Bijektív Bizonyítások

Bényi Beáta

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Témavezető: Hajnal Péter
egyetemi docens

Matematika– és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

2014

1. Bevezetés

Doktori értekezésemet a [3], [4] és [5] dolgozatok eredményei alapján állítottam össze. (A [3] cikk közös munka Hajnal Péterrel.) Az értekezés középpontjában bijektív bizonyítások állnak.

A kombinatorika tárgya diszkrét matematikai struktúrák vizsgálata. Egyik törekvése a matematikai objektumok közötti összefüggések megvilágítása. A kombinatorika összeszámlálással foglalkozó területe mennyiségi jellemzést ad a struktúrákról. Ugyanannak a számsorozatnak különböző objektumok összeszámlálásakor való megjelenése nem mindig egyszerűen érthető. Ilyenkor felmerül az igény, hogy a két– vagy többféle objektum szerkezetében megtaláljuk azokat a közös vonásokat, mellyel megmagyarázható az azonos számosság.

Az összefüggések feltárásához a kombinatorika speciális eszközével, a bijektív bizonyítással járul hozzá, mely éppen a belső strukturális azonosságokon alapszik. Egy bijekció halmaz között létesít egy-egy értelmű megfeleltetést és így demonstrálja a két halmaz elemszámának megegyezését. Ha az egyik halmaz elemszáma ismert, akkor a bijekció ,,levezeti", hogy a másik halmaz elemszámára is ez a formula adja meg a választ.

Így a bijekció alkalmas módszer arra, hogy egy halmaz elemeit összeszámoljuk, kapcsolatba hozva egy olyan halmazzal, melynek ismert az elemszáma, de arra is alkalmas, hogy kiemelje azt a közös szerkezeti jellemzőt, mellyel mindkét halmaz bír, s ezzel a számsorozat karakterisztikus tulajdonságára is magyarázattal szolgál.

Két n elemű halmaz között $n!$ bijekció létezik. A bijekciók gyakran finomabb struktúrákra is rámutatnak, mint az ,,azonos elemszámúság". Gyakran a két halmaz finomítható egy–egy speciális paramé- ter értéke szerint. A két különböző struktúrára vonatkozó paraméter szerinti statisztikai eloszlás gyakran megegyezik. A bijekciók között vannak olyanok, amelyek megőrzik a vizsgált paraméter értékét és így rámutatnak erre a nem triviális tényre. Így egyes bijekciók jobbak, értékesebbek, mélyebbek lesznek. A bijektív kombinatorikára jellemző, hogy klasszikus azonos elemszámú halmazpárok esetén is publikálnak újabb és újabb bijekciókat.

Értekezésem célja a bijektív bizonyítás, mint módszer fontosságának és hatékonyságának bemutatása.

A dolgozat különböző, ma is aktívan kutatott területekről emel ki problémákat, fogalmaz meg tételeket, illetve ismert tételekre ad új, kombinatorikus bizonyításokat. A bevezető fejezet után a második fejezetben a poly–Bernoulli számok kombinatorikai értelmezésével, tulajdonságaival, a harmadik fejezetben a fák összeszámlálásával, a negyedik fejezetben pedig a 312–elkerülő permutációkkal foglalkozom.

Munkám példa arra, hogy a matematika tudományában nem csupán információk gyűjtése, tételek kimondása a cél, hanem a körülöttünk lévő világ, legyen az akár absztrakt formában megadva, megértése. Ezért tartom egy–egy tétel többféle bizonyítását fontosnak és gondolom azt, hogy a dolgozatomban található bijektív megközelítéseim lényeges hozzájárulást jelentenek az adott problémakörökhöz.

2. Poly–Bernoulli számok

Amint a név is utal rá, a poly–Bernoulli számok a jól ismert és számos kérdésben központi szerepet játszó Bernoulli számok általánosítása. A poly–Bernoulli számokat Kaneko [14] vezette be 1997–ben miközben a Riemann zeta függvények általánosítását a többszörös zeta értékeket (angolul multiple zeta values, más néven Euler összegeket) vizsgálta.

1. Definíció ([14]). *Jelölje* $\{B_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}}$ *a poly–Bernoulli számokat, melyeket a következő generátorfüggvény definiál:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)} \frac{x^n}{n!} = \frac{Li_k(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}$$

ahol

$$Li_k(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i}{i^k}.$$

Ha $k \leq 0$, akkor $B_n^{(k)}$ természetes szám.

