáshoz használt módszernek a szerző aztán bemutatja egy másik matematikai területről, a geometriából vett analógiáját, eredményét pedig a következő fejezetben számos különböző matematikai területről vett példán keresztül hasznosítja újra.

A számos konkrét probléma közötti kapcsolatok felismerése vezet a fogalmak fokozatos általánosításához, míg – a *Játék a végtelennel*ben szokatlan módon – a felismert összefüggéseket a szerző végül egy képlet formájában fejezi ki. Szerinte

> A fenti képlet is csak szimbólum, önmagában nem jelent semmit; mindenki a maga élményét helyettesítheti bele. Az egyik ember számára a sokszög átlóinak megszámlálását, a másik ember számára a növendékeit vezető pár megválasztásának lehetőségeit jelentheti. A formula felírása az örömünk kifejezése azon, hogy mindezt egyetlen gondolat segítségével tudjuk megoldani (Péter 1944/1969 42. o.).

A szöveg elemzésének részletes ismertetése nélkül itt csupán az elemzést összefoglaló sémát mutatom be (II.1. ábra). E séma, bár sok szempontból további finomításra szorul, világosan mutatja, hogyan épül Péter Rózsa írása kérdések, ezekre adott válaszkísérletek, és az utóbbiak által előhívott újabb kérdések dialektikájára. A konkrét matematikai problémákon túl a kutatást rájuk vonatkozó kérdések viszik előre, mint például: hogyan lehetne egyesíteni két hasonló matematikai eljárást? Hogyan lehetne általánosítani egy eredményt vagy egy módszert? Hogyan lehetne egy módszert vagy egy eredményt más matematikai területeken alkalmazni?



II.2. Ábra: Péter Rózsa *Játék a végtelennel*jének elemzése

Itt meg kell jegyeznem, hogy az effajta kérdések feltűnő hasonlóságot mutatnak azokkal, amelyeket Pólya szed listába *A gondolkodás iskolájá*nak elején. Ez a megfigyelés egyúttal arra is felhívja a figyelmet, hogy Pólya kérdései valójában nem elszigetelt, egymástól független problémák megoldásához adnak tanácsot, sokkal inkább ahhoz, hogyan rendszerezzük a korábban megismert problémákat összefüggő hálózatba, hogy a további problémák e rendszerbe minél könnyebben beilleszthetők legyenek, és ezáltal közelebb jussunk a megoldásukhoz.

3.3 A heurisztikus matematikafelfogás a Varga Tamás-reform hátterében

Varga Tamás maga ritkán beszél expliciten a matematika természetét illető kérdésekről. Ugyankkor láttuk (I. Rész), hogy fiatal korától szoros kapcsolatban van a fent bemutatott „magyar iskola" tagjaival, és későbbi reformjának fontos támogatóiként, ihletőiként hivatkozik e matematikusokra. A didaktikai elemzés során megkísérlem majd megmutatni, hogyan jelenik meg a fent kifejtett matematikafelfogás Varga Tamás matematikaoktatási koncepciójában; itt csupán két írását idézem, amelyek talán legjellemzőbben fejezik ki a matematika természetére vonatkozó gondolatait. Az első idézet egy Kalmárnak címzett leveléből származik, amelyet egészen fiatalon, még kezdő tanárként írt; a második pedig posztumusz cikkében jelent meg, amely *Az egyszeregy körül* címet viseli:

> […] Az még ugye nyíregyházi eredmény, hogy két tantárgy van. Nem számtan és mértan, persze. Hanem 1) Kiszámítani a világot, 2) Játszani a számokkal (és ábrákkal, és tárgyakkal… ez éppúgy összefolyik itt a természettudományokkal, mint az 1).
>
> 1) a tudomány
>
> > oldala az én és ő-nek.
>
> 2) a művészet
>
> […] Én mindig a művészet-részét szerettem jobban. Onnan vettem észre azt, hogy az elsősöknek is mindig csak ilyesmiket tudtam szívem szerint mutatni. […] (Szabó 2005, 403. o.)

> A matematika, a legalsó szinttől a legfelsőig, tapasztalatokból nő ki: próbálkozásokból, sejtésekből és ellenőrzésükből, elvetésükből vagy megerősítésükből. Mégis az emberi szellem szabad alkotása. Híd a két „kultúra" között. Tele van játékossággal, esztétikummal: művészet is. (Varga 1987, 28. o.)

4 Konklúzió

A francia és a magyar reform egyaránt táplálkozik a matematika természetét illető, mély és kiforrott episztemológiai megfontolásokból. Ezek a megfontolások szorosan kötődnek a matematika 20. századi fejlődése során felvetődött problémákhoz: de a rájuk adott válaszok lényegesen eltérnek a francia és a magyar esetben.

A „bourbakiánus" matematikafelfogás szerint a Bourbaki által tökéletesített „axiomatikus módszer" jelent pragmatikus megoldást a matematika megalapozásának problémáira.[44] Ez a módszer a lehető legnagyobb világosságot és precizitást biztosítja a matematika számára. A matematikai, módszereit, nyelvét és felépítését tekintve elérte fejlődésének végső állapotát: Bourbaki kidolgozta a hozzá vezető „királyi utat". A halmazelméleten alapuló újraszervezés és a modern formális nyelv egységes, koherens tudománnyá teszik a matematikát. A „modern matematika" egyik legfőbb sajátossága a végletekig vitt absztrakció: általános érvényét a tartalmuktól megfosztott, „kiüresített" absztrakt fogalmak adják; és ha e fogalmaknak valamikor volt is valamiféle empirikus tartalma, épp az absztrakció révén válnak tényleges matematikai fogalmakká. A matematikai felfedezés szerintük alapvetően irracionális folyamat – ami a leginkább segítheti, az az axiomatikus módszer gyakorlása. A tanulókat tehát szerintük fölösleges az idéjétmúlt fogalmakkal és módszerekkel terhelni – mielőbb be kell vezetni őket a modern matematika fogalmainak ismeretébe. Ennek legfeljebb a gyermekek pszichológiai fejlődése állíthat akadályt, akik csak fokozatosan érnek meg arra, hogy az „igazi" matematikai gondolkodás mibenlétét megérthessék és elsajátíthassák.

Varga Tamás reformjának hátterében szintén egy koherens, ám a „bourbakiánustól" lényegesen eltérő matematikafelfogás meglétét sikerült kimutatni, amelyet „heurisztikusnak" neveztem el. Kalmár László, Péter Rózsa, Rényi Alfréd és Pólya György írásaiból olyan matematikafelfogás bontakozik ki, amely a matematikát nem örökérvényűnek, hanem az emberi szellem folyamatosan fejlődő, változó alkotásának mutatja, nem csak annak tartalmát, hanem módszereit és formáját illetően is. Ezen a fejlődési folyamaton kell e matematikusok szerint a matematikát tanulókat is végigsegíteni. A fejlődés kiindulópontja szerintük a szemlélet, a tapasztalat. Enélkül sem matematikai alkotó tevékenység, sem igazi megértés nem lehetséges – ezért az oktatás minden szintjén hangsúlyt kell helyezni a szemlélet bőséges tapasztalatgyűjtésen alapuló fejlesztésére. Az öncélú formalizmus ezzel szemben kerülendő, a formális nyelv használatát mindig megfelelően megalapozva kell bevezetni. A matematikai tevékenység szerintük alapvetően dialogikus jellegű, kérdések, problémafelvetések és erre adott válaszkísérletek sora. A matematika oktatása sem egyirányú ismeretátadás, hanem a tanulók és a tanár közös tevékenysége: a tanár a tanulók segítőjeként lép fel a matematikai

[44] Kalmárral vagy Péter Rózsával szemben Bourbaki nem foglalkozik a modern matematikai logika eredményeivel – a matematika megalapozásának kérdései a számukra inkább gyakorlati problémaként tűnnek fel, amelyeket az *Éléments de mathématiques* megírásával megoldottnak tekintenek (Maashal 2002, 122-125. o.).

felfedezés útján. A matematikaoktatás feladata e matematikusok szerint a matematikai alkotás folyamatába való beavatás, és ezáltal gondolkodóvá nevelés. Úgy tartják, hogy a matematikai problémamegoldás és felfedezés folyamatai legalább részben megérthetők, és így tanulhatóak is: a matematika tanításában ezért szerintük ezekre a – nem teljes bizonyossággal célravezető, de mégis hatékony – módszerekre érdemes helyezni a hangsúlyt. Ez az alkotási folyamat egyúttal felfogásuk szerint szoros összefüggésben áll a játékkal és a művészi alkotással, így ezeknek az elemeknek is helyük van a matematika tanításában.

A disszertáció harmadik részében a két reform didaktikai elemzésén keresztül kísérlem meg megmutatni, hogyan befolyásolja ez a kétféle matematikafelfogás – „bourbakiánus” az egyik, „heurisztikus a másik oldalon – a reformok didaktikai sajátosságait.

III. Rész
A reformok didaktikai elemzése

1. FEJEZET

A DIDAKTIKAI ELEMZÉS MÓDSZERTANA

1 A DIDAKTIKAI ELEMZÉS KÉRDÉSEI

A francia és a magyar reform történeti kontextusának és episztemológiai hátterének elemzése után rátérek a két reform didaktikai elemzésére.

Amint azt a bevezetőben már leszögeztem, a francia esetben a „mathématiques modernes" néven ismert reformról van szó, amely a *collège*-ben (felső tagozat) tantervét 1969-től, az *école primaire*-ben (alsó tagozat) pedig 1970-től lépett életbe. Figyelembe veszem továbbá az 1977-es francia tanterveket is néhány más, az 1970-es évekből származó dokumentummal együtt, amelyek segítségével a francia matematikaoktatás fejlődésének a „mathématiques modernes" reformot követő dinamikáját is megkísérlem felvázolni. A magyar esetben a Varga Tamás kísérletein alapuló, 1978-ban bevezetett reform dokumentumait veszem figyelembe.

A disszertáció bevezetésében hangsúlyoztam e reformok rendszerszerű jellegét, arra utalva ezzel, hogy mindkét esetben a matematikaoktatás számos összetevőjét érintő komplex átalakulásról van szó. A történeti elemzés rávilágított, hogy a reformok szerzői és vezetői mind a tantervek tartalmának, mind azok szerkezetének átalakítását fontosnak tarották, és a tanterv reformját összhangba kívánták hozni a pedagógiai módszerek megújításával, nevezetesen az „aktív pedagógia" módszereinek elterjesztésével (I. Rész). Elemzésemben ennek megfelelően a fenti szempontokra helyezem a hangsúlyt. A következő kérdésekre keresem tehát a választ:

1, Mi jellemzi a magyar és a francia reform tantervének tartalmát és szerkezetét?

2, Milyennek gondolják el a reform szerzői a követendő pedagógiai gyakorlatot? Mit jelent az „aktív pedagógia" fogalma az egyes esetekben?

3, Milyen összefüggések figyelhetőek meg a tanterv, a pedagógiai gyakorlat és a tanítás segédanyagai között az egyes reformok esetében?

Az elemzés során megkísérlem megmutatni, hogy az egyes reformok különböző sajátosságai mindkét esetben összefüggő egészet alkotnak, és mindkét esetben a mögöttük meghúzódó matematikafelfogás – „bourbakiánus" a francia, „heurisztikus" a magyar esetben – koherens didaktikai megvalósításai.

2 A TANTERVEK TARTALMÁNAK ÉS SZERKEZETÉNEK ELEMZÉSE

2.1 Az „ökológiai megközelítés”

A „New Math” időszak reformjainak során nagy hangsúlyt helyeztek arra, hogy a matematika oktatásába bevezessék a modern matematika legfontosabbnak ítélt elemeit – ugyanakkor a tanterv tartalmának megújítása mellett annak átstruktúrálását is fontosnak tartották, hogy a matematikát az általános iskola elejétől mint egységes tudományt mutathassák be. Elemzésemben azt fogom vizsgálni, hogyan valósulnak meg ezek a törekvések: melyek a tananyag megújuló elemei, és mi biztosítja a tanterv koherenciáját a francia és a magyar reform esetében?

Ehhez az elemzéshez az ún. *ökológiai megközelítésre* (Artaud 1997) támaszkodom, amely kifejezetten alkalmas a tantervet szervező logika elemzésére, és eszközöket kínál annak feltárására, hogy mi magyarázza egy-egy matematikai téma vagy fogalom megjelenését, avagy éppen a hiányát egy-egy tantervben.

Az *ökológiai megközelítés* az Yves Chevallard-hoz köthető *Didaktika Antropológiai Elméletének* részeként született meg a francia didaktikai hagyományban (Artaud 1997). Az elméletet az ökológia rendszerszerű szemlélete inspirálta, amely az élőlényeket nem önmagukban, hanem egy rendszer részeiként értelmezi. Az *ökoszisztémának* megfelelően beszél *matematikai szervezetekről* (organisation mathématique), és vizsgálja a matematikai fogalmak egy adott rendszeren belül fennálló elméleti-logikai összefüggéseit, az egyes fogalmaknak a rendszerben betöltött helyét és funkcióját: ehhez kölcsönveszi az ökológiától a *habitat* és a *niche* fogalmakat (ezeket a kifejezéseket én elemzéseimben nem fogom használni, ehelyett egy-egy fogalom helyéről és funkciójáról vagy szerepéről fogok beszélni). A matematikadidaktikában használt *ökológiai megközelítés* alkalmanként a *tápláléklánc* fogalmát is felhasználja: az élőlények táplálkozási szükségleteinek mintájára kísérli meg azonosítani egy adott *matematikai szervezeten* belül fennálló elméleti szükségleteket, az egyes fogalmak egymástól való függését.

Egy doktori disszertáció keretében természetesen nem áll módomban, hogy 8 vagy 9 év teljes tantervét elemezzem ilyen módon. A 2. fejezetben csupán a vizsgált tantervek vázlatos áttekintését kísérlem meg: azt vizsgálom, melyek az egyes tantervekben megjelenő fő matematikai témakörök, és mi a tantervek fő szervezőelve. A részletesebb elemzést csupán néhány példán végzem el. A 3 fejezetben a természetes szám fogalmának felépítését vizsgálom, megkísérlem rekonstruálni a hozzá vezető *táplálékláncot* a két reform felépítésében. A 4. fejezetben a geometria tanterv felépítésének sajátosságait vizsgálom, ezen belül a Pitagorasz-tétel geometria tantervben betöltött helyére és szerepére téve a hangsúlyt. Az utolsó, 5. fejezetben a kombinatorika és a valószínűségszámítás megjelenésének okait elemzem Varga Tamás tantervében, illetve e témák különféle kapcsolatait a tanterv többi fejezetével. Kitérek rá, hogy mi lehet az oka e témák hiányának az alsó és felső tagozatos francia reformtantervben, és megvizsgálom, mivel függ össze alkalmankénti megjelenésük az 1970-es évek francia tankönyveiben és tanári kézikönyveiben.

2.2 A geometria és a valószínűségszámítás paradigmái

A 4. és az 5. fejezetben egy további elméleti eszközt, a *paradigma* fogalmát is felhasználom a tantervek elemzéséhez. Houdement és Kuzniak (2006) Kuhn-tól veszik kölcsön e fogalmat a geometria didaktikájához, hogy a geometriához kapcsolódó hiteket, tudás-elemeket és elfogadott problémamegoldási módszereket összefüggésükben jellemezzék. Három különböző *geometriai paradigmát* különböztetnek meg (amelyeknek számozása nem utal sem minősítésre, sem hierarchiára a paradigmák között).

Az első paradigma (G1), amelyet a szerzők „természetes geometriának” is neveznek, a fizikai valóságból, az érzékszervi tapasztalatból nyeri vizsgálatai tárgyát. A vizsgálatok konkrét, fizikai objektumokon folynak, az érvelések tényleges fizikai tevékenyégen alapulnak (pl. hajtogatás, vágás, esetleg ezeknek a számítógépes szimulációja). A második paradigma, a „természetes axiomatikus geometria” (G2) nem érzékelhető, hanem elméleti, ideális objektumokat vizsgál, az érvelések pedig deduktívak, és nem fizikai tevékenységre épülnek. A tapasztalatokkal való kapcsolat azonban megmarad, a G2 paradigma absztrakt tárgyai a reális világhoz kapcsolható jelentést hordoznak; és bár részleges axiomatizálás megjelenhet, teljes axiomatizálásról G2-ben nincs szó. A harmadik paradigmát a szerzők „formális axiomatikus geometriának” (G3) nevezik: ebben a paradigmában a geometriai fogalmak tisztán formálisak, nem hordoznak az érzékelhető világra vonatkozó jelentéstartalmat, az érvelések pedig teljes axiómarendszeren és az abban érvényes logikai levezetési szabályokon alapulnak.

Parzysz (2011) a paradigma fogalmát a valószínűségszámításra is kiterjeszti. Arra hívja fel a figyelmet, hogy a valószínűségszámítás „klasszikus” vagy „laplaciánus” és „frekventista” megközelítései párhuzamba állíthatók a Houdement és Kuzniak által leírt geometriai paradigmákkal. A történetileg modernebb frekventista megközelítést, amely a valószínűség fogalmát a relatív gyakoriság fogalma felől közelíti meg, P1 paradigmaként jelöli, és a G1 paradigmával állítja párhuzamba, hiszen mindkettő a való világ jelenségeinek megfigyelésén és a kísérletezésen alapul. A laplaciánus megközelítést, amely az egyenlő valószínűségű esetek fogalmának felhasználásával állít fel valószínűségi modelleket, Parzysz P2 paradigmának nevezi, és a G2 paradigmával állítja párhuzamba, mivel mindkettő matematikai modellek vizsgálatán és logikai érveléseken alapul.

Megjegyzem, hogy a fentieken kívül a valószínűségszámítás egy harmadik, „bayesiánus” vagy „szubjektivista” megközelítését is meg szokás különböztetni (a matematikadidaktika területén ld. pl. Carranza & Kuzniak 2008); azonban viszonylag modern elméletről lévén szó, ez még nem lehetett hatással az 1970-es évek matematikaoktatására, így elemzéseimben nem veszem figyelembe.

A geometria és a valószínűségszámítás paradigmáinak fogalma a 4. és az 5. fejezetben segít majd feltárni, hogyan függ össze a reformok hátterében álló episztemológia az egyes matematikai témák keretében tárgyalt fogalmak, a felhasznált eszközök és az elvárt érvelési módok sajátosságaival.

3 A PEDAGÓGIAI GYAKORLAT ELEMZÉSE[45]

3.1 Az „aktív pedagógia”, és a Didaktikai Szituációk Elmélete

Mindkét reform hangsúlyozza a pedagógiai gyakorlat megújításának szükségességét, és az „aktív pedagógia” módszereinek jelentőségét. Nem egyértelmű azonban, mit értenek az egyes szerzők „aktív pedagógián”: miben áll a tanulók aktivitása? Hogyan függ össze ez az aktivitás a tananyag matematikai tartalmával? Miben áll a tanulók felelőssége a matematikai fogalmak felépítése során és mi a tanár szerepe ezekben a folyamatokban?

Ezekre a kérdésekre elsősorban a Brousseau által kidolgozott Didaktikai Szituációk Elméletének segítségével keresem a választ. Brousseau elmélete nem csak azért tűnik különösen alkalmasnak e célra, mert a francia didaktikai hagyományt megalapozó, igen részletesen kidolgozott elméletről van szó, hanem azért is, mert alapjai jelentős részben az általam vizsgált kor vitáiban gyökereznek. Brousseau maga is világossá teszi Piaget konstruktivista elméletének, Dienes játékainak és az aktív pedagógiát övező vitáknak a hatását elmélete kidolgozására, ugyanakkor bizonyos kérdésekben szembe is fordul a tiszta konstruktivizmussal (Bessot 2011, 32. o.).

[45] A disszertáció eredeti, francia verziójában még egy elméleti eszközt, a Douady által kidolgozott tárgy-eszköz dialektika (dialectique outil-objet) fogalmát is használom, de lényegesen kisebb súllyal, mint Brousseau elméletét. A magyar verzióból hely hiányában az erre vonatkozó fejtegetéseket kihagytam.

Az elmélet egyik központi fogalma az *adidaktikai szituácó*. A konstruktivista elméleteknek megfelelően (Brousseau 1986, 48. o.) Brousseau azt vallja, hogy valódi tanulási folyamat csak úgy mehet végbe, ha a tanuló maga építi fel saját ismereteit. Ez a matematikatanulásban úgy valósítható meg, ha a tanár olyan didaktikai célú, de a természetes tanulási szituációkat imitáló helyzetet hoz létre, amelyben a tanuló önállóan, a tanár további közbeavatkozása nélkül is képes a tanítani tervezett fogalom felépítésére. Az ilyen *adidaktikai szituáció* egy jól kidolgozott *miliő*n alapul (ez állhat valamilyen tárgyi környezetből, de tartalmazza a feladat instrukcióit, illetve a tanuló számára elérhető matematikai fogalmakat is), amellyel a tanulónak interakcióba kell lépnie. A miliőnek retroaktívnak kell lennie, vagyis reagálnia a tanuló problémamegoldási kísérleteire, ezáltal visszajelzést adva kidolgozott módszereinek helyességéről és segítve azok javítását. Így a tanítani kívánt matematikai fogalom úgy jelenik meg, mint valamiféle megoldási eszköz egy adidaktikai szituáció során felmerülő problémára, amelyet a miliővel való interakció során a tanuló maga fejleszt és ellenőriz.

Brousseau feltételezi, hogy minden matematikai ismerethez, fogalomhoz hozzárendelhető legalább egy ún. *fundamentális szituáció*, amely elég gazdag és összetett ahhoz, hogy más szituációk egész együttesét generálja, lehetővé téve így egy egész matematikai téma felépítését (Brousseau 2012, 115. o.).[46] Brousseau megkülönböztet ezen kívül *cselekvési, megfogalmazási* és *érvényesítési szituációkat* (situations d'action, de formulation, de validation) különböztet meg, amelyek sorrendjének bizonyos jelentőséget tulajdonít (Brousseau 1997, 9. o.).

Az adidaktikai szituációk azonban csak a tanítás egyik fázisát alkotják, amelynek Brousseau elképzelése szerint két másik fázissal, a *devolúcióval* (dévolution) és az *intézményesítéssel* (institutionnalization) kell váltakoznia. Az előbbinek az a funkciója, hogy bevezessen egy adidaktikai szituációt: a devolúció során a tanár átruházza az ismeretek felépítésének felelősségét a tanulókra, akiknek vállalniuk kell a felelősséget annak a feladatnak a megoldásáért, amelyet a tanár kitűzött nekik.[47]

Az intézményesítés fogalma *ismeret* és *tudás* (*connaissance* és *savoir*) megkülönböztetésével függ össze Brousseau elméletében. Az *ismeret* szerinte személyes és kontextushoz kötött. Létrejöhet egy adidaktikai szituáció keretei közt – azonban ahhoz, hogy formába önthető, kifejezhető, kialakulásának kontextusától elvonatkoztatott és intézményi

---

[46] Az 5. fejezetben, Brousseau egy tanítási kísérletének elemzésekor látni fogjuk, milyen szerepet játszik nála a fundamentális szituáció fogalma a hosszabb tanítási folyamatok tervezésében, és mennyiben teszi különbözővé e folyamatok felépítését Varga „problémasorozatokra" épülő megközelítésétől.

[47] A devolúció jogi eredetű fogalom; Brousseau elméletében szoros kapcsolatban áll a *didaktikai szerződés* fogalmával, amelyet alább ismertetek.

szintes is elfogadott, jóváhagyott *tudás* jöjjön létre, a tanár közreműködése szükséges. Erre szolgál Brousseau szerint az *intézményesítés* fázisa, amelynek így szükségképpen követnie kell a tanulás egy-egy adidaktikai fázisát.

A Didaktikai Szituációk Elméletének még egy fogalma játszik fontos szerepet elemzéseimben: a *didaktikai szerződés* fogalma. Egy olyan – az esetek többségében implicit – megállapodásról van szó tanár és tanítványai között, amely meghatározza a tanítás folyamatában betöltött szerepüket, az egyes felekre háruló felelősséget, és azt, hogy mit várhatnak a másik féltől. (A szerződés kimondatlansága és változásai számos félreértéshez vezethetnek: ezek elemzése kiemelt szerepet játszik az elméletben, Brousseau szerint számos matematikatanítással kapcsolatos nehézséget, elakadást megmagyaráznak.) Annak megértéséhez, hogy az „aktivitás" mit jelent a különböző szerzők elgondolása szerint, különösen azt fogom elemezni, hogy milyen jellegű didaktikai szerződés olvasható ki tankönyveikből és tanári kézikönyveikből.

Az elmélet 1970-es évekbeli megjelenése óta hosszú fejlődésen ment keresztül, számos kiegészítést megélt. A továbbfejlesztések egyik fontos motívuma, hogy az elmélet a hétköznapi tanítási szituációk elemzésére is alkalmassá váljon, amelyek nem mindig követik Brousseau modelljét. Hersant és Perrin-Glorian (2003) egy a miliő és a didaktikai szerződés fogalmát összekapcsoló, tovább árnyaló tanulmányban bevezetik az *adidaktikai potencialitás* fogalmát a szituációk előzetes elemzéséhez. Itt annak vizsgálatáról van szó, hogy egy adott feladat az adidakticitásnak milyen lehetőségeit rejti magában, attól függetlenül, hogy a tényleges osztálytermi alkalmazás során mennyi valósul meg ebből.[48] Mivel én magam sem férek hozzá a ténylegesen megvalósult tanórákhoz, csupán a tervezett pedagógiai gyakorlat elemzésével foglalkozom, inkább *adidaktikai potencialitás*ról mint tényleges adidaktikai szituációkról fogok beszélni.

Meg kell említenem egy az adidaktikai szituáció jellegét érintő, a francia didaktikai közösségben folyó vitát is. Láttuk, hogy az adidaktikai szituáció során a tanuló maga viseli a tanulási folyamatért a felelősséget, a tanár közbeavatkozása nélkül építi matematikai ismereteit. Nem egyértelmű azonban, mit jelent a tanár közbeavatkozásának hiánya. Brousseau egy 1997-es előadásában úgy nyilatkozik, hogy a tanár ugyan tesz bizonyos pedagógiai gesztusokat (pl. motiválja a gyerekeket, emlékezteti őket a szituáció szabályaira stb.), de ezek nem didaktikai gesztusok, nem érintik a matematikai tartalmat. Brousseau

[48] A francia didaktikai hagyományban meg szokás különböztetni *a priori* és *a posteriori* elemzést: előbbi egy feladat vagy tanóra tervében rejlő lehetőségekre vonatkozik, utóbbi pedig a tényleges megvalósulást vizsgálja.

megfogalmazása szerint a tanár ilyenkor „működteti a gépezetet” (Brousseau 1997, 48. o.), de a matematikai ismeretek szintjén egyáltalán nem avatkozik közbe.

Hersant és Perrin-Glorian már említett cikke szerint (2003, 223. o.), úgy látszik, az adidaktikai szituáció egyfajta ideált testesít meg, amelynek a során a tanár egyáltalán nem avatkozik közbe; a tényleges megvalósulás során viszont gyakran szükséges a tanár beavatkozása különféle okokból, így ezek a helyzetek csak közelítik az elmélet által felállított ideált. Hasonló álláspontot látszik képviselni Hersant „a dialogikus tanításról” (le cours dialogué) szóló tanulmányában (2004). Margolinas (1993, 35. o.) viszont más véleményen van: szerinte egy adidaktikai szituációt elsősorban a tanulók tanulási folyamat iránti felelősségvállalása jellemez, kevésbé a tanár közbeavatkozásának megléte vagy hiánya. Ez a kérdéskör akkor válik különösen jelentőssé elemzéseim szempontjából, amikor Varga Tamás matematikaoktatási koncepcióját kísérlem meg Brousseau elméletének segítségével jellemezni: a francia példákkal ellentétben itt ugyanis lényegesen nehezebb lesz tisztán adidaktikai és intézményesítési fázisokat elkülöníteni, bár a tanulók felelősségvállalása, amint azt látni fogjuk, Varga szemében is fontos szerepet játszik.

3.2 A tanár munkájának elemzése

Margolinas jelentős szempontváltást vezet be a Didaktikai Szituációk Elméletébe: míg az eredeti elmélet elsősorban a tanulók szemszögéből vizsgálja a tanítás folyamatát, Margolinas (2002) úgy egészíti azt ki, hogy a tanár munkájának tanulmányozásához is alkalmassá váljon. Megkülönbözteti a tanár tevékenységének különféle szintjeit:

Ideológiai szint	+3
Egy téma felépítésének, megtervezésének szintje	+2
Egy tanóra tervének szintje	+1
A didaktikai szituáció szintje	0
A megfigyelés vagy a devolúció szintje	-1

III.1.1. Táblázat: A tanár tevékenségének szintjei (Margolinas 20002, 142, o. Saját fordításom)

Látni fogjuk, hogy az elemzett tankönyvek és tanári kézikönyvek lényegesen eltérnek egymástól olyan szempontból, hogy a tanár munkájának mely szintjeit szabályozzák, és mely szinteken hagyják a felelősséget a tanárra. Ahhoz, hogy a didaktikai szituációk leírásait egyáltalán elemezni lehessen, szükség lesz az általam tanulmányozott források ilyen jellegű vizsgálatára. A Margolinas által meghatározott szintek közül én az elemzéseim során hármat veszek majd figyelembe: a hosszútávú tervezésnek (+2), a tanóra tervének (+1) és a tanórai tevékenységnek (0) a szintjét.

A 3. fejezetben az alsó tagozatos tanítói kézikönyvek elemzésén keresztül vizsgálom, miben kell állnia az egyes szerzők szerint a tanár tevékenységének, illetve az e könyvekben leírt szituációk milyen didaktikai szerződést, a tanulók milyen jellegű aktivitását feltételezik. Néhány szituáció elemzésével elsősorban a tanár tevékenységének +1 szintjét vizsgálom. Ezek az elemzések egyúttal arra is rá fognak világítani, hogy míg a francia kézikönyvekben általában a +1 szinten van a hangsúly, Varga Tamás koncepciója a 0 és a +2 szintre is nagy hangsúlyt helyez. A 4. fejezetben a felső tagozatos tankönyvek elemzésén keresztül lehetőség nyílik majd a felső tagozaton tervezett tanítási gyakorlat vizsgálatára: azt kísérlem meg megmutatni, hogy e tankönyvek szövegei részben olvashatók a tervezett pedagógiai gyakorlat modelljeiként. E fejezetben elsősorban a 0 szint elemzésére nyílik majd lehetőség. Végül az 5. fejezetben a pedagógiai gyakorlat szempontjából a +2 szint vizsgálatán lesz a hangsúly: a magyar reform néhány kombinatorikai témájú hosszabb tanítási folyamatának felépítését fogom összehasonlítani Brousseau egy 1970-es évek elején megvalósított, valószínűségszámítási témájú kísérletének felépítésével. Ez az elemzés Varga és Brousseau koncepciójának összehasonlítása mellett arra is lehetőséget kínál majd, hogy Brousseau munkásságát – amellett, hogy elemzéseimhez elméleti háttérként használom – saját történeti kontextusában, a „mathématiques modernes” reformmozgalom összefüggésében vizsgáljam.

3.3 Egy terminológiai probléma

A *szituáció* (situation) és a *probléma* (problème) fogalma Brousseau elméletében kulcsszerepet játszik. Ezeket a fogalmakat elemzéseim során én is használni fogom. Ugyanakkor a tanterv- és tankönyvszerzők számos más, rokon értelmű kifejezést is használnak, amelyek jelentése nem mindig egyértelmű és sokszor átfedi egymást. A francia szövegekben gyakran használatos a fenti két fogalom, de, mint arra Artigue és Houdement (2007) rámutat, jelentésük sokat változott az évtizedek folyamán. Használatos emellett a *gyakorlat* (exercicce) fogalma is, különösen a felső tagozatos tantervekben. A magyar tankönyvekben és tanári kézikönyvekben elsősorban a *feladat* és a *játék* fogalmakkal lehet találkozni, alkalmanként a *gyakorlat* is használatos. A *probléma* kifejezés ugyan fontos szerepet játszik, de inkább a kommentárokban, elméleti jellegű szövegekben jelenik meg, mint a konkrét feladatok megjelöléseként. Varga ezt a fogalmat Pólyához hasonló értelemben használja, olyan kérdések leírására, amelynek megválaszolása bizonyos nehézséget jelent, mivel a tanulónak nem áll rendelkezésére kész módszer a megválaszolásukra.

Tekintettel a két országban használt kifejezések változatosságára, nem kísérlek meg egységes terminológiát bevezetni. Törekedni fogok arra, hogy Brousseau elméletének szakkifejezései mellett az egyes szövegek eredeti terminológiáját használjam, és utólag, az elemzések fényében vizsgálom meg, milyen jelentést hordoznak e kifejezések, és mi az esetleges jelentősége a terminológiai eltéréseknek.

4 A TANKÖNYVEK ÉS TANÁRI KÉZIKÖNYVEK ELEMZÉSE

Ahogy azt a disszertáció bevezetésében leszögeztem, és a fentiekben is többször utaltam rá, nem kísérlem meg az 1970-es évek tényleges tanítási gyakorlatának elemzését. Indirekt módon, írott szövegeken keresztül igyekszem rekonstruálni a szerzők által elképzelt tanítási gyakorlatot. Első, szituációk elemzésére vonatkozó kísérleteim azonban komoly nehézségekbe ütköztek: a különböző tankönyvek és tanári kézikönyvek nem ugyanolyan jellegű információkat tartalmaznak és nem ugyanolyan részletességgel; egy didaktikai szituáció elemzéséhez szükséges információknak sokszor csak egy részét tartalmazzák expliciten, más szempontokról viszont hallgatnak. Ahhoz, hogy egyáltalán didaktikai szituációk elemzéséről beszélhessek, és össze tudjam hasonlítani a különböző forrásaimat, szükségesnek tűnt azok előzetes, átfogó elemzése.

Külön figyelmet fordítok ezért az egyes tankönyvek, tanári kézikönyvek felépítésére, bevezetőjére és használati útmutatójára, nyelvezetére, stílusára. Ezek az elemzések fogják megmutatni, milyen jellegű tevékenységek várnak e könyvek az őket használó tanártól, és hogyan segítik abban, hogy tényleges pedagógiai gyakorlatát megtervezze. Ezek a vizsgálatok nem csak a pedagógiai gyakorlat elemzését segítik, hanem önmagukban is értékes információkat szolgáltatnak az egyes reformok sajátosságairól.

2. FEJEZET

A TANTERVEK ÁLTALÁNOS ELEMZÉSE

A didaktikai elemzést a tantervek átfogó elemzésével kezdem. Tekintetbe véve, hogy a reformok a „modern matematikának” megfelelő új tartalmi elemek bevezetését, illetve a matematika koherens tudományként való bemutatását sürgetik, elsősorban ezeket a szempontokat vizsgálom elemzésem során. Egyrészt arra keresem a választ, hogy miben áll a francia illetve a magyar reform tantervének tartalmi megújulása, másrészt pedig azt vizsgálom, hogy mi biztosítja e tantervek belső koherenciáját.

Ebben a fejezetben nem bocsátkozom részletekbe – csupán azt vizsgálom, melyek az egyes tantervben megjelenő fő fejezetek, és milyen főbb, az útmutatókban leírt vagy a fejezetek sorrendjéből kiolvasható rendezőelvek szervezik a tantervek egészét. A részletekbe menő elemzés a disszertáció következő három fejezetének tárgya lesz, három példaként választott tantervi fejezet elemzésén keresztül: a jelent fejezetben tárgyalt vizsgálatok elsősorban arra szolgálnak, hogy a példákat kontextusba helyezhessük.

A francia (1969/1970) és a magyar reform (1978) tanterveit egy vagy két korábbi tantervvel hasonlítom össze, hogy a főbb tartalmi változásokat megállapíthassam. A francia tantervek közül az alsó tagozat 1945-ös és a felső tagozat 1960-64-es tantervét veszem figyelembe[49], a magyar tantervek közül az 1946-os és az 1962-es általános iskolai tantervet. Vizsgálom továbbá az 1977-es francia tantervet, amely a magyar reformmal nagyjából egy időben lépett életbe, és amely a francia reform revíziójaként szolgál.

A disszertáció magyar verziója csupán a 2. fejezet eredményeinek rövid összefoglalását tartalmazza, az elemzéseket itt nem részletezem.

A magyar és a francia reform tantervét összehasonlítva megállapítható, hogy a reform vezetőinek törekvései – a tananyag tartalmi megújítása és a tanterv felépítésének újraszervezése, annak koherenciáját biztosítandó – mindkét esetben megvalósulnak, de nem ugyanabban az értelemben.

A két ország reformot megelőző tantervei sok hasonlóságot mutatnak: elsősorban számtannal, mértannal, geometriával és egy kevés algebrával foglalkoznak, a hangsúlyt a számolásra, a hétköznapi életben használt mértékegységek ismeretére és az euklideszi

[49] Az alsó tagozat tanterve nem változott 1945 és 1970 között; a felső tagozat esetében 1960-ban (6-7. osztály) illetve 1964-ben (8-9. osztály) vezettek be először egységes, minden iskolatípusra érvényes tantervet: ez az 1969-est megelőző utolsó tantervi reform.

geometria főbb idomainak tanulmányozására helyezik. A reform mindkét országban visszaszorítja a mechanikus számolási készségek elsajátítására fordítandó időt a matematikai fogalomépítés, új matematikai témák és a matematikai gondolkodás fejlesztésének javára. Ugyanakkor néhány lényeges különbség is megfigyelhető a két reform tendenciái között.

A francia reform elsősorban a halmazelmélet fogalmait, illetve a számok és a geometria modern axiomatikus elméleteit emeli be az új tantervbe. A matematika egységét a halmaz és a reláció fogalma, a modern matematika formális nyelvének használata és az axiomatikus módszer biztosítja. A matematika különböző ágai között hierarchikus kapcsolatot épít a „mathématiques modernes" reform tanterve: az egyik elmélet alapfogalmai egy másik elméletre épülnek (a számelmélet fogalmai például a halmaz fogalmára, a geometria alapfogalmai pedig a valós szám fogalmára).

A magyar reform tanterve nem mélyíti el az egyes matematikai elméletek tanulmányozását úgy, ahogy a francia, viszont a témák nagyobb változatosságára törekszik. Öt fő témába sorolja a tananyagot, amely témák a tanterv egészén végighúzódnak, 1. osztálytól a 8-ig.

- Halmazok, logika
- Számtan, algebra
- Relációk, függvények, sorozatok
- Geometria, mérés
- Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika

A témák közötti viszony nem annyira hierarchikus, inkább dialektikus: az egyes témák kölcsönösen építik egymást, az egyes matematikai fogalmaknak így párhuzamosan többféle megközelítését kínálva (ld. pl. 3. és 5. fejezet). A tanterv fő szervezőelve a „spirálszerű" szerkezet, az egyes témákra, fogalmakra történő ismételt visszatérés, akár több éven keresztül, és ezáltal a fogalmak fokozatos általánosítása, mélyítése.

A magyar általános iskolai tanterv a folytonosságot, a lassú, fokozatos építkezés fontosságát hangsúlyozza. A francia tantervet ezzel szemben törésvonalak szabdalják. Ez részben a két oktatási intézményrendszer különbségeinek tudható be (a magyar általános iskola egységes intézmény, a hangsúlyos határ az általános iskola és a középiskola között húzódik – a francia *école primaire* és *collège* azonban két független intézmény, a *collège* ráadásul a francia rendszerben már középiskolának számít). A francia tanterv azonban kifejezetten hangsúlyozza a törést a *collège* (felső tagozat) első és második két éve között, különösen ami a geometria tantervet illeti. Míg a geometria kis hangsúllyal szerepel az alsóbb évfolyamokon, és inkább „a fizikai világ megfigyeléseként" kezeli a tanterv, mint tényleges matematikai tanulmányokként, az „igazi" geometria tanulása a tanterv szerint 8. osztályban kezdődik, axiomatikus-deduktív formában, a halmaz és a valós szám fogalmára építve, a modern algebra formális nyelvét felhasználva. (A geometria tanterv részletesebb vizsgálatára a 4. fejezetben térek vissza.)

Végül meg kell említenem a magyar tanterv egy fontos sajátosságát, amely szorosan összefügg a feljebb már emlegetett spirálos szerkezettel. Varga Tamás reformjának újítása, hogy a tantervet kötelező és választható részekre osztja, illetve a kötelező részeken belül is megkülönbözteti azokat a témákat, amelyek tárgyalására sort kell keríteni egy adott tanévben, attól, amit a gyerekektől az adott évben számon is kérnek. Fontos érv e felosztás mellett a differenciálás támogatása, a gyerekek egyéni igényeinek figyelembevétele: a tanterv rugalmassága nem csak a különböző osztályok eltérő ritmusú haladását engedi meg, de az osztályon belüli különbségek kezelését is lehetővé teszi. Ezenkívül, amint azt később látni fogjuk, ez a felosztás Varga Tamás tantervében a bőséges tapasztalatszerzésre hivatott lehetőséget biztosítani, és a fogalmak lassú, fokozatos intézményesítését szolgálja.

