Egyszeres és kétszeres szinuszsorok és -integrálok egyenletes konvergenciája

Ph.D. értekezés

KÓRUS PÉTER

Témavezető:
DR. MÓRICZ FERENC
az MTA doktora
professzor emeritus

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2012

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Kutatásom kiindulópontja S. P. Zhou, P. Zhou és D. S. Yu 2006-os [16] cikke volt, amelyben szinuszsorok egyenletes konvergenciájával foglalkoznak a szerzők. A témakörben klasszikusnak tekinthető tétel T. W. Chaundy és A. E. Jolliffe nevéhez fűződik, akik 1916-os [1] cikkükben adtak szükséges és elegendő feltételt a nemnegatív, monoton nemnövő együtthatójú szinuszsorok egyenletes konvergenciájára. A XX. század második felében kvázimonoton sorozatosztályok bevezetésével (CQMS, RVQMS) megmutatták, hogy a klasszikus feltétel szükséges és elegendő marad az újonnan definiált együtthatójú sorok esetében is. A 2000-es években Leindler László az RBVS osztályt új koncepció alapján definiálta, a sorozat változásának korlátozása lett az együtthatók monotonitási feltételének enyhítése felé. Leindler a Chaundy–Jolliffe-tétel kiterjesztése mellett bebizonyította, hogy az RBVS és a kvázimonoton sorozatosztályok nem összehasonlíthatók. Később R. J. Le és S. P. Zhou GBVS osztálya már a kvázimonoton sorozatokat és RBVS-t is tartalmazta, ezen osztályt pedig tovább általánosította az NBVS és az S. P. Zhou, P. Zhou és D. S. Yu által 2006-ban definiált MVBVS sorozatosztály. Az általánosított monoton sorozatosztályok definícióiban pedig azt is megengedték, hogy a szinuszsorok együtthatóiról nem feltétlenül nemnegatív sorozat elemei legyenek, sőt, akár komplex számok is lehetnek.

Az MVBVS osztályt, a Chaundy–Jolliffe-tétel kiterjesztéséhez megfelelő, akkori legbővebb osztályt sikerült általánosítanom 2009-ben [4]-ben, az SBVS és SBVS_2 fogalmak definiálásával. Az SBVS fogalmat S. Tikhonov [13]-beli általánosított monoton sorozatosztály konstrukciója ihlette, ugyanakkor [13]-ban Fourier-sorok (szinuszsorok, koszinuszsorok, vagy akár komplex trigonometrikus sorok) L^1-konvergenciáját vizsgálta a szerző. Trigonometrikus sorok esetében az egyenletes konvergencia és a L^1-konvergencia közti párhuzamot jól mutatja az a tény, hogy a két témakörben alapvető tételeket, melyeket nemnegatív, monoton nemnövő együtthatójú sorokra fogalmaztak meg, egyaránt általánosították MVBVS-beli együtthatójú sorokra. Az egyenletes konvergencia problémájára nemcsak a szinusz-, hanem a koszinuszsorok és a komplex trigonometrikus sorok esetében is vannak eredmények, azonban a dolgozatban csak a szinuszsorokat (később szinuszintegrálokat) vizsgáljuk. Megjegyzendő, hogy a [3] cikkben is bizonyítanak állításokat valós trigonometrikus sorok egyenletes konvergenciájára, ezen cikk azonban [4] megírásakor még nem volt számomra elérhető. [3]-ban az általánosított monoton sorozatosztályokat általános esetben vizsgálják, míg [4]-ben konkrét osztályokat és sorozatokat adunk meg, és azokra bizonyítunk állításokat. A Chaundy–Jolliffe-tétel kiterjesztéséhez megfelelő legbővebb sorozatosztály a [4]-beli SBVS_2 osztály.

Érdemes megemlíteni azt a tényt is, hogy ha egy szinuszsor egyenletesen konvergens, akkor mivel az egyenletes konvergencia megőrzi a folytonosságot, a sor összegfüggvénye folytonos. Megfordítva, ha egy folytonos függvény Fourier-sorának (szinuszsorának) együtthatói nemnegatívak, akkor a Fourier-sor egyenletesen konvergál a függvényhez (lásd [7, 12]).