1. táblázat. The Poly–Bernoulli Numbers

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
-1	1	2	4	8	16	32
-2	1	4	14	46	146	454
-3	1	8	46	230	1066	4718
-4	1	16	146	1066	6902	41506
-5	1	32	454	4718	41506	329462

Kaneko egy kompakt formulát is levezet erre az esetre:

1. Tétel ([1]). $k \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$B_n^{(-k)} = \sum_{m=0}^{\min(n,k)} m! \left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} m! \left\{ {k+1 \atop m+1} \right\}, \tag{1}$$

ahol $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *számok megadják egy n elemű halmaz k osztályú osztályozásainak számát, azaz ezek a számok a másodfajú Stirling számok.*

Felvetődött a kérdés, hogy a triviális értelmezésen túl van–e olyan kombinatorikus probléma, amelyben ezek a számok megjelennek. Elsőként Brewbaker [6] adott igenlő választ, és megmutatta, hogy a poly–Bernoulli számok az $n \times k$ lonesum mátrixok számával egyenlő. *Lonesum mátrixnak* nevezünk egy 01 mátrixot akkor, ha az oszlopösszegek és sorösszegek ismeretében egyértelműen rekonstruálható.

Bár ez az egy kombinatorikai interpretáció vált ismertté, kutatásaim azt mutatják, hogy számos egymástól lényegében eltérő kombinatorikai értelmezés létezik. A poly–Bernoulli számok sok helyen felmerülnek a matematikában. Szerepük nem annyira központi, mint például a Catalan számoké. Így sokszor publikálatlan bejegyzésként vagy a poly–Bernoulli számok ismerete nélküli matematikai tételként szerepel az irodalomban.

Az második fejezet 4.–9. szekciói azokat az aktuálisan ismert matematikai objektumokat gyűjti össze és rendszerezi, melyek számossága a poly–Bernoulli számokkal adható meg. Összefoglalóm azonban nem csupán egy listaszerű felsorolás. Minden esetben explicit bijekció leírásával vagy bijekció vázlatának megadásával adok magyarázatot arra, hogy milyen összefüggés van az objektumok között. Ez többször hiányzik az irodalomból, illetve csak rejtve, implicit módon szerepel benne.

Kiindulópontom a (1) képlet természetes interpretációja a kombinatorikus alapelvek alapján: a szóban forgó képlet egy $n+1$ illetve egy $k+1$ elemű halmaz partícióit számolja össze. Mindkét halmazban van egy speciális elem. A halmazokból képezünk ugyanolyan számú $(m+1)$ nemüres osztályt, melyeket párba állítunk. A speciális elemet tartalmazó osztályok egy párt alkotnak. Ezeknek a rendezett partíciópároknak a számát adja meg a (1) képlet.

A két rendezett partíció struktúrát leghűbben az ún. Callan féle permutációk [7] őrzik. Jelölje $\widehat{N} = \{1, 2, \ldots, n\} \cup \{0\}$ és $\widehat{K} = \{n+1, n+2, \ldots, n+k\} \cup \{n+k+1\}$ halmazokat. Tekintsük az $\widehat{N} \cup \widehat{K}$ halmaz azon permutációt, melynek első eleme 0, utolsó eleme $n+k+1$ és ha a permutációban egymás után álló elemek ugyanabból a halmazból $\widehat{N}$ ill. $\widehat{K}$ valóak, akkor ezen elemek növekvő sorrendben vannak. Ezeket a permutációkat nevezzük *Callan permutációknak.*

A Callan permutációk duálisaként fogható fel az ún. *maximumhoz tartó* permutációk, melyek az suffix array adatstruktúra jellemzésekor játszanak fontos szerepet. Pontosan megadható ugyanis, hogy egy bináris szó alapján képzett suffix array, amely természetesen egy permutáció, milyen karakte- risztikus tulajdonsággal bír.