3. FEJEZET

A TERMÉSZETES SZÁM FOGALMÁNAK BEVEZETÉSE ELSŐ OSZTÁLYBAN

Első példámat Christine Chambris (2008, 2010) munkája inspirálta. Chambris kimutatja, hogy a számfogalom és a számolás tanítása a francia matematikaoktatás történetében hosszú ideig szorosan kapcsolódott a méréshez, ezt a kapcsolatot azonban a „mathématiques modernes" reform elvágta, a mérés helyett a halmazelméletre alapozva a számfogalmat, és a későbbi matematikaoktatási reformok csak részben állították helyre a kapcsolatot számfogalom és mérés között. Chambris elsősorban a 2. és a 3. osztály tananyagát elemzi – én ebben a fejezetben az általános iskolai oktatás elejét, az 1. osztályos tananyagot vizsgálom, és ezen belül is azt, hogyan épül föl a természetes szám fogalma a francia és a magyar reform tantervében. Az elemzés mutat majd bizonyos hasonlóságokat a két tanterv között, ugyanakkor néhány lényeges különbséget is: a magyar reform ugyanis párhuzamosan két különböző alapra építi a természetes szám fogalmát, egyrészt a halmaz fogalmából, másrészt a mérésből kiindulva.

Az ebben a fejezetben használt főbb forrásaim a tantervek mellett munkalapok és tanári kézikönyvek. A munkalapok a „New Math" idején meglehetősen elterjedtek, és gyakran átveszik a tankönyvek szerepét. E munkalapok a tanulók önálló munkáját teszik lehetővé, ugyanakkor a hozzájuk tartozó tanári kézikönyvek általában hangsúlyozzák, hogy a munkalapok használatának összetett és számos más segédeszközt is felhasználó tanítási folyamatba kell illeszkedniük. E fejezetben a tanári kézikönyvek elemzésén keresztül vizsgálom a szerzőik által elgondolt tanítási folyamatokat (amelyek nem feltétlenül egyeznek meg azzal, amit a tanárok végül megvalósítottak[50]).

A kézikönyvek felépítésének általános elemzése után néhány azokban leírt szituációt elemzek részletesebben, hogy a szerzők által elgondolt tanítási gyakorlatot jellemezzem. Elsősorban azt vizsgálom, milyen értelemben beszélnek az egyes kézikönyvek „aktív pedagógiáról", miben áll a tanulók önállósága és felelőssége a matematikai ismeretek felépítésének folyamatában, és mi a tanár szerepe ebben a folyamatban. Az elemzés során Brousseau elméletére, ezen belül is elsősorban az *aidaktikai potencialitás* és a *didaktikai szerződés* fogalmára támaszkodom.

[50] Franciaországban például a tanárok sokszor csak a munkalapokat használták, és nem is ismerték a tanári kézikönyveket (Jeanne Bolontól és Alain Kuzniaktól származó információ).

A kézikönyvek felépítésének vizsgálata egyúttal arra is rámutat majd, hogy a különböző szerzők egymástól meglehetősen eltérő elképzeléseket vallanak a tanár feladatairól: a különböző felépítésű kézikönyvek más-más jellegű felelősséget hagynak a tanároknak, amit a tanári tevékenység Margolinas által meghatározott szintjeivel igyekszem jellemezni.

Amint azt korábban jeleztem, Magyarországon a vizsgált időszakban egyetlen hivatalos tankönyvsorozat (illetve jelen esetben munkalap- és tanári kézikönyv-sorozat) létezett, amelyet ugyanaz a szerzőcsoport írt, amely a tantervet is kidolgozta. Franciaországban viszont a tankönyvpiac szabad volt, és számos sorozat közül válogathatnak a tanárok. Az elérhető sorozatok közül elsősorban az Eiller által szerkesztett *Math et calcul* sorozatot elemzem, amely az egyik legnépszerűbb tankönyvsorozat volt a vizsgált időszakban (Chambris 2008, 515. o.), és amely részletes és jól szerkesztett tanári kézikönyveinek köszönhetően különösen alkalmas a szerző által elgondolt tanítási gyakorlat elemzésére. A másik francia forrás, amelyet vizsgálok, már a „mathématiques modernes” reformot követő kritikai időszak terméke, és az 1977-es új tantervvel egyidőben jelent meg. Az ERMEL nem csupán tanári kézikönyv, hanem egyúttal egy kísérleti projektet bemutató kötet is: a francia pedagógiai intézetből, az INRP-ből (Institut National de Recherche Pédagogique) irányított kísérletek gyakorló tanárok és kutatók részvételével folytak az 1970-es évek elejétől kezdve.

1 A TANTERV ÖKOLÓGIAI ELEMZÉSE: A SZÁMFOGALOM ÉS A MÉRÉS KAPCSOLATA

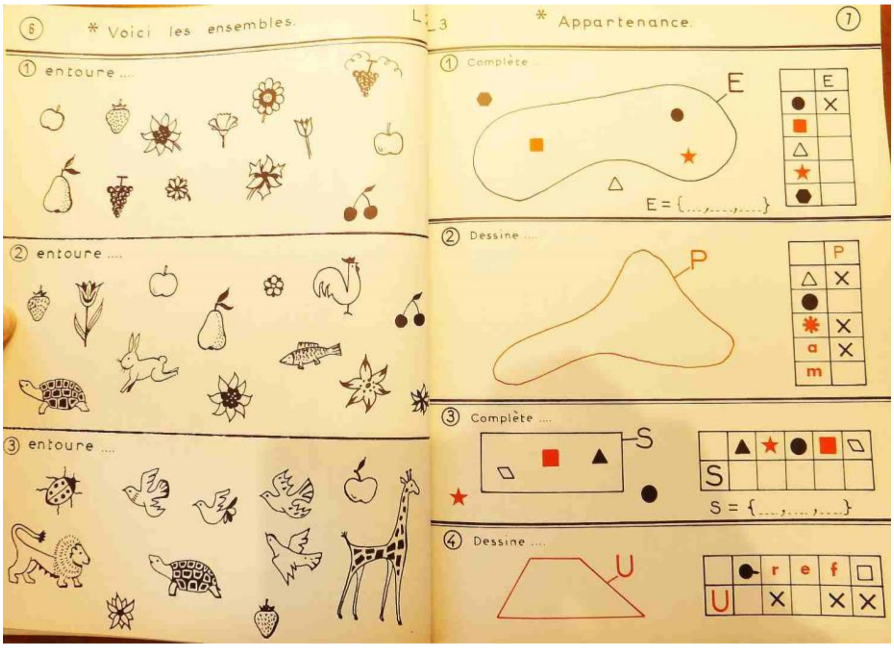
1.1 A francia tantervek

Chambris eredményeinek megfelelően a természetes szám fogalmánk felépítéséről is elmondható, hogy a „mathématiques modernes” reform elvágja a számfogalom és a mérés között korábban fennálló kapcsolatot. A geometria és a mérés nem is része az első osztályos tantervnek, a korábban a bevett mértékegységekre alapozott szám- és műveletfogalmak az 1970-es tantervben a halmaz és a reláció fogalmára épülnek. Jól egybevág ez a felépítés nem csak a reformereknek azzal a szándékával, hogy a modern matematika elemeit, így a halmazelmélet fogalmait bevezessék a matematikatanításba, de azzal a törekvéssel is, hogy a hétköznapi életre való hivatkozás helyett absztrakt és így általános érvényű matematikai fogalmakat építsenek.

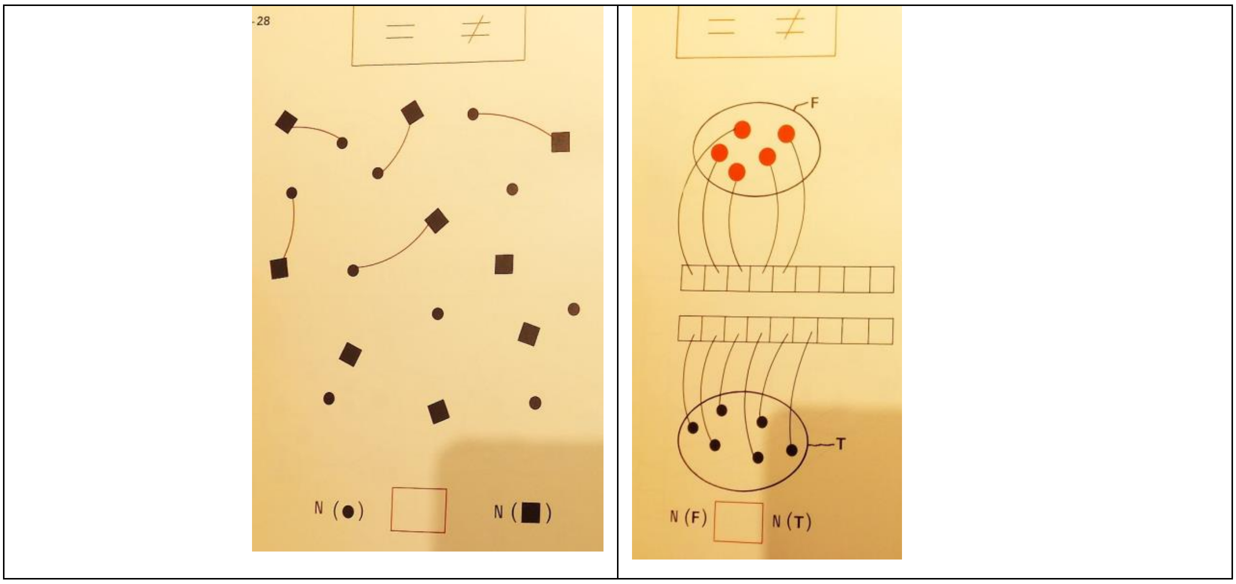
Ez ugyanakkor nem jelenti a konkrét tapasztalatok mellőzését: a tantervi útmutató (Francia tanterv 1970 7-8. o.) éppúgy, mint a különböző tanári kézikönyvek (vö. §2) hangsúlyozzák a tárgyakkal végzett tevékenység jelentőségét a halmaz- és számfogalom megalapozásában. A tanterv osztályozással, csoportosítással kapcsolatos feladatokkal kezdődik, a halmaz- és relációfogalom (konkrét tapasztalatokon alapuló) bevezetését a halmazok összehasonlítása követi. A halmazok számosságának összehasonlítására a párosítás módszere szolgál, ez alapozza meg az „ugyanannyi” majd a „több” és a „kevesebb” fogalmát. A természetes számok kardinális számként, a halmazokat jellemző tulajdonságként jelennek meg a tantervben.

1.1.1 A számfogalom felépítése a francia munkalapokon

A „mathématiques modernes” tantervhez készült számos munkalap-sorozat közül a Picard és az Eiller szerkesztette sorozatokat elemeztem. Mindkettő híven követi a tanterv felépítését: a csoportosításra, relációkra, halmazokra vonatkozó feladatokat a párosítás technikájának bevezetése követi, erre épül aztán a számfogalom.



III.3.3. ábra (Eiller munkalapok 1. oszt. 1971, 6. és 7. munkalap)

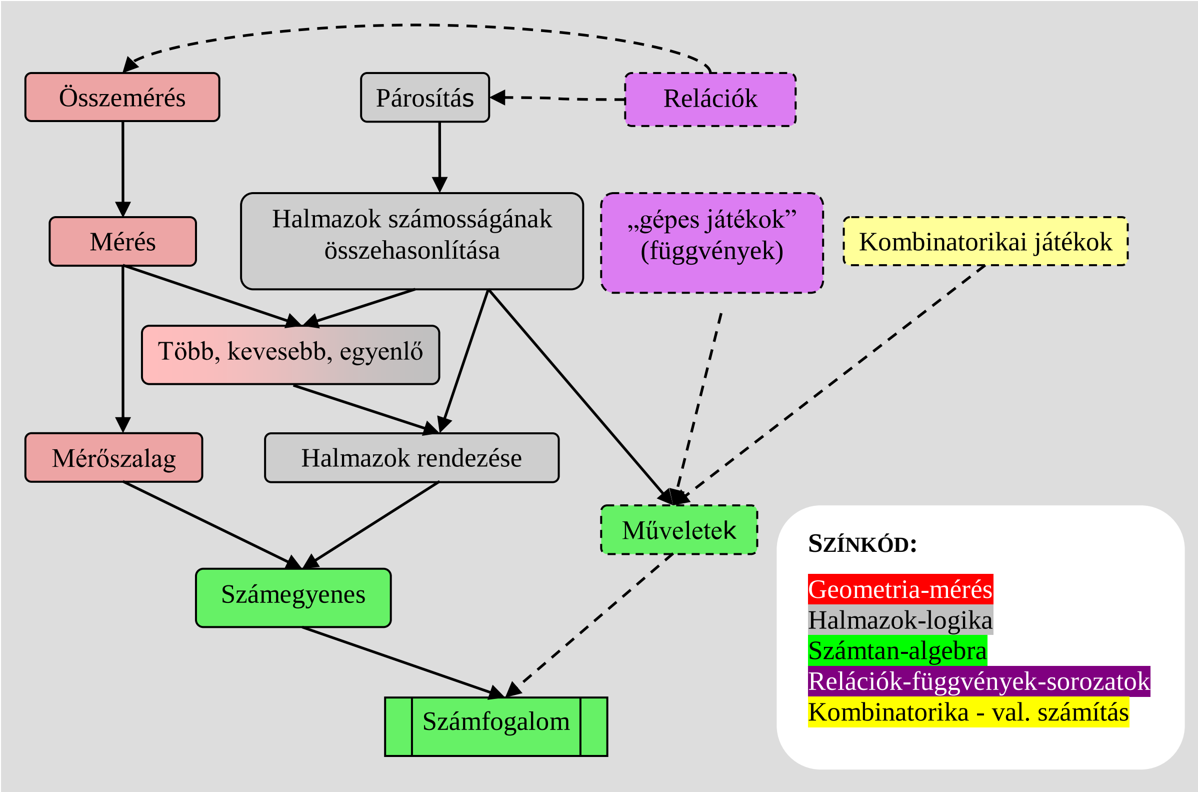


III.3.4. ábra (Picard munkalapok 1. oszt. 1970, 28. és 32. munkalap)

Picard-nál megfigyelhetünk egy sajátos reprezentációs eszközt, amelyet egyenlő kis négyzetekből álló oszlopok (vagy sávok) alkotnak. Ezek a halmazok számosságának összehasonlítását könnyítik meg: a négyzeteket egy halmaz elemeivel párosítva és a megfelelő számú négyzetet kiszínezve a halmazok helyett a nekik megfelelő két oszlop hasonlítható össze. Így valójában a kiszínezett oszlopok hossza segít a halmazok összehasonlításában – ez a módszer azonban nem épül a mérés fogalmára, inkább szemléltető eszköznek tekinthető (és elsősorban a relációsjelek illusztrálására szolgál mind Picard-nál, mind Eullernél.

1.2 A magyar tanterv

A magyar reform tanterve szintén fontos szerepet szán a halmazoknak a számfogalom felépítésében, ugyanakkor a számfogalom és a mérés között is erős kapcsolatot teremt. A számfogalomnak valójában két párhuzamos bevezetését kívánja meg, egyrészt halmazok tulajdonságaként, másrészt pedig mérőszámként (Magyar tanterv 1978, 18. o.). A tantervhez tartozó első osztályos tanári kézikönyv két külön fejezetet is szán e kétféle bevezetésnek. Az alábbi ábra illusztrálja a természetes szám fogalmát építő fogalmak *táplálékláncát*. Az ábráról az is látszik, hogy a halmazok és a mérés mellett a függvények és a kombinatorika is szerepet kapnak a számfogalom felépítésében – bár ez utóbbi két téma számfogalommal való kapcsolatát nem elemeztem részletekbe menően. Így a tantervnek mind az öt nagy fejezete közreműködik a természetes szám fogalmának megalapozásában.



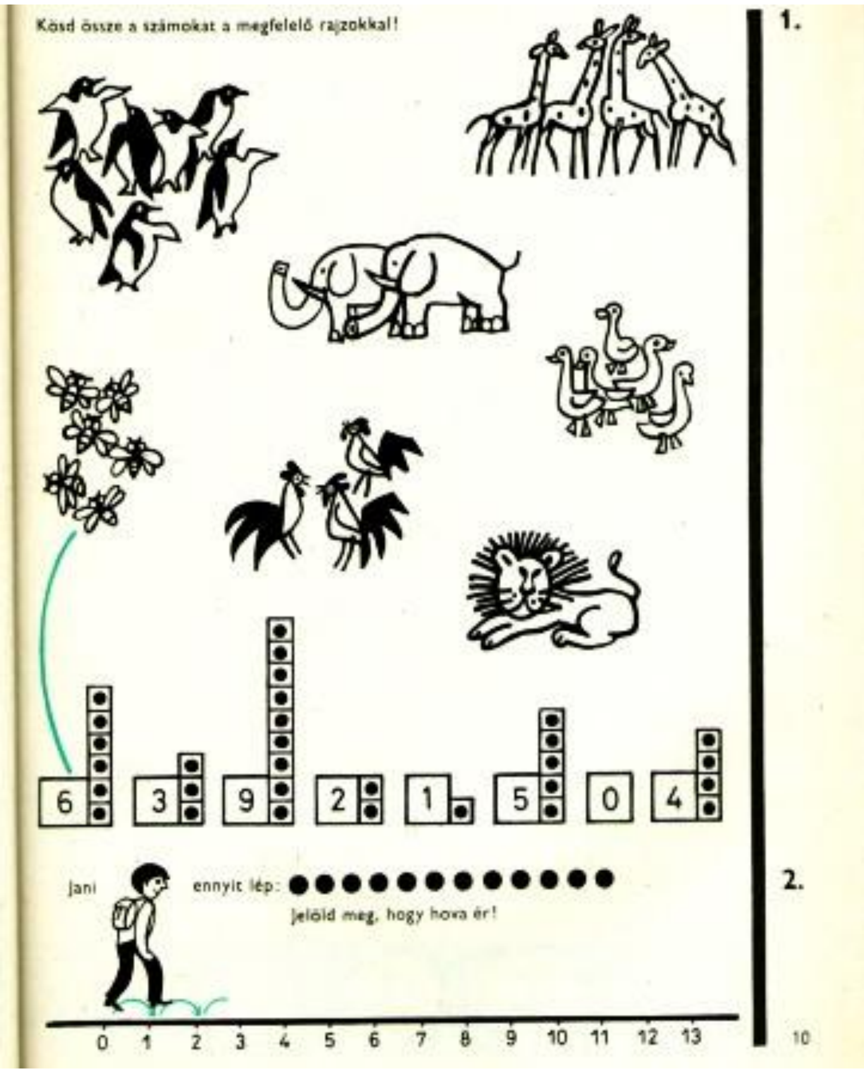
III.3.5. ábra (A számfogalmat felépítő *tápláléklánc* a magyar tantervben. *A fogalomépítésben csak a halmazok és a mérés szerepét elemzem részletesebben, a többi matematikai téma szerepére csupán vázlatosan utalok: ez utóbbit fejezik ki a szaggatott vonallal ábrázolt nyilak.*

1.2.1 A számfogalom felépítése a magyar munkalapokon

A halmazokon és mérésen alapuló, kétféle felépítés összekapcsolása jól nyomon követhető a tantervhez tartozó első osztályos munkalapokon (ld. melléklet). A munkalapok általában két vagy három különböző feladatot tartalmaznak, amelyek kapcsolódhatnak ugyanahhoz a témához, de akár egymástól teljesen független témákhoz is. (Alább – §3.1 – látni fogjuk, hogy a tanári kézikönyv a tanóráknak is hasonló felépítését javasolja, több kisebb, akár egymástól független feladatot tárgyalva egy-egy órán.) Így például az első munkalapok mindegyike tartalmaz a számfogalmat előkészítő feladatot, de emellett sokszor más témákat (pl. topológiát, sorozatokat) érintő feladatokat is.

A harmadik munkalap például először a halmaz, majd a nagyság fogalmát érinti, bevezeti a „nagyobb mint” kifejezést. A nagyság és a halmaz fogalmát a következő munkalapok is egymással párhuzamosan tárgyalják: a 4. munkalapon található feladatban például a táblázat első és harmadik oszlopát a középső oszlopbeli ábráknál nagyobb és kisebb ábrákkal kell kitölteni, míg a 7. munkalap egy hasonló táblázatot tartalmaz, amely a „több” és a „kevesebb” fogalmát érinti. A < és > jeleket az 5., a párosítás technikáját a 8. munkalap vezeti be. A 9.

munkalapon hasonló reprezentációs eszköz jelenik meg, mint amelyet Picard-nál is láttunk: a kis négyzetekből álló oszlopokba pöttyöket rajzolva a pöttyök számát az oszlopok magasságát vizsgálva is össze lehet hasonlítani. A magyar munkalapokon ez a reprezentációs eszköz egyszerre épül a halmaz és a mérés fogalmára, kapcsolatot teremt a számfogalom kétféle felépítése között. A pontokkal kitöltött oszlopok a halmazok összehasonlításának eszközévé válnak a 9-10. munkalapokon, és így a halmazok számosságának reprezentációjaként szolgálnak. A számjelek a 11. munkalapon, ehhez a reprezentációs formához kapcsolódva jelennek meg először. A 11. munkalap 2. feladata egy újabb reprezentációs eszközt is bevezet: a számegyenes, amely Jani lépéseinek számát és egyúttal az általa megtett távolságot is reprezentálja, szintén egyszerre jeleníti meg a halmazokon és a mérésen alapuló számfogalmat. A számegyenes a tanári kézikönyv több feladatában is szerepel, és a tanterv egészét végigkíséri, már az első osztályban sejteti, és a továbbiakban több ízben is motiválva a számfogalom különböző bővítéseit.



III.3.6. ábra (Magyar munkalapok 1. oszt. 1978, 11. munkalap)

2 A FRANCIA TANÁRI KÉZIKÖNYVEK ÉS AZ ELVÁRT PEDAGÓGIAI GYAKORLAT

2.1 Eiller *Math et calcul* sorozata

A *Math et calcul* sorozat a számos francia tankönyvsorozat közül nem csak azért érdekes számunkra, mert a korszak egyik legnépszerűbb matematikatankönyv-sorozata, hanem azért is, mert a hozzá kapcsolódó tanári kézikönyv rendkívül részletesen kidolgozott, jól strukturált dokumentum, amely részletes instrukciókkal látja el a tanárokat, így jó képet ad a szerzői által elgondolt tanítási gyakorlatról.

2.1.1 A tanári kézikönyv felépítése

Eiller hangsúlyozza a reform iránti elkötelezettségét: a tanári kézikönyv bevezetője részletesen indokolja a reform szükségességét, kifejti annak társadalmi-gazdasági, matematikai és pszichológiai okait. A bevezető tartalmaz ezenkívül egy az 5-7 éves gyerekek pszichológiai fejlődését leíró fejezetet is.

A kézikönyv nagyobbik része „A matematika és pedagógiai alkalmazásai" cím alatt a tanterv matematikai tartalmának elméleti magyarázatát adja, illetve a tananyag pedagógiai feldolgozásához kínál instrukciókat, óravázlatokat tematikus sorrendben. A könyvnek ez a része a követendő pedagógiai módszerek részletes bemutatásával kezdődik, illetve tartalmaz egy részletes tanmenetet is: a tanmenet azt is jól áttekinthetően jelzi, hogy a soron következő témához mely munkalapok és a tanári kézikönyv mely fejezetei tartoznak (ld. függelék).

Eiller kétféle tanórát különböztet meg: csoportmunkát, illetve az új tananyag bevezetésére szolgáló „leckéket". A pedagógiai bevezetőben kifejti, hogyan épül fel elképzelései szerint egy „lecke": négy nagy fázisból, „manipulációs", „szóbeli", reprezentációs" és „ellenőrzési" fázisból áll. A kézikönyv további fejezetei ilyen „leckék" leírását tartalmazzák. E jól strukturált leírások kifejtik a „lecke" célját, a hozzá szükséges eszközök listáját, a megvalósítás részleteit.

A tanári kézikönyv így lényegesen megkönnyíti a tanár munkáját: a tanmenet és a leckék leírásai a felkészülés terhének nagyobb részét leveszik a tanár válláról, a tanmenet alapján könnyen beazonosítható a soron következő lecke, ezekre óráról órára készülhet; a leckék leírásai pedig elég részletesek ahhoz, hogy majdnem egy az egyben megvalósíthatók legyenek. Így, a tanári tevékenység Margolinas-féle szintjeit figyelembe véve elmondható, hogy a +2 és a +1 szinteken Eiller könyve alig hagy felelősséget a tanárokra. Látni fogjuk továbbá, hogy az Eiller által leírt szituációk, vagy „leckék" megvalósítása is jól kiszámítható:

mivel kevés önállóságot hagynak a tanulóknak, a tanórák kevés előre nem tervezhető elemet tartalmaznak – így a 0 szint, a tanóra vezetése sem jelent didaktikai szempontból komoly kihívást a tanárok számára.

2.1.2 Egy szituáció elemzése: halmazok elemeinek párosítása

A halmazok elemeinek párosítása az „ugyanannyi" fogalmának meghatározásában, és ezen keresztül a természetes szám fogalmának felépítésében játszik kulcsszerepet (vö. §1.1). Eiller könyvében a halmazok közti relációknak szentelt fejezetben található. Az „ugyanannyi" fogalmát – a tanterv felépítésének megfelelően – a „több" és a „kevesebb" fogalmak bevezetése előzi meg.

Az Eiller által leírt szituáció a tornateremben zajlik: a viszonylag nagy tér lehetővé teszi a gyerekek szabad mozgását. A miliő fizikai összetevőjét karikák alkotják („játékosonként egy"). A gyerekeknek azt kell ellenőrizniük, hogy minden gyereknek egy-egy karika jut-e. A szerző szerint kétféleképpen járhatnak el:

> - vagy minden gyerek a kezébe vesz egy karikát;
> - vagy az osztály egyik tagja egy-egy vonalat húz egy-egy gyerek és karika közé.
>
> Ha minden gyereknek egy karika jut, azt mondjuk, hogy *ugyanannyi* gyerek van, mint karika (Eiller kéziköny 1. oszt., 1972, 117. o. Saját fordításom.)

A fenti leírásból nem egyértelmű, hogy az ellenőrzés módját a gyerekeknek kell kigondolniuk vagy a tanár javasolja azt. Mindenesetre, ha az első módszert kitalálhatják is a gyerekek, a második aligha lehet az ő ötletük, hiszen nem igazán intuitív, se nem gazdaságos megoldása a problémának. Az utóbbi módszer ugyanis azt feltételezi, hogy a gyerekek egy helyben állnak, miközben az egyik osztálytársuk körbejár, hogy vonalakat húzzon: ez nem csak hosszadalmas munka, de ráadásul olyan reprezentációs eszközt vezet be, amely a szituáció helyszíneként szolgáló nagy fizikai térben rosszul áttekinthető és nehézkesen alkalmazható. A második módszer valójában egy olyan grafikus eszközt hoz be szituációba, amely a halmazok közti párosítások ábrázolásához használatos, de az adott szituációban vizsgált kérdés megválaszolásának se nem intuitív, se nem hatékony megoldási eszköze. A folytatásban a könyv a második módszer további felhasználását javasolja a feladat többszöri ismétlésével úgy, hogy a gyerekek és a karikák különféle módon helyezkedjenek el a térben: e feladatok célja Eiller szerint annak szemléltetése, hogy az „ugyanannyi" reláció független a tárgyak térbeli elrendezésétől.

A szituáció kiinduló problémája valójában meglehetősen egyszerű, és hatékony, kielégítő megoldását a kézikönyv már a szituáció megvalósításának legelejére kilátásba helyezi. A

„gyerekenként egy-egy karika van?” kérdés meglehetősen természetesen sugallja azt a módszert, hogy minden gyerek vegyen a kezébe egy karikát. A folytatás, a szituáció lényegi része a szó fizikai értelmében ugyan *aktivitást* vár a gyerekektől, de valójában nem *adidaktikai* jellegű, hiszen nem ad teret annak, hogy a tanulók autonóm módon építsék ismereteiket. A gyerekek tevékenysége inkább csak illusztrációként szolgál egy elsajátítandó kifejezés – „ugyanannyi” –, és egy olyan reprezentációs eszköz bevezetésére, amelyet az adott szituáció keretében lényegében csak a tanár vethet fel, nem származhat a tanulóktól.

A szituáció további folytatása a könyv szerint arra szolgál, hogy „intuitíven éreztesse az ’ugyanannyi’ reláció szimmetrikus és tranzitív voltát” (116. o.). Valóban minden egyes „éreztetni kívánt” tulajdonsághoz kapcsolódik egy-egy feladat a kézikönyvben. De ismét csak *illusztrációkról* van szó: az e szituációk során használt reprezentációs eszközök szerepe csupán az, hogy kérdéses tulajdonságokat szemléltessék, ugyanakkor nem szolgálnak alkalmas, hatékony eszközként semmiféle tényleges probléma megoldására (és ilyenformán minden bizonnyal csak a tanár vezetheti be őket). Így, a tanulók látszólagos aktivitása ellenére az Eiller által sugallt didaktikai szerződés direkt tudásátadáson alapul, hasonló módon, mint egy tanári előadás.

2.2 Az ERMEL-projekt

Az 1977-től megjelenő ERMEL sajátos kiadvány: a francia pedagógiai intézet, az INRP keretei között, tanítók, pszichológusok és matematikusok együttműködésével 1972-től folyó kísérleti projekt munkájának eredménye, egyszerre beszámoló a kísérleti projektről, és kézikönyv tanítók számára. Amint arra a történeti részben már utaltam, az ERMEL-projekt egyike a „mathématiques modernes” reformmozgalomból kinövő kísérleti projekteknek, amely egyúttal a reform kritikáját is felvállalja, és igyekszik meghaladni annak hibáit és túlkapásait.

2.2.1 A kötet felépítése

Egy-egy ERMEL-kötet három részből áll: az első a tananyag elméleti alapjait és pedagógiai céljait tárgyalja; a második részletes tanmenetet ad, sorrendben bemutatva a teljes tanévet lefedő feladatokat, tevékenységeket; a harmadik pedig a kísérlet keretében megvalósult néhány tanóra átiratát tartalmazza, a tanító kommentárjaival kiegészítve a párbeszédek szövegét. A kötet a szerzők szerint így többféleképpen is olvasható: aki a kísérletek dokumentációjára kíváncsi, sorrendben olvashatja, aki tanári kézikönyvként kívánja használni, annak viszont a második résznél érdemes kezdenie, és ahhoz olvasni hozzá a másik két rész vonatkozó fejezeteit.

A második rész, bár rögzített tanmenetet követ, Eiller könyvével ellentétben nincs „leckékre” vágva. A szerzők ezzel a megoldással kifejezetten a tanárok önálló óratervezését igyekeznek bátorítani, ami szerintük a színvonalas tanári munka elengedhetetlen feltétele (ERMEL 1. oszt. 1997, 8. o). A tanári tevékenység szintjeivel kifejezve így azt mondhatjuk, hogy az ERMEL átvállalja a hosszú távú tervezés, a +2 szint felelősségét a tanároktól, de rájuk bízza a +1 szintet.

Érdekes ilyen szempontból a harmadik rész, a tanórák átirata is. Ennek könyvbe iktatása arra utal, hogy a szerzőket foglalkoztatják a tanóra vezetésével kapcsolatos kérdések (0 szint), fontosnak tartják az erre vonatkozó reflexiót. Ugyanakkor hangsúlyozzák, hogy a közölt átiratok csupán példák, illusztrálják, mint várhat a tanár az adott szituációban a tanulóktól, és milyen *spontán* reakciókat adtak ezekre a kísérletet megvalósító tanárok (ERMEL 1. oszt. 1997, 7. o). - ezek a tanári beavatkozások azonban nem feltétlenül tekintendők követendő mintának, és nem is feltétlenül kapcsolódik hozzájuk didaktikai jellegű reflexió.

Az ERMEL-kötetek a tanári tevékenység szintjei közül tehát a +1 szint jelentőségét hangsúlyozzák leginkább, a tanórák, szituációk tervezését helyezik a tanári munka középpontjába. A szituációk leírásai, bár nem olyan szigorúan strukturáltak, mint a *Math et calcul* esetében, itt is jól szerkesztett formában jelennek meg, tartalmazzák a célokat, szükséges eszközöket, a szituáció lezajlásának részleteit stb. Az alábbiakban egy ilyen szituációt elemzek részletesebben.

2.2.2 Egy szituáció elemzése: az igazságos osztozkodás

A vizsgált szituáció a halmazok elemeinek párosításával foglalkozó nagyobb fejezetbe illeszkedik, és az egyenlő számosság fogalmának bevezetésére szolgál. A szituáció leírása a következő:

A gyerekek 3 vagy 4 fős csoportokban dolgoznak, minden csoport kb. hatvan kiskockát kap.

> - Első fázis: szabad játék.
> - Feladat: „Osszátok el egymás között a kockákat!”
> - A tanító megállapítja, hogy nagyon egyenlőtlenül osztották el a gyerekek a kockákat, meglepődik, és azt kéri tőlük, hogy keressenek igazságosabb módszert az elosztásra.
>
> Hagyni kell, hogy a gyerekek maguk szervezzék a munkájukat: a szituáció maga fogja szankcionálni a munkájukat.
>
> Többszöri javítás után várhatóan meg fogják tudni oldani a különböző felmerülő problémákat: hogy

- minden gyereknek adjanak egy kockát
- válasszanak kiindulópontot
- válasszanak valamilyen sorrendet – alakuljon ki egy kör
- ne osszák ki a maradékot.

Az igazságos elosztás ellenőrzésére irányuló elvárás el fog vezetni a halmazok párosításának technikáihoz. (ERMEL 1. oszt. 1977, 163. o.)

A szituáció jelentős adidaktikai potencialitást tartalmaz: ezt fejezi ki többek között a „Hagyni kell, hogy a gyerekek maguk szervezzék a munkájukat: a szituáció maga fogja szankcionálni a munkájukat" – mondat. A szituáció tehát olyan retroaktív miliőt tartalmaz, amely önmagában, a gyerekeknek a vele folytatott interakciója révén idézi elő a kívánt tanulási folyamatot. A szituáció első fázisa a tárgyi eszközökkel való ismerkedés. A második, a kockák elosztása már hozzáad valamiféle utasítást a szituációhoz, amely azonban önmagában elégtelen: kétértelműnek bizonyul, az elosztás ugyanis a gyerekek számára nem jelent szükségképpen igazságos elosztást. A tantár tehát módosítja a miliőt, kiegészíti a feladatot az igazságosság követelményével. Ez a módosítás teszi hangsúlyossá a szituáció középpontjában álló fogalmat, az egyenlő számosság gondolatát. Az igazságos elosztás fogalma a gyerekek számára jelentéssel bír (nem csak intellektuális, hanem érzelmi szempontból is), ezáltal motiválja a megfelelő, megbízható módszer keresését. A kötet harmadik részében, a szituációt megvalósító egyik tanóra átiratában a gyerekek valóban ki is fejezik időnként elégedetlenségüket a társaik munkájával kapcsolatban, amelynek eredményét igazságtalannak találják.

A szituáció ellenőrzési fázist is tartalmaz: az egyenlő számosság ellenőrzésének módszerét keresve jutnak el a tanulók a halmazok párosításának technikáihoz, ami a fejezet központi témája.

A szituációhoz tartozó óra átiratában (ERMEL 1. oszt. 1977, 272-273) azt figyelhetjük meg, hogy a tanár valóban kevésszer avatkozik be a gyerekek munkájába, beavatkozásai pedig elsősorban a szituáció devolúcióját érintik: emlékeztetnek a játékszabályokra, bátorítják a gyerekeket a gondolkodás folytatására, segítenek az egyik fázisról a másikra (cselekvésről a megbeszélésre, aztán az ellenőrzésre) való áttérésben. De a tanítani kívánt ismeretek felépítése, az egyenlő számosságú halmazok képzését elősegítő technikák kidolgozása a tanulók felelőssége marad.

Klasszikus értelemben vett adidaktikai szituációról van tehát szó, a szituáció tervének leírásában éppúgy, mint az átiratból megismerhető tényleges órai megvalósítás esetén. A tanár fő feladata a szituáció megtervezése és előkészítése, illetve a devolúció megvalósítása – a matematikai fogalmakat azonban a tanulók maguk alkotják meg, hatékony választ keresve a szituáció középpontjában álló problémára.

Az, hogy az ERMEL-ben leírt szituáció ilyen közel áll a Brousseau által megfogalmazott elméleti modellhez, a történeti kontextus ismeretében kevéssé meglepő – hiszen Brousseau munkássága éppúgy, mint az ERMEL-projekt, az 1970-es évek francia matematikatanítása körüli viták, kísérletek és az ekkoriban kibontakozó didaktikai kutatások kontextusába illeszkedik.

3 A MAGYAR TANÁRI KÉZIKÖNYVEK ÉS AZ ELVÁRT PEDAGÓGIAI GYAKORLAT

3.1 A tanári kézikönyv felépítése

A magyar tanári kézikönyv felépítése lényegesen eltér mind az Eillernél, mind az ERMEL-ben látottaktól. Az első osztályos kézikönyv két fő részből áll, az első „az egész éves tananyag egyfajta módszertani leírását" adja, a második pedig „segédanyagokat" tartalmaz (Magyar tanári kézikönyv 1. oszt. 1978, 5. o). E segédanyagok között találunk

- egy heti bontású tanmenet*javaslatot*
- egy másik, órákra lebontott tanmenet*javaslatot*
- néhány óravázlat részletes leírását
- egy a munkalapokat ismertető fejezetet
- illetve az ún. „felépítéstáblázatot", amely a tanterv öt fő témakörére lebontva mutatja be, hogyan fejlődhetnek egymással párhuzamosan a különböző témák a tanév során.

A többféle formában is megjelenő tanmenet-változatok akár szigorúan szabályozott éves tervre is utalhatnának – azonban hangsúlyozottan csak *javaslatokról* van szó, a szerzők kifejezetten arra bátorítják a tanítókat, hogy térjenek el azoktól, alakítsák a saját tanmenetüket a saját ízlésüknek, „a gyerekek igényeinek és a körülményeknek megfelelően" (Magyar tanári kézikönyv 1. oszt. 1978, 276. o). Hangsúlyozzák ezenkívül az óráról órára készülés elégtelenségét és a tematikus tervezés jelentőségét. Az órákra lebontott tanmenetjavaslat elmondások szerint csupán azoknak a bátortalanabb kollégáknak szól, „akik még nem szívesen válnának meg a megszokott tervezési módtól: az óránkénti tervezéstől" (Magyar tanári kézikönyv 1. oszt. 1978, 277. o).

Akik a tanmenetjavaslatokat kívánják követni, azoknak sincs kifejezetten könnyű dolguk. Az első rész, a tananyag bemutatása tematikus sorrendet követ, lényegesen eltér a tanmenet sorrendjétől. A kevéssé tagolt, majdnem folytonos szöveg vegyesen tartalmaz matematikai és pedagógiai jellegű kommentárokat, illetve feladatok leírásait. A feladatok leírása nem különül el a szöveg többi részétől, csupán egy ● vagy ○ jel jelzi azokat a margón: a teli pötty a könyv előszava szerint a feladatokat, az üres karika azok változatait jelöli (Magyar tanári kézikönyv 1. oszt. 1978, 5. o). A feladatok leírásai nehezen értelmezhetőek a kontextusuk nélkül – így, bár a tanmenetek hivatkoznak a javasolt feladatok leírásának oldalszámára, a tanmenetet követni kívánó tanárnak ismernie kell a feladatleírást tartalmazó egész fejezetet, hogy az adott feladatot értelmezni tudja. A kézikönyv útmutatásai szerint ráadásul egy-egy tanóra több kisebb, sokszor egymástól független feladatból áll, amelyek akár különböző matematikai témákhoz is kapcsolódhatnak. Így a tanároknak voltaképpen az egész kézikönyvet ismerniük kell ahhoz, hogy egy-egy órára hatékonyan tudjanak készülni.

A szerzők szerint

> Egy-egy témán belül a tanításban, a feladatok itt megadott sorrendje is követhető általában. A feladatanyag, ahol lehet, az egész évre elegendő konkrét tennivalót tartalmaz. Máshol (pl. függvények, nyitott mondatok számokkal) olyan típusokat, formákat mutatunk, amelyek alapján már könnyen készíthetnek a kartársak is hasonló feladatokat. (Magyar tanári kézikönyv 1. oszt. 1978, 5. o.)