A kettős szinuszsorok egyenletes konvergenciájára az egyszeres szinuszsorokhoz képest kevesebb eredmény ismert. Kettős sorok esetében többféle konvergenciafogalom használatos: a Pringsheim-féle konvergencia és az annál erősebb reguláris konvergencia. A kettős szinuszsorok reguláris konvergenciájának egyenletességére I. E. Žak és A. A. Šneider 1966-os, orosz nyelvű [14] cikke szolgáltat szükséges és elegendő feltételt nemnegatív, monoton nemnövő együtthatójú sorok esetén. Az ottani feltétel természetesen elegendő a Pringsheim-féle konvergencia egyenletességéhez is, azonban nem szükséges ahhoz. 2009-ben Móricz Ferenccel közös cikkünkben, [7]-ben általánosítottuk Žak és Šneider tételét az MVBVDS osztály segítségével, mely az MVBVS mintájára definiált, általánosított monoton, kettős sorozatok osztálya. Ezen cikkben már a reguláris konvergencia Móricz-féle [9]-beli formáját használjuk, nem a Žak és Šneider által alkalmazott formáját. Legfrissebb eredményként pedig MVBVDS-t tovább általánosítottam [6]-ban, és beláttam a [14] és [7]-beli tételek eddigi (általam ismert) legbővebb kiterjesztését.

Bár a Fourier integrálokkal számos szerző foglalkozott, az egyenletes konvergenciára vonatkozóan kevés eredmény található. Kutatásomat Móricz Ferenc [10] cikke indította el, melyben az $\mathbb{R}_+$ pozitív félegyenesen definiált szinuszintegrálok egyenletes konvergenciájára adott feltételrendszer hasonló a szinuszsorok esetében megfogalmazottal. A diszkrét esettel analóg módon itt függvények változásának korlátozása célszerű, ami által általánosított monoton függvényosztályok keletkeznek. Amellett, hogy Móricz a nemnegatív, monoton nemnövő függvény által meghatározott szinuszintegrálok egyenletes konvergenciáját jellemezte [10]-ben, az általa bevezetett $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ általánosított monoton függvényosztályra is igazolt tételeket. Ezen eredményeket bővítettem ki [5]-ben az $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$ és $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ függvényosztályok bevezetésével. Bár az iménti osztályok definíciói nem triviálisak, természetességüket mutatja az a tény, hogy olyan egyszerű függvények is oda tartoznak, mint például a $\sin x$ vagy a $\cos x$, mely függvények nem MVBVF($\mathbb{R}_+$)-beliek. Megjegyzendő, hogy a Fourier integrálok egyenletes konvergenciájára vonatkozóan a [2] cikkben is találhatók eredmények, melyeket a [5] cikkem megírásakor még nem ismertem. [2]-ben az általánosított monoton függvényosztályokat általános esetben vizsgálják, [5]-ben viszont konkrét függvényosztályokat és példafüggvényeket adunk meg, és azokra bizonyítunk állításokat.

Az első síknegyeden definiált kettős szinuszintegrálok egyenletes konvergenciájával [8]-ban foglalkozunk. A disszertáció négy témája közül ez tekinthető a legfrissebbnek, ezen témakör vizsgálata jelenleg újdonságnak számít. A [8]-ban elért eredmények és az egyszeres szinuszintegrálokra ill. a kettős szinuszsorokra kapott eredmények között természetesen felfedezhető analógia, azonban triviális kiterjesztésről nem beszélhetünk, elegendő például a – kettős integrálok esetén nem széles körben ismert – reguláris konvergencia fogalmára gondolni.

1. fejezet

Szinuszsorok

1.1. Történeti áttekintés

Szinuszsornak nevezzük a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \tag{1.1}$$

alakú végtelen összeget, ahol a $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ együtthatók komplex számok. Ezen összeg minden tagjában 2π szerint periodikus, páratlan függvény szerepel, így az (1.1) egyenletes konvergenciájának vizsgálatakor elegendő az $x \in [0,\pi]$ esetet figyelnünk. A $\{c_k\}$ jelölés a fejezet során mindvégig az 1-es indexű tagtól indul, viszont szükség szerint $c_0 = 0$. A szinuszsorok egyenletes konvergenciájának elméletében alapvető tételt Chaundy és Jolliffe 1916-ban igazolta [1]-ben. Olyan szinuszsorokat vizsgáltak, melyek együtthatói monoton nemnövők, azaz $c_1 \geq c_2 \geq \ldots$, másképpen fogalmazva, $\Delta c_k \geq 0$ bármely $k \geq 1$ esetén, ahol $\Delta c_k = c_k - c_{k+1}$.