Az egyik kulcsfontosságú tulajdonság a ,,maximumhoz tartás". Az eredeti definíció módosítható úgy, hogy hangsúlyos legyen a Callan permutációkkal való érték–pozíció dualitás. Tekintsük újra a $\widehat{N} \cup \widehat{K}$ permutációkat, melyeknek első eleme 0, utolsó eleme $n+k+1$, de most azt követeljük meg, hogy ha két egymást közvetlenül követő érték az első $n+1$ pozícióban van, akkor a permutációban is kövessék egymást közvetlenül. Ugyanígy akkor is, ha egymást követő értékek az utolsó $k+1$ pozícióba esnek. Ezeket a permutációkat *maximumhoz tartó* permutációknak nevezzük.

Az átfogalmazás és a dualitás nyilvánvalóan bizonyítja a következő, eddig nem ismert tételt.

2. Tétel ([3]). *Jelölje $\mathcal{A}_n^{(k)}$ a $\{0, 1, 2, \ldots, n+k+1\}$ halmaz maximumhoz tartó permutációit. Ekkor*

$$|\mathcal{A}_n^{(k)}| = B_n^{(-k)}.$$

Egy másik, ezektől lényegesen eltérő permutációosztály összeszámlálásánál szintén a poly–Bernoulli számok jelennek meg.

Általános kérdés az, hogy a permutációk száma hogyan alakul, ha függvényként tekintve egy permutációra bizonyos megszorításokat teszünk egy-egy elem képhalmazára. Az egyik legtermészetesebb megszorítás az, ha az elemnek és a képének a távolságát korlátozzuk. Vesztergombi határozta meg az ilyen permutációknak a számát egy általános formában [21]. A képlet speciális esetében a poly–Bernoulli számokat kapjuk. Felhasználva Lovász [18] módszerét közvet- len kombinatorikai bizonyítást adtam a következő állításra. Jelölje $\mathcal{V}_n^{(k)}$-val azoknak a $\pi \in S_{n+k}$ permutációknak a halmazát, melyekre teljesül a következő feltétel:

$$-n \leq i - \pi(i) \leq k.$$

Ekkor:

3. Tétel ([21],[17],[3]).

$$|\mathcal{V}_n^{(k)}| = B_n^{(-k)}$$

Sokrétű alkalmazásai miatt egy gráf aciklikus orientációinak vizsgálata aktív kutatási terület. Egy természetes extremális kérdés a következő. Adott n pontszámú és m élszámú egyszerű gráfok közt melynek van legkevesebb/legtöbb aciklikus irányítása? Linial megválaszolta a minimalizálási kérdést. A másik irányú kérdés még nyitott. Cameron [8] foglalkozott a maximálizálás problémájával. Sejtése szerint ha m egy páros Turán gráf élszáma, akkor ez a Turán gráf adja az extremális értéket. Numerikus számolásokat végzett a kétrészes Turán gráfok aciklikus irányításainak számával kapcsolatban. Ekkor vette észre, hogy a teljes páros gráf aciklikus irányításainak számát éppen a poly–Bernoulli számok határozzák meg.

Az aciklikus irányítás, mint interpretáció azért is érdekes, mert a poly–Bernoulli számok másik képletével (2) szoros kapcsolatot mutat.

4. Tétel ([14]).

$$B_n^{(-k)} = (-1)^n \sum_{m=0}^{n} (-1)^m m! \left\{ {n \atop m} \right\} (m+1)^k \tag{2}$$

Ezt a tételt kombinatorikailag bizonyítom be, kihasználva azt a jól ismert tételt, miszerint az aciklikus orientációk száma (előjel korrigálása után) egyenlő az adott gráf kromatikus polinomjának -1–nél történő kiértékelésével.

Az első fejezet 1. 10. szekciójának eredménye egy eddig ismeretlen kombinatorikai interpretáció megadása, mely azért különleges, mert az egyetlen olyan objektumhalmaz, mely kombinatorikailag világos magyarázatot ad a poly–Bernoulli számok rekurziós képletére. A rekurziós képletet Arakawa és Kaneko [1] algebrai úton vezette le multiple zeta értékeket felhasználva és kombinatorikai bizonyítás nem volt ismert.