A feladatok leírása is lényegesen eltér a francia kézikönyvben látottaktól. Valójában sokszor csak töredékes leírásokról van szó, amelyek inkább ötleteket adnak, mint részletes útmutatót a megvalósításhoz. Számos esetben nem egyetlen feladatra vonatkozik a leírás, hanem egy többször felhasználható mintára, amelynek variálásához is ad tanácsokat a kézikönyv. Amint azt az alábbi példán is látni fogjuk, a leírások tartalmaznak arra vonatkozó utalást, hogy milyen reakciókat várhatunk egy-egy szituációban a gyerekektől, és tanácsot is adnak az így adódó helyzetek kezelésére. Ezek az apró megjegyzések, tanácsok, útmutatások arra utalnak, hogy a szerzők a tanóra vezetését önmagában is fontos didaktikai feladatnak tekintik. A könyvben leírt szituációk, mint azt látni fogjuk, jelentős önállóságot hagynak a tanulóknak a tanulási folyamatban, ennek köszönhetően pedig a tanár számos előre nem várt helyzettel szembesülhet. A szerzők azonban nem elégednek meg az erre adott spontán tanári reakciókkal (ahogy azt az ERMEL-ben láttuk), igyekeznek felkészíteni a tanárokat az ilyen helyzetekre, és ötleteket adni azok kezelésére. Mivel előre nem pontosan tervezhető helyzetekről van szó, a tanári munkának ez a része szükségképpen improvizatív - a kézikönyv útmutatásai ugyanakkor arra utalnak, hogy ezeknek a tanári beavatkozásoknak tudatos didaktikai elveken kell alapulnia, jóllehet ezek az elvek csak konkrét, apró ötleteken keresztül jelennek meg, sehol nincsenek általánosan megfogalmazva.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a magyar reformhoz kapcsolódó tanári kézikönyv jelentős önállóságot és felelősségvállalást vár el a tanároktól a tanári tevékenység mindhárom vizsgált szintjén, különösen a +2 és a 0 szinteken.

3.2 Szituációk elemzése

3.2.1 Barkochba színes rudakkal

A színes rudakkal folytatott barkochba az „összemérések” című alfejezetben szerepel, amely a természetes szám fogalmának mérésen alapuló felépítését tárgyaló fejezet egyik eleme. Az „összemérések” fejezet számos egyéb játékot is tartalmaz, amelyek során különböző tárgyakat, különböző nagyságokat hasonlítanak össze és rendeznek sorba. A színes rudakat eddigre már ismerik a gyerekek, többféle tevékenységet végeztek velük, már össze is hasonlítottak egyes rudakat, bár még nem kísérelték meg sorbarendezni őket. A barkochba viszont új játék a gyerekek számára, a szituáció során részben a játék szabályait is le kell fektetni. A szituáció leírása a következő:

> Ez a játék jó alkalom az összemérésekre.
> Eldugunk egy rudat. A gyerekek ilyen kérédseket tehetnek fel: „A lilánál nagyobb?” „A világoskékénél nagyobb?”, „A pirosnál kisebb?”. Legyen előttük egy-egy rúd mindenféle színből. A válaszoknak megfelelően félretehetik azokat a rudakat, amelyek már nem jöhetnek számításba.
> Pédául eldugjuk a fekete rudat.
> - A citromsárgánál hosszabb?
> - Igen. (Félreteszik az f, r, v, p, c rudakat.)
> - A feketénél kisebb?
> - Nem. (Ilyenkor sokan azt hiszik: akkor a feketénél nagyobb, és félreteszik nemcsak a lilát, hanem a feketét is. A játék végén erre visszatérhetünk. Mérjék csak össze a feketét egy másik feketével. Igaz-e rá, hogy nem kisebb a feketénél?)
> - A sötétkéknél kisebb?
> - Igen. (Akik az előbbi kérdésnél tévedtek, azok itt már azt hiszik, biztosra mehetnek, a bordó van eldugva. Mások viszont tovább akarnak kérdezni. Hallgassuk meg őket akkor is, ha csakugyan a bordót dugtuk el!)
> Valószínű, hogy kezdetben sok fölösleges kérdés is elhangzik. Lesznek, akik leintik a kérdezőt: ha a rúd a citromsárgánál nagyobb, akkor persze, hogy a pirosnál is nagyobb. Vezessük be, hogy ilyenkor helyettünk az válaszol, aki már tudja az eddigiekből, mi a helyes válasz! Később nemcsak azt tűzzük ki célul, hogy találják ki, milyen színű a rúd, hanem azt is, hogy minél kevesebb kérdéssel találják ki! Az is legyen szabály, hogy rákérdezni csak akkor szabad, ha már biztosak benne, milyen színű a rúd.
> (Magyar tanári kézikönyv 1. oszt. 1978, 99-100. o.)

Ez a szituáció különösen érdekesnek tűnik számomra a tanár és a tanulók közötti felelősségmegosztás kérdésének szempontjából. Nevezhetjük ezt a szituációt adidaktikai jellegűnek? A tanár rendszeresen beavatkozik, egy tanár és tanulók közti folytonos dialógusról van itt szó – ugyanakkor ezek a beavatkozások többségében nem didaktikai jellegűek. Valójában kétféle tanári megszólalást különböztethetünk meg: az „igen” és „nem” válaszokat a játék szabályai határozzák meg, így az adidaktikai szituáció miliőjének részét képezik. A tanulás folyamatának felelőssége a tanulóknál marad – a tanítani kívánt ismeret, a színes rudak sorbarendezése a felmerülő problémára adható megoldási stratégiaként, az eldugott rúd kitalálásának eszközeként jelenik meg a szituációban.

A tanár másik típusú beavatkozása a tanulók reakcióinak kezelését érinti, amellyel kapcsolatban a könyv több kisebb tanácsot is ad: mit tegyen a tanár, ha néhány gyerek téved, ha vita alakul ki az osztályban stb. A könyvben leírt javaslatok arra vonatkoznak, hogyan tudja a tanár menet közben úgy átalakítani a szituációt, hogy annak adidaktikai jellege megmaradjon – hogyan tudja elősegíteni a tanulási folyamat előrehaladását úgy, hogy annak felelőssége továbbra is a gyerekeknél maradjon. A játékszabályok menet közbeni változtatása például a miliőt érintően hoz kismértékű módosítást.

Ezek a beavatkozások nem előre tervezettek, az óra közben merülhet fel a szükségük, a tanulók reakcióitól függően. A tanári kézikönyv szerint a tanárnak bizonyos értelemben improvizálnia kell, hogy kezelje az órán felmerült helyzeteket – ugyanakkor nem teljesen „spontán” beavatkozásokról van szó, nem is csupán a „gépezet működtetéséről” (ahogy Brousseau a tanár pedagógiai szabályozó tevékenységét kifejezi), ezek a beavatkozások szemmel láthatóan didaktikai alapelveket követnek, és tényleges tartalmi módosításokat hoznak a szituációba. A kézikönyvnek a tanulók lehetséges reakcióiról szóló megjegyzései, az ezek kezelésére adott tanácsok szemmel láthatóan az efféle beavatkozások „mesterségébe” igyekeznek beavatni a tanárokat, anélkül, hogy előre pontosan meghatároznák a szükséges beavatkozásokat, vagy azok alapelveit általános értelemben összefoglalnák.

Egyébként, más, a kézikönyvben található példákhoz hasonlóan (ezek közül a disszertáció eredeti, francia verziójában többet is elemzek), valójában nem egyetlen szituációról van itt szó, hanem egy egész sorozatról: a játék többször újrajátszható, különböző módosítások, variációk vezethetők be az ismétlések során is. Mint a kézikönyv szituációinak többségében, itt sem ír elő a könyv intézményesítési fázist. A szituáció egyrészt a már megszerzett ismeretek elmélyítését, újrafelhasználását szolgálja (jelen esetben az összemérések és a sorbarendezés gyakorlását), de új ismeretek felmerülését is lehetővé teszi, sokszor nem feltétlenül előre tervezetten, hanem esetlegesen előálló helyzetek révén.

A fenti példában ilyen például a „nem kisebb” fogalmának problémája. Ez az egyetlen olyan pont, ahol a könyv valamiféle intézményesítést javasol: a játék végén térjünk vissza a kérdésre, hasonlítsunk össze két fekete rudat, állapítsuk meg, hogy egyik kisebb-e mint a másik. Ez az összehasonlítás elvezethet az egyenlőség fogalmának bevezetéséhez – és valóban ez a fogalom a barkochbát közvetlenül követő fejezet témája. Azonban a barkochba szituációjának keretében nem *előre tervezett* az egyenlőség fogalmának bevezetése: a tanulók reakcióitól függően, esetlegesen vezethet el ide egy szituáció keretében folytatott osztálytermi dialógus.

További szituációkat elemezve a magyar reform tanítási gyakorlatot érintő koncepciójának kulcsfontosságú elemeként tűnik fel az itt látott dialogikus módszer, amely a tanár rendszeres közbeavatkozására épül, ugyanakkor úgy tervezve azokat, hogy a fogalmak felépítésének felelőssége minél nagyobb részben a tanulóknál maradjon. Az ilyen tanár-diák dialógust meghatározó didaktikai szerződés nem azonos a klasszikus adidaktikai szituációkra jellemző konstruktivista típusú szerződéssel: sokkal inkább „felfedeztető” didaktikai szerződésnek nevezhető.

4. FEJEZET

EGY PÉLDA A FELSŐ TAGOZATRÓL: A PITAGORASZ-TÉTEL TANÍTÁSA

Az alsó tagozatos számtan tanításának vizsgálata után, rátérek a második példámra, amely a geometria tanítását érinti a felső tagozaton. A második fejezet központi témája a Pitagorasz-tétel tanítása. E fejezet nyújt alkalmat arra is, hogy a felső tagozatos tankönyvek és tanári kézikönyvek sajátosságait elemezzem.

A megfelelő téma választása nem egészen magától értetődő: látni fogjuk, hogy a magyar és a francia reform geometria tanterve lényegesen eltér egymástól, nehéz olyan témát találni, amely mindkét reform szempontjából egyformán releváns volna. A Pitagorasz-tétel általában, időszaktól és országtól függetlenül a geometria tanterv állandó összetevője, ami megkönnyíti az összehasonlítást, még akkor is, ha a „mathématiques modernes" reform francia tantervében történetesen inkább marginális szerepet tölt be. A Pitagorasz-tétel több fontos kérdés tárgyalására is lehetőséget biztosít: jól tanulmányozható ezen a példán keresztül a bizonyítások szerepe és formája, a matematikai nyelvhasználat sajátosságai, az ábrák szerepe a geometria tanításában és a geometria és valóság viszonya az adott matematikaoktatási koncepció felfogásában. A Pitagorasz-tétel mindkét vizsgált ország tantervében a felső tagozat végén szerepel (7. osztály Magyarországon, 9. osztály Franciaországban): az előző példával együtt tehát „keretbe foglalja" a korabeli kötelező oktatást, amelynek így első és utolsó fázisát is tanulmányozni tudom.

1 A GEOMETRIA TANTERVEK

1.1 A francia tanterv

1.1.1 Az 1969-es tanterv

A „mathématiques modernes" reform tantervében feltűnően kiegyensúlyozatlanul oszlik el a geometria tananyag az alsó és a felső tagozat, ezen belül is a felső tagozat első és második két éve között. Az első osztály tananyagában egyáltalán nem szerepel a geometria, és ezt követően is, egészen a 7. osztályig csak kis hangsúllyal jelenik meg a domináns téma, a számtan mellett. A geometriai tárgyú fejezetek ráadásul „geometriai objektumokon végzett megfigyelések", „gyakorlati jellegű mérési és tájékozódási feladatok" és ehhez hasonló címek alatt jelennek meg. Ezeken az évfolyamokon fizikai tárgyakon végzett, manipulációt igénylő feladatokkal, vágással, hajtogatással, méréssel foglalkoznak a gyerekek. A 8. és a 9.

osztályban viszont a tantervnek körülbelül kétharmada foglalkozik geometriával. A tanterv instrukciói világossá teszik, hogy az alacsonyabb évfolyamokon végzett vizsgálatok csak idézőjelben vett „geometriai” tapasztalatszerzésnek tekinthetők, nem tényleges matematikai tevékenységnek. A „tulajdonképpeni geometria” tanulása csak a 8. osztályban kezdődik, célja pedig, hogy „a fizikai valóság matematizálásának első példájaként szolgáljon” (Francia tanterv, felső tagozat, 1972, 68. o). A geometria 8. osztálytól kezdve „tényleges matematikai elméletként”, más szóval axiómákból és ebből levezetett tételekből álló rendszerként kell, hogy feltűnjön a tanulók számára ((Francia tanterv, felső tagozat, 1972, 15. o).

A korábban megszokott G1 paradigmabeli (fizikai tárgyakon végzett, kísérletezésen, mérésen alapuló) geometriai tanulmányokból kiindulva 8. osztályban tehát a G3 paradigmáig (axiomatikus-deduktív tárgyalásig) kell eljutni a tanterv szerint. A tantervi utasítás hangsúlyozza, hogy ezt az átmenetet fel kell építeni – az átmenet azonban valójában abban áll, hogy az axiómákat szemléletes példákon illusztrálni kell, de miután egyszer elfogadták azokat, az axiómákat világosan el kell választani a nekik megfelelő szemléletes képtől, és a továbbiakban pusztán az axiomatikusan megfogalmazott tulajdonságokat kell felhasználó, intuíciótól független deduktív levezetést kell követni. Az episztemológiai elemzés során láttuk, hogy Dieudonné és Choquet a felső tagozat utolsó éveit átmeneti időszakként értékelik, amelynek során a gyermeki intuitív gondolkodástól el kell jutni az axiomatikus-deduktív módszerig. A tanterv javaslatai szemmel láthatóan ezt az átmenetet igyekeznek biztosítani, azonban rendkívül rövidre szabva és alig kidolgozva azt.

A 8. osztályos tanterv a geometria előtt a valós szám fogalmát tárgyalja, axiomatikusan felépítve azt – a geometria alapfogalmai ezután a valós szám és a halmaz fogalmára épülnek. Így elemi euklideszi geometriával lényegében egyáltalán nem foglalkozik a tanterv: a fizikai tárgyakon végzett „kísérletező”, G1-beli tapasztalatszerzést mindjárt algebrai módon tárgyalt geometriai tanulmányok követik, amelyben az alapfogalmak nem elsősorban szemléletesen meghatározott sík- és térbeli objektumokként, hanem halmazok és számstruktúrák segítségével meghatározott algebrai struktúrákként jelennek meg. 8. osztályban ráadásul csak a kevésbé intuitív affin geometriai struktúrák tárgyalására kerül sor: a merőlegesség és a távolság fogalma csak a 9. osztály tantervében szerepel.

Bourbaki *Elemeinek* felépítéséhez hasonlóan és Choquet korábban idézett elképzeléseinek megfelelően (ld. II. Rész) klasszikus geometriai alakzatok helyett a hangsúly az egyenes, a sík és a tér tulajdonságainak leírására helyeződik, elsősorban vetítéseket, vektorokat és koordinátarendszereket felhasználva.

1.1.2 A Pitagorasz-tétel a francia „mathématiques modernes" tantervben

A Pitagorasz-tétel ebbe a felépítésbe illeszkedik. A tantervi szerint 9. osztályban, a sík euklideszi struktúrájának keretében kerül szóba, a merőleges vetítés egyik tulajdonságának következményeként. Ebben a felépítésben tehát a Pitagorasz-tétel elsősorban nem egy geometriai alakzatról, a háromszögről szól, hanem az euklideszi tér egyik tulajdonságát határozza meg. Fő funkciója is az, hogy a derékszögű koordinátarendszer tulajdonságainak leírásában közreműködjön. Így nem kiemelt jelentőségű tételként jelenik meg a tantervben, csupán mint egy a sík és a tér tulajdonságait leíró algebrai eszköz felépítésének egyik kis építőköve sok más tétel között. A Pitagorasz-tétel tantervi utasításban leírt bizonyítása tisztán algebrai, rendkívül egyszerű, ugyanakkor egy másik, meglehetősen összetett tételre támaszkodik, és a matematika formális nyelvének beható ismeretét igényli.

1.1.3 Az 1977-es tanterv

Az 1977-es tanterv talán a geometria terén bírálja a legélesebben az 1969-es reformot. Az alsóbb és felsőbb évfolyamok közti törés megmarad, az alsóbb évfolyamok tananyagát továbbra is csupán 'kvázi-geometriának' tekinti, ugyanakkor kiegyensúlyozottabban osztja el az 1977-es tanterv, mint az elődje. A geometriai jellegű témák már az 1. osztályban megjelennek, és a következő évfolyamokban is valamivel nagyobb hangsúlyt kapnak, mint korábban. Az igazán lényeges változás a 8. és 9. osztály tantervében következik be: a tantervi utasítás kifejezetten elveti a teljes axiomatikus tárgyalás gondolatát, ehelyett a bizonyítási módszerek fokozatos elsajátítását javasolja. A Francia Tudományos Akadémia állásfoglalásából átvett idézet (Francia tanterv, felső tagozat, 8. oszt. 1977, VIII. o.) alapján világos, hogy a tanterv hátterében álló modell továbbra is a formális axiomatikus geometria, tehát a tanterv továbbra is G1 paradigmától G3 felé halad, azonban a G3-beli munkát felső tagozatban még túl korainak ítéli, és nagyobb hangsúlyt kíván helyezni a G2-beli átmenetre.

Egy másik fontos változás, hogy az 1977-es tanterv már nem tartalmazza a valós számok teljes axiomatikus felépítését – így a geometria sem támaszkodik olyan kifejezetten a számfogalomra, mint az előző tantervben.

A geometria tanterv tartalma és felépítése azonban a jelentős tananyagcsökkentéstől eltekintve keveset változik, és ugyanúgy a vetítések, vektorok és koordinátarendszerek állnak a középpontjában, mint a „mathématiques modernes" reform idején. Az 1977-es tanterv nagyobb szabadságot hagy a tananyag felépítésében, mint az elődje – a fogalmak tantervben leírt sorrendje azonban hasonló felépítésre utal, és többek között a Pitagorasz-tételt is hasonló módon helyezi el, mint az előző tanterv.

1.2 A magyar tanterv

A magyar tanterv a geometria terén is, mint általában (vö. 2. Fejezet), a folytonosságot, és a matematika más ágaival való dialektikus kapcsolatot hangsúlyozza. A 6. osztályos tanári kézikönyv felsorolja a legfontosabb témákat, amelyek a geometriát a matematika más ágaihoz fűzik (Magyar tanári kézikönyv, 6. oszt., 1979, 135-136. o): a geometriai alakzatokat ponthalmazoknak tekinti; a derékszögű koordinátarendszer a számtanhoz és az algebrához köti a geometriát, a függvényeket geometriai modellel, grafikonnal szemlélteti, ugyanakkor a geometriai transzformációkat függvényként értelmezi a tanterv, végül pedig a geometriai alakzatok különféle kombinatorikai problémákra vezethetnek. A matematikai különböző területei közötti kapcsolat tehát nem hierarchikus: a geometria épít a matematika más ágaira, ugyanakkor szemléletes modellt szolgáltat más területek absztraktabb fogalmainak. Ez a kölcsönös kapcsolat talán az egyenes és a számfogalom között a legnyilvánvalóbb. Az euklideszi sík egyrészt leírható koordinátarendszer segítségével (amit a magyar tanterv már alsó tagozatban is kihasznál), másrészt viszont az alapfogalomnak tekintett és szemléletesen ismertnek elfogadott egyenes már első osztálytól kezdve a számfogalom modelljeként szolgál, és motiválja a számok halmazának fokozatos bővítését. Azt mondhatjuk tehát, hogy a számok és az egyenes fogalma között analógiát állít fel a tanterv, a kettő közti kapcsolat fokozatos feltárása pedig mindkét fogalom elmélyítéséhez, pontosabb definiálásához hozzájárul.

A magyar tanterv már első osztálytól kezdve „geometriáról” beszél, bár az alsóbb évfolyamokon a geometriai kérdéseket elsősorban valós tárgyakon végzett manipuláció segítségével, tehát G1 paradigmán belül vizsgálja. A G1 és G2 paradigma közti átmenet lassú és fokozatos: kisebb deduktív érvelések az alsóbb évfolyamokon, különösen a felső tagozat elejétől már megjelennek, az első geometriai tételek a 7. osztályban tűnnek fel. Fokozatosan a G2 paradigma válik meghatározóvá, de még a felső tagozat végén is vissza-visszatér a tanterv valamilyen G1-beli munkához – ezt a Pitagorasz-tétel példáján is látni fogjuk. Axiomatikus tárgyalást viszont egyáltalán nem helyez kilátásba a magyar tanterv, a geometriai fogalmak pedig végig megőrzik szemléletes tartalmukat – G3-beli munkát Varga Tamás tanterve nem követel meg.

A geometria tananyag alapvetően klasszikus, szintetikus euklideszi geometria, amelyben a pont, az egyenes, a sík és a tér alapfogalomnak számítanak, a vektorok és koordinátarendszerek pedig viszonylag kevés szerepet kapnak. Az alapfogalmak bizonyos tulajdonságait ugyan érzékeltetni kívánja a tanterv, de ezek közül csak nagyon keveset javasol expliciten is kifejezni, inkább e tulajdonságok szemléletes elfogadásáról van szó (Magyar kézikönyv, 6. oszt., 1979, 136-138. o). A korábbi geometria tantervekhez képest a legnagyobb eltérés talán a transzformációk megnövekedett szerepében áll, amelyet geometriai függvényként értelmezve számos geometriai fogalom megalapozásában szerepet játsszanak[51].

1.2.1 A Pitagorasz-tétel a magyar tantervben

A Pitagorasz-tétel a 7. osztályos geometria tanterv első eleme. A tantervhez tartozó tanári kézikönyv szerint a matematika egyik legfontosabb tételéről van szó, amelyet a tanítás szempontjából különösen értékessé tesz az, hogy egyszerű is (Magyar tanári kézikönyv, 7. oszt. 1981, 103. o).

A tanári kézikönyv számos ötletet ad a tétel és a bizonyítás bevezetéséhez, amelyeket itt nem tárgyalok részletesen (az eredeti francia nyelvű disszertáció tartalmazza ezt az elemzést, a magyar nyelvű rövidített verzióban azonban csak a tankönyvben bemutatott felépítést elemzem részletesebben, ld. §2.4). Kiemelem azonban, hogy a tanári kézikönyv hangsúlyozza, nem jó, ha a bizonyítás „az égből pottyantnak tűnik” – úgy kell bemutatni, hogy a tanulóknak lehetőleg az az érzése támadjon, hogy „ők maguk is rájöhettek volna”. Világosan felismerhető itt az a gondolat, amellyel az episzemológiai háttér elemzésekor (II. Rész) a magyar reformot támogató matematikusok elképzelései között már találkozhattunk. A kézikönyv által javasolt, „hindunak” nevezett bizonyítás alapvetően geometriai, viszonylag kevés algebrai ismeretet igényel. Egy „puzzle” jellegű bizonyításról van szó, amely tehát a tétel területekről szóló változatára vonatkozik. Ehhez a bizonyításhoz nem szükséges a valós számok ismerete, amely nem is része a felső tagozatos tananyagnak. A valós számok, de legalábbis a négyzetgyökként kifejezhető számok a tétel szakaszhosszokra való értelmezése esetén válnak szükségessé – a tanterv pedig valóban a Pitagorasz-tételhez köti a négyzetgyök fogalmát, amely rögtön a következő fejezetben szerepel. A kézikönyv szerint a négyzetgyök létezésének problémáját közelítő számításokkal lehet érzékeltetni, anélkül, hogy e problémát a felső tagozat szintjén lezárnánk – a valós szám fogalmának bevezetése így a magasabb szintű tanulmányok idejére marad.

[51] Ebben a tekintetben Varga Tamás tankönyve Hajós György geometriájához látszik közel állni – érdemes volna ezt a kapcsolatot alaposabban is feltárni, annál is inkább, mivel Varga maga sorolja Hajóst a reformot támogató matematikusok közé (pl. Halmos & Varga 1978, 226. o.).

2 A FELSŐ TAGOZATOS TANKÖNYVEK

2.1 A francia tankönyvek

A „mathématiques modernes" reformot kísérő felső tagozatos tankönyvek közül a Queyzanne és Revuz, Monge, Maugin illetve Polle és Clopeau által szerkesztett sorozatokat tanulmányoztam. E tankönyvek egyik legszembetűnőbb sajátossága a magas szintű formális nyelv használata. Ez már a felső tagozat első két évében (6. és 7. osztály) is megfigyelhető, de különösen a 8. osztálytól hangsúlyos; a precíz matematikai nyelvhasználat pedig, a tanterv előírásainak megfelelően (Francia tanterv, felső tagozat, 1969, 52. o.) a felső tagozat második felében deduktív tárgyalási móddal is együtt jár. A tankönyvek előszavai, tanári kézikönyvek gyakran kitérnek a matematikai nyelv használatának kérdéseire: Monge például minden tankönyvének előszavában hangsúlyozza, hogy „egyszerű és precíz stílus" használatára törekedett, és igyekezett elkerülni a pontatlan vagy félreérthető megfogalmazásokat (pl. Monge 8. o. 1971, 8. o.), a Queyzanne-Revuz-sorozat tanári kézikönyve (6. osztály, 1969, 16. o.) pedig több oldalt szentel a megfelelő matematikai nyelvhasználat kérdéseinek.

Különösen figyelemreméltó ilyen szempontból Queyzanne és Revuz 6. osztályos (tehát a felső tagozat első évfolyamának szóló) tankönyve, amely egy halmazelméleti fogalmakat bevezető fejezettel kezdődik. A fejezet alcímei szinte kivétel nélkül a helyes matematikai nyelvhasználatról szólnak. A szerzők egy a gyerekek életéből vett példán is illusztrálják a kifejezések megfelelő használatát: cserkészcsapatok és tagjaik példája magyarázza, mit jelent egy halmaz elemének lenni. A példa azonban nem csupán a halmazelméleti kifejezések értelmezését, hanem általánosabban a precíz matematikai nyelvhasználat jelentőségét is kifejezi.

> Amikor beléptek a cserkészek közé, nyelvhasználatukat elsajátítva egy *cserkészcsapat tagjává* váltok[52]. Beavatottként pontosan értitek egymást, a félreértések kockázata nélkül.
>
> […]
>
> Hasonlóképpen most, hogy kis matematikussá váltatok, sajátítsátok el a *matematikusok nyelvét*, és matematikusok közt lévén alkalmazzátok azt híven és precízen. (Queyzanne-Revuz 6. oszt. 1969, 7. o.)

E példán keresztül a szerzők azt sugallják, hogy a matematika tanulása valamiféle *beavatási folyamat* egy már létező *intézmény* rendszerébe, jelen esetben a matematika tudományába, és e beavatás feltétele, hogy a tanulók elfogadják és magukévá tegyék az intézmény által

[52] A francia eredetiben a cserkészcsapatot *falkának*, tagjait pedig *farkaskölyköknek* nevezik, így valóban sajátos nyelvhasználatról van szó.

lefektetett szabályokat. A Didaktikai Szituációk Elméletének terminusaival e példán keresztül egyfajta *makroszerződés* (Hersant & Perrin-Glorian 2003), vagyis hosszú távon érvényes didaktikai szerződés megalapozásáról beszélhetünk, mégpedig Hersant és Perrin-Glorian (2003, 239-242. o.) szavaival élve *beavatás* jellegű szerződésről. A tanítás direkt közvetlen tudásátadáson alapszik, jelen esetben a matematikai nyelv megfelelő használatát illetően: a tanulók feladata e didaktikai szerződés szerint, hogy elsajátítsák és „híven, precízen alkalmazzák" a tanult tudást.

A tantervi utasítás hangsúlyozza az „aktív pedagógiai módszerek" alkalmazásának fontosságát (Francia felső tagozatos tanterv, 1969, 22. o.). Ezt a tankönyvek előszavai is rendre kiemelik – maguk a tankönyvek azonban alig adnak konkrét segítséget e módszerek alkalmazásához. Nagyobbrészt leíró jellegű művekről van szó, amelyek leginkább egy „modern" matematikai értekezés felépítését követik: definiálják a fogalmakat, jelöléseket vezetnek be, e fogalmaknak levezetik néhány tulajdonságát, amelyeket esetleg néhány példán illusztrálnak. A szöveg átláthatóságát tipográfiai eszközök is segítik, amelyek világosan tagolják a fejezeteket. A 8. osztálytól kezdve a tankönyvek alapvetően axiomatikus-deduktív felépítésűek, definíciók, tételek és bizonyítások követik egymást, néhány példával kiegészítve – kérdéseket azonban alig vetnek fel-e szövegek, a matematikai fogalmak, tételek tényként, nem pedig problémákra adott válaszként jelennek meg. Így tehát a tankönyvek szövege leginkább előadás-formájú tanítást, közvetlen tudásátadásra alapozott didaktikai szerződést támogat.

Ezeket a leíró szövegeket – amelyeket több tankönyv is „leckéknek" (leçon) nevez, és amelyek egyes sorozatok (pl. Polle-Clopeau) előszava szerint a tananyag olvasását, megértését szolgálják – a fejezetek végén „gyakorlatok" (exercices) egészítik ki, amelyeknek fő célja a tananyag elsajátításának ellenőrzése, a megszerzett tudás stabilizálása. Néhány tankönyv (pl. Monge, Polle-Clopeau) margóján szintén találunk kérdéseket, amelyek elsősorban a szöveg megértését hivatottak ellenőrizni. A matematikai fogalmak felépítésében azonban ezek a kérdések és gyakorlatok nem játszanak szerepet.

Kivételt látszólag a Queyzanne-Revuz tankönyvsorozat jelent, amely igyekszik az aktív pedagógia alkalmazásához konkrét ötleteket is adni. A tankönyv színkódokkal különíti el a tanulók számára javasolt tevékenységek leírását a tananyagot ismertető passzusoktól (cf. Queyzanne-Revuz kézikönyv 6. oszt., 1969, 16. o.). Az effajta tevékenységek leírását elemezve (pl. 6. oszt. 1969, 126-134) azonban azt állapíthatjuk meg, hogy a tanulók aktivitása csupán fizikai, manipulációs szinten valósul meg: illusztrációként szolgálnak olyan matematikai fogalmakhoz, amelyeket valójában nem ők alkotnak meg, hanem a tanár definiál.

Így a Didaktikai Szituációk Elméletének értelmében a tanulók „aktivitásának” ellenére nem beszélhetünk adidaktikai potenciálról: a matematikai fogalmak nem problematizáltak, és a tanulókra nem hárul felelősség azok megalkotásában.

2.2 A Pitagorasz-tétel a francia tankönyvekben

A tanterv felépítésének megfelelően a Pitagorasz-tétel a korabeli tankönyvekben nem önálló fejezet tárgyaként, hanem egy az „euklideszi sík” tulajdonságait tárgyaló fejezet egyik tételeként jelenik meg, rendszerint a merőleges vetítés fogalmának bevezetése után, ez utóbbi egyik tulajdonságaként. A Pitagorasz-tétel a továbbiakban a merőleges vektorok tulajdonságainak leírásában játszik szerepet, ezen keresztül pedig a derékszögű koordinátarendszer definiálásában.

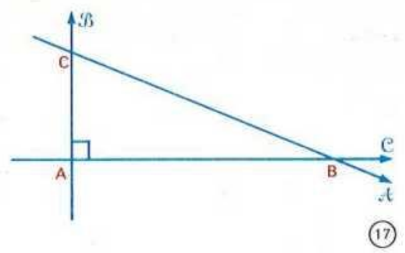
A vizsgált tankönyvek egymáshoz hasonló módon tárgyalják a tételt és annak bizonyítását – az alábbi ábra Monge példáját mutatja.

13. PLAN EUCLIDIEN

Théorème de Pythagore.

30 Supposons le triangle (A, B, C) rectangle en A (fig. 17).
Le point A est la projection orthogonale de C sur (BA) et la projection orthogonale de B sur (AC).
Nous avons les égalités : $\overline{BA} = c(\mathcal{A}, \mathcal{C})\,\overline{BC}$ et $\overline{AC} = c(\mathcal{A}, \mathcal{B})\,\overline{BC}$.
Le réel $\overline{BC}$ est non nul ; nous avons donc :
$c(\mathcal{A}, \mathcal{C}) = \dfrac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ et $c(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.
Nous avons (nº 11, p. 178) :
$[c(\mathcal{A}, \mathcal{C})]^2 + [c(\mathcal{A}, \mathcal{B})]^2 = 1$.
Nous en déduisons : $\dfrac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2} + \dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = 1$, puis : $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.
Des égalités : $AB = |\overline{BA}|$, $AC = |\overline{AC}|$ et $BC = |\overline{BC}|$, il résulte :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$.

THÉORÈME DE PYTHAGORE : Si un triangle (A, B, C) **est rectangle en** A, **on a :** $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

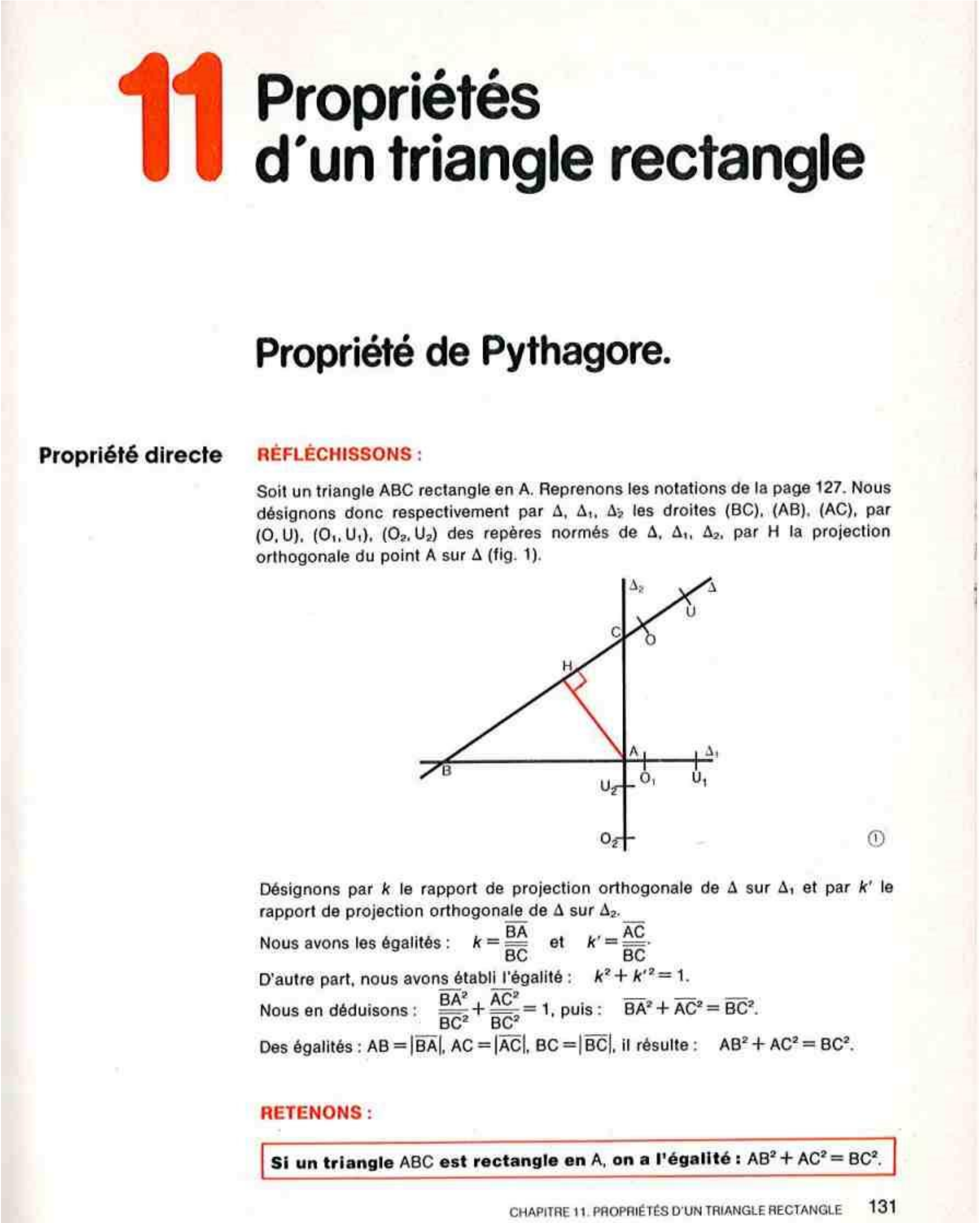


III.4.7. Ábra (Monge 9. oszt. 1972, 194. o.)

A bizonyításban c(A, C) az *A* és *C* egyenesek merőleges vetítésének arányát fejezi ki. A Pitagorasz-tételt tehát a tankönyv a merőleges vetítés egy tulajdonságából vezeti le. A bizonyítás így néhány egyszerű algebrai átalakításból áll – azonban különböző jelölések ismeretét és a formális nyelv magas szintű használatát feltételezi, továbbá felhasznál egy korábban bizonyított tételt, amelynek bizonyítása egy teljes oldalt vesz igénybe (Monge 9. oszt. 177-178. o.).

Ami az idézett részlet szövegét és paratextuális elemeit illeti, a példán jól látható, hogy tisztán elméleti jellegű, axiomatikus-deduktív szövegről van szó. A szöveg erősen strukturált, változatos tipográfiai eszközök – számozott bekezdések, félkövér szedés, színek, vonalak – szervezik vizuálisan a szöveget. Az ábra a margóra szorul: nem szerves része a szövegnek, csupán illusztrációként szolgál. Érdemes ezenkívül megfigyelni, hogy valójában nem háromszöget ábrázol, hanem irányított egyeneseket, amelyeknek merőleges vetítéséről a tétel szól: Choquet elképzeléseinek és a tanterv felépítésének megfelelően a „mathématiques modernes" reform tankönyvei valóban igyekeznek kiküszöbölni a háromszögek vizsgálatát a tananyagból, még egy olyan alapvető tétel tárgyalásakor is, amilyen a Pitagorasz-tétel.

Az 1977-es tankönyvek az új tanterv instrukcióit követve némi változást hoznak e téren: a korábbi tankönyvek újabb kiadásai, bár a tananyag tartalmán és felépítésén keveset változtatnak, kissé másképp szerkesztik azt. A Pitagorasz-tétel itt már rendre külön fejezetet, vagy legalább egy alfejezetet kap, Monge esetében pl. a „derékszögű háromszög tulajdonságai" című fejezeten belül. A formális nyelv némileg egyszerűsödik, a bizonyítás előtt pedig a „gondolkudjuk" (réfléchissons) felszólítást találjuk. Ez utóbbi részlet különösen jól szemlélteti, hogyan próbálnak a „mathématiques modernes" időszak tankönyvszerzői, valójában igen kevés módosítással és továbbra is a reform szellemét követve, a reform kritikáihoz és az új tantervhez is alkalmazkodni: a „gondolkodjunk" felszólítás nyilvánvalóan a diákok aktívabb részvételét hivatott elősegíteni, azonban kérdést, problémafelvetést nem találunk a szövegben, így a gondolkodásra való felhívás tartalom nélkül marad.



11 Propriétés d'un triangle rectangle

Propriété de Pythagore.

Propriété directe

RÉFLÉCHISSONS :

Soit un triangle ABC rectangle en A. Reprenons les notations de la page 127. Nous désignons donc respectivement par Δ, Δ_1, Δ_2 les droites (BC), (AB), (AC), par (O, U), (O_1, U_1), (O_2, U_2) des repères normés de Δ, Δ_1, Δ_2, par H la projection orthogonale du point A sur Δ (fig. 1).

Désignons par k le rapport de projection orthogonale de Δ sur Δ_1 et par k' le rapport de projection orthogonale de Δ sur Δ_2.

Nous avons les égalités : $k = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$ et $k' = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

D'autre part, nous avons établi l'égalité : $k^2 + k'^2 = 1$.

Nous en déduisons : $\frac{\overline{BA}^2}{\overline{BC}^2} + \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = 1$, puis : $\overline{BA}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

Des égalités : $AB = |\overline{BA}|$, $AC = |\overline{AC}|$, $BC = |\overline{BC}|$, il résulte : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

RETENONS :

Si un triangle ABC **est rectangle en** A, **on a l'égalité :** $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

CHAPITRE 11. PROPRIÉTÉS D'UN TRIANGLE RECTANGLE 131

III.4.8. Ábra (Monge 9. oszt. 1980, 131. o.)