1.1.1. Tétel. [1] *Ha a* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ := [0,\infty)$ *monoton nemnövő, 0-hoz tartó sorozat, akkor az* (1.1) *szinuszsor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens* x*-ben, ha*

$$kc_k \to 0, \quad ha \quad k \to \infty. \tag{1.2}$$

Az 1.1.1. Tételnek azóta számos általánosítása ismert. Az általánosításokban a tételbeli monotonitási feltételt enyhítik a szerzők úgy, hogy az (1.2) feltétel továbbra is szükséges és elegendő maradjon. Így a nemnegatív, monoton nemnövő sorozatoknál bővebb sorozatosztályokat definiáltak, melyek akár komplex számokat is tartalmazhatnak. Ezen osztályok közül néhány definícióját érdemes megemlíteni (további példák találhatók [16]-ban):

$\{c_k\} \in$ RBVS (*Rest Bounded Variation Sequences*), ha létezik (n-től független) C konstans, melyre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le C|c_n|.$$

$\{c_k\} \in$ GBVS (*Group Bounded Variation Sequences*), ha léteznek $C, N_0 \ge 1$ konstansok, melyekre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le C \max_{n \le k \le n+N_0} |c_k|.$$

Az NBVS osztály fogalmát D. S. Yu és S. P. Zhou 2006-ban vezette be [15]-ben: $\{c_k\} \in$ NBVS (*Non-onesided Bounded Variation Sequences*), ha létezik C konstans, melyre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le C\big(|c_n| + |c_{2n}|\big).$$

S. P. Zhou, P. Zhou és D. S. Yu ugyanazon évben az MVBVS osztályt definiálta [16]-ban: $\{c_k\} \in$ MVBVS (*Mean Value Bounded Variation Sequences*), ha léteznek $C, \lambda \ge 2$ konstansok, melyek teljesítik a

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k| \tag{1.3}$$

feltételt, ahol a [.] jelölés a valós szám egész részét jelöli. [15]-ben belátták, hogy NBVS tartalmazza az 1.1.1. Tétel általánosításához megfelelő, addig legbővebbnek tekinthető sorozatosztályt, GBVS-t, valamint [16]-ban az MVBVS $\supsetneq$ NBVS tartalmazást igazolták (pontos levezés található [7]-ben). Továbbá bebizonyították a következő állítást, a klasszikus tétel addigi legbővebb kiterjesztését:

1.1.2. Tétel. [16] *Legyen* $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* MVBVS*-beli.*
(i) *Ha* (1.2) *teljesül, akkor* (1.1) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1.1) *konvergenciája egyenletes* x*-ben,* (1.2) *fennáll.*

Későbbi eredményeink szempontjából érdemes kiemelni az előző tétel bizonyításából két részeredményt, melyeket a bizonyítás technikájának megmutatásaként be is bizonyítunk.

1.1.3. Lemma. *Legyen* $\{c_k\} \in$ MVBVS. *Tegyük fel, hogy* $nc_n \to 0$*, ha* $n \to \infty$*. Ekkor*

$$n \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta c_k| \to 0, \ \text{ha } n \to \infty.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és $n_0 = n_0(\varepsilon) \ge \lambda$ az a pozitív egész szám, melyre bármely $n > n_0$ esetén $n|c_n| \le \varepsilon$. Ekkor az (1.3) feltétel szerint bármely $n > n_0$ esetén

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta c_k| = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=2^r n}^{2^{r+1}n-1} |\Delta c_k| \le C \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r n} \sum_{k=[2^r n/\lambda]}^{[\lambda 2^r n]} |c_k|$$

$$\leq \frac{C\varepsilon}{n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\sum_{k=[2^r n/\lambda]}^{[\lambda 2^r n]}\frac{1}{k} \leq \frac{2\lambda^2 C\varepsilon}{n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r} = \frac{4\lambda^2 C\varepsilon}{n},$$

hiszen

$$\sum_{k=[2^r n/\lambda]}^{[\lambda 2^r n]}\frac{1}{k} \leq [\lambda 2^r n]\cdot\frac{1}{[2^r n/\lambda]} \leq 2\lambda^2 \text{ ha } n \geq \lambda, r \geq 0. \qquad \blacksquare$$

1.1.4. Lemma. *Legyen* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ MVBVS*-beli. Ekkor*

$$nc_n \leq (C+1)\sum_{k=[n/2\lambda]}^{[\lambda n]} c_k,$$

ahol C *és* λ *az* MVBVS*-beli definícióban szereplő,* $\{c_k\}$*-hoz tartozó konstansok.*