2. Definíció. *Legyen* $\mathcal{G}_n^{(k)}$ *azon* $n \times k$ 01 *mátrixok halmaza, melyben*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok egyike sem fordul elő részmátrixként. Ezeket a mátrixokat Γ–mentes *mátrixoknak nevezzük.*

A tiltás azt jelenti, hogy a mátrixban nincs három 1–es, amelyek „Γ–t alkotnak". Az ilyen mátrixok vizsgálata az extremális kombinatorika területén már megjelent. Füredi és Hajnal [10] meghatározták a Γ–mentes mátrixokban szereplő 1–esek maximális számát, mely egy $n \times k$ méretű mátrix esetén $n + k - 1$. Azaz az ilyen mátrixok lényegesen különbözőek a lonesum mátrixoktól, amelyek közt ott van a csupa 1–es mátrix is. Ennek ellenére a Γ–mentes mátrixok száma megegyezik a lonesum mátrixok számával. Azaz

5. Tétel ([3]).

$$|\mathcal{G}_n^{(k)}| = B_n^{(-k)}.$$

Bizonyításom bijektív, de a bijekció nem a két mátrixhalmaz közötti. A korábbi esetekben a standard halmazzal történő párba állítás többé–kevésbé egyszerű, látványos módon halad. A Γ–mentes mátrixoknál a bijekció technikai és bonyolultabb a korábbiaknál. A tétel egy nagy előnye, hogy Γ–mentes mátrixok számára egyszerű rekurzió adható.

Tulajdonképpen a poly–Bernoulli számok általam ismert összes kombinatorikai tulajdonságát kombinatorikusan igazolni tudtam.

6. Tétel ([14]).

$$B_n^{(-k)} = B_k^{(-n)}.$$

A szimmetria nyilvánvaló bármelyik definiáló halmaz esetén. Ezt a kombinatorikus bizonyítást már Brewbaker hangsúlyozta [6].

A következő tétel a poly–Bernoulli számok analitikus vizsgálata során adódott.

7. Tétel ([2], [11]).

$$B_n^{(-k)} = B_n^{(-(k-1))} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} B_{n-(i-1)}^{(-(k-1))}. \tag{3}$$

Kaneko és Arakawa eredeti bizonyítása a szép egyszerű alakot nem magyarázza meg. Új kombinatorikus érvelésem (3) első kombinatorikus magyarázatát adja.

A következő összefüggés egyszerűen felismerhető a poly–Bernoulli számok táblázatának tanulmányozása során. Indoklása történhetne algebrai módon. Én kombinatorikusan értelmezem és bijektíven igazolom.

8. Tétel ([3]).

$$\sum_{\substack{n,k\in\mathbb{N}\\ n+k=N}} (-1)^n B_n^{(-k)} = 0.$$

A fenti tétel kombinatorikai tartalma az, hogy $N = n + k$ elemű Callan permutációk között azok száma, amelyekben n páratlan és azok száma, amelyekben n páros, ugyanannyi. Egy bijekció megfogalmazásával mutattam meg ezt az állítást.

A poly–Bernoulli számokhoz kapcsolódó kérdéskör gazdag kutatási terület. A fejezet végén felsorolok néhány olyan további nyitott kérdést, melyek megválaszolásához munkám hozzájárulhat.

Egyrészt (multiple zeta értékekkel való szoros kapcsolat miatt) többen definiáltak algebrai általánosításokat, másrészt a kombinatorikai interpretációk esetében is vannak paraméterek, melyek természetes módon általánosíthatóak. Ezek között az általánosítások között a nemtriviális kapcsolatok megtalálása érdekes kombinatorikai problémakör.

Hamahata és Masubuchi definiálta algebrai módon a multi–poly–Bernoulli számokat, s vezette special multi–poly–Bernoulli számokat [12]. A formulák kombinatorikai jellege felveti az igényt a magyarázatra.

A lenyűgöző közismert kapcsolat az elsőfajú és másodfajú Stirling számok között és a poly–Bernoulli számok érdekes tulajdonságai, Komatsut arra indítot- ta, hogy a poly–Bernoulli számok analógiájára algebrai megfontolások alapján definiálja az ún. *poly–Cauchy* számokat [16]. A poly–Cauchy számok esetében az elsőfajú Stirling számok játszanak szerepet. Bizonyos paraméterek mellett a poly–Cauchy számok is természetes számok. Számos azonosságot vezetett le Komatsu, mely a poly–Bernoulli és a poly–Cauchy számok között fennáll. Nyitott kérdés az, hogy a poly–Cauchy számoknak van–e kombinatorikai interpretációja.