Az 1977-es tantervhez ugyanakkor új tankönyvsorozatok is megjelennek. Deledicq és Lassave változatos feladataikkal – amelyeket különböző kategóriákba sorolnak, mint bevezető, gyakorló, bizonyítási, alkalmazási stb. feladatok –, és a Pitagorasz-tétel inkább geometriai mint algebrai tárgyalásával új szemléletet képviselnek. A tételt megkísérlik felfedeztetni a tanulókkal: a fejezetet bevezető feladat háromszögek oldalainak mérését és a kapott értékek összehasonlítását kívánja. A feladat tehát a G1 paradigmába illeszkedik – és ennek megfelelően a folytatásban nem is „tételről”, hanem „Pitagorasz-tuljadonságról” van szó, amelyet tapasztalati alapon állapíthattak meg a tanulók. A szerzők szerint a bizonyítás nehezen motiválható, ezért a fejezet felépítésében nem is támaszkodnak rá – a fejezet végefelé tűnik csak fel, fakultatív anyagként, egy (geometriai, puzzle-szerű) bizonyítás. A fejezet számos feladata azonban G2-beli munkát igényel: így a Pitagorasz-tétel tárgyalása némileg kétértelmű, hiszen átmenet nélkül teszi egymás mellé a G1 és G2 paradigmabeli munkát. Deledicq és Lassave tankönyvében ezáltal a tanulók önálló munkája jóval nagyobb teret kap, mint a „mathématiques modernes" reform tankönyveiben, ugyanakkor az erre irányuló törekvés bizonyos matematikai tartalmat érintő kompromisszumokhoz vezet.

2.3 A magyar tankönyvek

A magyar reform felső tagozatos tankönyvei több szempontból is feltűnően különböznek a „mathématiques modernes" reform tankönyveitől. Számos illusztrációt tartalmaznak, amelyek egy része nem kifejezetten matematikai ábra. Több didaktikai célú jelölést is alkalmaznak, az alább látható stoptábla például a tankönyv előszava szerint arra hívja fel az olvasót, hogy szakítsa félbe az olvasást, és gondolkodjon el a feltett kérdésen, mielőtt a tankönyv által javasolt megoldással megismerkedne.

III.4.9. Ábra (Magyar tankönyv 5. oszt. 1979, 4. o.)

A tanári kézikönyvek az alsós kézikönyvekhez hasonlóan hangsúlyozzák, hogy a tankönyv által követett tematikus tárgyalásmód nem tanmenetként szolgál, és kívánatos a különböző témákat minél többször összekapcsolni – bár ehhez a felsős tanári kézikönyvek jóval kevesebb segítséget adnak, mint alsó tagozatos megfelelőik.

A tankönyv minden fejezete a tananyag ismertetésével kezdődik, amit aztán feladatsor követ. A tananyag ismertetése azonban nem értekezés formájú, mint a francia tankönyvek esetében, ehelyett sajátos formai megoldást követ: tanulók fiktív dialógusait írja le. A tanári kézikönyv erről a következőket mondja:

> A tankönyvben a tananyag egyfajta feldolgozási módját találjuk. Taníthatunk úgy, hogy a problémát a leírt feladatokon keresztül vezetjük be, dolgozzuk fel. Úgy irányíthatjuk a tanulókat, hogy a könyvben megszólaló gyerekek beszélgetéséhez hasonló párbeszédek, viták alakuljanak ki az osztályban. Ha az osztály nem eléggé aktív, akkor eleinte mi tegyük fel azokat a kérdéseket, amelyek bennük is felvetődhetnének, és provokáljuk a vitát. A könyvben vitatkozó gyerekek sokszor tévednek, hibás álláspontokat védelmeznek, de meg tudják győzni egymást, és végül kiderül, hogy melyik volt helyes vélemény és melyik téves. Ne mi javítsuk a hibákat, hanem vezessük a gyerekeket, illetve vezessék ők egymást úgy, hogy a másik hibáit és a sajátjaikat is képesek legyenek

> észrevenni és kijavítani. Ha a könyvben leírtak szerint tanítottunk, akkor a megfelelő rész elolvasását érdemes házi feladatnak feladni, ezzel a gyerekek feleleveníthetik az órán tanultakat. (Magyar kézikönyv 5. oszt. 1981, 5. o.)

Ezek a dialógusok tehát szolgálhatnak a tanulóknak olvasmányként, a megfelelő tanóra után, tehát akkor, amikor már találkoztak a szóban forgó ismeretekkel. E szövegek elsődleges funkciója azonban az, hogy mintát adjanak a tanároknak hasonló osztálytermi dialógusok megvalósításához. Természetesen nem a tankönyvi dialógusok pontos másolásáról van szó, csupán hasonló szellemű szituációk megvalósításáról.

E dialógusokat elemezve azt figyelhetjük meg, hogy minden esetben néhány probléma köré épülnek. Különösen figyelemreméltó például az 5. osztályos tankönyv egyik dialógusa, amely a ponthalmazok távolságának fogalmát vezeti be (ld. függelék). A fejezetet indító probléma egy fotel és egy asztal távolságának lemérése. A gyerekek méréseket végeznek, majd azzal szembesülnek, hogy a talált értékek erősen eltérnek egymástól, mivel nem határozták meg pontosan, mit értenek a két tárgy távolságán. A fogalom definiálására több ötlet is felmerül, megállapodnak, hogy mindegy, melyiket választják, csak az a lényeg, hogy egyértelmű legyen a definíció – így végül a két tárgy pontjai közötti leghosszabb szakasz hosszát választják távolságként.

Ezután újabb problémával szembesülnek: egy tollhegy és egy alatta elterülő tintafolt távolságát kell meghatározniuk. A korábban elfogadott definíció itt kevéssé intuitív (pozitív értékű és nem nulla) távolságot ad. A harmadik probléma esetében, egy egyenes és egy pont között ez a definíció nem is határoz meg távolságot. Az újabb felmerült problémák tükrében a gyerekek úgy döntenek, hogy módosítják a korábban elfogadott definíciót, és helyette a két halmaz közötti legrövidebb szakasz hosszát tekintik távolságnak. Ez az új definíció mindhárom probléma esetén intuíciójuknak megfelelő eredményt ad – ezt a definíciót rögzíti és emeli ki ezután a tankönyv.

A problémák, amelyek a halmazok távolságának definiálásához vezetnek, rendezett sorozatot alkotnak. Megfigyelhető köztük a G1 paradigmából G2-be való átmenet: míg az első kérdés megválaszolása tényleges méréseket igényel, a második már absztraktabb jellegű, az utolsó pedig kifejezetten ideális alakzatokra vonatkozik, hiszen az egyenes végtelen volta teszi lehetetlenné az eredeti definíció alkalmazását. Az első probléma nem a tanítani kívánt matematikai fogalom alkalmasan választott illusztrációja, épp ellenkezőleg: a fotel és az asztal távolságának esetében nem egyértelmű, hogy mi a legkézenfekvőbb definíció, ezáltal a kiinduló probléma épp a természetes nyelvből vett távolság-fogalom meghatározatlanságára világít rá, így motiválva a definíció keresését.

A matematikai definíció itt tehát nem eleve adott, hanem a közösség megegyezésének eredménye, a megegyezés fő kritériuma pedig az, hogy a definíció illeszkedjen a közösség tagjainak a fogalomról alkotott intuitív elképzeléseihez. A definíció megalkotása dialektikus folyamat, amelyben a további problémák ellenpéldák szerepét játsszák: destabilizálják a korábban adott definíciót, és általánosabb érvényű új definícióhoz vezetnek. A folyamat nyitott jellegű: az elfogadott definíció adott pillanatban kielégítőnek tűnik, de ez nem zárja ki, hogy később, újabb problémákkal szembesülve esetleg további módosításra szoruljon[53]. Ez az eljárás egyébként feltűnő hasonlóságot mutat azzal a bizonyítási kísérletek, definíciók és ellenpéldák alkotta dialektikus eljárással, amelyet Lakatos a *Bizonyítások és cáfolatok*ban ír le, szintén fiktív osztálytermi dialógus formájában.

A tankönyvek más dialógusaiban szereplő problémasorozatok különféle funkciót töltenek be: például egy bizonyítást motiválnak (amint azt a Pitagorasz-tétel esetében látni fogjuk) vagy egy algoritmus helyességét igazolják úgy, hogy értelmezési kontextust teremtenek neki (pl. a törtek összehasonlítása esetében, ld. 5. oszt. tankönyv, 1979, 31-35. o.).

Érdemes a Péter Rózsa *Játék a végtelennel*jével való stilisztikai hasonlóságot is megfigyelni. Mindkét esetben többé-kevésbé folytonos, részben párbeszédes szövegekről van szó. Valójában a tankönyvi dialógusok is tartalmaznak narratív részeket, illetve olyan passzusokat, amelyeknek a beszélője nem meghatározott. Ez utóbbiak értelmezhetők úgy is, mint a tanár megszólalásai, esetleg mint olyan hozzászólások, amelyeknek a beszélője nem előre meghatározott: ha a tanulók nem vetik fel az adott gondolatot, a tanár hozhatja szóba azt – a tanári kézikönyv feljebb idézett instrukcióinak megfelelően.

Az e dialógusokban leírt miliő jelentős adidaktikai potencialitással bír. A fotel és az asztal esetében például a tanulók szinte szükségszerűen jutnak több különböző eredményre, így a miliő visszajelzései indítják be köztük a vitát, és motiválják a definíció keresését. A tanár tevékenysége ugyanakkor előre nem pontosan meghatározott, erősen függ a gyerekek reakcióitól (ez a Pitagorasz-tétel példáján majd még világosabban fog látszani). A kézikönyv szerint „Ha az osztály nem eléggé aktív, akkor eleinte mi tegyük fel azokat a kérdéseket, amelyek bennük is felvetődhetnének, és provokáljuk a vitát.” Nem annyira elkülönült adidaktikai szituációkról és tanári beavatkozás jellemezte fázisokról van tehát itt szó, sokkal inkább folyamatos tanár-diák dialógusról, amelynek során a résztvevők osztoznak a matematikai fogalomalkotásért viselt felelősségen. Ebben az esetben is hasonló didaktikai

[53] Amint arra egy egyetemi matematikafilozófiai szemináriumon felhívták a figyelmemet, a definíció valóban módosításra szorul, amennyiben korlátos nyílt halmazokra is ki akarjuk terjeszteni. Mivel ilyen jellegű problémák a felső tagozaton nem kerülnek elő, ezen a szinten kielégítő a tankönyvben elfogadott definíció, egyetemi szinten azonban szükségessé válhat a fogalom újraértelmezése.

szerződést figyelhetünk tehát meg, mint amelyet az előző fejezetben, az alsó tagozat esetében láttunk, és amelyet „felfedezetető” típusú szerződésnek neveztem el.

2.4 A Pitagorasz-tétel a magyar tankönyvben

A Pitagorasz-tételt a 7. osztályos tanári kézikönyv az egyik legfontosabb matematikai tételnek írja le, és ennek megfelelően önálló fejezetet kap a tankönyvben (Magyar tankönyv, 7. oszt. 1980, 205-209. o.). A Pitagorasz-tételről szóló fejezetet a középpontos szimmetriáról, a háromszögek különböző tulajdonságairól és euklideszi szerkesztésekről szóló fejezetek előzik meg, illetve terület-, felszín- és térfogatszámítás követi. A tétel tehát ebben az esetben az euklideszi geometria klasszikus alakzatait vizsgáló fejezetek közé illeszkedik, amelyek alapvetően a G2 paradigmát követik, időről-időre G1-beli kitérőkkel tarkítva. A Pitagorasz-tétel nem az első tétel, nem is az első bizonyítás a könyvben (rövid bizonyítások már a korábbi évek tankönyveiben is előfordulnak), de ez az egyik első tételként megnevezett állítás, amelyet ráadásul viszonylag hosszú és összetett bizonyítás követ. A tételt bevezető rövid problémasorozat éppen a G1 paradigmából a G2-be való átmenetet biztosítja, ezáltal motiválva a tétel bizonyítását.

Az első probléma egy osztályteremben kifeszített spárgáról szól: az a kérdés, hogy mennyivel kell a spárgát meghosszabbítani, ha azt szeretnénk, hogy az osztály legmagasabb tanulója középen átférjen alatta. A gyerekek különböző érvek alapján próbálják megbecsülni a szükséges hosszúságot, de kísérleteik nem vezetnek eredményre. Ekkor egy tipikusan G1-paradigmabeli módszerhez, a méréshez folyamodnak, amely kielégítő megoldást ad a kérdésre. A következő probléma az előző egy variációja, abban különbözik az elsőtől, hogy nem az osztályteremben, hanem a tornacsarnokban kifeszített spárgáról szól. Ebben az esetben a gyerekek nem tudják közvetlenül elvégezni a kísérletet, így a klasszikus G1-beli megoldás, a mérés nem lehetséges, a probléma absztraktabb gondolkodást igényel. Zsuzsi megoldási javaslata, a modellezés szintén G1-beli megoldási módszerhez vezet (kicsinyített ábrán való mérés) – ez a módszer azonban nem ad kielégítő eredményt (a mérőeszköz a kívánt hibahatárhoz viszonyítva nem elég pontos). Ekkor merül fel az igény, hogy pusztán „számítás segítségével” próbáljanak a kérdésre válaszolni, összefüggést keressenek a derékszögű háromszög oldalai között – G1 helyett tehát G2 paradigmában keressék a megoldást. Ezen a ponton kerül szóba maga a Pitagorasz-tétel. A problémasorozat, amelyet a probléma egy változójának variálása generál, ebben az esetben tehát a G1 paradigmából a G2-be való átmenetet motiválja, amelynek során a mérés mint igazolási módszer helyét a matematikai bizonyítás veszi át. A második problémát már a tétel segítségével sikerül megoldani – az ezt követő harmadik problémának pedig, amely a 2 km hosszú „Népköztársaság út” (a mai Andrássy út) fölött kifeszített kötélről szól, végképp csak G2-beli megoldása képzelhető el.

A korábban említettekhez hasonlóan itt is félig dialogizált szövegről van szó: a gyerekek vitatkoznak, tippelnek a megoldásra és megoldási módszereket javasolnak. Maga a bizonyítás sem teljesen deduktív, egy része kérdések és gyerekek szájába adott válaszkísérletek formáját ölti. A tétel bevezetése azonban, amely a második probléma első, sikertelen megoldási kísérletét követi, nincs egyértelműen beszélőhöz rendelve:

> Hogyan tudnánk ezekre a kérdésekre a választ csupán számítással megadni?
>
> Az lenne jó, ha a derékszögű háromszög oldalai között találnánk valami összefüggést.
>
> Az összefüggést a derékszögű háromszög oldalaira rajzolt négyzetek területei között találjuk meg.
>
> (Magyar tankönyv 7. oszt., 1980, 207. o.)

Az első két mondatot esetleg felvethetik a gyerekek, a harmadikról azonban nehéz elképzelni, hogy olyasvalakinek jusson eszébe, aki még nem ismeri a tételt – az utolsó mondat legvalószínűbb értelmezése tehát, hogy itt tanári beavatkozásról van szó. Nyilvánvalóan tanári felvezetésről árulkodik a bizonyítás eleje, az ábrák fölrajzolása is, azonban a bizonyítást a „STOP”-jel szakítja meg, ezzel visszaadva a felelősséget az osztály tanulóinak, avagy a könyv olvasójának.

A Pitagorasz-tételt bevezető szituáció tehát jelentős adidaktikai potenciállal rendelkezik. Az első, osztályteremben kifeszített spárgára vonatkozó probléma esetében a tanterem fizikai tere, a spárga és az aláállított gyerek retroaktív miliőt alkotnak, amelynek segítségével a megoldási módszerek közvetlenül értékelhetők. A problémához kapcsolódó dialógust a könyvben gyerekek folytatják, így klasszikus értelemben vett adidaktikai szituációt imitálva. A második probléma esetén viszont hiányzik a fizikai értelemben vett miliő, így a közvetlen ellenőrzés nem lehetséges, és miután a modellezési kísérlet sem vezet eredményre, a miliő a gyerekek számára elégtelennek bizonyul a probléma megoldásához. Ekkor avatkozik közbe a tanár, a Pitagorasz-tétellel egészítve ki a miliőt. A tétel így egy probléma megoldásának eszközeként jelenik meg – bár menet közben maga is vizsgálat tárgyává válik egy olyan szituáció keretében, amelynek célja a tétel bizonyítása, miliőjét pedig a bizonyítást segítő ábrák adják. A Pitagorasz-tételt bevezetését célzó tanítási folyamat tehát potenciálisan adidaktikai fázisokat tartalmaz – szervezőelve azonban, a korábban látott példákhoz hasonlóan, a tanár-diák dialógus marad.

5. Fejezet

Varga Tamás tantervének egy sajátossága: a kombinatorika és a valószínűségszámítás tanítása

Az utolsó fejezet témaválasztását elsősorban Varga Tamás munkássága motiválta. Ő kiemelten foglalkozott a matematika ezen ágainak tanításával, nemzetközi publikációs tevékenységének jelentős része is e területeket érinti. Ahogy azt a 2. fejezetben láttuk, reformprogramjának egyik tematikai sajátossága, hogy már az általános iskola kezdetétől a témák változatosságára helyezi a hangsúlyt, és teret ad többek között a kombinatorika, a valószínűségszámítás és a statisztika tanításának. Reformjának jellemzése így aligha lehet teljes értékű e témák vizsgálata nélkül. Az alábbiakban vizsgálni fogom e témák tanításának főbb okait Varga Tamás koncepciójában (§1.1), és a kombinatorika és a valószínűségszámítás tantervének felépítését (§1.2). Az elemzéshez felhasználom a *valószínűségszámítás paradigmáinak* fogalmát (Parzysz 2011, vö. III. Rész 1. fejezet): a tanterv elemzése után a paradigmák magyar reformbeli szerepét egy konkrét szituáció példáján is megvizsgálom (§1.4).

Ami a pedagógiai gyakorlat elemzését illeti, e fejezet a hosszabb tanítási folyamatok felépítésének vizsgálatára helyezi a hangsúlyt. Korábban már megfigyelhettük (II. Rész; III. Rész 3. és 4. fejezet), hogy e folyamatokban a tudatosan szerkesztett problémasorozatok fontos szerepet játszanak. Az 1978-as reform kombinatorika tanítását érintő néhány fejezete rövidsége és a megszokottnál könnyebben áttekinthető szerkezete miatt különösen alkalmasnak tűnik az effajta problémasorozatok felépítésének vizsgálatára (§2).

A francia reformmal való összehasonlítást ugyanakkor nehezíti, hogy a „mathématiques modernes” reform tantervéből – az *école primaire* és a *collège* szintjén – hiányoznak ezek a témák. Érdekes azonban megvizsgálni, mely okok motiválták e témák tanítását Varga Tamás esetében – látni fogjuk, hogy olyan szempontokról van szó, amelyek a francia reform esetében sokkal kisebb súllyal esnek latba, bizonyos esetekben akár ellenérvként is feltűnhetnek: ez egyfajta magyarázatot ad a két reform közti jelentős különbségre. Az 1977-es tantervhez kapcsolódó tankönyvekben elszórva már megjelennek kombinatorikai jellegű feladatok, az 1970-es években zajló francia matematikatanítási kísérletekben pedig több példát is találunk kombinatorika és valószínűség tanítására. Az ERMEL-projekt (§3.2) illetve Brousseau egy kísérletének (§3.4) példája így alkalmat ad a francia matematikaoktatás 1970-es évekbeli dinamikájának vizsgálatára. Varga Tamásnak egyébként több francia nyelvű könyve is megjelent a kérdéses időszakban, amelyek úgy tűnik, e témák franciaországi tanítására is hatást gyakorolhattak (§3.3). Brousseau kísérlete több szempontból is különösen érdekes kutatásom számára: egyrészt, mert a szóban forgó kísérlet Brousseau saját bevallása szerint későbbi elméletének kialakulását is segítette az 1970-es évek elején (Brousseau, Brousseau & Warfield 2001), így lehetőséget ad arra, hogy az elemzésemhez háttérelméletként is használt Didaktikai Szituációk Elméletét egyúttal történeti kutatás tárgyaként, keletkezésének kontextusában vizsgáljam. Másrészt, mert a 2001-es cikkben leírt kísérlet jó alkalmat ad a Brousseau által tervezett hosszabb tanítási folyamatok felépítésének vizsgálatára és összehasonlítására Varga konstrukcióival: az általuk tervezett tanítási folyamatok mögött két meglehetősen eltérő koncepciót figyelhetünk majd meg (§3.4.1).

A korábban már vizsgált forrásokat – tanterveket, tankönyveket, tanári kézikönyveket – e fejezetben egy újabb típusú forrás is kiegészíti: Varga Tamás és Brousseau által írt didaktikai cikkeket is bevonok az elemzésbe.

1 VARGA TAMÁS TANTERVE: FELÉPÍTÉS ÉS EPISZTEMOLÓGIAI MEGFONTOLÁSOK

1.1 E témák tanításának okai

Varga Tamás cikkeiben több helyen is kifejti azokat a szempontokat, amelyek szerinte a kombinatorika és valószínűségszámítás tanításának korai bevezetését indokolják. Az egyik legfőbb szempont a matematika „integrált” tanítása, a tanított témák változatosságára és azok dinamikus kapcsolatára való törekvés. A kombinatorika és a valószínűségszámítás nemcsak egymással és a statisztikával, hanem a halmaz és a függvény fogalmával, a logikával és a számelmélettel is kapcsolatba hozhatók. A kombinatorikai példák közreműködnek a műveletek fogalmának jelentéssel való megtöltéséhez, a valószínűségszámítás pedig a törtfogalom kialakításához kínál motivációt és gyakorlóterepet (Varga 1967a, 1972, 1982).

Varga egy másik hangsúlyos érve szerint e területek kiváló alkalmat nyújtanak a gyerekek matematikai absztrakció folyamatába való bevezetésére már egészen kicsi kortól, hiszen nem igényelnek jelentős elméleti hátteret, és konkrét, manipulációs tevékenységből, tapasztalatokból kiindulva teszik lehetővé a fokozatos absztrakciót (Varga 1967a). A kombinatorika és a valószínűségszámítás egyúttal változatos reprezentációs eszközök (pl. fadiagram, táblázatok) alkalmazására is lehetőséget nyújtanak (Varga 1982).

Varga Tamás szerint a becslés a matematika fontos eszközei közé tartozik, és az oktatás során lehetőséget kell biztosítani a gyakorlására, amire a valószínűségszámítás tanítása kiválóan alkalmas. A becslés gyakorlásának Varga általánosabb érvényű nevelő értéket is tulajdonít: a tanárok lehetséges ellenérveivel kapcsolatos megjegyzése jól illusztrálja a fennálló autokratikus oktatási rendszerhez fűződő kritikus viszonyát, és a pedagógiai elvek szerepét matematikatanítási koncepciójában:

> Reasons must be strong, maybe not unrelated to sentences from “a child should not have an opinion” to “a child should have not will.” If this is a correct conjecture, then the issue is a more general one about education, not necessarily school education or school math in particular. (Varga 1982, 30. o.)

A valószínűségszámítás korai bevezetését alátámasztó fontos érv végül, hogy egy a többitől lényegesen eltérő jellegű matematikai gondolkodást mutat be: a véletlen matematikáját.

> Mathematics [...] does not only concern itself with certainties which can be expressed by exact statements but also with uncertain things of a chance character. This sounds strange, because it might be thought that if something is uncertain we can only state uncertain things about it. (Varga 1967a, 2. o.)

Varga – még hosszabban folytatódó – érvelése szemmel látható rokonságot mutat Rényi felvetésével, amelyet Pascal szájába ad a *Levelek a valószínűségről* lapjain:

> A nyomasztó bizonytalanság, amelyről az imént beszéltem, részben onnan származik, hogy az emberek azt hiszik, hogy ha valamit nem tudnak biztosan – márpedig biztosan szinte semmit nem tudnak – akkor nem tudnak semmit. Gondolatmenetem kiindulópontja éppen az, hogy ez tévedés. A részleges tudás is tudás és a részleges bizonyosság is értékes lehet, különösen, ha tudom azt, hogy e bizonyosság milyen fokú. „Hogyan, hát lehet a bizonyosság fokát mérni, számmal kifejezni?” Kérdezheti valaki. Valóban lehet – válaszolom erre –, minden játékos ezt teszi. (Rényi 1973/2005, 115. o.)

A *véletlen matematikájának* gondolata szintén köthető Pólya „plauzibilis következtetésről” vallott elképzeléseihez, vagy Kalmárnak a matematika fallibilizmusáról vallott nézeteihez. Még Péter Rózsánál is megfigyelhető, hogy a matematikai kutatás örömét, a hozzá fűződő kíváncsiságot az ismeretlen, a bizonytalanság érzése táplálja: az első számelméleti megfigyelésektől Gödel és Church tételeiig (vö. II. Rész). Varga Tamás esetében a valószínűségszámítási szituációkban rejlő bizonytalanság szintén azok játékos jellegét erősíti, amint azt a későbbiekben látni fogjuk (§1.4).

Összességében elmondható, hogy a kombinatorika és a valószínűségszámítás tanítása mögött rejlő érvek szorosan kötődnek a reform hátterében húzódó matematikafelfogáshoz: a matematikai témák közti dialektikus kapcsolat, a konkrétból kiinduló absztrakció, a matematikai gondolkodásban rejlő bizonytalanság és a játékosság mind a „heurisztikus” matematikafelfogás lényeges összetevői.

1.2 A kombinatorika és a valószínűségszámítás tanterv

A 6. osztályos tanári kézikönyv hangsúlyozza, hogy a típusfeladatok gyakorlása helyett a kombinatorikában is a matematikai gondolkodásmód fejlesztése az új tanterv elsődleges célja. A kézikönyv tíz lépésben fogalja össze a kombinatorikus gondolkodásmód fejlődésének lépéseit (189-190. o.).

1. Adott feltételeknek megfelelő egy vagy több eset előállítása.
2. Minél több különböző eset előállítása.
3. Az összes lehetséges eset megtalálása.
4. Az esetek rendezése egy vagy több szempont szerint.
5. Az esetek számának keresése.
6. Szemléleti tartalmukban különböző, de matematikailag egyező feladatok megoldása.
7. A matematikai változók rendszeres változtatása (pl. táblázat segítségével).
8. A táblázatban lévő számok közti összefüggések felismerése.
9. Az ilyen összefüggések magyarázata.
10. A felismert törvényszerűségek képletbe foglalása.

Ez a folyamat jó példáját adja a Varga Tamás reformjára jellemző lassú építkezésnek, az absztrakciós folyamat apró lépésekre bontásának. A tanári kézikönyv bírálja a hagyományos középiskolai eljárást, amely e folyamat első fázisainak kihagyásával, rögtön az absztrakt 10. ponttal kezdi a tanítást. Alább (§2) néhány konkrét példán részletesebben is lesz alkalmunk megvizsgálni a kombinatorikus gondolkodás fejlesztésére irányuló tanítási folyamatok felépítését Varga Tamás koncepciójában.

A valószínűségszámítás tanítását szintén a lassú, fokozatos építkezés jellemzi. Egy 1980 körül született cikk szerint[54] a tanterv a következő lépéseket követi:

1. A biztos, lehetséges és lehetetlen események megkülönböztetése.
2. A valószínűbb és kevésbé valószínű fogalmának megkülönböztetése.
3. Az egyenlő valószínűségű esetek fogalma, szimmetriaérvekre alapozva.
4. Kísérletek és események közötti analógiák felfedezése, ekvivalenciaosztályok keresése.
5. Kapcsolat a relatív gyakoriság és a valószínűség fogalma között.
6. Valószínűségszámítás egy eseménytéren.
7. A feltételes valószínűség fogalma.

[54] A cikknek csupán kéziratos változatához férek hozzá, amely nem tartalmaz a megjelenésre vonatkozó utalásokat. Néhány megjegyzésből azonban arra lehet következtetni, hogy a kézirat néhány évvel a reform hivatalos (1978-as) bevezetése után született.

Ismét egy több éven át húzódó folyamatról van szó. Az első néhány fázis még nem a valószínűségszámítás elméletének matematikai fogalmait célozza, sokkal inkább a valószínűséggel kapcsolatos gondolkodással való ismerkedést. Ez lehetővé teszi a téma egészen korai bevezetését, az általános iskola 1. évétől kezdve. Az 5. fázis – az előzőekkel ellentétben – már igényli a törtfogalom ismeretét. A tantervben ez a fázis a tört fogalmának bevezetésével azonos évben, 4. osztályban jelenik meg: a két fogalom így kölcsönösen építi és motiválja egymást, a két matematikai téma között nem annyira hierarchikus, mint inkább dialektikus viszonyt teremtve.

A valószínűségszámítás tanterve több szempontból is a fokozatosság elvét követi: a kombinatorika tantervéhez hasonlóan, az absztrakciós folyamat fokozatossága (amelyet a §2-ban lesz alkalmunk elemezni), ugyanakkor a valószínűségi paradigmák tekintetében is egyfajta fokozatos átmenet figyelhető meg.

1.3 A valószínűségszámítás paradigmái Varga Tamás tantervében

A *valószínűségszámítás paradigmáinak* fogalmát Parzysz (2011) vezette be, a geometria paradigmáinak (Houdement & Kuzniak 2006) mintájára. Parzysz ezáltal újraértelmezi a valószínűségszámítással kapcsolatos klasszikus episztemológiai álláspontokat, egyrészt a „frekventista" megközelítést (P1), amely a valóság megfigyelésén és statisztikai kísérleteken alapul, másrészt a „laplaciánus" vagy „klasszikus" megközelítést (P2), amely elméleti modellre és deduktív bizonyításra épül (bővebben ld. III. Rész 1. Fejezet).

Hasonlóan a geometria példájához (ld. 4. Fejezet), a magyar reform valószínűségszámítás tanterve is a paradigmák közti dialektikus átmenetet igyekszik biztosítani. Egyrészt logikai és kombinatorikai feladatokkal összefüggésben a tanulók már első osztálytól tapasztalatot szereznek egy kísérlet lehetséges kimeneteleinek megkülönböztetésében és összegyűjtésében. Másrészt 2. osztálytól kezdve tényleges valószínűségi kísérleteket is végeznek, és megfigyelik a különböző esetek gyakoriságát. A gyakoriság és relatív gyakoriság fogalmát a tanterv 4. osztálytól vezeti be, a tört fogalmával összefüggésben. A tanterv a javasolt példák között következetesen váltogat olyanokat, amelyek esetében nehéz volna alkalmas matematikai modellt meghatározni, ezért a frekventista megközelítés, a kísérletezés a kézenfekvő, olyan példák, amelyek esetében meghatározhatók egyenlő valószínűségű esetek, és ez lehetővé teszi a valószínűségekkel kapcsolatos logikai levezetést. Mindazonáltal az alsó tagozat folyamán ez utóbbi típusú példák vizsgálata is kísérleteken alapul, bár a feladatok sokszor tartalmaznak egy bevezető, becslő fázist, amelyek a gyerekeket implicit matematikai modellek kigondolására indíthatják, hogy megalapozzák becslésüket. Az alsó tagozaton a valószínűségszámítás tanítása tehát elsősorban a P1 paradigmát követi, de megnyitja az utat a P2 paradigma számára is, mind a logikai és kombinatorikai vizsgálatok, mind a becslési feladatok révén.

> Példák: Hat golyó közül kettő piros, a többi fehér. Két golyó húzunk. Milyen párok várhatók gyakrabban?
> Ha egy könyvet találomra kinyitok, az első sor első betűje magánhangzó lesz-e vagy mássalhangzó? Mi a valószínűbb? (Magyar tanterv 1978, 41. o.)

A valószínűség fogalma mint „olyan feltételezett érték, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik" (Magyar tanterv 1978, 60. o.) az 5. vagy a 6. osztály tananyaga, a tanár döntésétől függően. Frekventista definícióról van tehát szó (amely egyébként szoros rokonságot mutat a Rényi egyetemi tankönyvében leírt definícióval[55]). Ugyanakkor, a biztos és lehetetlen események valószínűségének meghatározása után (relatív gyakoriságuk mintájára, amely 1 ill. 0), a tanterv egyenlő valószínűségű esetek vizsgálatát is előírja, a kísérletek során megfigyelt relatív gyakoriságokat pedig modell alapján számolt valószínűségekhez kéri hasonlítani (tehát összekapcsolja a P1 és P2 paradigmán alapuló tárgyalást). Az általános iskola utolsó éveiben egyre nagyobb teret kap az elméleti modellen alapuló megközelítés; az érveléseket különböző reprezentációs eszközök, elsősorban fadiagram segíti. Ugyanakkor a tanterv végig felhívja a figyelmet a kísérletezés fontosságára, és olyan példák vizsgálatára is, amelyek (az általános iskola szintjén legalábbis) nem redukálhatók egyenlő valószínűségű esetek alkotta egyszerű eseménytérre.

Varga Tamás tantervében tehát a P1 és P2 paradigmák végig párhuzamosan vannak jelen, köztük fokozatos hangsúlyeltolódás figyelhető meg P1 felől P2 irányába, hasonlóan a geometria esetében megfigyelt folyamatokhoz (ld. 4. Fejezet). A paradigmák közötti fokozatos átmenet hátterében Varga Tamás reformjának egyik fő alapelvét figyelhetjük meg: a tapasztalatszerzés fontosságát és a konkréttól az absztrakt felé irányuló lassú, fokozatos átmenet elvét. A kísérleti megközelítés (G1 és P1) valójában nem végcél, hanem eszköz e tantervben[56]. Mind a geometria, mind a valószínűségszámítás tanterv logikai érvelésen alapuló elméleti tárgyalást céloz (G2 ill. P2), de az ehhez szükséges ismereteket és eszközöket

[55] Azt a számot, amely körül egy esemény relatív gyakorisága ingadozik, az illető esemény *valószínűségének* nevezzük (Rényi 1966, 36. o.).

[56] Ez nem szükségszerű: Brousseau kísérletének esetében pl. látni fogjuk, hogy ő a frekventista, statisztikai módszereken alapuló eszközök kidolgozásában sokkal messzebb megy, mint Varga, és jóval kisebb szerepet hagy a laplaciánus megközelítésnek (ld. §3.4).

a tanulók fokozatosan, a konkrét, érzékszervi megfigyelésen alapuló kísérletek segítségével sajátítják el.

1.4 Egy valószínűségszámítási szituáció: kivonás kockadobással

A valószínűségszámítás paradigmái közti kapcsolatot az eredeti, francia nyelvű disszertációban több konkrét, Varga Tamás cikkeiben ill. az 1978-as reformhoz kapcsolódó tankönyvben leírt példán keresztül elemzem (Varga 1970, 24-27. o., Varga 1982, 27-28. o. 31-33. o, magyar tankönyv 6. oszt. 1981, 153-154. o.). Itt csupán egy példa elemzését részletezem. Nem térek ki bővebben a különböző reprezentációs eszközök (táblázatok, fadiagram) használatának elemzésére sem, bár e kérdésnek az eredeti disszertációban valamivel több figyelmet szenteltem.

Varga egyik kombinatorika és valószínűségszámítás tanításáról szóló cikkében leír egy alsó tagozatban játszható játékot, amelynek során kétjegyű számokat kell kivonni egymásból úgy, hogy a különbségük a lehető legnagyobb legyen – csakhogy a két szám számjegyeit kockadobással határozzák meg. Egy kockát dobnak fel négyszer egymás után, a tanulóknak pedig el kell dönteniük, a táblázat melyik négyzetébe írják be az így kapott számjegyeket. A játékot többször ismétlik, a két legsikeresebb játékos pontot kap. A játék biztosította pontverseny során így nagy mennyiségű kísérletet végez el az osztály, a versenyhelyzet pedig stratégiájuk folyamatos fejlesztésére sarkallja a gyerekeket. Észrevehetik, hogy léteznek jobb és kevésbé jó stratégiák, ugyanakkor azzal is szembesülniük kell, hogy biztos nyerő stratégia nem létezik.

A játék a matematikai témák összekapcsolásának tipikus példája: lehetőséget biztosít a kivonás gyakorlására, a számtani művelet tulajdonságainak mélyebb megértésére, ami szükséges a stratégia hatékonyságának fejlesztéséhez; egyúttal a szituáció valószínűségi események tanulmányozására is szolgál, amelyeknek a számok és a rajtuk végzett műveletek adnak értelmezési keretet, ezek segítenek meghatározni a kívánatos és kevésbé kívánatos eseteket.

A feladat játékossága fontos szerepet tölt be ebben a szituációban. Egyrészt a kivonás gyakorlását változatosabbá és élvezetesebbé teszi. Másrészt a valószínűség szempontjából is a devolúció szerepét játssza, hiszen a győzelem vágya motiválja a tanulókat, hogy nyerő stratégiát keressenek, így a különböző kimenetelek valószínűségét elemezzék. A valószínűségen alapuló játékok sajátosságainak megfelelően azonban biztos nyerő stratégia itt sem létezik: ez a bizonytalanság pedig segít fenntartani a játék izgalmát még több lejátszott kör után is. A cikk szövegében valóban több affektív jellegű kifejezés is megfigyelhető (pl. regret, being sorry), amelyek az affektív elemek tanulási folyamatokban betöltött szerepére hívják fel a hangsúlyt.

A szituáció jelentős adidaktikai potenciált tartlmaz: a retroaktív miliőt a versenyhelyzet biztosítja, az eredmények összehasonlítása ad visszajelzést a játékosok által követett stratégiák hatékonyságáról. A miliő által szolgáltatott válaszok azonban nem teszik a választott módszereket igazzá vagy hamissá – a szituáció egyik fő célja éppen annak felismerése, hogy egy stratégia alkalmi sikere nem nyújtja annak végérvényes értékelését. Más szóval, a szituáció egyik célja éppen a miliő korlátozott mértékű retroaktivitásának felismerése.

A stratégiák ellenőrzése történhet a kísérletek sokszori ismétélésével (P1), vagy valamiféle elméleti modell felállításával (P2). Varga kezdettől felvet néhány egyszerű logikai érvet (pl. hogy a 6-ost mindenképp érdemes az első helyre, az 1-est az utolsóra írni), de amelyek önmagukban nem elegendőek egy hatékony stratégia kidolgozásához. Ez kísérletek elvégzésére motivál, ugyanakkor az ismételt kísérletek segíthetnek az elméleti modell részletesebb kidolgozásában. A feladat tehát a két paradigma összekapcsolására is jó példát szolgáltat. Ugyanakkor a probléma komplexitása nem teszi azt röviden lezárhatóvá: Varga javaslata szerint tanulmányozása akár több éven át is húzódhat, mindig újabb és újabb eszközökkel vizsgálva a problémát, amely így hosszú ideig nyitott, csak részben, bár egyre meggyőzőbb mértékben megoldott probléma marad.

> Their intuitions lead them to different strategies which are then tested at further games. At somewhat higher level, still in the elementary school, the strategies can be formulated more precisely, incorporated into computer programs and tested more precisely in a great number of trials. At a much higher level calculating the expected values related to specific strategies and finding the best strategy may be the subject of a research for undergraduates. (Varga 1982, 29. o.)

Azon kevés esetek egyike ez, ahol Varga hosszú, összetett frekventista folyamatot javasol (még számítógépeket is bevetve), bár a feladat folytatását a cikkben nem dolgozza ki részletesen – mindenesetre sokkal kevésbé, mint Brousseau a saját kísérlete esetében (ld. (§3.4).

2 PROBLÉMASOROZATOK VARGA TAMÁSNÁL: A KOMBINATORIKA PÉLDÁJA

A valószínűségszámítás tanterv elemzése után visszatérek a kombinatorika témájához, hogy a hosszabb tanítási folyamatok felépítését vizsgáljam. A korábbi fejezetekben rámutattam, hogy Varga tamás koncepciójában a tanulási folyamat szervezése jelentős részben problémák rendezett sorozatán alapszik. Most néhány kombinatorikai feladatsor példáján vizsgálom, milyen fő rendezőelvek szervezik e sorozatokat, és mi ezek szerepe a tanítás folyamatában. Első példám az 1. osztályos tanári kézikönyv kombinatorika fejezete, amely elég rövid ahhoz, hogy egészében lehessen elemezni, és nem csupán átláthatóbb a szerkezete mint a könyv legtöbb más fejezetéé, de expliciten is tartalmaz a feladatok sorbarendezésének elveire vonatkozó utalásokat. Ezután röviden kitérek két másik, a felsős tankönyvekből származó példára, az 5. és a 6. osztályos tankönyvek első, kombinatorikai témájú fejezetére.

2.1 Kombinatorika az alsó tagozaton: egy játékos jellegű problémasorozat

Az elsős tanári kézikönyv kombinatorika fejezetének (Magyar kézikönyv 1978, 243-258. o.) legfeltűnőbb sajátossága talán a feladatok nagy változatossága. A könyv kifejezetten említi is, hogy a tapasztalatok sokfélesége, „a szemléleti változatosság […] az absztrahálásnak egyik fő alapja” (Magyar kézikönyv 1978, 248. o.). A javasolt feladatok minden érzékszervet igénybe vesznek: a manipulációt igénylő és vizuális jellegű tevékenységek mellett találunk íráshoz és zenéhez fűződőket is. A könyvben leírt szituációk a kisgyerekek számára ismerős, játékos jellegű tevékenységekből indulnak ki (színezés, építés elemekből, zene), és a legkülönbözőbb művészeti ágakkal is kapcsolatban állnak.