Bizonyítás. Legyen n tetszőleges. Ekkor bármely $n+1 \leq \nu \leq 2n$ egész számra

$$c_n \leq \sum_{k=n}^{\nu-1}|\Delta c_k| + c_\nu \leq \sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta c_k| + c_\nu \leq \frac{C}{n}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_k + c_\nu.$$

Összegezve az előbb kapott egyenlőséget $\nu = n+1,\dots,2n$-re kapjuk, hogy

$$nc_n \leq C\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_k + \sum_{\nu=n+1}^{2n} c_\nu \leq (C+1)\sum_{k=[n/2\lambda]}^{[\lambda n]} c_k. \qquad \blacksquare$$

1.2. Új eredmények

Célunk az MVBVS osztály kibővítése volt úgy, hogy az 1.1.2. Tétel állításai igazak maradjanak az új sorozatosztály mellett is. A következő osztály fogalmát [4]-ben vezettük be, amit a S. Tikhonov [13] cikkében szereplő ${}_6\beta$ konstrukció ihletett (az ott szereplő maximum azonban nem feltétlenül létezik, így szuprémum használata célszerű).

Definíció. A $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatot *Supremum Bounded Variation Sequence*-nek nevezzük, jelben $\{c_k\} \in$ SBVS, ha léteznek olyan C és $\lambda \geq 1$ konstans számok, melyek csak $\{c_k\}$-tól függnek, és

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta c_k| \leq \frac{C}{n}\sup_{m\geq[n/\lambda]}\sum_{k=m}^{2m}|c_k| \tag{1.4}$$

fennáll minden $n \geq 1$ esetén.

Továbbá észrevettük, hogy az (1.4)-ben szereplő felső korlátban az összegzést indíthatjuk akár $[n/\lambda]$-nál lentebbről is, csak az összegzés alsó határa tartson végtelenbe, ha n tart a végtelenbe. Így kapjuk az SBVS$_2$ fogalmát.

Definíció. A $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatot *Supremum Bounded Variation Sequence of 2nd type*-nak nevezzük, jelben $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$, ha létezik olyan C konstans és végtelenbe tartó $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ sorozat, melyek csak $\{c_k\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|. \tag{1.5}$$

Megjegyezzük, hogy ha a definícióbeli $\{b(k)\}$ sorozattól elvárjuk, hogy monoton nemcsökkenő legyen, akkor ugyanazon $\{c_k\}$ sorozatok maradnak SBVS_2-ben (hiszen tetszőleges $\{b(k)\}$ sorozat helyettesíthető egy monoton nemcsökkenő $\{b'(k) := \min_{l \geq k} b(l)\}$ sorozattal).

Megmutatjuk, hogy az $\mathrm{SBVS}_2, \mathrm{SBVS}, \mathrm{MVBVS}$ osztályok között valódi tartalmazási reláció áll fenn.

1.2.1. Tétel. [4] $\mathrm{SBVS}_2 \supsetneq \mathrm{SBVS} \supsetneq \mathrm{MVBVS}$.

Az 1.1.2. Tétel általánosítása a következő:

1.2.2. Tétel. [4] *Legyen* $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* SBVS_2*-beli.*
(i) *Ha* (1.2) *teljesül, akkor* (1.1) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1.1) *konvergenciája egyenletes* x*-ben, akkor* (1.2) *fennáll.*

1.2.3. Következmény. *Ha a* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SBVS_2*-beli, akkor* (1.2) *szükséges és elegendő feltétel az* (1.1) *sor* x*-ben vett egyenletes konvergenciájához.*

Végül egy észrevételt teszünk az $\mathrm{SBVS}_2 \setminus \mathrm{SBVS}$-beli sorozatokra.

1.2.4. Állítás. [4] *Bármely olyan* SBVS_2*-beli sorozatra, mely nem* SBVS*-beli,* (1.2) *fennáll. Azaz az ilyen együtthatójú szinuszsorok egyenletesen konvergensek.*

1.3. Az állítások igazolása

Az 1.2.1. Tétel bizonyítása. Először megmutatjuk, hogy $\mathrm{SBVS} \supseteq \mathrm{MVBVS}$. Legyen $\{c_k\} \in \mathrm{MVBVS}$ a C és λ konstansokkal. Ekkor (1.3) szerint bármely $n \geq \lambda$-ra

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| &\leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k| \leq \frac{C}{n} \left(\sum_{k=[n/\lambda]}^{2[n/\lambda]-1} |c_k| + \ldots + \sum_{k=\lambda^2[n/\lambda]}^{2\lambda^2[n/\lambda]-1} |c_k| \right) \\ &\leq \frac{2\lambda^2 C}{n} \sup_{m \geq [n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.\end{aligned}$$

Mivel véges sok ($1 \le n < \lambda$) esetben nem adtunk becslést a bal oldalon szereplő kifejezésre, ezért létezik C_1 konstans, melyre a

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le C_1 \sup_{m \ge [n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|$$

becslés érvényes minden $1 \le n < \lambda$-re. Tehát $\{c_k\} \in$ SBVS a $\max\{2\lambda^2 C, C_1\}$ és λ konstansokkal.