3. A hook formula

A harmadik fejezet témája a rendezett fák növekvő címkézéseinek összeszámlálása. A fa struktúra egy fontos alapfogalom. A számításelméletben adatstruktúrákban központi szerepet játszik. Az algoritmusok elemzéséhez gyakran elengedhetetlen a fák kombinatorikai tulajdonságainak, többek között különböző paraméterek szerinti leszámolásának az ismerete.

A *rendezett fa*, mellyel dolgozatomban foglalkozom, olyan gyökeres fa, amelyben egy csúcshoz, mint gyökérhez csatlakozó részfáknak sorrendje lényeges.

A rendezett fa csúcsainak halmazán a fa szerkezet természetes módon definiál egy részbenrendezett halmazt. Legyen T egy rendezett fa és $u, v \in V(T)$ két csúcsa. $u \leq v$ pontosan akkor, ha v csúcs az u csúcs leszármazottja. Alapvető kérdés, hogy ez a parciális rendezés hányféleképpen terjeszthető ki lineáris rendezéssé. Másképpen megfogalmazva, a fák csúcsai hányféleképpen címkézhetőek meg úgy, hogy a leszármazott csúcs címkéje minden ősének címkéjénél nagyobb legyen. Jelölje ezt a számosságot f_T. Knuth klasszikus eredménye:

9. Tétel ([15]).

$$f_T = \frac{n!}{\prod_{v \in V(T)} h_v},$$

ahol h_v a v csúcs leszármazottjainak száma, önmagát is hozzászámolva. A formula kombinatorikai jellege jobban látszik az átszorzás után:

$$f_T \times \prod_{v \in V(T)} h_v = n!$$

Az összefüggés bizonyítható egy olyan bijekcióval, mely egy n–elemű permutációhoz hozzárendel egy (S, H) párt, ahol S a fa egy megfelelő címkézése, H pedig egy ún. hook függvény, azaz egy olyan függvény, amely miden csúcshoz egy pozitív egész számot rendel, melynek értéke legfeljebb a csúcs leszármazottjainak száma.

Értekezésem második fejezetében ennek a tételnek két különböző bijektív bizonyítását mutatom be.

A hook formuláknak hosszú története van. Az első hook formula standard Young tablók vizsgálatánál született (Frame, Robinson, Hall [9]). Eredményüket többen újrabizonyították. Számunkra a Novelli, Pak, Stoyanovskii [19] bijektív bizonyítása fontos. Ezzel a módszerrel ferde standard Young tablókra is bebizonyítható a hook formula. Első bijektív bizonyításom Tétel 9.-re ezt a módszert követi.

Algoritmus formájában fogalmazom meg a leképezést. A kiindulópont egy tetszőleges permutáció $\pi \in S_n$, azaz egy megszorítások nélküli címkézés. Az algoritmus ezt a permutációt transzformálja egy olyanná, amely már teljesíti azt a feltételt, hogy egy csúcs címkéje minden ősének címkéjénél nagyobb. Első lépésként a csúcsok egy meghatározott sorrendjét rögzítem. Az algoritmus ebben a sorrendben vizsgálja végig a csúcsokat és ha szükséges (a címke kisebb mint valamelyik leszármazotté), akkor az adott csúcs címkéjét addig „tolja felfelé”, amíg az addig megvizsgált csúcsok által meghatározott részfa címkézése a feltételnek eleget tesz. Azt a számot, amely megadja, hogy hányadik leszármazotthoz került az aktuális címke, szintén rögzítjük.

10. Tétel ([5]). *A fent vázolt algoritmus az összes csúcs vizsgálata után leáll és eredménye egy megfelelő címkézés és egy hook függvény lesz.*

Második bijekcióm bizonyos értelemben fordítva működik. Egyszerűbb megfogalmazni ezt az eljárást egy megfelelő címkézésből és egy adott hook függvényből kiindulva.

Most is rögzítem a csúcsok egy speciális sorrendjét, mely meghatározza, hogy az algoritmus milyen sorrendben vizsgálja a csúcsokat. Ezúttal azonban nem a csúcs címkéjét mozgatom, hanem a csúcsot csúsztatom el abban a rendezett halmazban, melyet a csúcs leszármazottjai alkotnak. A hook függvény értéke határozza meg azt, hogy mekkora a csúsztatás mértéke.