A játékosság fontos szerepet tölt be ezekben a feladatokban. A könyv számos affektív jellegű kifejezést használ (pl. örömmel, kíváncsiság stb.), a gyerekek öröme fontos érvként tűnik fel egy-egy tevékenység mellett. A kisgyerekek figyelmének, türelmének korlátait szintén hangsúlyozzák a szerzők. A feljebb elemzett valószínűségszámítási példához hasonlóan a verseny itt is elő-előkerül, a matematikai problémák felmerülését szolgálja: például a minél több különböző torony építésére irányuló verseny motiválja az összes lehetséges eset keresését, és így felveti az esetek számának kérdését (244. o.).

A játékosság így többféle értelemben, többféle szinten is jelen van a tanítás folyamatában. Egyrészt maga a szituáció épülhet játékszabályokra (pl. egy verseny esetében), ahol a játék egy matematikai probléma felvetését szolgálja[57]. Másrészt a szabad, örömteli, kreatív

[57] Ebben az értelemben beszél Pelay (2011) „didaktikai és játékos szerződésről”.

alkotótevékenység, amely a művészi alkotással is rokonságba állítható, szintén játékos jelleget kölcsönöz a könyvben tárgyalt szituációknak, hasonló értelemben, mint ahogy Péter Rózsa beszél a matematikai alkotás játékos jellegéről a *Játék a végtelennel*ben. Végül a változatosság, a tapasztalatok sokfélesége szintén örömforrás: a játékosság így nem csak a különálló szituációkban, hanem a hosszabb tanítási folyamatok felépítésében is szerepet játszik.

A kombinatorika fejezetet szervező problémasorozat szerkezete komplex, legalább kétszintű rendezés figyelhető meg benne: egy ’globális’, amely a különböző típusú, különböző eszközt használó szituációkat rendezi sorba, és egy ’lokális’, amely az egyes eszközökhöz kapcsolódó különböző problémákat állítja sorrendbe, így a feladatsorban több alsorozatot alkotva. Ez a kettős szerkezet jól azonosítható a ● és ○ jeleknek köszönhetően, amelyek a kézikönyv megfogalmazása szerint a „feladatokat” és azok különböző „variációit” jelzik. Az alsorozatok elemei ezenkívül sokszor (kisbetűk segítségével) számozva is vannak.

A globális szint szervezésében a változatosság játszik kulcsszerepet, de a szerzők más szempontot, nevezetesen az absztrakció fokozatosságának elvét is figyelembe veszik:

> Kezdetben különféle elemekből valóban építhetnek a gyerekek. Később sort keríthetünk olyan problémákra is, ahol színezéssel, jelkártyák kirakásával vagy jelek írásával helyettesíthetik az építgetéseket. Ilyen értelemben érdemes követni az itt leírt feladatok sorrendjét. (Magyar kézikönyv 1978, 246. o).

A lokális szintű rendezést a toronyépítés feladatának példáján mutatja be részletesebben a kézikönyv. A következő lépéseket írja le:

- szabad játék, építgetés az elérhető elemekből. A szerzők szerint a gyerekek gyakran törekszenek minél magasabb tornyok építésére.
- egy feltétel bevezetése: adott magasságú tornyok építése. A gyerekek minél több tornyot igyekeznek építeni
- annak felismerése, hogy ezek a tornyok szín szerint különfélék lehetnek. Minél több különböző eset keresése.
- az összes különböző lehetőség, a lehetőségek számának keresése.

Ez a folyamat hosszabb időn át húzódhat, akár több évet is igénybe vehet. A szerzők szerint az utolsó fázis, a tényleges kombinatorikai probléma még túl nehéz lehet az elsős gyerekeknek, ezért érdemes későbbi évekre hagyni – az esetek megkülönböztetésével, különböző esetek keresésével kapcsolatos tapasztalatszerzés azonban már 1. osztálytól előkészíti a kombinatorikai problémák későbbi megoldását (ld. a kombinatorikus gondolkodás fejlődésének fázisai, §1.2). A szerzők ugyanakkor azt javasolják, hogy többi kombinatorikai jellegű probléma esetében is hasonló fázisokat követve épüljenek fel a feladatok.

A megkötések bevezetésével kapcsolatos fokozatosság mellett az ’alsorozatokat’ más elvek is szervezhetik. A kézikönyv javasolja, hogy vezessünk be apróbb módosításokat az eszközökben (pl. változtassuk meg a felhasználható elemek színét), mivel „a kisgyerekek számára gyakran az is új problémát jelent, ha a lényeget egyáltalán nem érintő tulajdonságot változtatjuk meg” (Magyar kézikönyv 1978, 248. o.). Más esetekben a matematikai szempontból lényeges változók variálását javasolja (pl. a színeknek vagy a torony emeleteinek száma). A variációk sorrendje bizonyos esetekben rögzített a könyv szerint, más esetekben szabadon választható. A könyv a különböző alsorozatok közti kapcsolatokat is jelzi: pl. a zászlószínezés b) feladata a toronyépítés e) feladatának felel meg stb.

Itt jegyzem meg, hogy a fenti példán jól megfigyelhető, milyen értelemben használja Varga a „probléma” fogalmát: egy feladat akkor tekinthető „problémának”, ha a gyerekek számára újként tűnik fel, ha nehézséget okoz, mivel a megoldás módszerét keresni kell. Két további példát is idézek ezzel kapcsolatban:

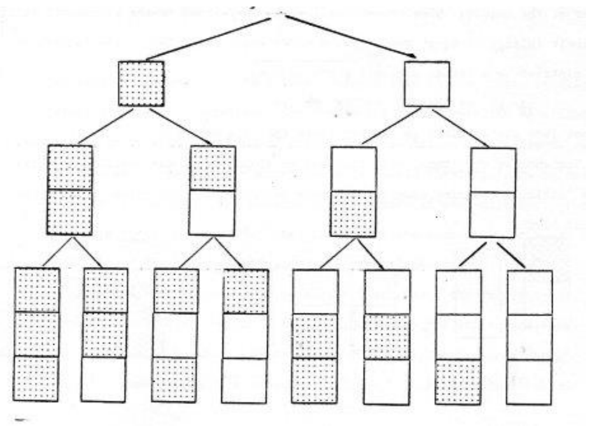
> *Egy fehér, egy rózsaszínű és egy világoskék rúdból hányféle utat építhetünk?*
> Mint az előbbi *d* feladatban, úgy itt is 3 elemet kell sorba rakni. Matematikailag persze mindegy, hogy függőlegesen (egymás fölött) vagy vízszintesen (egymás után, egyvégtében) helyezkednek-e el az elemek. Az is mindegy, hogy ott egyforma méretűek voltak, itt pedig különbözőek. Mindez nem változtat azon, hogy itt is, éppúgy mint ott, 6 eset lehetséges.
> A gyerekeknek azonban ez mégis két egészen más probléma. Még az is más nekik, hogy 6 különálló utat építenek (amelyek esetleg különböző irányokba futnak szét) vagy egymás mellett vannak a rudak („szőnyegezés”). (Magyar kézikönyv 1. oszt. 1978, 250. o.)

> Három különböző színű részből álló házakat színezzenek a gyerekek! A színezés helyett ragasztós hátú színes papírelemeket is felragaszthatnak. […]
> Amikor zászlókat színeztek, megkönnyítette a megoldást a jól követhető sorrend. Most nem a sorrendet nézik, hanem azt, hogy mit milyen színűre festenek: piros, sárga vagy lila a háztető, a fal vagy az ablak. Ha kikötjük, hogy mindegyik különböző színű legyen, akkor ez is a *Toronyépítés* d) feladatának megfelelője. (Magyar kézikönyv 1. oszt. 1978, 252. o.)

Az effajta variációk célja épp a látszólag különböző problémák közti analógiák felismerése, azok összekapcsolása, egyesítése egy új, absztraktabb probléma formájában. Ahogy azt feljebb már idéztem, a szerzők szerint „a szemléleti változatosság (ugyanannak a problémának egy-egy külsőleg új alakja) az absztrahálásnak egyik fő alapja” (Magyar kézikönyv 1978, 248. o.). Jól látszik ezen a példán, hogy az absztrakció Varga számára *folyamat*, amely különböző problémák közti analógiák felismerésére, azok fokozatos általánosítására épül. Hasonló folyamatról van itt szó, mint amelyet Péter Rózsa ír le a *Játék a végtelennel*ben („A formula felírása az örömünk kifejezése azon, hogy mindezt egyetlen gondolat segítségével tudjuk megoldani”).

Így a ’tudományos’ szempontból azonos problémák a gyerekek szintjén különbözőkként foghatók fel, és mindegyik megoldása érdemi matematikai tevékenységnek tekinthető. A problémák sorbarendezése, variálásuk, a köztük lévő (időbeli) távolság változtatása azok a tényezők, amelyek az absztrakció folyamatát előmozdítják. Ez lehet a magyarázata annak, hogy a problémák sorbarendezése a didaktikai tevékenység fontos összetevője, és ez magyarázhatja az intézményesítési fázisok ritkaságát illetve tudatos késleltetését. Hangsúlyozni kell azt is, hogy egy-egy feladat „probléma”-volta a gyerekektől is függ: míg néhányan azonnal észrevehetik a más problémákkal való kapcsolatot, másoknak ehhez további önálló munkára vagy tanári segítségre lehet szükségük. Feltehetően ez a megfontolás az egyik oka annak, hogy a problémasorozatok felépítése a magyar reform koncepciója szerint legalább részben a tanárok feladata: a kézikönyv csak ötleteket, mintákat ad, de a tényleges felépítést az osztály sajátos igényeinek megfelelően a tanárnak kell meghatároznia.

A toronyépítés példája Varga több cikkében is felbukkan. A korábban már idézett 1982-es cikkben részletesen felvázol egy hosszú távú, több éven átnyúló tanítási folyamatot, amely az első kísérletezésektől az esetek számának vizsgálatán és a probléma különböző matematikai összetevőinek szisztematikus variálásán át általános képletek felírásáig terjed. Varga e cikkben azt is részletesen tárgyalja, milyen szerepet játszanak a különböző reprezentációs eszközök (táblázatok, fadiagramok) e folyamatban. A fadiagram bevezetését a különböző színösszetételű tornyok rendszerezése motiválja, majd a fadiagram nyújtotta rendszerezés szolgál az esetek számának bizonyításaként.



III.5.10. Ábra (Varga 1982, 19. o)

2.2 Két további példa a felső tagozatból

A 4. fejezetben láttuk, hogy a felső tagozatos tankönyvek számos fiktív osztálytermi dialógust tartalmaznak. A most elemzendő példák azonban nem ilyenek: az 5. és a 6. osztályos tankönyv első, kombinatorikai témájú fejezetei sem leíró, sem dialógusszerű magyarázatot nem tartalmaznak, csupán egy vagy két oldal terjedelmű feladatsorból állnak.

Az 5. osztályos kombinatorika feladatsor szembetűnő sajátossága a változatosság: a feladatok változatos, többségében a gyerekek számára ismerős, élvezetes témákat érintenek, mint például a kirándulás, a sportversenyek vagy a virágszedés. Más feladatok inkább a gyerekek hétköznapi életéhez kapcsolódnak, még egyfajta 'állampolgári nevelés' szándéka is kiolvasható belőlük, például a diákparlamenti választásról vagy a villamosjegy lyukasztásáról szóló feladat esetén. A feladatok játékos jellegét a bennük szereplő nevek is igazolják, amelyek tréfásak vagy népmeséket idéznek (pl. Hencida, Boncida, Piripócs)[58].

A feladatok matematikai tartalma hasonlóan változatos. Bár többségében kombinációra vezető matematikai problémákról van szó, azok nem egy típusfeladat paradigmatikus példái: minden egyes feladat új gondolatot, új megoldási módszert igényel, és csak lassanként, több feladatat független megoldása után ismerhetők fel köztük bizonyos analógiák.

A 6. osztályos tankönyv feladatsora más jellegű. Itt minden feladat ugyanabba a kontextusba ágyazódik (gyerekek sorbaültetése egy padon, majd egy asztal körül), a feladat szövegének változtatása nyíltan utal a matematikai tartalom változására, a feladat fő változójának szisztematikus variálását pedig táblázatok segítik. Míg az 5. osztályos feladatsor esetén a problémák változatosságán és különféle megoldási módszerek keresésén volt a hangsúly, a 6. osztályos feladatsor célja inkább a kombinatorikai problémák rendszerezése, szisztematikus variálása és az alkalmazott megoldási módszer általánosítása.

E két feladatsor esetében tehát az első osztályos tanári kézikönyvben leírthoz hasonló folyamatot figyelhetünk meg: a tapasztalatok és megoldási módszerek sokféleségéből kiindulva, azok rendszerezése vezet fokozatos általánosításukhoz.

Megjegyzem végül, hogy az 5. osztályos feladatsor, amely a felső tagozat első éves tankönyvét nyitja meg, akár egyfajta hosszú távú didaktikai szerződés megalapozásában is szerepet játszhat, hasonlóan Revuz tankönyvének cserkészekről szóló példájához (ld. 4. Fejezet). Így értelmezve a szöveget, a magyar tankönyv azt sugallja a tanulóknak, hogy matematikaórán szórakoztató, változatos témákkal fognak találkozni, a felmerülő matematikai

[58] Bár valóban létező helységnevekről van szó, ezek elsősorban szólásokból, mesékből ismertek.

problémák egyedi, kreatív megoldást kívánnak, és az eredeti megoldási ötletek értéket képviselnek.

3 E TÉMÁK FELBUKKANÁSA FRANCIAORSZÁGBAN AZ 1970-ES ÉVEKBEN

Amint azt korábban már megjegyeztem, az 1969-70-es francia tanterv az *école primaire* (alsó tagozat) és a *collège* (felső tagozat) szintjén nem tartalmaz kombinatorikai és valószínűségszámítási fejezeteket. Parzysz (1997) viszont arra hívja fel a figyelmet, hogy a valószínűségszámítás épp a „mathématiques modernes" reformmal jelenik meg a gimnáziumok tantervében, axiomatikus formában, mint a halmazelmélet és az axiomatikus-deduktív módszer általános alkalmazhatóságának egyik példája. Az alacsonyabb évfolyamok tantervének fő célja azonban éppen e módszer tanulmányozása, és az alapvetőnek tekintett struktúrák megismerése. Így érthető, hogy az école primaire és a collège tanterve ezekre koncentrál: az *école primaire*-é a számfogalom felépítésére, az *collège*-é a valós számok és az affin és euklideszi geometria struktúrájának algebrai jellegű, axiomatikus tárgyalására. Az 1960-as évek matematikaoktatási kísérletei is ezeket a témákat érintik elsősorban, számtalan kísérlet foglalkozik például a tizedestört fogalmának felépítésével (Barbazo & Pombourcq 2010, 85. o.).

Az 1977-es reform a nagy struktúrák és az axiomatikus módszer tanítását háttérbe szorítja, helyette igyekszik teret adni a problémamegoldásnak. A kombinatorika ilyen keretek között jelenik meg: bár a tantervben továbbra sem szerepel, bizonyos tankönyvek kombinatorikai problémákat is beemelnek tankönyveik „problémáknak" szentelt fejezetébe. Eközben a matematikaoktatási kísérletek is nagyobb figyelmet szentelnek a kombinatorika és a valószínűségszámítás témájának: az ERMEL-projekt például több kombinatorikai problémát is beemel tantervébe, Brousseau pedig az 1970-es évek elején valószínűségszámítás tanításával kapcsolatos kísérletekbe kezd. Több ilyen témájú konferencia megrendezésére is sor kerül ebben az időszakban Franciaországban; Varga Tamás maga is meghívást kap ilyen rendezvényekre, és több hasonló témájú kötetet publikál francia szerzőkkel közösen.

3.1 Kombinatorikai problémák az 1977-es tankönyvekben: a *Math et calcul* példája

A 3. fejezetben már volt szó Eiller *Math et calcul* című, a korszakban népszerű tankönyvsorozatáról. Az 1977-es kiadású első osztályos tanári kézikönyv egy új, „szituációk" címet viselő fejezetet is tartalmaz, amely többek között „logikai és kombinatorikai játékokat" is leír. A fejezet bevezetője részletesen kifejti, mi a tanár és a tanulók feladata e „szituációk” során. A szerzők szerint a tanulók ilyenkor maguk fogalmaznak meg kérdéseket és hipotéziseket, maguk választják a megoldáshoz felhasználandó matematikai eszközöket, és önállóan vagy csoportban ellenőrzik megoldásaikat, miközben a tanár szerepe a tanulók megfigyelése, bátorítása, kíváncsiságuk felkeltése és óvatos útmutatás a nehezebben boldoguló tanulók számára. Az itt leírt alapelvek az adidaktikai szituáció modelljét idézik – a konkrét szituációk leírása azonban vajmi kevés segítséget ad ezen alapelvek gyakorlatba ültetéséhez.

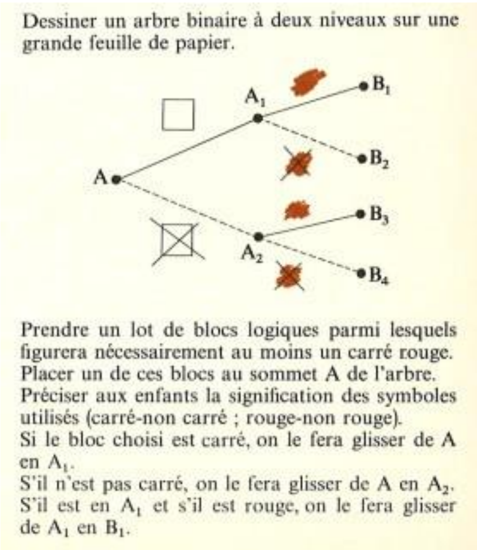
Az első példa a Varga Tamástól már ismert toronyépítés. A magyar tanári kézikönyvben leírtakhoz hasonló fázisokat találunk itt is: szabad játék, egy torony felépítése, egy második torony felépítése, az összes különböző felépítése. A feladat mégis lényegesen különbözik magyar megfelelőjétől. Erről már a leírás nyelvi sajátosságai is árulkodnak, amelyek az ismételt műveltető szerkezet használatával („faire représenter”, „faire trouver”) erős tanári irányítást sugallnak.

Az egyik lényeges különbség, hogy a gyerekek csak három építőelemet kapnak: így minden torony felépítése után szét kell bontaniuk azt, az összehasonlítás legfeljebb rajz formájában lehetséges, ami mindjárt a folyamat elején a manipulóciótól a reprezentáció felé tolja a hangsúlyt. A másik lényeges különbség az „építs annyi tornyot, amennyit csak tudsz” fázis hiánya: a második torony után Eiller rögtön az összes eset megkeresésére tér rá. Így a kombinatorikai probléma motiválatlanul jelenik meg, a tanár instrukciójára, míg Vargánál épp a minél több torony építésére irányuló verseny hívja azt elő. A magyar kéziköny kommentárjai jelzik, hogy az összes eset megkeresése még túl nehéz feladat lehet az első osztályos tanulóknak, hiszen annak bizonyítását kívánja, hogy más eset nem lehetséges – ez Varga 1982-es cikkében is hosszú kutatási folyamat eredménye. Eiller könyvében nem merül fel e bizonyítás igénye: eszerint vagy magától értetődőnek tekinti, hogy minden eset meg lett-e építve, vagy a tanár jóváhagyására bízza ezt a kérdést.

A két szituáció látszólagos hasonlósága ellenére Eilleré tehát jóval kevesebb adidaktikai potenciált nyújt. Bár az általános instrukciók a tanulók autonómiáját írják elő a matematikai fogalmak felépítésének folyamatában, a konkrét példa, Eiller korábban elemzett szituációihoz hasonlóan, a tanár direkt irányítását igényli, és az illusztratív szerepet betöltő fizikai aktivitáson (a tornyok megépítésén) túl kevés szerepet hagy a tanulóknak, akiknek sem kérdések feltevésére, sem módszereik megválasztására, sem megoldásuk önálló ellenőrzésére nem nyílik sok alkalmuk.

Egy másik példában Eiller a fadiagram lehetséges bevezetését írja le. Hangsúlyozza azonban, tapasztalatokra hivatkozva, hogy a reprezentációs eszközt nem lehet az alsó tagozatos gyerekekkel felfedeztetni – viszont ha megmutatják nekik, szerinte jól tudják használni logikai tevékenységekhez.

Láttuk, hogy Varga a toronyépítés szituációján keresztül megkísérli felfedeztetni a fadiagramot a tanulókkal: ott a tornyok rendszerezésének problémája vezet el ehhez a reprezentációs eszközhöz: ahol a fa a tornyok építésének folyamatát ábrázolja emeletről emeletre. Eiller logikai szituációjának esetében hasonló eljárás nem lehetséges, mivel nem egymásra helyezett elemekről, hanem ugyanannak az elemnek a különböző tulajdonságairól van szó.


Dessiner un arbre binaire à deux niveaux sur une grande feuille de papier.

Prendre un lot de blocs logiques parmi lesquels figurera nécessairement au moins un carré rouge. Placer un de ces blocs au sommet A de l'arbre. Préciser aux enfants la signification des symboles utilisés (carré-non carré ; rouge-non rouge).
Si le bloc choisi est carré, on le fera glisser de A en A_1.
S'il n'est pas carré, on le fera glisser de A en A_2.
S'il est en A_1 et s'il est rouge, on le fera glisser de A_1 en B_1.

III.5.11. Ábra (Eiller kézikönyv 1977, 170. o)

Összességében azt mondhatjuk, hogy a kombinatorika ugyan megjelenik Eiller tankönyvében, de csak alkalmilag, a tanterv többi fejezetétől elszigetelten. A kombinatorika megjelenése összefügg a promlémamegoldásnak szentelendő nagyobb figyelemmel – a fenti elemzések azonban azt mutatják, hogy a kifejezett szándék ellenére a tanári kézikönyvben leírt példák a problémamegoldás tanításához kevés segítséget adnak.

3.2 A kombinatorika az ERMEL-projektben

Az INRP 1970-es években folytatott kísérleti projektjének keretei közt publikált kötetekről szintén volt szó már a 3. fejezetben. Az ERMEL is tartalmaz kombinatorikai problémákat, de nem más témáktól elszigetelten, hanem azokkal integrálva, általában a számfogalom előkészítőjeként: a Varga Tamástól ismerős házépítés például az 1. osztályos kötetben, a csoportosításokról és rendszerezésekről szóló fejezetben található, a „sziluettek öltöztetése” pedig a szorzást készíti elő a 3. osztályos kézikönyvben. Hasonlóan a 3. fejezetben látott példákhoz, itt is komplex, több szakaszból álló szituációkról van szó, amelyek jelentős adidaktikai potenciált tartalmaznak. Az elemzés részleteit mellőzve kiemelem, hogy e szituációk számos hasonlóságot mutatnak a magyar kézikönyvben leírtakkal, hasonló fázisokból épülnek fel, amelyek középpontjában a lehetséges esetek osztályozása, rendszerezése áll. Az ERMEL-ben azonban a hatályos francia tantervnek megelelően ezek a problémák nem alkotnak önálló matematikai témát, mint Varga Tamás esetében: a számfogalom és a számírás tanulásának előkészítéséhez járulnak hozzá, és legfeljebb egy-két hasonló típusú probléma tárgyalása után a könyv más, számfogalmat építő feladatokra tér át.

Figyelemreméltó különbség az is, hogy a magyar kézikönyvvel ellentétben, amely nem csak a manipulációnak, hanem a különböző érzékszervek stimulálásának is nagy teret enged, az ERMEL inkább a reprezentációra helyezi a hangsúlyt. A „házépítés” szituáció esetében, bár eredetileg a logikai készlet elemeiből épülnek a három építőelemből álló házak, az ERMEL azt javasolja, hogy minden típusú elemből csak 1-1 álljon a gyerekek rendelkezésére, ezzel motiválva őket arra, hogy a megépített házakat rajzos formában ábrázolják. (A *Math et calcul* szituációjával ellentétben azonban az ERMEL-ben leírt szituáció központi jelentőséget tulajdonít a lehetséges esetek rendezésének és osztályozásának, aminek a tanulmányozása tulajdonképpen a szituáció fő célja. Ehhez a rajzokat szétvágják, és a házakról készült rajzokat csoportosítják.) Ahogy azt korábban láttuk, az ERMEL szerzői szerint a matematika mindenekelőtt *írott nyelv*: ez a felfogás magyarázatot adhat a két koncepció közti különbségre.

3.3 Varga Tamás francia nyelvű pulbikációi: eszmecsere a két ország között

A francia kézikönyvekben talált kombinatorikai szituációk feltűnő hasonlóságot mutatnak a Varga Tamásnál és a magyar kézikönyvben leírtakkal – a hasonlóság pedig feltehetően nem a véletlen műve. Korábban már volt szó Varga francia nyelvű publikációiról: több könyve jelent meg az 1970-es évek elején Franciaországban a kombinatorika és a valószínűségszámítás témájában, amelyeket társszerzők segítettek a francia viszonyokra alkalmazni[59] (Dumont & Varga 1973, Glaymann & Varga 1973). A Dumont-nal készült munkalap-sorozat és a hozzá

[59] A szerzők közti munkamegosztásról részben a kötetek előszava, részben Varga 1975-ös kéziratos önéletrajza, részben Glaymann-nak egy Varga kandidátusi értekezését kísérő igazolása tájékoztatnak: eszerint a könyvekben leírt feladatok nagyobbrészt Vargától származnak. Glaymann az I. fejezet 5. alfejezetét és a III fejezetet vallja magáénak közös könyvükből, Dumont esetében úgy tűnik, a teljes anyag a magyar matematikaoktatási kísérletekből származik.

tartozó tanári kézikönyv ráadásul az INRP-ben született, az ERMEL-projekt irányításának helyszínén. Ezekben a kötetekben megtalálható számos korábban elemzett szituáció, többek között a toronyépítés egyik változata és a házépítés is (Dumont & Varga 1973a, 25-26. és 85-98. o.).

Természetesen e kötetek puszta léte még nem igazolja, hogy valóban ezek szolgáltak a francia kézikönyvek forrásául. Lehet szó más közös forrásokról is: az öltöztetős feladat például Brousseau és Lucienne Félix egy korábban megjelent kötetében is felbukkan (1972, 72-77. o.). Mindazonáltal az a tény, hogy egy magyar szerző többször meghívást kap Franciaországba, kifejezetten abból a célból, hogy a kombinatorika és a valószínűségszámítás témájáról adjon elő és publikáljon, valószínűsíti, hogy meghívása éppen munkáinak franciaországi terjesztését szolgálta. Brousseau cikkét elemezve egyébként látni fogjuk, hogy kifejezi kritikáját Glaymann és Varga művével szemben, a valószínűségszámítás tanítását illetően. A kritika tartalmától függetlenül (amelyre a következő pontban még visszatérek), Brousseau-nak ez a megjegyzése is igazolja, hogy legalábbis szűkebb szakmai, didaktikai körökben Varga e művei ismertek voltak Franciaországban.

3.4 Brousseau kísérlete a valószínűségszámítás tanítására

Guy Brousseau az 1973-74-es tanévben vezetett egy kísérletet a valószínűségszámítás tanításáról az École Jules Michelet kísérleti iskolában, két párhuzamos 4. osztályban, amelyek közül az egyiket felesége, Nadine tanította. A kísérletet a következő tanévben megismételték. A (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002) tanulmány erről a kísérletről (pontosabban a Nadine Brousseau által tanított változatról) számol be harminc év távlatából visszatekintve. Bár széleskörű ismertség híján a közoktatásra feltehetően kevés hatást gyakorolt, az IREM-ek közegében végzett kísérleteknek minden bizonnyal jellegzetes példája ez a projekt. Figyelemreméltó továbbá olyan szempontból is, hogy Brousseau didaktikai elméletének kialakulásában jelentős szerepet játszott (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002, 411. o.)

Mivel a valószínűségszámítás nem szerepelt az 1970-es évek alsó tagozatos tantervében, a kísérletet nem a matematikaóra keretében, hanem a készségfejlesztésre szánt idősávban valósították meg, egy körülbelül 30 alkalmas, különböző időtartamú foglalkozásokból álló, hosszabb tanítási folyamat formájában. A szerzők 6 fázisra osztják ezt a folyamatot:

i. « An introduction to hypothesis testing » (5 alkalom)
ii. « Modelling and experimenting » (3 alkalom)
iii. « Graphic representation of long series » (8 alkalom)
iv. « Convergence and statistical decision » (4 alkalom)

v. « Decision intervals » (5 alkalom)
vi. « Events and their probabilities » (7 alkalom)

A fázisok elnevezése önmagában is utal arra, hogy alapvetően P1 paradigmabeli munkáról van szó. Valóban egy egyetlen problémából kiinduló hosszú, kísérletezésen alapuló folyamatot látunk, amely komplex statisztikai számítások és különféle statisztikai jellegű reprezentációs eszközök felhasználását igényli. Csupán az utolsó, 6. fázis épül laplaciánus modellre, és csak itt kerülnek szóba további, a kiindulótól eltérő jellegű valószínűségszámítási problémák – de mivel ezt a fázist a szerzők a többinél hagyományosabbnak ítélik, csak igen vázlatosan írják le a cikkben.

A kiinduló szituáció a következő. A tanár a gyerekek szeme láttára megtölt 3 zsákot egyenként 5-5 golyóval. A golyók feketék illetve fehérek, de a zsákokba töltést a tanár úgy végzi, hogy az egyes csomagok pontos összetételét senki ne ismerje. A gyerekek feladata, hogy ismételt húzások segítségével kiderítsék az egyes zsákok összetételét.

Az első két fázis során a gyerekek fokozatosan fejlesztik módszereiket. Túllépnek bizonyos fogalmi nehézségeken (pl. megértik, hogy a húzások függetlenek, az egyes húzások eredményei nem befolyásolják a következő kimenetelét), különböző technikákat dolgoznak ki a húzások csoportosítására, lejegyzésére, lassan kialakul a gyakoriság fogalma. A kísérletnek ez az első szakasza adidaktikai jellegű:

> The “natural” character of the dialectic set up between the past, the constitution, and the future of a simple randomizer let the professor leave these first phases entirely in the hands of the students. Some will find this phase a-didactic, conforming fairly well to constructivist theses. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002, 383. o.)

A 3. fázis azonban intézményesítés jellegű, a tanár közvetlen beavatkozásával. A tanár közreműködik a kísérleti módszer rögzítésében, amelyet a továbbiakban nagy számú újabb kísérletre alkalmaznak. A gyerekek által kidolgozott módszer – a húzások ötösével történő csoportosítása – helyett a tanár osztásos módszert javasol, ezzel a relatív gyakoriság fogalmát, az intézményesített matematikai módszert közelítve, amelynek azonban a tanulók ekkor még nem látják az előnyeit. A szerzők ezen a ponton számolnak be a legkomolyabb nehézségekről, amelyek a kísérlet folyamán felmerültek:

> At the end of the eleventh session the lassitude of the students is very apparent. They are more and more reluctant to carry out all these computations: additions and divisions, especially since they haven’t had the time to reflect on what they could do with the results obtained. They miss the early days of the red thread, when each day brought questions and novelties.

> They urge the teacher to open the sacks, they claim to be certain of their contents. To which the teacher offers the counter-argument: “If you are sure of the composition of the sacks (or the bottles) there is no need to open the sacks.” The situation becomes strained. The students consider that there has been a sort of breaking of a contract by the teacher.
>
> […] it is clear to the students and to the teacher that the pursuit of the drawings doesn’t produce the expected revelations and that in the conditions nobody knows very well any more why to all those drawings and especially why to make any more. There’s a discrepancy between the pretty strong conviction of knowing the contents of the sacks and the impossibility of proving the validity of that conviction.
>
> At this moment the teacher needs to clarify the terms of the reasoning which supports the students in their strategy of continuing drawings, and she needs to hold fast to her project of not opening the bottles. The reasoning is this: If you are really convinced that you are right,
>
> (1) there is no need to open the bottles;
>
> (2) but you can prove that you are right by showing that you can predict some things about what will happen in the next drawings, e.g., in 100 drawings there will be more whites than blacks in this bottle.
>
> If the statistics tell you how the bottle is made, then knowing how the bottle is made will let you predict the next statistics! (p. 387-388)

Következetes frekventista megközelítésről van szó tehát, amely szükségessé teszi e hosszú és monoton jellegű munkát. A szituáció legfőbb nehézsége mégis az, hogy az ellenőrzés kritériumai nem világosak a gyerekek számára. Elsősorban ez látszik elkedvetleníteni a gyerekeket: habár elfogadták egy adidaktikai szituációban a rájuk háruló felelősséget, a miliő immár nem tűnik számukra kellően retroaktívnak, nem remélik, hogy kielégítő választ kapnak a miliővel folytatott interakcióból. A probléma gyökere a szituáció valószínűségi jellegében rejlik, így pedig éppen a tanulási folyamat egyik fő célját érinti: a diákok bevezetését a valószínűségszámítás sajátos gondolkodásmódjába, a véletlen matematizálásának módszereibe.

Brousseau következetesen kiáll amellett, hogy amint a valóságban sem lehet közvetlenül ellenőrizni egy véletlenszerű jelenség mögött rejlő törvényszerűségeket, úgy itt is indirekt, statisztikai módszerekkel kell a zsákok összetételét ellenőrizni. A következő fázisokban különböző elemzési eszközöket – táblázatot, grafikont – és számítógépes modellezést vezet be, és megalapozza a konvergencia és a döntési intervallum fogalmát. A folyamat során adidaktikai és intézményesítő fázisok váltogatják egymást.

Az utolsó, 6. fázis célja a zsákok összetételét elemző szituáció során felmerült ismeretek átvitele más kontextusokra. Ezt a fázist azonban, amely a szerzők szerint a korábbiaknál „átlagosabb”, a cikk nem részletezi.

3.4.1 *Hosszútávú tanítási folyamatok: Varga és Brousseau koncepciójának összehasonlítása*

Brousseau kísérlete több közös vonást mutat a Varga Tamás-reform keretében leírt tanítási folyamatokkal, egyúttal néhány figyelemreméltó különbség is megfigyelhető a két koncepció között.

Ami a valószínűségszámítás tanítását illeti, mindkét szerző hangsúlyozza, hogy itt sajátos, a matematika többi ágától eltérő gondolkodásmód tanításáról van szó (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002, 397. o). Mindkét koncepcióban megfigyelhető a különböző valószínűségszámítási paradigmák közötti átmenet, habár jelentős hangsúlyeltolódással: míg Varga számára a hosszútávú cél a P2 paradigma látszik lenni, amelyhez a P1 paradigmabeli munka biztosítja a kísérleti alapot, a tapasztalati hátteret, addig Brousseau a P1-beli gondolkodási módszerek és technikák kidolgozására helyezi a hangsúlyt, P2 ehhez képest elhanyagolható szerepet tölt be a kísérletében.

E különbségnek többféle oka lehet. Egyrészt összefügghet a tanterv ökológiájának szempontjaival: Brousseau a valószínűségszámítást a statisztikával kapcsolja össze, és ennek megfelelően alkalmaz komplex statisztikai módszereket – Varga tantervében azonban e terület kevés hangsúlyt kap (bár jelen van), a valószínűségszámítás sokkal inkább a kombinatorikával és a logikával áll szoros kapcsolatban. Egy másik ökológiai szempont a racionális számok eltérő megjelenése a korabeli magyar és francia tantervben. Brousseau arra hívja fel a figyelmet, hogy a törtek alapos ismerete elengedhetetlen a valószínűségszámításhoz (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002, 370. o). Az 1970-s évekbeli alsó tagozatos francia tanterv azonban kevés figyelmet szentel a törteknek, nem is számokként, csupán operátorokként (egy szorzás és egy osztás együtteseként) kezeli őket: a racionális számhalmazt a „mathématiques modernes” reform tanterve a valós számok halmazának egy részhalmazaként, csupán 8. osztályban vezeti be. Ehelyett a tizedestörtekre helyezi a hangsúlyt[60] – a Brousseau által követett frekventista megközelítés pedig a tizedestörtek használatának kedvez. Varga tamás tanterve ellenben 4. osztályban vezeti be a törteket, nagy hangsúlyt helyez a tanulmányozásukra – a valószínűségszámítás többek között éppen arra szolgál, hogy a tört fogalmát jelentéstartalommal töltse meg. A tizedestört fogalma a törthöz képest másodlagos a magyar tantervben, elsősorban egy tört alternatív felírási módjaként jelenik meg. Ennek a megközelítésnek inkább a laplacianus valószínűségszámítási paradigma felel meg.

[60] A francia matematikaoktatásban a tizedestörtek halmaza (nombres décimaux) csupán a véges tizedestörteket jelenti.

A két koncepció közti különbség egy másik lehetséges oka pedagógiai: Brousseau leírja, hogy a hosszadalmas számolások, amelyek a P1-beli munka esetén elkerülhetetlennek látszanak, próbára tették a gyerekek türelmét. Varga Tamás számára viszont a gyerekek öröme, érdeklődése a tanulás folyamatának egyik fő hajtóereje: ez is magyarázhatja a statisztikai módszerek elmélyítésének hiányát annak ellenére, hogy számos Varga által kidolgozott szituáció szolgál bevezetésként a frekventista szemléletmódba, és illuszrál különféle frekventista jellegű módszereket.

Mindkét szerző esetében részlegesen konstruktivista matematikaoktatási koncepciót figyelhetünk meg. Mindketten nagy hangsúlyt helyeznek a gyerekek aktivitására és felelősségvállalására a tanulás folyamatában, ugyanakkor a tanárnak is fontos szerepet szánnak e folyamatban. A fő különbség Brousseau és Varga koncepciója között talán a tanári beavatkozások jellegében és ritmusában áll.

Brousseau adidaktikai és intézményesítő fázisok váltakozására építi a tanítás folyamatát. Kísérletének leírásából világos, hogy nincs szó a tanári beavatkozás teljes hiányáról az adidaktikai fázisokban sem (pl. Brousseau, Brousseau & Warfield 2002, 367. o) – ezek a beavatkozások azonban csupán pedagógiai jellegűek, és nem érintik a szituáció matematikai tartalmát. Varga koncepciójában azonban ezek a beavatkozások fontos szerepet töltenek be, segítségükkel a tanár fokozatosan alakítja a szituációk miliőjét: a kézikönyvek és a cikkek számos ilyen jellegű megjegyzést, tanácsot tartalmaznak.

Brousseau hangsúlyozza az intézményesítés fázisainak jelentőségét. Szerinte egy adidaktikai szituáció kontextusában kialakuló ismeretek kevéssé stabilak, és szorosan kötődnek ahhoz a konkrét szituációhoz, amelyben létrejöttek.

> In order to become knowledge which the student can use or the teacher mobilize, it must be put through stages and transformations only some of which are characterized by being fixed in the memory of the students.[...] These transformations of knowledge into “cultural” knowings cannot happen spontaneously. They can only happen in situations which are didactical in the strict sense. Such situations of institutionalization were only identified some years after the experiment described here. The demonstration of their necessity and the impossibility of obtaining their results in a-didactical situations convinced us of the limits of constructivism and the impossibility of radical constructivism. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002 p. 384)

Varga más módon kezeli ezt a problémát. Az ő koncepciójában a rendszeres tanár-diák dialógusok mellett a problémasorozatok alkalmas szerkesztése szolgálja a kontextusfüggő ismeretek mobilizálását, átalakítását, általánosítását és megszilárdítását. Ez a megközelítés pedig a hosszútávú tanítási folyamatokat Brousseau koncepciójától lényegesen eltérővé teszi.

Mindkét szerző hosszú távon tervezett, komplex és jól szerkesztett folyamatokban gondolkodik. Ugyanakkor a Brousseau által tervezett folyamatok egyetlen ún. *fundamentális szituációra* épülnek, amely elég gazdag és összetett ahhoz, hogy abból kiindulva egy egész matematikai témát érintő fogalmak, módszerek összességét ki lehessen bontani. Az általam vizsgált kísérlete az utolsó, 6. fázis kivételével egyetlen szituációra épül, a felmerülő új kérdések a korábban tárgyalt problémák logikus következményei. Ez a fajta építkezés egyébként hasonlít ahhoz, amelyet korábban az ERMEL-ben figyelhettünk meg (3. fejezet). A Varga által tervezett folyamatok ezzel szemben rövidebb és nagyon változatos szituációkból állnak, amint azt a kombinatorika példáján láttuk. Az egyes szituációk tárgyalásának során a problémák szintén egymást hívják elő, ugyanakkor egymástól rendkívül különböző szituációk váltakoznak egymással.