Második lépésben megadunk egy olyan példasorozatot, mely SBVS-beli, de nem MVBVS-beli. Ezen $\{c_k\}$ legyen a következő: adjuk meg a pozitív számoknak egy nemnövő $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ sorozatát, legyen $n_j = 2^{(2^{2j})}$ ($j = 1, 2, \ldots$) és

$$c_k := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k < n_1, \\ d_j, & \text{ha} \quad k = n_j, \\ 0, & \text{ha} \quad n_j < k < n_j^2, \\ d_j, & \text{ha} \quad n_j^2 \le k < 2n_j^2, \\ 0, & \text{ha} \quad 2n_j^2 \le k < n_{j+1}. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy $\{c_k\}$ nem MVBVS-beli. Indirekt módon bizonyítjuk állításunkat. Tegyük fel, hogy $\{c_k\} \in$ MVBVS a C és $\lambda \ge 2$ konstansokkal. Ekkor

$$\sum_{k=n_j}^{2n_j-1} |\Delta c_k| = d_j$$

és elég nagy j-re

$$\frac{C}{n_j} \sum_{k=[n_j/\lambda]}^{[\lambda n_j]} |c_k| = \frac{C}{n_j} d_j,$$

ez pedig ellentmont (1.3)-nak, hiszen elég nagy j-re

$$\sum_{k=n_j}^{2n_j-1} |\Delta c_k| = d_j > \frac{C}{n_j} d_j = \frac{C}{n_j} \sum_{k=[n_j/\lambda]}^{[\lambda n_j]} |c_k|.$$

Tehát $\{c_k\} \notin$ MVBVS. Másrészről, $n_j/2 \le n \le n_j$-re

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le 2d_j = \frac{2}{n_j^2} \sum_{k=n_j^2}^{2n_j^2} |c_k| \le \frac{1}{n} \sup_{m \ge n} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|,$$

$n_j^2/2 \le n \le 2n_j^2$-re

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le 2d_j = \frac{2}{n_j^2} \sum_{k=n_j^2}^{2n_j^2} |c_k| \le \frac{4}{n} \sup_{m \ge [n/2]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|,$$

és a maradék n érték esetén

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| = 0 \le \frac{1}{n} \sup_{m \ge n} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.$$

Tehát $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}$ a $C = 4$ és $\lambda = 2$ konstansokkal. Érdemes megjegyezni, hogy a $\{d_j\}$ sorozatot választhatjuk úgy, hogy $\{c_k\}$ teljesítse (1.2)-t, de úgy is, hogy ne.

Az $\mathrm{SBVS}_2 \supseteq \mathrm{SBVS}$ tartalmazási reláció a $b(n) = [n/\lambda]$ helyettesítéssel könnyen látható.

Végül, konstruálunk egy $\mathrm{SBVS}_2 \setminus \mathrm{SBVS}$-beli sorozatot. Az előző példához hasonlóan definiálunk. Legyen $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ nemnövő, pozitív számsorozat, $n_j = 2^{(2^{2j})}$ $(j = 1, 2, \dots)$ és

$$c_k := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad k < n_1, \\ d_j\, n_j^{-2}, & \text{ha} \quad k = n_j, \\ 0, & \text{ha} \quad n_j < k < n_j^2, \\ d_{j+1}\, n_{j+1}^{-3/2}, & \text{ha} \quad n_j^2 \le k \le 2n_j^2, \\ 0, & \text{ha} \quad 2n_j^2 < k < n_{j+1}. \end{cases}$$

Indirekt tegyük fel, hogy $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}$ a C és λ konstansokkal. Ekkor

$$\sum_{k=n_j}^{2n_j-1} |\Delta c_k| = 2\frac{d_j}{n_j^2}$$

és elég nagy j-re

$$\frac{C}{n_j} \sup_{m \ge [n_j/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k| = \frac{C}{n_j} \max\left\{ \sup_{k \ge j} \frac{d_k}{n_k^2},\, \sup_{k > j} n_k^{1/2} \frac{d_k}{n_k^{3/2}} \right\} = C\frac{d_j}{n_j^3},$$

ezért elég nagy j-re (1.4) nem áll fenn, ez pedig ellentmondás. Tehát $\{c_k\} \notin \mathrm{SBVS}$. Ellenben könnyen meggondolható, hogy $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$, csak az $n_j/2 \le n \le n_j$ eset érdekes, amikor is