11. Tétel ([5]). *Az algoritmus egy monoton címkézés és egy hook függvényhez egyértelműen rendel egy tetszőleges permutációt.*

A fák különböző osztályainak összeszámlálásakor újabb és újabb hook formulákat fedeznek fel. A fejezet végén néhány aktuális eredményt említek meg ebből a témakörből, melyek kombinatorikus megértése még nem teljes. Úgy gondolom, hogy ezeknek az azonosságoknak a kombinatorikus bizonyításához bijekcióim hozzájárulhatnak.

4. 312–elkerülő permutációk

A negyedik fejezet a klasszikusnak számító Catalan problémakörhöz kap- csolható. A Catalan számsorozat alapvető a kombinatorikában. Több, mint 200 olyan matematikai objektum ismert, melynek számossága a Catalan számokkal adható meg.

Értekezésemben a 312–elkerülő permutációk és a sokszögek triangulációi között fogalmazok meg egy egyszerűen leírható, direkt bijekciót. Ez eddig nem szerepel az irodalomban és a két halmaz közti mélyebb összefüggésekre is rávilágít. Egy sokszög *triangulációján* a poligon átlókkal történő háromszögekre bontását értjük. 312*–elkerülőnek* nevezünk egy $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ permutációt, melyben nem fordul elő olyan $\pi_i\pi_j\pi_k$ részpermutáció, hogy $i < j < k$ és $\pi_j < \pi_k < \pi_i$.

Bijekciómhoz több lemma, megfigyelés, észrevétel vezet el.

Az alapsokszög csúcsai legyenek $\{P_0, \ldots, P_{n+1}\}/\{0, 1, \ldots, n+1\}$. Ekkor minden háromszögnek lesz egy középső csúcsa.

12. Lemma ([4]). *Minden triangulációban, minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ –re pontosan egy olyan háromszög létezik, melynek középső csúcsa a sokszög i csúcsára illeszkedik.*

Ha a sokszöget, melyben adott T trianguláció, az óra járásával megegyező irányban körbejárjuk, s minden háromszög címkéjét a harmadik csúcsának illeszkedése alapján jegyezzük fel — külön szabályozva azt az esetet, amikor több háromszög címkéjét kellene egyszerre feljegyezni — egy $w(T)$ permutációt kapunk.

13. Lemma ([4]). *$w(T)$ egy 312–elkerülő permutáció.*

A bijekció ,,sikere" a 312–elkerülő permutáció inverzióin alapszik. A π permutációban egy (π_i, π_j) párt *inverziónak* nevezünk, ha $i < j$ és $\pi_i > \pi_j$. A π permutáció inverziótábláján, *s–vektorán*, azt az $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ vektort értjük, melyben s_k azoknak az elemeknek a számát adja meg, amelyek nagyobbak, mint k és a permutációban k előtt (tőle balra) helyezkednek el.

$$s_k = |\{\pi_i | \pi_i > k = \pi_j \quad \text{and} \quad i < j\}|.$$

14. Észrevétel ([4]). *A 312–elkerülő permutáció s–vektora kielégíti a következő feltételt:*

$$s_{k+i} \leq s_k - i \quad \textit{for} \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad \textit{and} \quad 1 \leq i \leq s_k.$$

Továbbá minden permutáció, amelynek inverziótáblája ezzel a tulajdonsággal rendelkezik 312–elkerülő.

Az inverziótábla és a trianguláció kapcsolatát fogalmazza meg a következő észrevételem.

15. Észrevétel ([4]). *Legyen T egy trianguláció. Tekintsük a háromszöget, melynek címkéje k. Ekkor a háromszög $[B_k, C_k]$ oldala meghatározza a megfelelő permutáció $w(T)$ inverziótáblájának k–ik elemét, s_k–t:*

$$s_k = l(C_k) - l(B_k) - 1,$$

ahol $l(P)$ a P csúcs sorszáma a sokszögben.

Ez a tulajdonság lehetőséget ad arra, hogy egy adott 312–elkerülő permutációhoz hozzárendelt triangulációt az s–vektor alapján meghatározott háromszögekből építsük fel.

A fenti észrevételek vezetnek el a fejezet fő eredményéhez:

16. Tétel ([4]). *Legyen T egy tetszőleges trianguláció. $T \mapsto w(T)$ hozzárendelés egy bijekció a triangulációk és a 312–elkerülő permutációk között.*

Bijekciómnak több előnye van. Elsőnek említem, hogy leképezésem minden további nélkül alkalmazható a k–trianguláció esetére is.