Brousseau szerint egy szituáció kontextusában megszerzett ismeretek nem vihetők át más szituációkra: ez teszi szükségessé az intézményesítést és az ismeretek „dekontextualizációját", ami a megszerzett tudást stabil, konkrét kontextustól független, intézményes tudássá alakítja.

> The knowledge acquired in the first five phases of this particular process was not transferable to another situation of hypothesis testing. […] In the long process which we observed the students use a considerable amount and variety of mathematical knowledge. It is clear that the meaning of each piece of knowledge is limited to the conditions in which it was used, and a return to it in a more didactical context is essential to its durable and verifiable acquisition. (Brousseau, Brousseau & Warfield 2002, 406-410. o.)

Varga ezzel szemben lassú, szándékosan késleltetett, akár több éven át is húzódó intézményesítési folyamatot gondol el, amely változatos tapasztalati alapokra épül. Az ő felfogásában nem a dekontextualizácó biztosítja a matematikai fogalmak általános érvényét és használhatóságát, épp ellenkezőleg: a vizsgált kontextusok változatossága, a köztük lévő kapcsolatok, analógiák felismerése teszi lehetővé a fokozatos általánosítást. Ez a felfogás adja a problémasorozatok szerkesztésének különös jelentőségét Varga Tamás matematikatanítási koncepciójában: a hasonló vagy épp nagyon különböző problémák egymás mellé állítása, a köztük lévő időbeli távolság változatása nagyban befolyásolja a köztük lévő kapcsolatok felismerését, így szabályozva az osztály „didaktikai emlékezetét".

KONKLÚZIÓ

A disszertáció harmadik, leghosszabb fejezetében a „New Math” időszak magyar és francia matematikaoktatási reformjának didaktikai elemzésére tettem kísérletet néhány választott téma elemzésén keresztül. A disszertáció konklúzióját ezen elemzések eredményeinek összefoglalásával kezdem, kitérve a tanterv, a reform vezetői által elgondolt tanítási gyakorlat és a segédanyagok sajátosságaira. (§1). Hangsúlyozni fogom e különböző aspektusok között fennálló összefüggéseket, és megkísérlem megmutatni, hogy a két reform egy-egy önmagában rendkívül koherens rendszert alkot (§2). Ezután azt tárgyalom, hogyan befolyásolhatta az egyes reformok sajátosságait a mögöttük meghúzódó episztemológiai háttér (§3) és történeti kontextus (§4). Végül néhány kiegészítő megjegyzést teszek a „felfedeztető matematikaoktatás” sajátosságait (§5) és a kutatáshoz felhasznált didaktikai elméleteket illetően (§6), majd néhány kutatási perspektíva felvázolásával zárom a disszertációt (§7).

1 A REFORMOK JELLEMZÉSE: A DIDAKTIKAI ELEMZÉSE ÖSSZEFOGLALÁSA

1.1 A tantervek

A 2. fejezetben a magyar és a francia reform tanterveinek tartalmi és szerkezeti sajátosságait vizsgálva megállapíthattuk, hogy a korabeli nemzetközi matematikaoktatási reformmozgalom több célkitűzését is magukévá teszik: törekszenek mind a tanterv tartalmának megújítására, a „modern matematika” elemeinek beemelésére az oktatásba, mind arra, hogy a matematikát egységes, koherens tudományként mutassák be. Ezek a törekvések ugyanakkor eltérő módon valósulnak meg a két ország reformjaiban.

Mindkét reform beemeli tantervébe egyebek mellett a halmazelmélet és a topológia néhány elemét, illetve a relációk fogalmát. De míg a francia reform a modern matematikai struktúrák, a valós számok és a geometria axiomatikus tárgyalására helyezi a hangsúlyt, addig a magyar reform inkább a témák sokféleségét helyezi előtérbe, beleértve többek között a logikát, a kombinatorikát és a valószínűségszámítást.

A tanterv koherenciáját a francia reform esetében a hierarchikus szerkezet, az axiomatikus elméletek egymásra épülése, illetve az egységes algebrai formális nyelv biztosítja, a magyar reform esetében ezzel szemben a különböző matematikai területek dialektikus viszonyát figyelhetjük meg, amelyek a tanterv „spirálszerű” szerkezetének köszönhetően kölcsönösen építik egymás. A spirálszerű építkezést a tananyag és a követelmények szétválasztása segíti:

ennek köszönhetően minden tanévben számos olyan témával, fogalommal is foglalkoznak a tanulók, amelyek csak évekkel később nyerik el hivatalos formájukat, addig viszont a számonkérések nem érintik őket.

A magyar reform a tanterv folytonosságát hangsúlyozza az általános iskola egészét illetően. A francia reformot viszont törésvonalak szabdalják, nem csak az *école élémentaire* és a *collège* között, amelyeknek a tanterve egymástól függetlenül jelenik meg (bár lényegében ugyanaz a mukacsoport irányítja készítésüket), hanem a *collège* tantervén belül is. Ezt különösen a geometria tanításával kapcsolatban hangsúlyozza a „mathématiques modernes" reform tanterve, kifejezve, hogy míg az alsóbb évfolyamok a fizikai világgal kapcsolatos tapasztalatszerzéssel foglalkoztak, az „igazi" geometria, az algebrai eszközökre épülő axiomatikus affin majd euklideszi geometria tanulmányozása a *collège* két utolsó tanévének tárgya.

A tantervek szerkezeti és tartalmi sajátosságait három példán vizsgáltam részletesebben. Az első példa a természetes szám fogalmának bevezetése első osztályban. Mindkét reform esetében megfigyelhető, hogy a mechanikus számolás gyakorlása helyett a matematikai fogalomépítésre helyezik a hangsúlyt, és a számfogalom felépítésében támaszkodnak a halmaz fogalmára. Azonban míg a francia reform esetében a halmazelmélet a számfogalom kizárólagos alapja, és, ahogy azt Chambris (2008, 2010) művei alapján megmutattam, a számfogalom és a mérés közötti, a korábbi tantervekben még intenzív kapcsolatok megszakadnak a reformmal, a magyar reform a számfogalom kettős megalapozását kéri, párhuzamosan építve a halmazelméletre és a mérésekre. A számfogalom méréssel való kapcsolatának példája egyébként a matematika és a való világ közötti viszonyt is illusztrálja: míg a francia reform esetében a méréssel való kapcsolat megszakítása részben a „gyakorlati életre" történő utalások kiküszöbölését szolgálja, így segítve – a reform koncepciójának megfelelően – az absztrakt matematikai fogalomépítést, addig a magyar reform esetében éppen a számfogalommal kapcsolatos tapasztalatgyűjtést teszik változatosabbá a mérések.

Az első példán megfigyelt finom eltérések a felsőbb évfolyamok tantervében látványosabb, mélyebb különbségekként jelennek meg: ezt a geometria tanterv és a Pitagorasz-tétel tanításának elemzése jól példázza. A francia tanterv első évfolyamainak „fizikai megfigyeléseit" a collège második felétől (8. osztálytól) kezdve a geometria axiomatikus tárgyalása váltja fel, amelynek célja, hogy a tanulókat beavassa a „matematizálás folyamatába". Az alapfogalmak és axiómák illusztrálásán túl a tanterv elutasít mindenféle szemléletre vonatkozó utalást: a geometriai fogalmakat a halmazelmélet és az algebra nyelvén definiálja, a tételek levezetése tisztán deduktív és formális algebrai jellegű. Dieudonné és

Choquet tanácsait követve a „mathématiques modernes” reform tanterve háttérbe a klasszikus geometriai idomok vizsgálatát, a hangsúlyt a sík és a tér leírását szolgáló algebrai eszközök kiépítésére helyezi. Ennek a koncepciónak megfelelően a Pitagorasz-tétel is csupán korlátozott szerepet tölt be a tantervben, nem is háromszögekről szól, hanem a merőleges vetítés egy tulajdonságaként jelenik meg, ezáltal az euklideszi sík leírásának egyik építőkövekét alkotja sok másik kisebb tétel közül.

A geometria tanterv talán a „mathématiques modernes” reform legvitatottabb része: az 1977-es tanterv lényeges változásokat hoz ezen a téren, nem írja elő a geometria axiomatikus tárgyalását, és nagyobb szabadságot hagy a geometria felépítésének megválasztásában, bár fogalmak tantervben leírt sorrendje nem mutat jelentősebb változást a reform tantervéhez képest (és számos tankönyv követi továbbra is az 1969-ben meghatározott felépítést).

A magyar tanterv ezzel szemben elemi módon tárgyalja a geometriát, és továbbra is a klasszikus idomok tanulmányozására helyezi a hangsúlyt; a lényegi változás a korábbi geometria tantervekhez képest a – függvénynek tekintett – transzformációk szerepének előtérbe helyezése. A magyar reform geometria tantervének a matematika más ágaival – a halmazokkal, az algebrával vagy a kombinatorikával – való kapcsolata inkább dialektikus mint hierarchikus: a geometria alapfogalmai elemiek, egy részüknek a definíciója fokozatosan fogalmazódik meg az évek során, de a szemlélettel minden geometriai fogalom megőrzi a kapcsolatát. A geometria egyik funkciója Varga Tamás tantervében épp az, hogy a matematika absztraktabb ágainak fogalmaihoz szemléletes példákkal szolgáljon (pl. a halmaz, a függvény fogalmához, vagy a számfogalom kiterjesztéseihez, amelyekhez a számegyenes nyújt szemléletes modellt és motivációt). A magyar reform a kísérletezés, fizikai tapasztalatszerzés (G1 paradigma) és az absztrakt geometriai idomokkal kapcsolatos deduktív érvelés (G2) közötti fokozatos átmenetet támogatja; a szemlélettől elszakadó teljes formális axiomatikus tárgyalást (G3) pedig nem ír elő. Jó példája az említett fokozatos átmenetnek a Pitagorasz-tétel tanítása: a bizonyítás keresését G1-beli munka motiválja, és a G1-beli megközelítés korlátainak felismerése.

A harmadik példa még jelentősebb eltérésre világít rá a két reform tanterve között, hiszen kombinatorika és a valószínűségszámítás tanítása Varga Tamás tantervének szerves részét képezi, míg a francia reform tantervében az *école primaire* és a *collège* szintjén egyáltalán nem szerepelnek ezek a témák (bár a gimnáziumi tantervben megjelenik a valószínűségszámítás mint az axiomatikus módszer alkalmazásainak egyik példája). A magyar tantervben a kombinatorika és a valószínűségszámítás a tanterv sokszínűségéhez és egymással való dialektikus kapcsolatához járul hozzá, a matematikai fogalmak tapasztalati alapjait gazdagítja, példát ad a konkrét tapasztalatokból kiinduló matematikai absztrakciós folyamatra úgy, hogy ehhez nincs szükség komplex elméleti háttérre. A kombinatorika és a valószínűségszámítás jó alkalmat kínálnak problémamegoldásra, illetve a matematika játékos természetének illusztrálására. A valószínűségszámítás, a véletlen matematikája ezenkívül sajátos gondolkodásmódot is tanít a gyerekeknek, és lehetőséget biztosít a becslésre és a „plauzibilis következtetések" gyakorlására.

Mindezek a szempontok Varga Tamás matematikaoktatási koncepciójának szerves részét képezik, a francia reform koncepciója számára azonban másodlagosak, sőt, esetenként akár ellenérvként is feltűnhetnek e témák tanításával szemben: ez részben magyarázhatja e témák meg nem jelenését a „mathématiques modernes" tantervében. Az 1970-es években, amikor a nagy struktúrák és az axiomatikus módszer tanítása háttérbe szorul, és a problémamegoldás nagyobb figyelmet kap, a kombinatorikai problémák éppen ebben a kontextusban jelennek meg bizonyos francia tankönyvekben, illetve különböző matematikaoktatási kísérletekben.

A valószínűségszámítás paradigmáinak vizsgálata Varga Tamás tantervében rokonságot mutat a geometriai paradigmák használatával. A P1 és P2 paradigmabeli munka összefonódik, lassú, fokozatos átmenet figyelhető meg P1-ből P2 felé, ahol a P1-beli, sokszor manipulációt igénylő munka elsősorban a konkrét tapasztalatszerzésre ad alkalmat, és előkészíti, motiválja a P2-beli, logikai levezetést igénylő munkát. A frekventista megközelítésre jellemző technikákat azonban Varga nem dolgozza ki olyan részletesen, mint Brousseau, aki a valószínűségszámítás tanítását elsősorban P1-beli munkára alapozza, és komplex statisztikai módszereket használ kísérletében.

1.2 A tanítás módszerei

A két reform keretében elgondolt tanítási gyakorlat elemzésekor is találtunk hasonló törekvéseket, de lényeges különbségeket is – és nem csupán a francia és a magyar reform között, de a francia reform és az 1970-es évek francia matematikaoktatási kísérletei között is. Úgy tűnik, ez a kérdés a francia reform körüli viták egyik központi eleme.

Mindkét ország reformja hangsúlyozza az aktív pedagógia módszereinek jelentőségét, és hivatkozik a pszichológia eredményeire. Különösen az alsó tagozat szintjén láthattunk sok hasonlóságot a két reform között: a két országban használt különböző segédeszközök (Dienes-készlet, logikai készlet, színes rudak) és a munkalapok hasonlóságai azok nemzetközi szintű terjesztésére engednek következtetni.

Ugyanakkor alaposabban megvizsgálva a sokat hivatkozott „aktív pedagógiai módszerek” jelentését, jelentős különbségeket figyelhettünk meg az egyes tankönyv- és kézikönyvszerzők koncepciója között. A Didaktikai Szituációk Elméletének segítségével, elsősorban a különböző forrásokban leírt didaktikai szituációk nyújtotta adidaktikai potencialitást és a források sugallta didaktikai szerződést vizsgálva próbáltam leírni, mit értenek az egyes szerzők „aktivitás” alatt. Hogyan viszonyul a tanulók aktivitása a szituációk matematikai tartalmához, milyen felelősség és autonómia illeti a tanulókat, és mi a tanár szerepe ezekben a szituációkban?

1.2.1 Az „aktív” módszerek

A francia „mathématiques modernes” reformról azt állapítottam meg, hogy bár a különböző tankönyvek és tanári kézikönyvek számos, a tanulókat aktivizáló tevékenységet javasolnak, a reformot jellemző didaktikai szerződés a tanári előadáséhoz hasonlatos. A matematikai tudást közvetlenül a tanár közvetíti a tanulók felé, akik a matematikai fogalmak felépítésében nem kapnak szerepet: az előkészítő tevékenységek valójában csak konkrét példán illusztrálják a tanár által bevezetett fogalmakat, de nem problematizálják a matematikai tartalmat, és nem épülnek retroaktív miliőre. Hersant és Perrin-Glorian (2003) az ilyen jellegű szerződést *beavatásnak* (intiation) nevezi. A felső tagozaton, néhány ilyen jellegű szituációtól eltekintve, az uralkodó tanítási módszer a tanári előadás látszik lenni; a tankönyvekben található „gyakorlatok” (exercices) elsősorban a tanult fogalmak stabilizálását, elsajátításuk ellenőrzését szolgálják, de kevés szerepet játszanak a fogalmak felépítésében.

Az 1970-es évek végének forrásai mélyebb, kiforrottabb elképzeléseket képviselnek a tanulók tevékenységét illetően. Ezek a szövegek hangsúlyozzák a tanulók autonómiájának fontosságát matematikai ismereteik felépítésében. A felső tagozaton erre Deledicq és Lassave tankönyvsorozata nyújtott példát különböző típusú feladatok megkülönböztetésével (beleértve a bevezető feladatokat, a gyakorlást, a bizonyítást, az alkalmazást), jóllehet, az ő esetükben a tanulók önálló felfedezésre való ösztönzése jelentős kompromisszumokhoz vezet a matematikai tartalmat illetően. Az alsó tagozaton pedig az ERMEL-projekt kötetei szolgáltak példaként ebből az időszakból, kiegészítve Brousseau valószínűségszámítás tanítását érintő kísérletével.

Ezekben a dokumentumokban az adidaktikai jellegű szituációk központi szerepet töltenek be: a szerzők olyan szituációkat igyekeznek konstruálni, amelyekben a tanulók önállóan építhetik fel matematikai ismereteiket, a tanár közvetlen beavatkozása nélkül, egy retroaktív miliő segítségével, amely visszajelzései által lehetővé teszi, hogy a tanulók maguk értékeljék megoldásaikat. A tanítani kívánt ismeret egy probléma megoldását szolgáló eszközként jelenhet meg ezekben a szituációkban, míg a tanítás egy következő fázisa intézményes tudásként nem stabilizálja azt. Ez a fajta, konstruktivista jellegű didaktikai szerződés nagyon közel áll ahhoz, amit Brousseau későbbi elméletében *adidaktikai szituációnak* nevez. A tanár felelőssége ezekben a szituációkban a szituáció előzetes megtervezésére, a devolúcióra és a szituációt követő intézményesítésre korlátozódik. Az adidaktikai szituáció során csak szabályozó szerepet tölt be (a tanulók bátorítása, emlékeztetése a szabályokra stb.), de nem avatkozik be a matematikai fogalomépítés szintjén.

A magyar reformhoz kapcsolódó forrásokban javasolt tanítási gyakorlat szintén jelentős adidaktikai potenciált tartalmaz – de nem ugyanabban az értelemben, mint az ERMEL vagy Brousseau. Varga Tamás koncepciójában nem annyira „adidaktikai szituációkról", inkább folyamatos tanár-diák dialógusról van szó: a tanulók jelentős felelősséget viselnek a matematikai tudás felépítésének kollektív folyamatában, amelynek során a tanár a tapasztalt segítő szerepét játssza. Ezt a fajta szerződést „felfedeztetőnek" neveztem el. A magyar reform koncepciójában ezenkívül nem *egy* kitüntetett szituáció szolgálja egy-egy fogalom építését, inkább azok sokféleségén van a hangsúly, a „szituációk" rövidebbek, de kisebb-nagyobb variációkkal többször is előkerülhetnek. A különböző „szituációk" összekapcsolása, variációi a matematikai fogalmak lassú, fokozatos megfogalmazását szolgálják, szándékosan késleltetett intézményesítéssel.

A „szituáció" szót az imént idézőjelbe tettem: Brousseau elméletének értelmében véve a kifejezést, egy szituáció szükséges összetevője ugyanis a jól definiált milió (amelyet a francia források leírásai tartalmaznak is). A magyar reform esetében azonban a kézikönyvek gyakran csak részlegesen írják le a miliőt, inkább tanácsokat adnak a kialakítás különböző variációihoz. Elemzéseim arra mutattak rá, hogy a magyar reform javasolta dialogikus eljárás során a tanár valójában rendszeresen, fokozatosan alakítja át a miliőt az osztály reakcióinak függvényében, amelyek természetesen előre nem jósolhatók meg pontosan. A segédkönyvekben leírt tanácsok, megjegyzések a tanulók lehetséges reakcióit vetítik előre, és ötletet adnak azok kezelésére. A segédkönyv arra biztatja a tanárokat, hogy alakítsák a szituációkat a saját ízlésüknek és az osztály igényeinek, sajátos körülményeinek megfelelően. A felső tagozatos tankönyvek fiktív osztálytermi dialógusokat tartalmaznak, a tanári kézikönyv pedig, az alsóshoz hasonló módon, arra biztatja a tanárokat, hogy ezeket mintának tekintve hasonló – bár a mintával nyilván nem egyező – párbeszédeket próbáljanak provokálni osztályaikban.

Összességében azt mondhatjuk, hogy Varga Tamás koncepciójának középpontjában nem annyira a „szituációk”, mint inkább a „problémák” állnak: a legfőbb didaktikai feladat az osztálytermi dialógusok irányítása e problémák körül úgy, hogy a tanulókra jelentős felelősség háruljon a problémamegoldásban, és ezen keresztül a matematikai fogalmak felépítésében.

Varga Tamás koncepciójának két összetevőjét emelem még ki itt. Az egyik a játékosság szerepe. A játék kétféle értelemben is megjelenik a magyar reform koncepciójában: egyrészt szabályjáték formáját öltő szituációkként (hasonlóan Brousseauhoz, aki ebben a kérdésben a játékelméletre alapozza koncepcióját), másrészt pedig szabad, kreatív, örömteli alkotótevékenységként. Az utóbbi értelmezés Péter Rózsa felfogásához áll közel, és az ebben az értelemben vett játékosság mindkettejük felfogásában fontos szerepet tölt be a matematika tanulásának folyamatában.

A másik szempont, amelyet Varga Tamás koncepciójával kapcsolatban érdemesnek tűnik hangsúlyozni a szándékos kétértelműségekkel, félreérthető feladatokkal és fogalmakkal kapcsolatos. Ilyen kétértelműségek gyakran előfordulnak az elemzett magyar forrásokban, és általában az osztálytermi viták beindítását szolgálják: az egyes fogalmak felépítésének során felmerülő nehézségeket, ellentmondásokat hivatottak megvilágítani, és a tanulók között félreértést, véleménykülönbséget generálva segítenek fokozatosan kialakítani a matematikai fogalmakat. Ez a dialektikus folyamat nagyban hasonlít Lakatos *Bizonyítások és cáfolatok* című művében leírtakra. Míg a francia reform sokszor hangsúlyozza a precíz és világos[61] matematikai nyelv és fogalmak használatának fontosságát, a magyar reform dokumentumaiban sokszor találkozunk részlegesen rögzített fogalmakkal, definíciókkal amelyek nyitva maradnak későbbi kidolgozásra, továbbfejlesztésre. A kétértelműségek egyébként a didaktikai szerződést formáló szerepet is betöltenek: az 1. osztályos tanári kézikönyv gyakran hangsúlyozza szerepüket a tanár és a tankönyvek megkérdőjelezhetetlen tekintélyének lebontásában, az önálló, kritikus gondolkodás fejlesztésében és a véleménykülönbségek elfogadásában.

1.2.2 A hosszú távú tanítási folyamatok

A fent összefoglalt megfigyelések rámutatnak a hosszútávú tanítási folyamatok elemzésének fontosságára, különösen a magyar reform esetében. Az 5. fejezetben alkalmunk nyílt

[61] A filozófiai szakirodalom a francia filozófiában Descartes óta bevett, és a „mathématiques modernes” reform kapcsán is sokat használt „clair et distinct” kifejezés fordítására általában a „tiszta és elkülönített” kifejezést használja.

Brousseau és Varga hosszabb tanítási folyamatokkal kapcsolatos elképzeléseinek alaposabb vizsgálatára.

Brousseau kísérlete egyetlen, „fundamentálisnak” tekintett szituációból indul ki, amely elég gazdag és összetett ahhoz, hogy egy egész tudásterület fogalmai és módszerei kibontakozzanak belőle. A tanítás folyamata, a konkrét szituációk sora e fundamentális szituációnak a mentén fejlődik. Brousseau szerint egy konkrét szituáció kontextusában kialakult ismeretek nem vihetők át közvetlenül más kontextusra: ezért van szükség dekontextualizációra és intézményesítésre, miáltal egy konkrét probléma megoldási eszközeként felmerült ismeretek általánosan érvényes tudássá alakíthatók. Feltehetően ez magyarázza, hogy Brousseau elméletében a tanítási folyamatokat adidaktikai szituációk és intézményesítő fázisok váltakozásaként, illetve cselekvési, megfogalmazási és érvényesítési szituációk egymásutánjaként írja le, de ezen túlmenően nem teorizálja a hosszú távú tanítási folyamatokat, annak ellenére, hogy kísérleteiben összetett, hosszú folyamatokat alkot meg. Az ERMEL-ben egyébként Brousseau-éhoz hasonló elgondolásokat láthattunk a hosszabb tanítási folyamatok felépítését illetően is.

Varga Tamás esetében viszont egyetlen „fundamentális” szituációból való kiindulás helyett nagy számú, változatos, rövid szituáció képezi a hosszú távú tanítási folyamatok alapját. Míg Brousseau szemében az intézményesítés és a dekontextualizácó biztosítja a megszerzett ismeretek átvihetőségét más kontextusokra, Vargánál ennek épp az ellenkezőjéről van szó: a kontextusok sokfélesége és a köztük lévő kapcsolatok, analógiák felismerése teszi lehetővé a matematikai fogalmak fokozatos általánosítását. A két koncepció közti különbség hátterében valójában az absztrakciós folyamatokról alkotott két különböző felfogás ismerhető fel. Az egyik a „fogalmak kiürítésének” („notions vidées de contenu”, Bourbaki 1948, 47. o.) gondolatához áll közel, a dekontextualizáció által biztosítva a matematikai fogalmak általános érvényét – a másik pedig a sokféleségben felismert egység gondolatához (vö. „A formula felírása az örömünk kifejezése azon, hogy mindezt egyetlen gondolat segítségével tudjuk megoldani” Péter 1944/1969 42. o). Varga Tamásnál ez a különféle problémák közti kapcsolatok, analógiák által táplált, szándékosan késleltetett intézményesítési folyamat adja a *problémasorozatok* szerkesztésének különös jelentőségét.

A két szerző hosszabb tanítási folyamatokról alkotott elképzeléseinek pontosabb leírása további elemzést igényelne. Itt csupán néhány, Varga Tamás koncepcióját és a problémasorozatok szerkesztését érintő megfigyelést foglalok össze, amelyre a disszertáció elemzései rávilágítottak. A kombinatorikai problémasorozatok esetében láttunk hasonló matematikai tartalmú, de látszólag különböző problémákat; különböző matematikai tartalmú, de látszólag hasonló problémákat; egy adott problémából kiindulva a kikötések folyamatos szigorítását; magasabb szinten pedig egy probléma változóinak szisztematikus variálását. A felső tagozatos tankönyvek fiktív dialógusaiban minden esetben felismerhető volt egy-egy problémasorozat katalizáló szerepe, amely egy matematikai fogalom vagy módszer megalkotásához, destabilizációjához, majd módosításához, mélyebb megalapozáshoz vezetett. Ezek a különféle problémasorozatokat szervező módszerek szoros kapcsolatot mutatnak Péter Rózsa *Játék a végtelennel*jének és Lakatos *Bizonyítások és cáfolatok*jának szervezőelveivel éppúgy, mint a Pólya által leírt módszerekkel, mint például az analógia, az általánosítás, a felfedezett módszerek és eredmények újrahasznosítása stb.

1.2.3 A tanár tevékenységei

A fent leírt különböző matematikatanítási koncepciók más-más jellegű munkát kívánnak a tanároktól; a Margolinas (2002) által meghatározott szinteket figyelembe véve, más-más szinten rónak felelősséget a tanárokra. Elemzéseimben különösen három ilyen szintet vizsgáltam: a +2, a hosszú távú tervezés szintjét, a +1, a tanóra tervezésének szintjét és a 0 szintet, a tanóra tényleges vezetését.

A francia matematikaoktatási koncepciók legfontosabb szintje a +1 látszik lenni. Minden kézikönyv, amelyet vizsgáltunk, kész éves tanmenetet nyújt a tanároknak, a kézikönyvek felépítése pedig segít abban, hogy a tanárok könnyen követhessék a tervezett tanmenetet, könnyen megtalálják a soron következő óra vagy tevékenység tervét. Brousseau koncepciójában is úgy tűnik, hogy a hosszú távú tervezés inkább kutatói, mint tanári feladat. A tanár legfontosabb feladata a tanóra, a szituáció tervezése és előkészítése (+1): Eiller nagyrészt ezt is készen kínálja a tanároknak, míg az ERMEL nagyobb önállóságot hagy nekik ezen téren. A 0 szint megint kevesebb kihívást jelent a francia kézikönyvek koncepciója esetén, hiszen a direkt didaktikai fázisok, mint a devolúció és az intézményesítés jól tervezhetők előre, az ezeket esetleg kiegészítő adidaktikai szituációknak (amelyek Eillernél ritkák és rövidek, az ERMEL-ben és Brousseau-nál jelentős szerepet játszanak) pedig a tervezése jelent tényleges didaktikai feladatot, a megvalósítása során a tanárnak kevés feladata van. Így megfelelő +1 szintű munka esetén a tanárnak a 0 szinten, az óra vezetésében kevés előre nem tervezhető feladata van, és ezek inkább általános pedagógiai mint didaktikai jellegűek.

A magyar reform koncepciója viszont jelentős munkát kíván a tanároktól mind a három, és különösen a +2 és 0 szinten. Az alsós tanári kézikönyvek hangsúlyozzák a hosszú távú, legalábbis „tematikus”, és nem óráról órára történő készülés jelentőségét. Példaként ugyan kínálnak valamiféle tanmenetjavaslatot, de arra biztatják a tanárokat, hogy maguk tervezzék tanmenetüket az osztály sajátos igényeinek megfelelően. A kézikönyv felépítése nem teszi könnyűvé a minta-tanmenet szerinti haladást: valójában teljes tematikus fejezeteket, ha nem az egész könyvet kell alaposan ismernie egy tanárnak ahhoz, hogy a tanmenet soron következő elemeit egyáltalán értelmezni tudja. A felső tagozaton a tanmenet kérdése sokkal kevésbé kidolgozott, de a kézikönyvek itt is a témák közötti kapcsolatok keresésére, és a tankönyv kínálta tematikus sorrend újragondolására biztatnak.

Ami a 0 szintet illeti, az osztálytermi dialógus gyakorlata azzal jár, hogy a tanóra csak részben tervezhető előre, hiszen a tanulók reakciója nem teljesen kiszámítható, így a tanár számos esetben improvizálni kényszerül. A magyar koncepció szerint a szituációk megvalósítása során a tanár nem csak pedagógiai szabályozó szerepet tölt be, mint a francia koncepcióban, hanem folyamatosan alakítania kell a miliőt a tanulók reakcióinak függvényében úgy, hogy segítse a matematikai ismeretek közös felépítését, egyúttal meghagyja a tanulóknak a folyamatban viselt felelősségét is. Ráadásul a hosszú távú terveket is szükséges lehet újragondolni a tanóra folyamán, például előre venni egy későbbre tervezett problémát, ha a gyerekek felvetései erre váratlanul alkalmat adnak.

Összességében elmondható, hogy a magyar reform koncepciója a tanároktól igen összetett munkát vár el minden szinten, ami komoly matematikai és pedagógiai felkészültséget, nagy önállóságot és kreativitást feltételez. Minden bizonnyal ez jelenti a koncepció széleskörű megvalósításának egyik fő korlátját, és feltehetően a reform bevezetésének nehézségeiben is nagy szerepet játszott ez a tényező, különösen a korabeli autokratikus és centralizált iskolarendszer keretei között.

1.3 A segédanyagok

A tanítási gyakorlat sajátosságait írott források alapján kíséreltem meg rekonstruálni. Ez a megközelítés szükségessé tette maguknak a forrásoknak az alaposabb vizsgálatát, elsősorban a szerkezetükét, nyelvezetükét, stílusukét, és használati útmutatójukét.

Az alsó tagozaton elvárt jellemző tanítási gyakorlat elsősorban a tanári kézikönyvekből rekonstruálható. A felső tagozatos tanári kézikönyvek kevésbé informatívak, ugyanakkor megkíséreltem megmutatni, hogy a korabeli felső tagozatos tankönyvek értelmezhetők úgy, mint a tanítási gyakorlat modelljei.

Eiller alsó tagozatos kézikönyvei részletes tanmenetet kínálnak a tanároknak, ezenkívül részletesen kidolgozott „leckék” leírását is tartalmazzák, amelyeket a könyv jól áttekinthetően hozzárendel a tanmenet egy-egy rubrikájához. Ezek a részletes leírások és a könnyen áttekinthető szerkezet a tanárok számára munkájuk egy jelentős részét megspórolják. Az Eiller által leírt rövid szituációk, amelyeket mindig intézményesítő fázis zár le, kevés önállóságot hagynak a tanulóknak, egyúttal a tanárok szempontjából kevés kiszámíthatatlan elemet tartalmaznak, így pontosan követhetik a kézikönyv részletes instrukcióit a szituációk megvalósításának során.

Az ERMEL szerzői ezzel szemben az előszóban hangsúlyozzák az autonóm tanári tervezőmunka fontosságát: szerintük a tanár önállósága és felelősségvállalása a színvonalas tanári munka elengedhetetlen feltétele, különösen ami a tanórák tervezését illeti. Éppen ezért az ERMEL, bár kész tanmenetet javasol, nem osztja azt leckékre, ezt a feladatot a tanároknak hagyja. A szituációk leírása Eillerhez hasonlóan itt is részletes, jól áttekinthető, tartalmazza az egyes feladatok célját, a szükséges eszközöket és a szituáció lebonyolításának részleteit. A kézikönyv sajátossága a három részre tagolt szerkezet: az első rész a tanterv anyagának elméleti leírását adja, a második a feladatok leírását a tanmenet sorrendjében, a harmadik rész pedig néhány megvalósult tanóra átiratát tartalmazza. Az előszó szerint ez a szerkezet a könyv többféle olvasatát teszi lehetővé: egyrészt az ERMEL-projekt keretében végzett kísérletek leírásaként, másrészt tanári kézikönyvként használható (utóbbi esetben a második résszel kezdve az olvasást). A tanórák átiratainak közlése arra utal, hogy a szerzők fontosnak tartják a tanár tanóra alatti tevékenységével kapcsolatos reflexiókat. A kézikönyv szituációi valóban nagyobb önállóságot hagynak a tanulóknak a matematikai fogalomalkotás folyamatában, ez pedig a tanár számára is több kiszámíthatatlanságot hoz a tanóra során, ami indokolttá teheti az ezzel kapcsolatos reflexiókat. Az előszó ugyanakkor hangsúlyozza, hogy nem modellértékű tanórákról van szó, csupán egyszerű példákról, amelyek a tanárok lehetséges spontán reakcióit illusztrálják.

A magyar reform alsós tanári kézikönyvének szerkezete lényegesen nehezebben áttekinthető, mint francia társai. A matematikai tartalom és a tanítási gyakorlatot érintő megfontolások egymással vegyítve jelennek meg egy többé-kevésbé folytonos szövegben, amely számos feladat-ötletet tartalmaz, de ezek az ötletek sokszor csak részben kidolgozottak. A könyv arra biztatja a tanárokat, hogy válogassanak, alakítsák át, igazítsák az osztályuk igényeihez a feladatokat; a sokszor vázlatos vagy töredékes feladatleírások számos arra vonatkozó tanácsot tartalmaznak, hogyan lehet egy-egy feladatot átalakítani, milyen nehézségekkel szembesülhet a tanár a tanóra folyamán, és hogyan lehet ezeket az esetleges nehézségeket kezelni. A kézikönyv formája tehát egyrészt a magyar reform által elgondolt nagyobb tanári autonómiával, másrészt a tanóra vezetésére vonatkozó didaktikai megfontolásokkal áll összefüggésben. Mint korábban láttuk, a példaként megjelentetett tanmenet alapján óráról órára való készülést nem könnyíti meg a magyar kézikönyv: ez a vonása szintén a tanároktól elvárt önállósággal függhet össze.

A magyar tanári kézikönyv tehát egyrészt az önálló, felelősségteljes tanári munka ösztönzését látszik szolgálni, a tanár tevékenységeinek minden szintjén, másrészt a szerzők arra irányuló erőfeszítéseiről tanúskodik, hogy e munkához minél több konkrét ötletet, tanácsot adjanak. A tanári autonómia a magyar reform koncepciója szerint a színvonalas tanári munka alapvető feltétele, elsősorban azért, hogy a matematikatanítás folyamatát a tanulók sajátos igényeihez és adottságaihoz lehessen igazítani. Ugyanakkor nem teljes pedagógiai szabadságról van szó, a szerzőknek láthatóan kiforrott koncepciójuk van a színvonalas tanítási gyakorlat mibenlétéről – ezt azonban nem általánosan inkább csak konkrét példákon keresztül írják le. A kézikönyv tehát komplex matematikatanítási elgondolást, sokrétű törekvéseket kísérel meg közvetíteni – ennek következtében gazdag, de meglehetősen nehezen használható segédanyag a gyakorló tanárok számára, nemcsak azért, mert nagyfokú önállóságot vár el tőlük, hanem azért is, mert használóinak a könyv egészét alaposan kell ismerniük, hogy mindennapi munkájában segédkönyvként hasznosítani tudjákk azt.

Ami a felső tagozatos tankönyveket illeti, a magyar és a francia könyvek közötti különbség egészen szembeötlő. A francia tankönyvek leíró, és a 8. osztálytól kezdve axiomatikus-deduktív formában tárgyalják a tanterv anyagát. Nagy hangsúlyt helyeznek a matematika formális nyelvének használatára, amelyet „egyszerűnek és precíznek” tekintenek. A tipográfia hozzájárul a könyvek jól átlátható szerkezetéhez. A használati útmutatók szerint a tankönyvek elsősorban a „leckék” tartalmát írják le, és abban segítik a tanulókat, hogy megértsék és megtanulják a tanári előadás anyagát. A „leckéket” a tankönyvekben rendre a tanult anyag alkalmazását és elsajátításának ellenőrzését célzó „gyakorlatok” követik. E lineárisan felépített, értekezés formáját követő tankönyvek előadás-jellegű tanítási gyakorlat, és direkt tudásátadásra épülő didaktikai szerződés megvalósítását segítik elő.

A magyar felső tagozatos tankönyvek ezzel szemben fiktív osztálytermi dialógusok formájában vezetik be a tananyag egy-egy újabb fejezetét. A tanári kézikönyv szerint ezek a dialógusok szolgálhatnak olvasmányként a tanulók számára, elsősorban mégis a megvalósítandó tanítási gyakorlathoz adnak mintát. A kézikönyv a tanárokat arra bátorítja, hogy hasonló helyzeteket hozzanak létre osztályaikban. Péter Rózsa *Játék a végtelennel*jéhez hasonlóan a könyvek tipográfiája játékosabb, és jóval kevésbé szerkeszti a szöveget, mint a francia tankönyveké. A magyar tankönyvekben használt nyelvezet vegyíti a matematikai és a természetes nyelvet, miközben viszonylag kevés formális elemet tartalmaz. A francia tankönyvek „egyszerű és precíz" stílusával szemben a magyar tankönyvek a stílus egyszerűségéről más felfogást vallanak: szövegeik részben legalább a gyermeki nyelvet imitálják, amely kétértelműségektől sem mentes, és fokozatosan tisztázzák a fogalmakat precízebb matematikai megfogalmazások felé haladva. A magyar tankönyvek e sajátosságok révén „felfedeztető" jellegű didaktikai szerződés megvalósítását támogatják.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a vizsgált segédanyagok formája, tartalma és stílusa igen változatos, és minden esetben szorosan összefügg a szerzőknek a matematika természetéről, a tanár és a tanuló munkájáról alkotott elképzeléseivel.

2 KÉT KOHERENS RENDSZER

A fentiekben a két reform didaktikai elemzésének eredményeit foglaltam össze: ennek alapján megállapítható, hogy a két reform egy-egy önmagában rendkívül koherens koncepciót követ, amelyben a tanterv, a tanítási gyakorlat és a segédanyagok jellegzetességei szoros kapcsolatban állnak egymással, összefüggő egészet alkotnak.

A francia „mathématiques modernes" reform tantervében a nagy axiomatikus struktúrák és a modern matematika formális nyelve központi szerepet töltenek be, és meghatározzák a tankönyvek sajátosságait is. A tankönyvek által sugallt deduktív tárgyalási mód és formális stílus szükségképpen intézményesen meghatározott, így elég természetesen jár együtt a tanári előadással mint domináns tanítási formával. Bár a tanterv- és tankönyvszerzők hangsúlyozzák az aktív pedagógia módszereinek fontosságát, ezek nem igazán életképesek a reform által felállított rendszerben, és még ha egyfajta aktív pedagógiai gyakorlat megjelelik is, kevés önállóságot hagy a tanulóknak a tanulás folyamatában. A reformra jellemző didaktikai szerződés jellemzője a közvetlen tanári tudásátadás.

A magyar reform esetében a tanterv témáinak választása (különösen ami a kombinatorikát és a valószínűségszámítást illeti) és a témák közti dialektikus kapcsolat összefügg azzal a törekvéssel, hogy a tanulókat bevezessék a matematikai felfedezés és a problémamegoldás folyamataiba. A tanterv rugalmas kettős szerkezete (a tananyag és a követelmények megkülönböztetése) lehetőséget ad a tanulók egyéni sajátosságainak figyelembevételére.

Mindennek a tanítási gyakorlat terén az osztálytermi dialógus gyakorlata és „felfedeztető" jellegű didaktikai szerződés felel meg. A tankönyvek kevéssé formális nyelve, az ott leírt fiktív dialógusok, a szándékosan kétértelmű feladatok, amelyek vitát hivatottak generálni, a tanári kézikönyvek szerkezete e tanítási gyakorlat megvalósítását szolgálják.