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le 2\frac{d_j}{n_j^2} = \frac{2}{n_j} \sum_{k=n_j^{1/2}}^{2n_j^{1/2}} |c_k| \le \frac{2}{n} \sum_{k=n_j^{1/2}}^{2n_j^{1/2}} |c_k|. \qquad \blacksquare$$

Az 1.2.2. Tétel bizonyítása előtt bebizonyítunk két, az 1.1.3. és 1.1.4.-hez hasonló lemmát.

1.3.1. Lemma. *Legyen* $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$. *Ha tetszőleges* $\varepsilon > 0$*-hoz létezik* $n_0 = n_0(\varepsilon)$ *úgy, hogy bármely* $n > n_0$ *esetén* $n|c_n| \le \varepsilon$*, akkor létezik olyan* n_1*, melyre bármely* $n > n_1$ *esetén* $b(n) > n_0$*. Továbbá bármely* $n > n_1$*-ra fennáll a*

$$\sum_{k=n}^{\infty} |\Delta c_k| \le \frac{4C\varepsilon}{n}$$

összefüggés. Azaz ha (1.2) *fennáll, akkor*

$$n\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta c_k| \to 0,\ \ ha\ n\to\infty.$$

Bizonyítás. Mivel $b(n)$ a végtelenbe tart, n_1 létezése evidens. Használva (1.5)-öt, bármely $n > n_1$ esetén

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta c_k| &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{k=2^r n}^{2^{r+1}n-1}|\Delta c_k| \le C\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r n}\sup_{m\ge b(2^r n)}\sum_{k=m}^{2m}|c_k|\\ &\le \frac{C\varepsilon}{n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\sup_{m\ge b(2^r n)}\sum_{k=m}^{2m}\frac{1}{k} \le \frac{2C\varepsilon}{n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r} = \frac{4C\varepsilon}{n}. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

1.3.2. Lemma. *Legyen* $\{c_k\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ SBVS$_2$*-beli. Ekkor*

$$nc_n \le C\sup_{m\ge b(n)}\sum_{k=m}^{2m}c_k + \sum_{k=n}^{2n}c_k$$

ahol C *és* $b(n)$ *az* SBVS$_2$*-beli definícióban szereplő,* $\{c_k\}$*-hoz tartozó konstans ill. sorozat.*

Bizonyítás. Hasonlóan az 1.1.4. Lemma bizonyításához, világos, hogy

$$nc_n \le \sum_{\nu=n+1}^{2n}\sum_{k=n}^{\nu-1}|\Delta c_k| + c_\nu \le \sum_{\nu=n+1}^{2n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta c_k| + \sum_{\nu=n}^{2n}c_\nu \le C\sup_{m\ge b(n)}\sum_{k=m}^{2m}c_k + \sum_{k=n}^{2n}c_k. \qquad \blacksquare$$

Az 1.2.2. Tétel bizonyítása. Legyen $\{c_k\}\in$ SBVS$_2$ a hozzátartozó C konstanssal és $b(k)$ sorozattal.

(i) rész: Tegyük fel, hogy (1.2) fennáll. Ekkor létezik az 1.3.1. Lemma szerinti n_0 és n_1. Be fogjuk látni, hogy bármely $N\ge n > n_2 := \max\{n_0, n_1\}$ esetén

$$|s(n,N;x)| := \left|\sum_{k=n}^{N}c_k\sin kx\right| \le (4C\pi + 2\pi + 1)\,\varepsilon. \tag{1.6}$$

Mivel $s(n,N;0) = s(n,N;\pi) = 0$, ezért elegendő az $x\in(0,\pi)$ esettel foglalkoznunk. Legyen $\nu := [1/x]$. Ekkor bármely $n_2 < n \le N \le \nu$ esetén

$$|s(n,N;x)| \le x\sum_{k=n}^{N}k|c_k| \le \frac{1}{\nu}\sum_{k=n}^{\nu}\varepsilon \le \varepsilon,$$

hiszen $0 < y < 1$ esetén $\sin y \le y$.