Egy *k–trianguláció* definíció szerint olyan maximális számú átlóhalmaz egy poligonban, melyre igaz, hogy nem választható ki $k+1$ darab egymást kölcsönösen metsző átló.

A k–triangulációkat tekinthetjük azonban $2k+1$ ágú csillagok uniójának is [20]. Ezt a szemléletmódot egészítem ki azzal az észrevétellel, hogy a $2k+1$ ágú csillagok szintén címkézhetőek középső csúcsuk elhelyezkedése szerint. Az egyszerű triangulációknál definiált algoritmusomhoz hasonlóan a poligon körbejárása során feljegyezhetőek a $(k+1)$., $(k+2)$., stb. csúcsok címkéi. Ily módon a k–triangulációhoz hozzárendelhető a $1^k 2^k \cdots n^k$ halmaz egy permutációja. Ha a kapott permutációkat jól megértjük, akkor egyszerű bijektív módon tárgyalhatók a k–trianguláció összeszámlálási kérdései. Sajnos ez a program még sok nyitott problémát takar.

Bijekcióm középpontba helyezi az inverziótáblákat. Ez további leszámlálási eredményeket új megvilágításba helyez. Egyet részletesen kidolgozok.

Egy permutációban kétféleképpen is számon tarthatjuk és kódolhatjuk a bennük fellépő inverziókat. Az s–vektor mellett definiálhatjuk a permutáció c–vektorát. $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ azt a vektort értjük, melyben c_k megadja, hogy k mögött (tőle jobbra) hány k–nál kisebb elem áll.

$$c_k = |\{\pi_i : \pi_i < k = \pi_j \quad \text{and} \quad i > j\}|.$$

Az s– és c– vektor kapcsolatának megvilágítása érdekében, definiálom az inverziódiagramot. A diagram formája szemlélteti a kétféle vektor speciális tulajdonságát 312–elkerülő permutációk esetében, illetve ezek kapcsolatát.

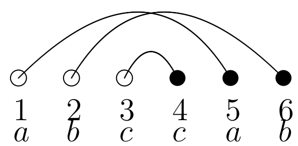
A Tamari és Dyck háló az s– ill. c–vektorok természetes rendezéseként adódnak, mely nyilvánvalóvá teszi a köztük fennálló kapcsolatot. Mindkét háló esetében felsorolok néhány problémát, mely a háló intervallumaira vonatkozik. Számos példa van arra ugyanis, hogy összeszámláláskor valamelyik háló intervallumainak száma adódik. Érdekesnek találom azt a nyitott kérdést, hogy adható–e egyszerű bijekció ezen objektumok és a megfelelő 312–elkerülő permutációpárok között. Értekezésem harmadik fejezetét egy ilyen bijekcióval zárom.

Tekintsük a rendezett gráfokon a teljes párosításokat. (A gráf csúcsainak sorrendje adott és minden csúcsra pontosan egy él illeszkedik.) Többen vizsgál- ták azt a kérdést, hogy hány olyan teljes párosítás létezik, melyben egy bizonyos minta nem fordul elő. Ez a probléma a permutációk általánosítása, hiszen egy $\pi \in S_n$ felfogható egy rendezett $K_{n,n}$ páros gráf teljes párosításaként.

A 312–elkerülő permutációk szoros kapcsolatban vannak azokkal a teljes párosításokkal, melyben az *abccab* minta nem fordul elő, melyeket $M_n(abccab)$ jelöl.

17. Tétel ([13]).

$$|M_n(abccab)| = |I_n^{\mathcal{D}}| = \begin{vmatrix} C_n & C_{n+1} \\ C_{n+1} & C_{n+2} \end{vmatrix}$$



Dolgozatomban a fenti tételnek egy új bizonyítását fogalmazom meg. Értelmezésemben egy intervallum a Dyck hálóban egy olyan (π, σ) permutációpárral azonosítható, melyben π és σ 312–elkerülő valamint c–vektorukra teljesül, hogy $c(\pi) \leq c(\sigma)$.