„Pedagogical flow"-ról a kifejezés eredeti értelmében (Schmidt et al. 1996) nem beszélhetünk itt, hiszen csupán a reform vezetői által elgondolt, nem pedig a tényleges tanítási gyakorlatot vizsgáltam. Megállapíthatjuk azonban, a „pedagogical flow" fogalmának szelleméhez hasonlóan, hogy a matematikatanítás különböző tényezői a mindkét reform esetében összetett, koherens rendszert alkotnak.

Itt jegyzem meg, hogy mindkét ország „pedagogical flow"-járól születtek kutatások az általam vizsgáltnál későbbi időszakban (ld. pl. Schmidt et al. 1996 Franciaországot, Andrews & Hatch 2001 pedig Magyarországot illetően), és ezek mindkét ország esetében több-kevesebb folytonosságra engednek következtetni az 1960-as és '70-es évek reformjainak általam kimutatott jellemzőit illetően. E megállapítás tükrében talán érdekes volna mai „pedagogical flow" tanulmányok segítségével megvizsgálni, melyek a két reform hosszú távon is megmaradó elemei.

Az általam végzett elemzések ugyanakkor nem korlátozódnak a két reform didaktikai jellemzőinek leírására: a történeti és episztemológiai háttér vizsgálatának segítségével igyekszem ezekre magyarázatot is adni.

3 AZ EPISZTEMOLÓGIAI HÁTTÉR

A „New Math" időszak reformjai különösen alkalmasak arra, hogy a matematikaoktatás episztemológiai hátterét vizsgáljuk, egyrészt, mert a korabeli források e kérdést szokatlanul nyíltan tárgyalják, másrészt pedig a reformok mélysége és átfogó jellege miatt, ami az egyes reformokat meghatározó matematikaoktatási koncepciók koherens, kevés kompromisszummal járó megvalósítását tette lehetővé.

Ahhoz, hogy a magyar és a francia reform episztemológiai hátterét leírhassam, mindenekelőtt mindkét országban megkíséreltem azonosítani matematikusok egy-egy csoportját, akik az adott ország reformjára nagy hatást gyakoroltak (I. Rész), és akiknek a matematikanépszerűsítő, matematikaoktatással kapcsolatos, és esetenként matematikafilozófiai írásaiból kiolvashatók a matematika természetéről alkotott elképzeléseik (II. Rész).

A francia reform elsősorban Bourbakira hivatkozva határozza meg, mit ért a tanítani kívánt „modern matematikán”. A reformot támogató matematikusok, akik közül Dieudonné, Choquet és Lichnerowicz írásait elemeztem, a matematika természetének „bourbakiánus” felfogását népszerűsítik (amely nem feltétlenül esik egybe a Bourbaki-csoport egyes tagjainak elképzeléseivel, de mindenképp táplálkozik Bourbaki művéből). Magyarországon nehezebb ilyen hivatkozási alapnak tekinthető csoportot meghatározni, mégis kimutatható egy magyar matematikus közösség (mindenekelőtt Kalmár László, Péter Rózsa, Rényi Alfréd, Surányi János, és a külföldön élő Pólya György) hatása, amely közösségről megkíséreltem megmutatni, hogy sajátos és koherens, a „bourbakiánustól” lényegesen különböző matematikafelfogást képvisel. Ezt a felfogást Pólya és Lakatos matematikafilozófiájára utalva „heurisztikusnak” neveztem el.

A „bourbakiánus” felfogás szerint a matematika lényegénél fogva absztrakt és deduktív tudomány. A Bourbaki által tökéletesített „axiomatikus módszerben” a matematika ideális módszerét látja, amely a végsőkig vitt absztrakció segítségével a lehető legnagyobb világosságot és precizitást biztosítja e tudománynak. E szerint az elképzelés szerint a matematika egészének halmazelméleten alapuló újraszervezése illetve a modern formális nyelv egységes, koherens tudománnyá teszik a matematikát. Bourbaki megtalálta és kidolgozta a matematikához vezető „királyi utat”: a tanításnak tehát ezt az utat kell követnie, mielőbb beavatnia a tanulókat a modern matematika fogalmainak, módszereinek és nyelvének használatába. Az ilyen elveket követő matematikaoktatás jelentős „gondolkodásbeli megtakarítást” hoz a tanulók számára, és általános értelemben is gondolkodásra nevel. Ami a matematikai felfedezést illeti, ez természetesen igényel bizonyos intuíciót: azonban ez az intuíció a „bourbakiánus” matematikafelfogás szerint alapvetően személyes és irracionális, így nem tanítható. Leginkább még az axiomatikus módszer gyakorlása és a matematikai kutatás tárgyainak, tehát a struktúráknak a tanulmányozása táplálhatja.

A „heurisztikus” matemataikafelfogás ezzel szemben azt képviseli, hogy a matematika nem csak tartalmát, hanem formáját és módszereit illetően is folyamatosan változó tudomány, amely előre nem látható irányokba fog a jövőben is tovább fejlődni. A matematika megalapozását érintő nagy negatív eredményeket is tekintetbe véve a „magyar iskola” tagjai nem gondolják, hogy a modern formális nyelv és az axiomatikus módszer a matematika végső, ideális állapotát jellemezné: úgy tekintenek rájuk, mint egy problémák és választkísérletek során átvezető fejlődési folyamat egy állomására, és a tanításban is inkább e fejlődési folyamatra, mint annak 20. századi állapotára kívánják helyezni a hangsúlyt. Szerintük a matematika nem választható el fogalmainak szemléletes alapjaitól: a szemlélet táplálja a matematikai tapasztalatszerzést, és a tapasztalatok változatossága képezi a matematikai általánosítás, absztrakció alapját. A „heurisztikus” matematikafelfogás szerint a matematika dialogikus jellegű, társas tevékenység. A problémák és válaszkísérletek dialektikáján átvezető matematikai felfedezés folyamata szerintük legalább részben megérthető, és így tanítható is. A matematikai felfedezés egyúttal kreatív, játékos, örömteli alkotó tevékenység is, amely a művészi alkotással rokonítható. Ezeknek a matematikusoknak a szemében a matematika kritikus gondolkodásra nevel, de egyúttal problémamegoldásra is, a játékos felfedező tevékenység pedig a gyerekek kíváncsiságának ébren tartásában és a kutatás örömének megismerésében segít.

E két koncepciót a francia és a magyar reform didaktikai jellemzőivel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy a két reform két különböző matematikafelfogás rendkívül koherens megvalósításának tekinthető. A tanterv, a tanítási gyakorlat és a segédanyagok sajátosságai mind a mögöttük húzódó episztemológiai háttér nyomát viselik.

Hasonlóan ahhoz, ahogy Houdement és Kuzniak (2006) beszélnek a geometria *paradigmáiról*, ezen hitek, értékválasztások, tudás és elfogadott módszerek, gyakorlatok összességét értve, azt mondhatjuk, hogy a két reform számára episztemológiai hátterük a matematika egy-egy paradigmáját testesíti meg: a francia reform a „bourbakiánus” a magyar a „heurisztikus” paradigma gyakorlatba ültetésének tekinthető.

Egy „paradigma” ilyen koherens gyakorlatba ültetése feltehetően elég ritka. Az 1977-es francia tanterv például ellentmondásosabbnak tűnik ilyen szempontból: habár az episztemológiai háttér egyes elemeit mind a tanterv, mind a korabeli oktatási kísérletek megkérdőjelezik, a „bourbakiánus” matematikafelfogás továbbra is meghatározónak tűnik, miközben a tanterv- és tankönyvszerzők jobbára kompromisszumos megoldásokat keresnek, amelyek a pedagógiai megfontolások hatékonyabb érvényesítését tennék lehetővé a tisztán matematikai szempontok egyeduralma helyett.

4 A TÖRTÉNETI KONTEXTUS HATÁSAI

Az episztemológiai háttér tehát központi szerepet látszik betölteni a két vizsgált reform sajátosságainak alakításában. A történeti kontextus elemzése (I. Rész) azonban számos további, a reformokat befolyásoló tényező szerepére világított rá, amelyek komplex módon, olykor egymást erősítve, máskor egymásnak ellentmondva hatottak a matematikaoktatás reformjára.

Az történeti elemzés során mindenekelőtt azt mutattam meg, hogy a magyar és a francia reform ugyanabba a nemzetközi mozgalomba illeszkedik: a két reform főbb szereplői részt vesznek a matematikaoktatással foglalkozó nemzetközi szervezetek munkájában, figyelemmel követik más országok reformjait, sőt, a magyar és francia reformerek között közvetlen interakció is zajlik, különösen az 1970-es évek elején. A két reform több fontos törekvésben is osztozik, amelyek a kor nemzetközi, „New Math” néven emlegetett reformmozgalmát is jellemzik. Ilyen törekvés például a tanterv megújítása a matematika modern kori fejlődésének megfelelően, választ adva egyúttal a modern társadalmakat érintő társadalmi-gazdasági kihívásokra; vagy a pszichológia eredményeinek figyelembevétele és az „aktív pedagógia” módszereinek terjesztése, mely utóbbi törekvések például munkalapok és tevékenykedtető tanítási segédeszközök (logikai készlet, Dienes-készlet, színes rudak stb.) alkalmazásában öltenek testet mindkét országban.

Ugyanakkor a történeti kontextus különbségei több, a magyar és a francia reform közti különbségre is magyarázatul szolgálhatnak. A matematikusok szerepéről volt már szó – azonban nemcsak a reformok episztemológiai hátterére gyakorolnak hatást, hanem, úgy tűnik, a reformtantervek tartalmát is befolyásolják. Bár a tanterv mindkét országban új, „modernnek” tekintett tartalmi elemekkel bővül, Franciaországban az algebra, a topológia, és a nagy matematikai struktúrák vizsgálata kap kiemelt figyelmet a reform során, Magyarországon a tanterv inkább a logika, a kombinatorika, a valószínűségszámítás témáival gazdagszik – mindkét esetben a reform mögött álló matematikusok fő kutatási területének megfelelően. Bár igazolni e disszertáció keretében ezt nem állt módomban, a geometria tantervek vizsgálata során felvetettem, hogy míg a francia reform, úgy tűnik, Choquet (1964) műveire támaszkodik, a magyar reform geometria tantervének elméleti hátterét feltehetően Hajós György műve (1960) adta.

A reformot befolyásoló szereplők összetétele is figyelmet érdemel. A francia reform kidolgozásában matematikusok játszanak domináns szerepet, ami magyarázhatja a matematikai szempontok dominanciáját a pedagógiai megfontolások rovására a reform során. Bár a tanáregyesületek és szakszervezetek igen aktívak a reform előtti vitákban, a gyakorló tanárok által végzett kísérletek inkább csak az 1970-es évektől gyakorolnak érdemi hatást a matematikaoktatás fejlődésére. Magyarországon viszont jelentős befolyásuk ellenére a matematikusok a háttérben maradnak, a reformhoz vezető kísérletek az Országos Pedagógiai Intézet irányításával zajlanak, számos gyakorló pedagógust is bevonva a munkába.

A két ország iskolarendszerének különbségei szintén magyarázatul szolgálhatnak bizonyos eltérésekre a két reform sajátosságai között. Többször utaltam már arra, hogy a francia reform tantervében látható törések részben az intézményrendszer sajátosságaira vezethetők vissza, nevezetesen arra, hogy az *école primaire* és a *collège* két külön intézményt alkot, utóbbi ráadásul a középiskola alsó tagozatának minősül, míg a magyar általános iskola esetében egyetlen intézményben töltik a tanulók tanulmányaik első 8 évét. Jóllehet, az alsó és a felső tagozat itt is élesen elkülönül, többek között a tanárok képzettségét illetően is, a rendszer mégis inkább folytonosságra ösztönöz. A magyar tanítók és tanárok ráadásul 4 éven keresztül kísérik ugyanazt az osztályt, míg a francia iskolarendszerben az osztályokat minden évben újraszervezik, és évente más-más tanár tanítja őket. Varga Tamás reformja erősen épít a magyar iskolarendszer e sajátosságára, amikor több évre szóló tervezésre és spirálszerű építkezésre bátorítja a tanárokat – a francia iskolarendszer keretei között hasonló jellegű építkezés nyilván több nehézséget okozna.

Az iskolarendszerek sajátosságait illetően azok fejlődését is figyelembe kell vennünk. Amint azt a történeti elemzés során hangsúlyoztam, mindkét ország iskolarendszere jelentős átalakuláson megy keresztül a második világháborút követő évtizedekben, a matematikaoktatás 1960-as és ’70-es évekbeli reformjai pedig részét képezik ennek a folyamatnak. Franciaországban az iskolarendszer hagyományosan különböző „rendekre” oszlik, amelyek különböző társadalmi csoportokat szolgálnak ki és különböző oktatási hagyományokat képviselnek (többek között a matematikaoktatás terén is). A második világháborút követő évtizedek során az oktatás fokozatosan tömegesedik és demokratizálódik. Ez a folyamat elsősorban a „felső tagozat” szintjét érinti, amely ebben az időszakban válik mindenki számára kötelezővé, és fokozatosan egységesedik: a ’60-as évek elejétől a tanterv, 1975-től a képzést biztosító intézmény, a „collège” is egységes. A „mathématiques modernes” reform abban az időszakban érkezik, amikor a tanterv már egységes, az intézményrendszer viszont még nem. Ebben a kontextusban formális nyelv és az egységes módszer hangsúlyozása egységesítő szerepet tölt be, ugyanazt a képzést biztosítva mindenkinek, lakhelytől és társadalmi helyzettől függetlenül. Tekintve, hogy az absztrakt gondolkodást hagyományosan az elit sajátosságának tekintik, és korábban az „ordre secondaire”-re, az elitképzés rendjére volt jellemző, a mindenki számára elérhető absztrakt matematika tanítása a demokratizálás eszközének is tekinthető. Történeti kutatások valóban azt hangsúlyozzák, hogy a reform bevezetésének egyik legfőbb nehézségét épp a különböző „rendek” eltérő kultúrája, és a tanárok többségét alkotó, az egykori „ordre primaire”-ből érkező tanárok ellenállása jelentette (d’Enfert & Gispert 2011).

Magyarországon viszont az egységes 8 évfolyamos általános iskola már 1946-ban létrejön, a következő évtizedeket pedig szigorúan szabályozott, központosított oktatási rendszer jellemzi. Bár Varga hivatkozik az egységes általános iskola támasztotta kihívásokra (Halmos & Varga 1978), reformja valójában egy másfajta átalakulás időszakában valósul meg. Az 1960-as évek végétől az oktatási rendszerben lassú, óvatos liberalizációs folyamat indul el – ennek a folyamatnak pedig éppen az a Varga Tamás vezette matematikaoktatási reform az egyik úttörője (Báthory 2001), amely a tanárok önállóságát és a tanulók egyéni különbségeinek figyelembevételét hangsúlyozza. Ez az úttörő szerep azonban azt is jelenti, hogy a reform egy még meglehetősen autokratikus és központilag szabályozott iskolarendszerben kerül bevezetésre – Varga Tamás több megjegyzése utal arra, hogy ilyen tekintetben a reform jelentős ellenállásba ütközött. További lényeges szempont, hogy a „demokratizáció" a szocializmusban egészen mást jelent, mint a korabeli Franciaországban: az „elit" kultúrájának széleskörű elterjesztése helyett inkább a „dolgozó nép" kultúrájának előtérbe helyezése a cél, ami a matematika szempontjából a konkrét, gyakorlatias megközelítésnek kedvez. Ez a szempont az 1940-60-as évek tanterveiben rendkívül hangsúlyosan jelenik meg, Varga Tamás reformjában már sokkal kevesebb hangsúlyt kap, de a konkrét tapasztalatokból való kiindulás, amely Varga Tamás koncepciójának fontos jellemzője, összhangban áll e politikai jellegű elvárásokkal.

Végül megemlítem a magyar és a francia reform lezajlását érintő különbségeket, amelyek legalább részben a politikai kontextus különbségeivel magyarázhatók. A francia reform nagyon sok szereplőt mozgat meg: a legkülönbözőbb intézmények képviselői, matematikusok, általános- és középiskolai tanárok, tanáregyesületek, szakszervezetek, szakfelügyelők vesznek részt a reformot megelőző élénk vitában. A reform lezajlása ugyanakkor meglehetősen gyors, nagyon rövid, csupán 1-2 éves kísérleti időszak előzi meg. A magyar reform jóval hosszabb előkészítési idő után kerül bevezetésre (a kísérletek kezdetei és a kötelező bevezetés között 15 év telik el!), a reformot megelőző vitákban azonban, úgy tűnik, kevesebb szereplő tud részt venni, mint Franciaországban, nagyobb szerepe van az állami kontrollnak a folyamatban[62]. A magyar reform koherensebb kialakítása, a pedagógiai és matematikai törekvések nagyobb harmóniája részben a hosszabb kísérleti időszakkal függhet össze. A francia reform több feszültséget rejt az azt formáló különféle törekvések között – ezek a feszültségek és a reformot övező élénk viták azonban a reform dinamikus korrekciójához vezetnek, amely nem csak a matematikaoktatás fejlődését, hanem a matematikaoktatási kísérletek és a matematikadidaktikai kutatások kialakulását is magával hozza a '70-es évek elejétől kezdve.

[62] A reform lezajlásának és az azt övező vitáknak a leírása azonban további kutatást igényelne, amelynek az országban zajló egyéb matematikaoktatási kísérleteket is figyelembe kéne vennie.

5 VARGA TAMÁS REFORMJA ÉS A „FELFEDEZTETŐ MATEMATIKAOKTATÁS"

A konklúziót két kiegészítő megjegyzéssel zárom. Először a „felfedeztető matematikaoktatás" kérdésére térek ki. A bevezetésben említettem, hogy Varga Tamást sokszor valamiféle „felfedeztető matematikoktatási hagyomány" képviselőjeként szokás emlegetni, amelyben a problémamegoldás fontos szerepet játszik. A disszertációban leírt elemzések valóban azt mutatják, hogy Varga Tamás reformjában a problémák és a matematikai felfedezés folyamatai központi szerepet töltenek be.

A problémamegoldás, a felfedeztető tanítás, az „inquiry based teaching" nemcsak az oktatáspolitikai törekvések fontos összetevői nemzetközi szinten, hanem aktuális didaktikai kutatások tárgyát is képezik. E disszertáció keretében nem vállalkozhattam arra, hogy az e tárgyban folyó kutatásokat áttekintsem, és megkíséreljem Varga művét e kontextusba helyezni. Itt csupán példaként említem Artigue és Blomhøj (2013) cikkét, amely áttekintést igyekszik adni az „inquiry based mathematics education" fogalmának elméleti megalapozását érintő kísérletekről. Artigue és Blomhøj több didaktikai elméletet számba vesz, amelyek valamilyen módon hozzájárulhatnak az IBME elméleti megalapozásához: többek között a francia hagyományból a Didaktikai Szituációk Elméletét és a Didaktika Antropológiai Elméletének néhány újabb fejleményét, a Freudenthal művén alapuló Realistic Mathematics Education irányzatot, a Pólyától és Schoenfeldtől eredeztethető „Problem Solving" megközelítést, illetve a modellezést vagy a dialógust középpontba állító elméleteket. Azon túlmenően, hogy a fenti elméletek némelyikével való kapcsolata történetileg is kimutatható, már ezen irányzatok nevének felsorolása is elég ahhoz, hogy Varga koncepciójának velük való rokonságát felismerjük. Érdemes volna Varga művét megpróbálni elhelyezni ebben az elméleti kontextusban, remélve azt is, hogy a reformjának elemzése hozzájárulhat az IBME folyamatban lévő elméleti megalapozásához. Ez a munka már a kutatásom perspektíváinak részét képezi – itt csupán néhány olyan szempontot emelek ki, amelyek eddigi elemzéseim alapján fontosnak tűnnek egy ilyen elméletalkotó munkához.

(1) Az a rendszerszerű megközelítés, amelyet kutatásomban követtem, szoros összefüggésekre világított rá az episzemológiai háttér, a tanterv és a tanítási gyakorlat sajátosságai között. Varga reformjának egyik sajátossága, amely az IBME szempontjából különösen érdekessé teszi, hogy egy egész tantervet alkotott meg ilyen szellemben. Láttuk, hogy a tanterv témaválasztásai és felépítése szoros kapcsolatban állnak a felfedeztető tanítási módszerekkel. Megfigyelhettük azt is, hogy a reform mögött koherens „heurisztikus" matematikafelfogás áll. Varga Tamás reformjának példája azt sugallja, hogy a

problémamegoldás vagy a felfedeztető tanítás nem csupán lokális, egy-egy feladatra korlátozódó kérdés; legalább ennyire igényel globális jellegű megfontolásokat, mind a tanterv egészét, mind a tanítandó matematika természetét illetően.

(2) A Varga reformjára jellemző „felfedezetető” típusú didaktikai szerződésben az osztálytermi dialógusok irányítása központi szerepet látszik betölteni. A tankönyvekben és tanári kézikönyvekben fellelhető számos kis ötlet, tanács, amely a tanár-diák dialógusok kezelését érinti, azt a benyomást kelti, hogy mélyebb didaktikai megfontolások rejlenek a háttérben, amelyek azonban csak konkrét példákon keresztül jelennek meg, de Varga művében sehol nincsenek összefoglalva, általánosan megfogalmazva. A fentiek alapján érdemes volna megpróbálni mélyebben feltárni és összefoglalni e dialogikus gyakorlat alapelveit.

(3) Elemzéseim a Varga Tamás által elgondolt tanári munka egy másik fontos összetevőjére is rávilágítottak: a hosszú távú tervezés, és ezen belül is a problémasorozatok szerkesztésének fontosságára. Varga felfogásában a problémamegoldás nem egymástól elszigetelt problémák tárgyalására korlátozódik: az új fogalmak és módszerek sokkal inkább hosszabb folyamat révén alakulnak ki, amely folyamat megfelelően rendezett problémák egész során keresztül halad előre. A dialógus gyakorlata mellett a problémasorozatok szervezése látszik biztosítani két némileg ellentmondó törekvés: a felfedező folyamatok nyitott jellege és a tanítani kívánt ismeretek megjelenésének biztosítása között az egyensúlyt. Így hát érdemes volna módszeresebben tanulmányozni e problémasorozatok szervezésének alapelveit.

6 MEGJEGYZÉS A DIDAKTIKAI ELMÉLETEKRŐL

A bevezetésben felvetettem azt a kérdést, mennyiben átvihetőek a didaktikai elméletek egyik kontextusról a másikra, mennyiben kötődnek ahhoz a kontextushoz, amelyben kialakultak. Kutatásom ebből a szempontból egyfajta kísérletnek is tekinthető: a Didaktikai Szituációk Elméletét kíséreltem meg egy Franciaország és egy másik ország közti összehasonlító elemzéshez használni, ráadásul épp azt a korszakot illetően, amelyben az elmélet kialakult. Brousseau valószínűségszámítási témájú kísérletének elemzése révén kettős nézőpontból tudtam vizsgálni elméletét: azon kívül, hogy didaktikai elemzéseim elméleti hátteréül szolgált, az elmélet kialakulásának kontextusa történeti elemzéseim tárgyát is képezte. Brousseau elmélete szorosan látszik kötődni kialakulásának történeti kontextusához, nevezetesen a „mathématiques modernes” reform körüli vitákhoz, a reformmal összefüggésben és annak folyományaként beindult IREM hálózathoz és az 1970-es években megjelenő matematikadidaktikai kutatásokhoz. A konstruktivizmus mint kiindulópont, a szituáció fogalmának elméletbe foglalása, a tanulóknak a matematikai fogalomalkotásban önállóságot hagyó adidaktikai szituáció fogalma, a devolúció és az intézményesítés fontosságának hangsúlyozása, amelyek lehetővé teszik az intézményes tudás elsajátítását – Brousseau elméletének e jellemzői úgy tűnik, a korabeli francia matematikaoktatás körüli törekvésekre, problémákra és vitákra kísérelnek meg elméleti szinten válaszolni.

A francia-magyar összehasonlítás során a francia forrásokat könnyebbnek tűnt az elmélet segítségével jellemezni, mint a magyar forrásokat. Míg a francia példákban viszonylag könnyű volt adidaktikai szituációk, retroaktív miliők meglétét vagy hiányát megállapítani, a Varga koncepcióját jellemző dialogikus gyakorlatot lényegesen nehezebb Brousseau terminusainak segítségével leírni, elsősorban az osztály és a tanár közti folyamatos interakciónak és a miliő fokozatos átalakításának köszönhetően. A fundamentális szituáció és az intézményesítés központi szerepe Brousseau elméletében, az intézményesítő fázisok ritkasága és a problémasorozatok szervezésének jelentősége Varga Tamás koncepciójában szintén olyan tényezők, amelyek megnehezítik az elmélet közvetlen alkalmazását a magyar reform kontextusában.

A kísérlet mindezzel együtt gyümölcsözőnek bizonyult. Egyrészt, a fent leírt nehézségek ellenére a Didaktikai Szituációk Elmélete hatékony eszközként szolgált elemzéseimhez, különösen az *adidaktikai potencialitás*, *a didaktikai szerződés* és a *miliő* fogalmának köszönhetően[63]. Másrészt pedig éppen az elmélet alkalmazásával kapcsolatos nehézségek világítottak rá Varga Tamás koncepciójának néhány sajátos vonására.

Az ilyen jellegű „kísérletek" nem idegenek az aktuális didaktikai kutatásoktól. A „Networking theories" projekt egyik kiindulópontja például éppen az európai didaktikai elméletek kulturális hátterének sokszínűsége (Bikner-Ahsbahs & Prediger 2014, 5. o). Ez a megközelítés további érvként szolgálhat arra nézve, hogy érdemes volna Varga Tamás matematikaoktatási koncepciójának elemzését továbbfejleszteni, és kísérletet tenni arra, hogy e koncepciót elhelyezzük az európai didaktikai kutatások kontextusában. Meg kell azonban említenem egy különbséget is a „Networking theories" projekthez képest: míg ez utóbbi kutatóprojekt egy-egy szituációt egyszerre többféle didaktikai elmélet felhasználásával elemez, én Varga és Brousseau által konstruált szituációkat tanulmányoztam, és azt

[63] E fogalmak jó alkalmazhatósága a magyar reform példájára feltehetően nem független Varga és Brousseau koncepciójának közös nemzetközi hátterétől, és ezen belül a két koncepció konstruktivista alapjaitól.

vizsgáltam, hogyan befolyásolják a szituációk megalkotását a hátterükben álló matematikaoktatási elképzelések.

7 A KUTATÁS PERSPEKTÍVÁI

Kutatásomban átfogó képet igyekeztem adni a magyar és a francia reformról: az oktatás különböző szintjeit vizsgáltam, különböző matematikai témákat, a tanítás különböző összetevőit (tanterveket, tanítási módszereket és segédanyagokat is), ráadásul vizsgálataimhoz több tudományterület (tudománytörténet, didaktika) eszközeit, módszertanát is felhasználtam. Egy ilyen jellegű kutatás szükségképpen számos korlátba ütközik, nem vállalkozhattam arra, hogy minden szempontból kimerítő elemzést végezzek. Disszertációm lezárásaként néhány olyan lehetséges kutatási irányt írok le röviden, amelyeket a doktori kutatásom keretében nem állt módomban részletesebben tárgyalni, vagy amelyek a kutatás során merültek fel, és számomra a kutatás legrelevánsabb folytatási lehetőségeinek tűnnek. E kutatási perspektívákat két nagyobb csoportba sorolom: először a tudománytörténeti, aztán a didaktikai tárgyú kutatási perspektívákat fejtem ki.

7.1 A matematikaoktatás történetét érintő kutatási perspektívák

(1) A történeti elemzés módszertana több kérdést is felvetett, elsősorban azzal kapcsolatban, hogy a francia matematikaoktatás-történeti kutatások alapvetően intézménytörténeti megközelítést alkalmaznak, míg a magyar matematikaoktatás történetének elemzésében én inkább biográfiákra, egyéni írott és szóbeli visszaemlékezésekre támaszkodtam. Egységes módszertannal, különösen a felhasznált források körének kibővítésével feltehetően árnyalni lehetne a történeti elemzés eredményeit. Ez a magyar reform szempontjából különösen a Varga Tamás reformját övező viták, az övével párhuzamosan végzett egyéb kísérletek, a végleges reformtantervhez vezető szakmai és politikai döntések szerepének jobb megértését segítené elő. Külön kiemelek egy olyan szempontot, amelyet disszertációmban csak futólag érintettem, de amely a reformok megértése szempontjából különösen jelentősnek tűnik: nevezetesen a pszichológia hatását a „New Math”-időszak matematikaoktatási reformjaiban. A történeti kutatások általában Piaget szerepét hangsúlyozzák, de Varga Tamás esetében a kérdés összetettebbnek tűnik: Piaget mellett többek között Karácsony, Mérei és más magyar és szovjet pszichológusok hatása is valószínűsíthető. E különböző hatások alaposabb vizsgálata hozzájárulhat a reform jobb megértéséhez. Végül érdemes volna tanulmányozni a magyar és a francia reform szakmai és társadalmi fogadtatását: ez segíthetne megérteni azokat

a politikai, társadalmi és intézményi kontextusból eredő korlátokat, amelyekbe a reformok megvalósítása ütközött. (Franciaország esetében már indult ilyen jellegű kutatás, ld. d'Enfert & Gispert 2011.)

(2) A „New Math" időszak francia és magyar reformjait tárgyaló elemzések elmélyítése mellett a kutatást többféle értelemben is ki lehet bővíteni. Az egyik lehetőség a vizsgált időtartam bővítése. Kutatásomban röviden érintettem a 19. és 20. század fordulóján megvalósuló matematikaoktatási reformokat, és ezek összefüggéseit a „New Math" időszak reformjaival. Francia és nemzetközi szinten ezeket az összefüggéseket több kutatás is vizsgálta (pl. Gispert & Schubring 2011, Barbazo & Pombourcq 2010), Magyarország esetében viszont még elemzésre várnak. Varga Tamásnál, Péter Rózsánál, Kalmárnál több hivatkozást is találunk 20. század eleji matematikusok művére, elsősorban Fejér Lipótra, Beke Manóra, de Félix Kleinre is, ami nem csupán a 20. század eleji és az 1960-70-es évekbeli reformok közötti folytonosságra enged következtetni, de a német matematikai kultúrával való kapcsolatra is utal. A kutatás természetesen bővíthető másik oldalról, az 1970-es éveket követő időszak irányába is: ennek relevanciája az előbb említetteknél nyilvánvalóbb, hiszen segítene megérteni a „New Math" időszak reformjainak hatását a mai matematikaoktatásra, és az 1970-es évek óta lezajlott változásokat.

(3) A kutatást újabb országok vizsgálatára is érdemes volna kiterjeszteni. A történeti elemzés során megjegyeztem, hogy a „New Math" reformmozgalmat gyakran a hidegháború politikai kontextusában szokás értelmezni, ez a megközelítés pedig arra engedne következtetni, hogy két párhuzamos matematikaoktatási reform létezett, az egyik nyugaton, a másik a „keleti blokkban". A magyar és a francia reform példája viszont cáfolni látszik ezt a hipotézist: a „keleti blokk" hatása nem tűnik meghatározónak a magyar reform esetében, a magyar reform vezetői ugyanazoknak a nemzetközi szervezeteknek a munkájában vesznek részt, mint a franciák, és még közvetlen együttműködés nyomait is láthattuk a két ország között. Érdemes volna ezt a vizsgálatot több országra is kiterjeszteni, hogy a két „blokk" közötti kölcsönhatások jellegét jobban megérthessük: egy ilyen jellegű kutatásnak akár a matematikaoktatás történetén túlmutató, politikatörténeti jelentősége is lehet.

7.2 Didaktikai kutatási perspektívák

A matematikadidaktika területén talán még változatosabbak a kutatás folytatási lehetőségei. Mindenekelőtt (1) lehetséges természetesen az egyes matematikai témák tanításával kapcsolatos kutatások elmélyítése. Az általam vizsgált matematikai témák közül különösen a valószínűségszámítás tanításának kutatása tűnik relevánsnak: e téma az utóbbi időben növekvő érdeklődés tárgyát képezi (ld. pl. Batanero 2016).

(2) Egy másik folytatási lehetőség szemiotikai jellegű. Habár ez a kérdés nem állt vizsgálataim középpontjában, többször rámutattam a különböző reprezentációs eszközök (táblázatok, diagramok, számegyenes stb.) fontos szerepére a vizsgált reformokban. Érdemes volna elmélyíteni e reprezentációs eszközök szerepének elemzését, és a szemiotikai kérdéseket a többi vizsgált szempont kontextusába helyezni: hogyan függ össze a reprezentációs eszközök használata a tanterv tematikai választásaival, az intuíciónak és a deduktív érvelésnek tulajdonított szereppel, vagy a tankönyvek nyelvi és stilisztikai jellemzőivel? Számos didaktikai elmélet szolgál eszközként a matematikaoktatás szemiotikai kérdéseinek elemzésére, ezek közül példaként a *matematikai munka tereinek* (*espaces de travail mathématiques*) elméletét említem (Houdement & Kuzniak 2006, Kuzniak 2011), amely az általam is használt *paradigma* fogalmára épül, és amely a szemiotikai kérdéseket a matematikai munka eszközeinek és a matematikai érvelések sajátosságainak összefüggésében tárgyalja.

(3) A számomra talán legígéretesebbnek tűnő kutatási irány, amelyet már a konklúzióban felvetettem, a tanítás gyakorlatát érinti, pontosabban a Varga Tamás matematikaoktatási koncepciójának kapcsolatát az „Inquiry Based Mathematics Education" néven ismert irányzattal. Egy ilyen kutatásnak mindenekelőtt módszeresen át kéne tekintenie az IBME-vel összefüggő matematikadidaktikai elméleteket, beleértve többek között a problémamegoldással kapcsolatos kutatások mai fejleményeit, a holland Realistic Mathematics Educationt, a dialogikus megközelítést alkalmazó elméleteket és a felfedeztető matematikaoktatás gyakorlati megvalósítására irányuló különféle kísérleteket, hogy Varga elméletét e kontextusba helyezhesse. Másrészt Varga koncepciójának mélyebb megértése érdekében immár szükségesnek látszik, hogy túllépjünk az írott szövegek elemzésén, és a gyakorló tanárok tényleges tanítási gyakorlatát is figyelembe vegyük. Első lépésben lehetséges volna például olyan tanárok munkáját vizsgálni, akik Varga követőinek vallják magukat, vagy akiket a magyar matematikaoktatási közösség a felfedeztető matematikaoktatás „mestereinek" ismer el – így lehetne biztosítani, hogy ne távolodjunk el túlságosan Varga eredeti koncepciójától. (E tanítási gyakorlat széles körben való elterjesztése megint másik kérdés, amely valószínűleg nagyobb léptékű kutatást igényel.)

A magyar reform írott dokumentumainak elemzése a Varga Tamás által elgondolt tanítási gyakorlat két fontos összetevőjére világított rá: egyrészt az osztálytermi dialógusok vezetésének fontosságára, másrészt a „problémasorozatok" összeállításának jelentőségére, amelyek a hosszú távú tanítási folyamatokat szervezik. A tényleges tanítási gyakorlat elemzésének ezért érdemes volna erre a két szempontra fókuszálnia. Az első kérdést osztálytermi videós elemzések segítségével lehetne vizsgálni, a második szempont tárgyalásához pedig talán a tanárok által készített anyagok, pl. tanmenetek, óravázlatok elemzése járulhatna hozzá. Ezek a kutatások természetesen új kutatásmódszertani eszközök bevonását is szükségessé teszik. A megfelelő kutatási eszközök kiválasztása további munkát igényel, de példaként megemlítek néhány olyan elméletet amelyek e kérdések vizsgálatához esetleg segítséget nyújthatnak: a *diszkurzív megközelítés* (Sfard 2015) vagy a Robert és Rogalski (2002) által kidolgozott *kettős megközelítés* elmélete például az első, a *dokumentum-alapú megközelítés* (Gueudet & Trouche 2010) pedig a második kérdést illetően lehet releváns.

(4) Ami a hosszútávú tanítási folyamatokat illeti, Varga koncepcióját Brousseau-éval hasonlítottam össze. Az itt feltárt hasonlóságok és különbségek mélyebb elemzésre is érdemesek volnának. Ehhez mindkét szerző munkáiból további, hosszabb tanítási folyamatokat leíró példákat kéne figyelembe venni. Brousseau esetében különösen a racionális számok tanítására kidolgozott kísérlete lehet releváns (vö. Margolinas 2004, 34, o és Brousseau 2014, 167. o.).

(5) Egyik kutatási kérdésem a matematikaoktatás kulturális kontextusának szerepére vonatkozott. E kérdés szempontjából kutatásom esettanulmánynak tekinthető. Folytatása például úgy volna lehetséges, ha megvizsgálnánk a magyar és a francia reform más országokban született adaptációit. A francia reform számos más ország matematikaoktatási reformjait befolyásolta, de a Varga Tamás reformja is inspirált más országbeli kísérleteket: Finnországban például létezik egy alsó tagozatos tanítók által létrehozott Varga-Neményi Társaság, amelynek tagjai a magyar reform munkalapjait alakítják át a finn oktatás igényeinek megfelelően. Az ilyen átvételek, adaptációk elemzése segíthetne jobban megérteni a matematikaoktatási koncepciók átvitelének lehetőségeit és korlátait különböző országok, kultúrák között.

(6) Végül rátérek kutatásom egyik eredeti motívumára, a „magyar matematikaoktatási hagyomány” megőrzésének, továbbadásának, és ezen belül is a tanárképzésnek a problémájára. Kutatásom során megállapítottam, hogy a tanároknak készülő segédanyagok jellemzői függnek a megvalósítani kívánt matematikaoktatási koncepció sajátosságaitól, és különösen a tanároktól elvárt tanítási gyakorlat jellemzőitől, a tanároknak tulajdonított felelősség és autonómia szintjétől. A tanárképzés és a segédanyagok problémái szorosan összefüggnek ebből a szempontból: elemzéseimből mindenekelőtt azt a következtetést tudom

levonni, hogy feltehetően nincs általános szabály a tanárképzés és a tanároknak szánt segédanyagok tervezésére, ez nagyban függ attól, hogy a megvalósítani kívánt matematikatanítási koncepció milyen jellegű munkát vár el tőlük. Ezért az ilyen jellegű kutatásoknak egyszerre kell foglalkozniuk a tanítási gyakorlatot érintő kérdésekkel, amelyekről feljebb már volt szó, illetve a segédanyagokat és a tanárképzést érintő kutatási irányzatokkal.

BIBLIOGRÁFIA

Általános jellegű hivatkozások

Alexits Gy. (1949). Célkitűzéseink. *Matematikai Lapok* 1(1), 1-2.

Andrews, P. & Hatch, G. (2001). Hungary and its caracteristic pedagogical flow. In J. Winter (Ed.), *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 21(2), 26-40. http://www.bsrlm.org.uk/informalproceedings.html

APMEP (1968). Charte de Chambéry. Étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques. *Supplément au Bulletin de l'APMEP*, 263-264.

Artaud, M. (1997). Introduction à l'approche écologique de la didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul, C. Comiti, J.-L. Dorier, J.-B. Lagrange, B. Parzysz, M.-H. Salin (Eds.) *Actes de la 9e école d'été de didactique des mathématiques* (pp.101–139). Houlgate : IUFM de Caen.

Artigue, M. & Houdement, C. (2007). Problem Solving in France: Research and Curricular Perspectives. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 39(5-6), 365-382.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics, *ZDM*. 45(6) 797-810.

Balogh, M. (2013. december) *Varga Domokos, az « abszolút pedagógus »*. Előadás a Magyar Pedagógiai Társaságnak a Varg(h)a fivérekről szóló szemináriumán. http://pedagogiai-tarsasag.hu/?p=3913

Barbazo, E. & Pombourcq, P. (2010*). Cent ans d'APMEP*. Brochure APMEP, n°192.

Batanero, C. (2016) Understanding randomness: Challenges for research and teaching. Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.). *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic*. (pp.34-49). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01280506

Báthory, Z. (2001). *Maratoni reform. A magyar közoktatás reformjának története, 1972-2000*. Budapest : Önkonet.

Békés, V. (Ed.) (2004). *A kreativitás mintázatai*. Recepció és kreativitás. Budapest : Áron Kiadó.

Belhoste, B., Gispert, H. & Hulin, N. (Eds.) (1996). *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : Vuibert & INRP.

Bernard, A. (ed.) (2015). *Les séries de problèmes, un genre au carrefour des cultures*. EDP Sciences, SHS Web of Conferences vol. 22.

Bessot, A. (2011). L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In. C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak, *En amont et en aval des ingénieries didactiques. 15e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 29-56). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bikner-Ahsbahs, A. & Prediger, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. Springer.