Továbbá, egy Abel-átrendezés után (lásd [17, 3. oldal]) az 1.3.1. Lemmát alkalmazva kapjuk, hogy bármely $\max\{n_2,\nu\} < n \le N$ esetén

$$|s(n,N;x)| \le \sum_{k=n}^{N-1}|\Delta c_k|\,|\widetilde{D}_k(x)| + |c_N|\,|\widetilde{D}_N(x)| + |c_n|\,|\widetilde{D}_{n-1}(x)|$$

$$\begin{aligned}&\le \frac{\pi}{x}\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta c_k|+|c_N|+|c_n|\right)\le \pi\left(n\frac{4C\varepsilon}{n}+N|c_N|+n|c_n|\right)\\&\le (4C+2)\pi\varepsilon,\end{aligned}$$

ahol $\widetilde{D}_k(x)=\sum_{j=1}^{k}\sin jx$ a konjugált Dirichlet-magfüggvény (lásd [17, 2. oldal]), melyről ismert, hogy $|\widetilde{D}_k(x)|\le \pi/x$ bármely $k\ge 1$ és $0<x\le\pi$ esetén. Végül, az $n_2<n\le\nu<N$ esetben

$$|s(n,N;x)|\le|s(n,\nu;x)|+|s(\nu+1,N;x)|\le(4C\pi+2\pi+1)\,\varepsilon.$$

Ezzel az (1.6) egyenlőtlenség és így az (i) rész igazolást nyert.

(ii) rész: Tegyük fel, hogy $\{c_k\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ és (1.1) egyenletesen konvergens x-ben. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor a Cauchy-féle konvergenciakritérium alkalmazásával kapjuk, hogy létezik olyan n_0, melyre bármely $n>n_0$ és tetszőleges x esetén

$$|s(n,2n;x)|=\left|\sum_{k=n}^{2n}c_k\sin kx\right|\le\varepsilon. \tag{1.7}$$

Legyen

$$x(n):=\frac{\pi}{4n}.$$

Ekkor tetszőleges $n\le k\le 2n$ esetén

$$\frac{\pi}{4}\le kx(n)\le\frac{\pi}{2}$$

és így

$$\sin(kx(n))\ge\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad n\le k\le 2n. \tag{1.8}$$

Mivel $b(n)\to\infty$, ezért létezik olyan n_1, melyre bármely $n>n_1$ esetén $b(n)>n_0$. Ekkor az 1.3.2. Lemma, valamint (1.7) és (1.8) következtében bármely $n>n_2:=\max\{n_0,n_1\}$-re fennáll az

$$\begin{aligned}nc_n&\le C\sup_{m\ge b(n)}\sum_{k=m}^{2m}c_k+\sum_{k=n}^{2n}c_k\le\sqrt{2}\,C\sup_{m\ge b(n)}\big(s(m,2m;x(m))+s(n,2n;x(n))\big)\\&\le\sqrt{2}\,(C+1)\,\varepsilon\end{aligned}$$

egyenlőtlenség, ezzel a tétel második része is bizonyítást nyert. ■

Az 1.2.4 Állítás bizonyítása. Tegyük fel, hogy $\{c_k\}\in\mathrm{SBVS}_2\setminus\mathrm{SBVS}$. Legyen

$$B_n:=\sup_{m\ge n}\sum_{k=m}^{2m}|c_k|\quad\text{és}\quad S:=\limsup_{n\to\infty}B_n,$$

ahol $B_n, S \in [0,\infty]$. Nyilvánvaló, hogy B_n nemnövő sorozat. Ezért az $S = \infty$ esetben $B_n = \infty$ minden n-re, ami viszont ellentmondás, mivel (1.4) teljesül tetszőleges C, λ esetén. A második lehetőség az, hogy $0 < S < \infty$. Ekkor $\{B_n\}$ korlátos, tehát $S < B_n < T$, ez viszont ellentmond a $\{c_k\} \notin$ SBVS feltevésnek, mivel (1.4) fennáll a $C \cdot T/S$ és tetszőleges λ konstansokkal, ahol C a $\{c_k\}$-hoz tartozó, (1.5)-beli konstans. Az utolsó $S = 0$ esetben $\sum_{k=n}^{2n} |c_k|$ és $B_{b(n)}$ is 0-hoz tart, ha n tart a végtelenbe, így az 1.3.2. Lemma felhasználásával megkapjuk (1.2)-t. ■

1.4. Formális deriválás és integrálás

Ebben az alfejezetben a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r c_k \sin kx \tag{1.9}$$

sor egyenletes konvergenciáját vizsgáljuk, ahol r egész. Ezen sor $r = 0$ esetben az (1.1) szinuszsor, pozitív páros r esetén (1.1) r-szeres formális deriváltja, negatív páros r esetén (1.1) r-szeres formális integrálja; páratlan r esetén koszinuszsor formális deriváltjáról ill. integráljáról beszélünk, ezen esetet itt most nem tárgyaljuk. Az alfejezet eredményei megtalálhatók [5]-ben.