A teljes párosításban minden csúcsra egy él illeszkedik. Rendezett gráfról lévén szó a csúcsoknak van egy sorrendje, s így beszélhetünk az élek kezdő– és végpontjáról. Hozzárendelésemben a kezdő és végpontok sorrendje definiál egy σ 312–elkerülő permutációt. A másik permutációt π–t pedig úgy kapjuk, hogy az éleket a kezdőpontjaik sorrendjében címkézzük, de a címkéket a végpontjaik sorrendjében olvassuk le.

18. Lemma ([4]). *A leképezés során kapott π, σ permutációkban a* 312 *minta nem fordul elő és teljesül, hogy $c(\pi) \leq c(\sigma)$.*

Bizonyításom bizonyos szempontból természetesebb és elemibb, mint az eddig ismertek.

Hivatkozások

[1] T. Arakawa, M. Kaneko. On Poly–Bernoulli Numbers, *Comment Math. Univ. St. Paul* **48.2** (1999), 159–167.

[2] T. Arakawa, M. Kaneko. Multiple Zeta Values, Poly–Bernoulli Numbers and Related Zeta Functions, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 189–209.

[3] B. Bényi, P. Hajnal. Combinatorics of poly–Bernoulli numbers, accepted for publication in *Studia Scientarium Mathematicarum Hungaria*

[4] B. Bényi. A simple bijection between 312–avoiding permutations and triangulations, accepted for publication in *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*

[5] B. Bényi. Bijective proofs of the hook formula for rooted trees. *Ars Combinatoria* **106** (2012), 483–494.

[6] Ch. Brewbaker. A Combinatorial Interpretation of the Poly-Bernoulli numbers and two Fermat Analogue, *Integers* **8** (2008), A3

[7] D. Callan. Comment to A099594 in OEIS, July 22nd, (2008).

[8] P. Cameron, C. Glass, R. Schumacher. Poly–Bernoulli numbers, Peter Cameron's blog, URL http://cameroncounts.wordpress.com/2014/01/19/poly-bernoulli-numbers/ (2014).

[9] J.S. Frame, G.B. Robinson, R.M. Thrall. The hook graphs of the symmetric group, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–325.

[10] Z. Füredi, P. Hajnal. Davenport-Schinzel theory of matrices, *Discrete Mathematics* **103** (1992), 233–251.

[11] Y. Hamahata, H. Masubuchi. Recurrence Formulae for Multi–poly–Bernoulli Numbers, *Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory* **7** (2007), A46

[12] Y. Hamahata, H. Masubuchi. Special Multi–Poly–Bernoulli Numbers, *Journal of Integer Sequences* **10** (2007), Article 07.4.1, 6pp.

[13] V. Jelinek. Dyck paths and pattern avoiding matchings, *European Journal of Combinatorics* **28** (2007), 202–213.

[14] M. Kaneko. Poly-Bernoulli numbers. *Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux* **9** (1997) 221–228.

[15] D. Knuth. *The Art of Computer Programming, Vol. III.*, Sorting and Searching, Addison Wesley Longman, (1998).

[16] T. Komatsu. Poly–Cauchy numbers, *Kyushu J. Math.* **67** (2013).

[17] S. Launois. Combinatorics of H–primes in quantum matrices, *Journal of Algebra* **309** (2007), 139–167.

[18] L. Lovász, *Combinatorial Problems and Excercises*, 2nd Edition, North-Holland Publishing Co, Amsterdam, (1993).

[19] J.C. Novelli, I. Pak and A.V. Stoyanovskii. A direct bijective proof of the hook-length formula, *Discrete Math. Theoret. Computer Sience* **1** (1997), 53–67.

[20] V. Pilaud, F. Santos. Multitriangulations as complexes of star polygons, *Discrete and Computational Geometry* **41** (2009), 284–317.

[21] K. Vesztergombi. Permutations with restriction of middle strength, *Studia Scientiarium Mathematicarum Hungarica* **9** (1974), 181–185.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Bényi Beáta Ph. D. fokozatra pályázó Advances in Bijective Combinatorics című disszertációját, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

B. Bényi, P. Hajnal. Combinatorics of poly–Bernoulli numbers, accepted for publication in *Studia Scientarium Mathematicarum Hungarica*

Bényi Beáta hozzájárulása ehhez a cikkhez 50% volt.

Kijelentem, hogy ezeket az eredményeket nem használtam fel és nem fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2014. szeptember 12.

Dr. Hajnal Péter
Szegedi Tudományegyetem
egyetemi docens