Bishop, M.-F., d'Enfert, R., Dorison, C. & Kahn, P. (2011). Réformes du système éducatif et rénovation pédagogique dans les années 1960 : le cas des classes de transition. In d'Enfert & Kahn (2011) pp. 99-120.

Bkouche, R., Charlot, B. & Rouche, N. (1991). *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*. Paris : Armand Colin.

Bolon, J. (2012). L'ouverture de l'APMEP à l'enseignement élémentaire. *Bulletin de l'APMEP*, 499, 298-305. http://www.apmep.fr/L-ouverture-de-l-APMEP-a-l

Bourbaki, N. (1948). L'architecture des mathématiques. In F. Le Lionnais (Ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique* (pp. 35-47). Paris : Actes Sud, Collection « L'humanisme scientifique de demain ».

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. (Előadás a Montreali Egyetem Docteur Honoris Causa címének elnyerése alkalmából.) http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

Brousseau G. (1998). *La théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of mathematical behavior*, 20, 363-411.

Brousseau, G. (2012). Des dispositifs d'apprentissage aux situations didactiques en Mathématiques. *Éducation et didactique*, 6(2), 101-127.

Brousseau, G. (2014). Didactic Situations in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 163-170). Dordrecht : Springer.

Carranza, P. & Kuzniak, A. (2008). Duality of probability and statistics teaching in French education. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education.* Actes de l'ICMI Study 18 et du 2008 IASE Round Table Conference. Consulté sur http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=Joint_ICMI-IASE_Study_2008

Chambris, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Doktori disszertáció, Université Paris Diderot.

Chambris, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie, *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 30(3), 317-366.

Chevallard, Y. (1980). Mathématiques, langage, enseignement : la réforme des années soixante. *Recherches,* 41, 71-99. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=99

Chevallard, Yves (2002a). Organiser l'étude : 1. Structures & fonctions. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)* (pp. 3-32). Grenoble: La Pensée Sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52

Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J.-L Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R Floris (Eds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 21-30 août 2001)* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53

Choquet, G. (1961). Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire. Brochure de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Paris.

Choquet, G. (1964). *L'enseignement de la géométrie*. Paris : Hermann.

CIEAEM (1974), *L'enseignement des probabilités et des statistiques.* CR de la 26e rencontre, Bordeaux août 1974. IREM de Bordeaux.

Clarke, D. (2016). *The role of comparison in the construction and deconstruction of boundaries*. Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.). *CERME 9 – Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb 2015, Prague, Czech Republic* (pp.1702-1708). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01288000

Corry, L. (2001). The Origins of Eternal Truth in Modern Mathematics: Hilbert to Bourbaki and Beyond. http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/truth.html

Császár, Á. (1977). Péter Rózsa. *Matematikai Lapok*, 25(3-4), 257-258.

Császár, Á. (1993). Varga Tamás élő matematikája. *Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés* 1 (pp. 7-15). Budapest : Calibra.

Dieudonné, J. (1955). L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre. Piaget et al. 1955, pp. 47-61.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Dieudonné, J. (1981). L'abstraction et l'intuition mathématique. In *Choix d'œuvres mathématiques* (Tome 1, pp. 6-21). Paris : Hermann.

Douady, R. (1986). Jeux des cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31.

Antibi, A. (2005). *Ecole Michelet Corem – Entretien avec Nadine Brousseau*. IREM de Toulouse.

d'Enfert, R. (2010). Mathématiques modernes et méthodes actives : les ambitions réformatrices des professeurs de mathématiques du secondaire sous la Quatrième République. In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 115-130.

d'Enfert, R. (2011). Une réforme ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970). In d'Enfert & Kahn 2011, pp. 53-74.

d'Enfert, R. & Gispert, H. (2012). Une réforme à l'épreuve des réalités: le cas des mathématiques modernes au tournant des années 1970. *Histoire de l'Éducation*, 131, 27–49.

d'Enfert R. & Kahn P. (Eds.) (2010). *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Quatrième République*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

d'Enfert R. & Kahn P. (Eds.) (2011). *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République (années 1960)*. Grenoble : Presses universitaires de Grenoble.

Dumont, M. & Varga, T. (1973a). *Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Fiches de travail.* Paris : O:C:D:L.

Dumont, M. & Varga, T. (1973b). *Combinatoire, statistique et probabilité de 6 á 14 ans. Guide et cemmentaires.* Paris : O:C:D:L.

« Fehér könyv » (1976). A Magyar Tudományos Akadémia állásfoglalásai és ajánlásai a távlati műveltség tartalmára és az iskolai nevelőtevékenység fejlesztésére. Budapest : MTA.

Forrai, T., Jakab, A., Kiss, P., Pelle, B., Surányi, J., …, & Varga. T. (1972). *Új utak a matematika tanításában 1. Néhány hazai és külföldi kísérlet*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Frank, T. (2011). Teaching and Learning Science in Hungary, 1867–1945: Schools, Personalities, Influences. *Science & Education*, 21(3), 355-380.

Gáll, Gy. (2004). Béla Kerékjártó (A biographical sketch). *Teaching Mathematics and Computer Science*, 2(2), 231-263.

Gallai, T. & Péter, R. (1949). *Matematika a középiskolák I. osztálya számára.* Budapest : Tankönyvkiadó.

Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres*. Doktori disszertáció, Université Claude Bernard, Lyon.

Gergely, A. (Ed.) (2003). *Magyarország története a 19. században.* Budapest : Osiris.

Gispert, H. (2008). *L'enseignement des mathématiques au XXe siècle dans le contexte français*. http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/htm/Gispert08-reformes/Gispert08.htm

Gispert, H. (2010). Rénover l'enseignement des mathématiques, la dynamique internationale des années 1950. In d'Enfert & Kahn 2010, pp. 131-144

Gispert, H. & Schubring, G. (2011). Societal, Structural, and Conceptual Changes in Mathematics Teaching: Reform Processes in France and Germany over the Twentieth Century and the International Dynamics. *Science in Context*, 24(1), 73–106.

Gispert, Hélène (2014). Mathematics education in France: 1800-1980. In A. Karp & G. Schubring 2014 pp. 229-240.

Glaymann, M. & Varga, T. (1975). *Les Probabilities á L'école.* Paris : CEDIC. (Első kiadás 1973.)

Gordon Győri, J., Halmos, M., Munkácsy, K. & Pálfalvi, J. (Eds.) (2007). *A matematikatanítás mestersége – mestertanárok a matematikatanításról*. Budapest, Gondolat.

Gosztonyi, K. (megjelenés alatt). *Mathematical culture and mathematics education in Hungary in the XXth century*. In. B. Larvor (Ed.), *Mathematical Cultures*. Springer : Birkhäuser.

Gosztonyi, K. (2013). Matematikafelfogás és matematikaoktatás összefüggései a magyar matematikaoktatási hagyományban. In. Zs. Zvolenszky et al. (Eds.). *Nehogy érvgyűlölők legyünk. Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* (pp. 152-163). Budapest : L'Harmattan.

Gosztonyi, K. (2014). Séries de problèmes. L'exemple des *Jeux avec l'infini* de Rózsa Péter. *Bulletin de l'APMEP*, 507, 25-31.

Gosztonyi, K. (2015). Séries de problèmes dans une tradition d'enseignement des mathématiques en Hongrie au 20e siècle. In. Bernard (2015). DOI : http://dx.doi.org/10.1051/shsconf/20152200013

Gueudet, G., & Trouche, L. (Eds.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques*. Paideia. Presses Universitaires de Rennes / INRP.

Gurka, D. (2001). Kalmár László szerepe Lakatos Imre matematikafilozófiájának alakulásában. In *Recepció és kreativitás*. http://www.phil-inst.hu/recepcio/htm/3/310_belso.htm

Hajós, Gy. (1960). *Bevezetés a geometriába*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Halmos, M. & Varga, T. (1978). Change in mathematics education since the late 1950's – ideas and realisation Hungary. *Educational Studies in Mathematics*, 9(2), 225-244.

Henry, M. (2009). Émergence de la probabilité et enseignement. Définition classique, approche fréquentiste et modélisation. *Repères IREM*, 74, 67-89.

Hersant, M. & Perrin-Glorian M.-J. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 23(2), 217-276.

Hersant, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 4(2), 241-258.

Hersh, R., & John-Steiner, V. (1993). A Visit to Hungarian Mathematics, *The Mathematical Intelligencer*, 15(2), 13-26.

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-195.

Houzel, C. (2004). Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du 20e siècle. *SMF Gazette*, 100, 52-63.

Kalmár, L. (1967). Foundations of Mathematics: Whither Now? In I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics* (pp. 186-194). Amsterdam : North-Holland Publishing.

Kalmár, L. (1986). A matematikai egzaktság fejlődése a szemlélettől az axiomatikus módszerig.. In A. Varga (Ed.). *Integrállevél* (pp. 32-61). Budapest : Gondolat. (Első megjelenés: 1942 In S. Karácsony (Ed.) *A másik ember felé*. Debrecen : Exodus.)

Kántor-Varga, T. (2006). *Biographies*. In Horváth János ed., *A Panorama of Hungarian Mathematics in the Twentieth Century*. Bolyai Society Mathematical Studies 14 (pp. 563-608). Budapest Berlin [etc.] : János Bolyai Mathematical Society Springer-Verlag.

Kántor-Varga, T. & Schubring, G. (2008). *Emanuel Beke*. http://www.icmihistory.unito.it/portrait/beke.php

Kardos, J. & Kornidesz, M. (1990). *Dokumentumok a magyar oktatáspolitika történetéből II. (1954-1972)*. Budapest : Tankönyvkiadó.

Karp, A. & Schubring, G. (Eds.) (2014). *Handbook on the history of mathematics education*, New York : Springer.

Katona, Gy. & Tusnády, G. (1970). Rényi Alfréd pedagógiai munkássága. *Matematikai Lapok*, 21(3-4), 243-244.

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, 44(4), 563-571.

Klein, S. (1980). *A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata*. Budapest : Akadémiai Kiadó

Kontra, Gy. (1992). *Karácsony Sándor*. Budapest : Országos Pedagógiai Könyvtár és Múzeum.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24.

Kosztolányi, D. (1933). *Esti Kornél*. Budapest : Genius. http://mek.oszk.hu/00700/00744/00744.htm

Lakatos, I. (1976a). *Proofs and Refutations*. Cambridge : Cambridge University Press.

Lakatos, I. (1976b). A Rainessance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science* 27/3, p. 201-223.

Lamassé, S. (2014). Relationships between French « Practical Arithmetics » and Teaching ? In. A. Bernard & C. Proust (Eds.), *Scientific Sources and Teaching Contexts Throughout History : Problems and Perspectives* (pp. 125-154). Dordrecht : Springer.

Láng, T. (1976, le 12 février). Nem számtan : Matematika. Beszélgetés egy új oktatási módszerről [entretien avec Tamás Varga]. *Magyar Nemzet*, p. 5.

Le miracle hongrois (2009). *Tangente*, 126, 10-26.

Lénárd F. (1972). Modellalkotás variációk segítségével a gondolkodás rugalmasságának fejlesztésére az alsófokú matematikatanítás első éveiben. In. Forrai, T., Jakab, A., Kiss, P., Pelle, B., Surányi, J., …, &Varga. T. 1972, pp. 55-78.

Lichnerowicz, A. (1955). Introduction de l'esprit de l'algèbre modern dans l'algèbre et la géométrie élémentaires. In. Piaget et al. 1955, pp. 63-74.

Lichnerowicz-bizottság (1967). Rapport préliminaire de la commission ministérielle. *Boulletin APMEP 258*, pp. 245-270.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du* vrai et du faux *dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2002). Situations, milieux, connaissances – Analyse de l'activité du professeur. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-156). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Margolinas, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques*. HDR, Université de Provence - Aix-Marseille I.

Mashaal, M. (2002). *Bourbaki, une société secrète des mathématiciens*. Paris : Pour la science.

Mérei, F. & V. Binét, Á. (1970). *Gyermeklélektan*. Budapest : Gondolat Kiadó.

Máté, A. (2006). Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics. *Perspectives on Science,* 14(3), 282-301.

Máté, A. (2008). Kalmár László és Péter Rózsa – matematikusok a filozófiáról. In P. G. Szabó (Ed.), *Kalmárium II* (pp. 56-71). Szeged : Polygon.

Molnár, L. & Zsidi, V. (2006). *Magyarországi világi felsőoktatási intézmények a kezdetektől 1945/1948-ig*. Budapest : Magyar Felsőoktatási Levéltári Szövetség.

Moulin, M. (2014). *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques*. Doktori disszertáció, Université Claude Bernard, Lyon.

Németh, A. & Pukánszky, B. (1996). *Neveléstörténet*. Budapest : Nemzeti Tankönyvkiadó.

OPI Matematikai Osztály (1983). A torzulás-vita tanulságai. *Köznevelés*, 39(20), 16-19.

Paumier, A.-S. (2014). *Laurent Schwarz et la vie collective des mathématiques*. Doktori disszertáció, Uniersité Paris 6.

Pálfalvi, J. (2000). *Matematika didaktikusan*. Budapest : Typotex.

Pálfalvi, J. (2007). Egy szép példa Varga Tamástól. In M. Halmos, & J. Pálfalvi (Eds.), *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* (pp. 3-4). Budapest : Nyitott Könyvműhely.

Palló, G. (Ed.) (2004). *A honi Kopernikusz-recepciótól a magyar Nobel-díjakig*. Recepció és kreativitás. Budapest : Áron Kiadó.

Parzysz, B. (1997). Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd'hui. M. Henry (Ed.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 17–38). APMEP / ADIREM.

Parzysz, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, 16, 127-147.

Pelay N. (2011). *Jeu et apprentissages mathématiques : élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Doktori disszertáció, Université Claude Bernard – Lyon 1.

Péter, R. (2004). Matematika és művészet – nem két ellentétes pólus. In S. Róka & D. Valcsicsák (Eds.), *A jövő a számtantudósoké. Magyar szerzők írásai a matematikáról* (pp. 195-213). Budapest : Noran.

Péter, R. (2010). *Játék a végtelennel*. Budapest : Typotex. (Első megjelenés 1944, Budapest : Dante Könyvkiadó.)

Piaget, J., Beth, E.W., Dieudonné, J., Lichnerowicz, A., Choquet, G., & Gattegno, C. (1955). *L'enseignement des mathématiques*. Neuchâtel : Delachaux & Niestlé.

Pintér, K. (2012). *A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról*. Doktori disszertáció, Université de Szeged.

Pólya, Gy. (1969). *A gondolkodás iskolája*. Gondolat : Budapest. (Eredeti megjelenés 1945-ben *How to solve it?* címmel. Princeton University Press.)

Pólya, Gy. (1988). *A matematikai gondolkodás művészete*. Budapest : Gondolat. (Eredeti megjelenés 1954-ben *Mathematics and Plausible Reasoning* címmel. Princeton: Princeton University Press.)

Pólya, Gy. (1961). Leopold Fejér. Leopold Fejér, *Journal of the. London Mathematical Society*, 36, 501-506.

Pólya György (1981). *Mathematical discovery. On understanding, learning and teaching problem solving*. New York : John Wiley & Sons. (Első megjelenés 1962-ben.)

Popper, K. (1997). *A tudományos kutatás logikája*. Budapest: Európa Könyvkiadó. (Originalement publié sous le titre *Logik der Forschung*. Vienne : Springer 1934)

Prékopa, A., Kiss, E., Staar, Gy., & Szenthe, J. (2004). *Bolyai-emlékönyv*. Budapest : Vincze Kiadó.

Radtka, C. (2014). *Construire la société scientifique par l'école. Angleterre, France et Pologne au prisme des manuels de sciences pour les élèves ordinaires (1950-2000)*. Doktori disszertáció, Centre Alexandre Koyré.

Rényi, A. (1966). *Valószínűségszámítás*. Budapest : Tankönyvkiadó Vállalat.

Rényi, A. (1965) *Dialógusok a matematikáról*. Budapest : Akadémiai Kiadó.

Rényi, A. (1967). *Levelek a valószínűségről*. Budapest, Akadémiai Kiadó.

Rényi, A. (2005). *Ars Mathematica. Rényi Alfréd összegyűjtött írásai*. Budapest : Typotex. (Első megjelenés 1973, Budapest : Magvető.)

Rényi, Zs. (2013). *Dialógusok egy matematikusról*. Szeged : Polygon

Revuz, A. (1973). *Modern matematika, élő matematika* (T. Varga trad.). Budapest : Gondolat. (Eredeti megjelenés 1963-ban *Mathématique moderne mathématique vivante* címmel. Paris : OCDL.)

Revuz, André (1996). La prise de conscience bourbakiste, 1930-1960. In. Belhoste-Gispert-Hulin eds. *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Vuibert & INRP, Paris pp. 69-76.

Robert, A. & Rogalsky, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies),* 2 (4), 505-528.

Romsics, I. (2010). *Magyarország története a XX. században.* Budapest : Osiris.

Savoye, A. (2010). Réforme pédagogique, réforme disciplinaire: l'expérience des Classes nouvelles dans l'enseignement du second degré (1945-1952). In d'Enfert & Kahn 2010, (pp. 51-64).

Scharnitzky, T., & Török, T., (2002). Emlékek Varga Tamásról. In M. Halmos, M & J. Pálfalvi (Eds.), *Matematikatanár-képzés – matematikatanár-továbbképzés* 6 (pp. 3-8). Budapest : Műszaki Könyvkiadó.

Schmidt, W., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., … Wolfe, R.G. (1996). *Characterising Pedagogical Flow*. Dordrecht : Kluwer.

Servais, W. and Varga, T. (Eds.) (1971). *Teaching school mathematics. A Unesco source book.* Middelsex : Penguin Books.

Sfard, A. (2015). Partcipationiste discourse on mathematics learning. In. D. Butlen, I. Bloch, M. Bosch, C. Chambris, G. Cirade, …, C. Mangiante-Orsola (Eds.), *Actes de la 17e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 79-96). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Szabó, M. (2013). Karácsony Sándor nyelvfelfogásának hatása Kalmár László korai matematikafilozófiájára. In Zvolenszky et al. (Eds.), *Nehogy érvgyűlölők legyünk. Tanulmánykötet Máté András 60. születésnapjára* (pp. 164-173). Budapest : L'Harmattan.

Szabó, P. G. (Ed.) (2005). *Kalmárium.* Szeged : Polygon.

Szalay, M. & Urbán, J. (1980). Surányi János matematikai munkássága. *Matematikai Lapok*, 28(1-3), 101-119.

Szénássy, B. (2008). *A magyarországi matematika története a XX. század elejéig.* Szeged : Polygon.

Szendrei, J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról*. Budapest : Typotex.

Szendrei, J. (2007). *In memory of Tamás Varga*. Consulté sur http://www.cieaem.org/?q=node/18

Turán, P. (1970). Rényi Alfréd. *Matematikai Lapok*, 21(3-4), 199-210.

Varga, T. (1963). *A komplex matematikatanítási kísérlet 1–4. osztályos terve.* Kézirat, Halmos M. gyűjteménye.

Varga, T. (1967a). *Combinatorials and probability for young children, I. Sherbrooke Matehematics Project*. University of Sherbrooke.

Varga, T. (1967b). *Komplex módszer a 6 éves kortól kezdődő matematikatanításban*. Országos Pedagógiai Intézet. Kézirat, Halmos M. gyűjteménye.

Varga, T. (1970). Probability through games. A sample of three games. In *New Trends in Mathematics Teaching II*. Paris : UNESCO.

Varga, T. (1972). Logic and probability in the lower grades. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 346-357.

Varga, T. (1973). A valószínűségszámítás tanítása. *Kapcsolat*, 22-23, 45-71.

Varga, T. (1975). *Komplex matematikatanítás. Kandidátusi alkotás ismertetése.* MTA.

Varga, T. (ca. 1980). *A valószínűség a magyar általános iskolában*. Kézirat, Halmos M. gyűjteménye.

Varga, T. (1982). New topics for the elementary school math curriculum. In. Th. C. O'Brien (Ed.), *Toward the 21st Century in Mathematics Education* (pp. 12-34). Teachers' Center Project, Southern Illionis University at Edvardsville.

Varga, T. (1987). Az egyszeregy körül. *Kritika*, 25(12), 28-31.

Varga Tamás műveinek jegyzéke (1982). *Matematikai Lapok*. 30(1-3) pp. 5-7

Walusinski, G. (1986). L'instructive histoire d'un échec : les mathématiques modernes (1955 – 1972). *Bulletin de l'APMEP*, 353. consulté sur http://www.apmep.fr/L-instructive-histoire-d-un-echec

Tantervek

Francia tantervek

Évszám	Szint	Tanulmányozott kiadás
1945	primaire	http://jl.bregeon.perso.sfr.fr/Programmes.htm
1945	collège	
1960	collège	Monge, M. & Guinchan M (1963), *Mathématiques. classe de 6e*

		Paris : Belin. Monge, M. & Guinchan M (1964), *Mathématiques. classe de 5e* Paris : Belin
1964	collège	Monge, M. & Guinchan M (1965), *Mathématiques. classe de 4e* Paris : Belin Monge, M. & Guinchan M (1966), *Mathématiques. classe de 3e* Paris : Belin
1969	collège	Ministère de l'éducation nationale (1972). *Mathématiques. Classes du premier cycle*. (2e edition). Paris : INRDP.
1970	primaire	*Programme et enseignement des mathématiques à l'école élémentaire* http://www.formapex.com/repertoires/550-programmes-textes-officiels
1977	primaire	Ministère de l'éducation (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle préparatoire.* Centre national de documentation pédagogique. Ministère de l'éducation (1979). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle élémentaire*. Centre national de documentation pédagogique. Ministère de l'éducation (1980). *Contenus de formation à l'école élémentaire. Cycle moyen*. Centre national de documentation pédagogique.
1977	collège	Ministère de l'éducation (1977). *Classes de sixième et de cinquième.* Centre national de documentation pédagogique. Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1979) *« Faire » des mathématiques. Classe de 4e. Livre du maître* (pp. V-VIII). Paris : CEDIC. Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3e. Livre du maître* (pp. 4-6). Paris : CEDIC.

Magyar tantervek

Évszám	Szint	Tanulmányozott kiadás
1945	alsó és felső	Művelődésügyi Minisztérium (1946), *Tanterv az általános iskola*

	tagozat	*számára*. Budapest Országos Köznvelési Tanács.
1962	alsó és felső tagozat	Művelődésügyi Minisztérium (1962), Tanterv és utasítás az általos iskolák számára. Budapest : Tankönyvkiadó.
1978	Alsó és felső tagozat	Szebenyi P. ed. (1978), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve*. Budapest : OPI.

Tankönyvek és tanári kézikönyvek

Francia tankönyvek és tanári kézikönyvek

Alsó tagozat

Brousseau, G. & Felix, L. (1972). *Mathématique et thèmes d'activité à l'école maternelle*. Collection Première mathématique. Paris : Hachette.

Eiller, R., Mertz, J. & Guyonnaud, M. T. (1971). *Math et calcul cours préparatoire.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Mertz, J. & Guyonnaud, M. T. (1972). *Math et calcul cours préparatoire. Document de travail pour le maître*. (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Guyonnaud, M. T., Mertz, J., Ravenel, R. & Ravenel, S. (1977). *Math et calcul cours préparatoire.* (gr. 1) Paris : Hachette.

Eiller, R., Guyonnaud, M. T., Mertz, J., Ravenel, R. & Ravenel, S. (1977). *Math et calcul cours préparatoire. Livre du maître*. (gr. 1) Paris : Hachette.

ERMEL (Equipe de recherche mathématique à l'école élémentaire) (1978). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cylce préparatoire.* (gr. 1) Paris : SERMAP OCDL.

ERMEL (1978). Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Cylce élémentaire - Tome 2. (gr. 2) Paris : SERMAP OCDL.

Picard, N. (1970), *À la conquète du nombre I. Classe de CP*. (gr. 1). Paris : OCDL.

Felső tagozat

Collection Mauguin (1976). *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Librairie Istra.

Collection Mauguin (1980). *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Librairie Istra.

Collection Monge (1969), *Mathématiques. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Belin.

Collection Monge (1969), *Mathématiques. Classe de sixième. Guide pédagogique.* (gr. 6) Paris : Belin.

Collection Monge (1971), *Mathématiques. Classe de quatrième.* (gr. 8) Paris : Belin.

Collection Monge (1972), *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Belin.

Collection Monge (1978), *Mathématiques. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Belin.

Collection Queyzanne-Revuz (1969), *Mathématique. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1969), *Mathématique. Classe de sixième. Livre du professeur* (gr. 6) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1971), *Mathématique. Classe de quatrième.* (gr. 8) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1972), *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Nathan.

Collection Queyzanne-Revuz (1972), *Mathématique. Classe de troisième. Livre du professeur.* (gr. 9) Paris : Nathan.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1979) *« Faire » des mathématiques. Classe de 4^e^. Livre du maître*. (gr. 8) Paris : CEDIC.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3^e^.* (gr. 9) Paris : CEDIC.

Deledicq, A., Lassave, C. & Missenard, D. (1980) *« Faire » des mathématiques. Classe de 3^e^. Livre du maître.* (gr. 9) Paris : CEDIC.

Polle, R. & Clopeau G.-H. (1973), *Mathématique. Classe de sixième.* (gr. 6) Paris : Delagrave.

Polle, R. & Clopeau G.-H. (1972), *Mathématique. Classe de troisième.* (gr. 9) Paris : Delagrave.

Magyar tankönyek és tanári kézikönyvek

Alsó tagozat

C. Neményi, E. & Varga, T. (1978) *Matematika munkalapok. 1. osztály*. (gr. 1) Budapest: Tankönyvkiadó.

C. Neményi, E., Göndöcs, L., Merő, L., & Merő, L. & Varga, T. (1978), *Kézikönyv a matematika 1. osztályos anyagának tanításához*. (gr. 1) Budapest : Tankönyvkiadó.

Felső tagozat

Eglesz I., Kovács, Cs., Radnainé Szendrei, J., & Sztrókayné Földvári, V. (1981). *Kézikönyv a matematika 5. osztályos anyagának tanításához*. (gr. 5) Budapest : Tankönyvkiadó.

Eglesz, I., Kovács, Cs., & Sztrókayné Földvári, V. (1979*). Matematika általános iskola 5.* (gr. 5) Budapest : Tankönyvkiadó.

Eglesz, I., Kovács, Cs., & Sztrókayné Földvári, V. (1981*). Matematika általános iskola 6.* (gr. 6) Budapest : Tankönyvkiadó.

Kovács, Cs., Sz. Földvári, V., & Szeredi, É. (1980). *Matematika 7*. (gr. 7) Budapest : Tankönyvkiadó.

Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1979), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 6. osztály*. (gr. 6) Budapest : Tankönyvkiadó.

Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1981), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 7. osztály*. (gr. 7) Budapest : Tankönyvkiadó.

Radnainé Szendrei, J. & Varga, T. (1984), *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve. Tantervi útmutató. Matematika 8. osztály*. (gr. 8) Budapest : Tankönyvkiadó.

Interjúk :

Jeanne Bolon, 2013. március 28.

Josette Adda, 2015. január 20.

Pálmay Lóránt, 2012. július 26.

Halmos Mária, 2013. január 2.

Halmos Mária, Csahóczi Erzsébet, Kovács Csongorné, 2013. november 10.

C. Neményi Eszter, 2013. december 5.

Deák Ervin, 2013. december 28.

Surányi László, 2013. december 29.

Hagyomány és reform az 1960-as és ’70-es évek matematikaoktatásában: Magyarország és Franciaország reformjainak összehasonlító elemzése

Összefoglaló

Varga Tamás munkásságát, és különösen az általa az 1960-as és ’70-es években vezetett „komplex matematikaoktatási reformprogramot” a magyar matematikaoktatás szakemberei a magyarországi matematikaoktatás kiemelkedő jelentőségű momentumának tekintik, amely máig értékes, sok szempontból aktuális és megőrzendő örökséget képvisel. Ennek ellenére – néhány rövid összefoglalón kívül – sem matematikaoktatás-történeti, sem didaktikai elemzés nem született eddig erről a témáról. Hasonló a helyzet azzal a tágabb értelemben vett „felfedeztető matematikaoktatási hagyománnyal”, amelybe Varga Tamás reformmozgalma illeszkedik: mind Magyarországon, mind nemzetközi szinten szinte közhelyszámba megy, hogy létezik egyfajta sajátos „magyar matematikaoktatási hagyomány”, amely a problémamegoldásra és a matematika „felfedeztetésére” helyezi a hangsúlyt, de ennek a hagyománynak részletes elemzése alig létezik. Varga Tamás reformjának elemzésével e hiány betöltéséhez kísérlek meg hozzájárulni, abban a reményben, hogy disszertációm mind a magyarországi didaktikai kutatások, mind a tanárképzés számára hasznos forrásul szolgálhat.

Disszertációmban Varga Tamás reformját egyrészt a fent említett „felfedeztető matematikaoktatási hagyomány” kontextusában, másrészt nemzetközi kontextusában, az 1950-es, 60-as és 70-es évek „New Math” mozgalmával összefüggésben vizsgálom. A „komplex matematikaoktatási reformprogramot” a kor egyik legmeghatározóbb matematikaoktatási reformjával, a francia „mathématiques modernes” reformmal hasonlítom össze. Azt kísérlem meg megmutatni, hogy bár mindkét reform illeszkedik a nemzetközi „New Math” mozgalomba, és törekvéseikben sok szempontból hasonlítanak egymásra, számos lényeges különbség is megfigyelhető köztük – ezek pedig jelentős részben a két reform mögött meghúzódó eltérő matematikai kultúrával és eltérő matematikafelfogással magyarázhatók.

A disszertáció három fő részből áll: az elsőben a reformok a történeti kontextusát, a másodikban az episztemológiai hátterét, a harmadik, legnagyobb terjedelmű részben pedig a reformok didaktikai sajátosságait elemzem.

A történeti rész a nemzetközi és francia matematikaoktatás-történeti szakirodalom mellett a reformok hivatalos dokumentumainak, illetve a reformban résztvevők szóbeli és írásbeli visszaemlékezéseinek elemzésén alapul.

A történeti elemzés mutat rá többek között arra, hogy mindkét ország reformjaira nagy hatást gyakorolt matematikusok egy-egy csoportja, nemcsak a reform matematikai tartalmát, hanem a reform által közvetített matematikafelfogást illetően is. Franciaország esetében elsősorban a Bourbaki-csoporthoz tartozó vagy ahhoz közel álló matematikusokról van szó (Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet), Magyarországon pedig mások mellett elsősorban Péter Rózsáról, Kalmár Lászlóról, Rényi Alfrédről. A második, episztemológiai részben e matematikusok matematikafelfogását és matematikaoktatásról vallott elképzeléseit elemzem, elsősorban matematikanépszerűsítő műveiken, filozófiai jellegű illetve matematikaoktatásról szóló írásaikon keresztül. Ebben a részben azt kísérlem meg megmutatni, hogy a mindkét országban koherens, de egymástól lényegesen eltérő matematikafelfogást képviselnek a reformot támogató matematikusok, amelyet Franciaország esetében „bourbakiánus", Magyarország esetében – a Pólya György és Lakatos Imre felfogásával való rokonságra utalva – „heurisztikus" matematikafelfogásnak neveztem el.

A disszertáció harmadik részének tárgya a reformok didaktikai elemzése. A történeti elemzés rámutat, hogy a reform vezetői a tantervek, a tanítási módszerek és a segédanyagok koherens átalakítására törekedtek: a reform e különböző aspektusait ezért összefüggésükben elemzem. A tantervek elemzésében az ún. *ökológiai megközelítésre* (Artaud 1997) és a *geometriai* illetve *valószínűségszámítási paradigmák* fogalmára (Houdement & Kuzniak 2006, Parzysz 2011) támaszkodom, a tanítási módszerek elemzésében pedig elsősorban a *didaktikai szituációk elméletére* (Brousseau 1998).

A tanítási módszerek elemzésének esetében nehézséget jelent, hogy a korabeli tanítási gyakorlathoz nincs közvetlen hozzáférésünk. Disszertációmban ezért nem kísérlem meg a kor tényleges tanítási gyakorlatának vizsgálatát, ehelyett – írott források, elsősorban tankönyvek és tanári kézikönyvek elemzésén keresztül – a reform vezetőinek elképzeléseit vizsgálom a megvalósítandó tanítási módszerekről. Ez a megközelítés szükségessé teszi a tankönyvek és tanári kézikönyvek elemzését: vizsgálom a szerkezetüket, nyelvezetüket, stílusukat, a bevezetőiket és használati útmutatóikat, hogy megmutassam, hogyan szolgálnak ezek a könyvek forrásul a tanárok számára, hogyan segítik őket a saját tanítási gyakorlatuk kidolgozásában.

A tantervek tartalmának és szerkezetének rövid, átfogó elemzése (III.2. fejezet) után három tantervi fejezettel foglalkozom részletesebben: a természetes szám fogalmának bevezetésével első osztályban (III.3. fejezet), a Pitagorasz-tétellel a felső tagozatos geometria tanterv kontextusában (III.4. fejezet), illetve a kombinatorika és a valószínűségszámítás tanításával (III.5. fejezet). A didaktikai elemzés különböző fejezetei különböző típusú források (alsó és felső tagozatos tankönyvek, munkalapok, tanári kézikönyvek), illetve a tanári gyakorlat különböző összetevőinek (didaktikai szituációk létrehozása, osztálytermi dialógusok irányítása, hosszabb tanítási folyamatok tervezése) vizsgálatára nyújtanak lehetőséget.

Az összehasonlító elemzés rámutat, hogy bár a két reform tartalmaz közös elemeket, amelyek a közös nemzetközi reformmozgalomra vezethetők vissza (mint bizonyos új matematikai témák, például a halmazelmélet vagy a logika bevezetése, alsó tagozatban a segédeszközök használata vagy az „aktív pedagógiai módszerek" szerepének hangsúlyozása), a francia és a magyar reform között számos lényeges különbség is megfigyelhető. Ezek a különbségek jelentős részben visszavezethetők a matematikafelfogásbeli különbségekre: a „bourbakiánus" és a „heurisztikus" matematikafelfogás *matematikai paradigmákként* szolgál a két reform számára, befolyásolva azok sajátosságait.

Így a francia reformban nagy szerepet kap a matematika hierarchikus, axiomatikus felépítése, a deduktív módszer és a modern formális nyelv, az „aktív módszerek" pedig – a reform vezetőinek eredeti szándékai ellenére – kevéssé működőképesek ebben a kontextusban. A segédanyagok vagy nem tartalmaznak tanulói aktivitásra való utalást, vagy olyan didaktikai szituációkat írnak le, amelyekben a tanulók tevékenysége csupán az új fogalmak vagy módszerek illusztrálását szolgálja, de nem biztosít számukra önállóságot a matematikai fogalomalkotás folyamatában. A magyar reform ezzel szemben a matematika különböző területei közti dialektikus kapcsolatokra helyezi a hangsúlyt, a deduktív módszerek helyett a fogalmak lassú, fokozatos általánosítása és absztrakciója, illetve a heurisztikus módszerek kerülnek előtérbe. A tanítási módszerek terén pedig a magyar reformban egyrészt a feladatok problémasorozatokba rendezése, másrészt a tanár és a tanulók közti dialógus kap központi szerepet.

A Varga Tamás reformjáról szóló elemzés a „komplex matematikaoktatási" koncepció több meghatározó és sajátos elemére is rávilágított: az egyik ilyen szempont a matematikafelfogás, a tanterv, a segédanyagok és a tanítási módszerek sajátosságai közti szoros összefüggés; a másik a feladatok problémasorozatba rendezése; a harmadik pedig a tanítási módszerek között a tanár-diák dialógus elsődleges szerepe. E szempontok további vizsgálata érdemben hozzájárulhat a problémamegoldást és a felfedeztető matematikaoktatást középpontba helyező nemzetközi kutatásokhoz.

Tradition and reform in mathematics education during the „New Math" period: a comparative sudy of the case of Hungary and France

Summary

The reform introduced by Tamás Varga during the 1960s and '70s is generally recognized by the Hungarian mathematics education community as a key moment in the history of Hungarian mathematics education, having an important influence and keeping its values until today. The same thing can be sad more generally about Hungarian mathematical teaching traditions with which Varga's reform fit in: they are often recognized, in Hungary and in an international level as focusing particularly on problem solving and on heuristic methods. However, detailed historical or didactical analysis of this tradition is lacking. With the analysis of Varga's reform, I tempt to contribute to fill this gap, hoping that this work will serve as a useful source of mathematics educational research and of teacher education.

In my thesis, I consider Varga's work in its historical context: I take into account both the influence of the international New Math movement, in which Varga participated actively, and of a local Hungarian mathematical culture. I compare the Hungarian "complex mathematics education" reform to one of the most influential one of the period, the French "mathématiques modernes" reform. I attempt to show that, while both reforms enter into the New Math movement and share some common ambitions, some important differences can also be observed. I propose to explain most of these differences by the different mathematical cultures of the two countries and the different epistemologies of mathematics behind the two reforms.

The thesis consists of three main parts: the first one concerns the historical context, the second the epistemological background, the third the didactical analysis of the two reforms.

The historical analysis is based on international and French researches in the history of mathematics education, on official documents of the reforms and on the written oral memories of the participants of the reform movements.

The historical analysis points out among others the central role of mathematicians influence on the French and Hungarian New Math reforms, not only regarding their mathematical content, but also the conceptions about the nature of mathematics behind each reform. In the French case, the mathematicians in question are principally Lichnerowicz, Dieudonné and Choquet; in Hungary, Rózsa Péter, László Kalmár and Alfréd Rényi among others. In the second, epistemological part, I analyse their conceptions about mathematics and its education through the study of their books popularising mathematics, their philosophical writings and their writings about education. I attempt to show in this part that mathematicians supporting the two reforms represent coherent conceptions about the nature of mathematics, but which is different in the case of the two countries. In France, I named the conception in question "bourbakian" because of the crucial influence of the Bourbaki group; in the Hungarian case, I named the leading conception "heuristic", referring to the links with Pólya's and Lakatos' mathematical epistemology.

The third, main part of the thesis concerns the didactical analysis of the reforms. The historical part shows that the leaders of the reforms endeavour to transform curricula, resources and teaching practices in a coherent way: in the didactical part, I look for an analysis of all of these aspects and the for the coherence of their transformation. I base the curricula analysis on the *ecological approach* (Artaud 1997) and on the notion of *paradigms* of geometry (Houdement & Kuzniak 2006), and of probability (Parzysz 2011); for the analysis of teaching practices, I use principally the *theory of didactical situations* (Brousseau 1998).

Concerning the teaching practices, one main difficulty is of course the lacking access to the actual practices of the studied period. For this reason, in the frame of my thesis, I don't tempt to study real teaching practices: I rather examine, through the analysis of written sources as textbooks and teacher's handbooks, the reformers conceptions about practices. This approach makes necessary the analysis of textbooks and teacher's handbooks themselves. I study their structure, their language and style, their introduction and user's guide in order to understand how they are intended to help teachers to conceive their own teaching practices.

After a short, general analysis of the curricula's content and structure (chapter III.2) I treat three chapters of the curricula more in detail: the introduction of the notion of natural numbers in the first grade (chapter III.3), the Pythagoras' theorem in the context of middle-school geometry curricula (III.4) and finally the teaching of combinatorics and probability (III.5). The different chapters of the didactical analysis give also place to the study of different types of sources in each case (worksheets, textbooks and teacher's handbooks of the primary and the middle-school), and of different aspects of teaching practices (the creation of didactical situations, guiding classroom dialogues and conceiving long-term teaching processes).

The comparative study shows that even if some common elements can be find in the French and the Hungarian reform (for example the apparition of some new mathematical subjects as set theory, the use of manipulative tools in primary school or the emphasis on "active pedagogy"), some essential differences can also be observed between the two reforms.

These differences can partly be explained by differences in the epistemological background: the “bourbakian” approach on one hand, the “heuristic” on the other serve as *mathematical paradigms*, influencing different characteristics of the two reforms.

Thus, the French reform lays emphasis on the hierarchic, axiomatic structure of mathematics, on the deductive method and on modern formal language; even if promoted by the leaders of the reform, the “active pedagogical methods” function in a very limited way in this context. In the same time, the Hungarian reform underlines rather dialectic relations between different mathematical domains, the slow, progressive generalisation and abstraction of mathematical notions and heuristic methods. Concerning teaching practices, the Hungarian reform focuses on ordering problems in series and on guiding classroom dialogues.

The analysis of Varga’s reform throws light on several crucial characteristics of the “complex mathematics education” conception. These are the coherence between the epistemological background, the features of the curriculum, the resources and the teaching practices; the conception of ordered series of problems; and finally the importance accorded to teacher-student dialogues. A further study of these aspects would be susceptible to contribute usefully to the international discourse about the conceptualisation of teaching approaches based on problem solving or inquiry in mathematics education.