Könnyen meggondolható, hogy ha r pozitív, létezik olyan $\{c_k\}$ nemnegatív, monoton nemnövő sorozat, melyre $\{k^r c_k\}$ nem tartozik a monoton nemnövő sorozatok közé. Ellenben az MVBVS osztály zárt a k^r-rel való szorzásra (r egész), mint azt a következő tétel mutatja.

1.4.1. Tétel. *Ha $\{c_k\}$ sorozat* MVBVS*-beli, akkor $\{d_k = k^r c_k\}$ szintén* MVBVS*-beli tetszőleges rögzített r egész szám esetén.*

Bizonyítás. Legyen $\{c_k\} \in$ MVBVS a C és λ konstansokkal. Elegendő megmutatnunk, hogy $\{d_k = k^r c_k\} \in$ MVBVS, ha $r = 1$ vagy $r = -1$, hiszen ekkor teljes indukciót alkalmazva minden r-re kiterjeszthető az eredmény. Az $r = 1$ esetben

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{2n} |\Delta d_k| &\le \sum_{k=n}^{2n} \left(k|c_k - c_{k+1}| + |c_{k+1}|\right) \le 2C \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n+1} k|c_k| \\ &\le \frac{4C\lambda}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} k|c_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n+1} k|c_k| \le \frac{4C\lambda + 1}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |d_k|,\end{aligned}$$

míg $r = -1$-re

$$\sum_{k=n}^{2n} |\Delta d_k| \le \sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{k+1}|c_k - c_{k+1}| + \frac{1}{k(k+1)}|c_{k+1}|\right)$$

$$\leq \frac{C}{n^2} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}|c_k| \leq \frac{C\lambda+1}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |d_k|.$$

Tehát a tekintett r-ek esetén $\{d_k\}$ teljesíti az (1.3) feltételt, így mindkét esetben $\{d_k\} \in$ MVBVS. ■

Az előbbi tétel és az 1.1.2. Tételt összegezve a következőt kapjuk:

1.4.2. Következmény. *Legyen* $\{c_k\} \in$ MVBVS *és* r *páros szám.*
(i) *Ha* $k^{r+1}c_k \to 0$*, akkor* (1.9) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1.9) *egyenletesen konvergens* x*-ben, akkor* $k^{r+1}c_k \to 0$.

Az SBVS osztályra az 1.4.1. Tétel fele igaz.

1.4.3. Tétel. *Ha* $\{c_k\}$ *sorozat* SBVS*-beli, akkor* $\{d_k = k^r c_k\}$ *szintén* SBVS*-beli tetszőleges rögzített* r *pozitív egész szám esetén.*

Bizonyítás. Elegendő az $r = 1$ esettel foglalkoznunk, ekkor $\{d_k = k^r c_k\} \in$ SBVS, hiszen

$$\sum_{k=n}^{2n} |\Delta d_k| \leq \sum_{k=n}^{2n} \left(k|c_k - c_{k+1}| + |c_{k+1}|\right) \leq 2C \sup_{m\geq[n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n+1} k|c_k|$$
$$\leq \frac{4C\lambda+1}{n} \sup_{m\geq[n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |d_k|.$$ ■

Az iménti tétel és az 1.2.2. Tétel összevetéséből adódik

1.4.4. Következmény. *Ha* $\{c_k\} \in$ SBVS *és* r *pozitív páros szám, akkor* az 1.4.2. *Következmény* (i) *és* (ii) *állításai fennállnak.*

Meggondolható, hogy SBVS_2 sem pozitív, sem negatív r esetén nem zárt a k^r-rel való szorzásra.

2. fejezet

Kettős szinuszsorok

2.1. A reguláris konvergencia

Legyen $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ komplex számok kettős sorozata, röviden $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$. Tekintsük a

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \sin jx \sin ky \tag{2.1}$$

kettős szinuszsort. Ezen kettős sor egyenletes, reguláris konvergenciáját fogjuk vizsgálni (x, y)-ban. Mivel (2.1) minden tagja x-ben ill. y-ban is 2π szerint periodikus páratlan függvény, ezért az egyenletes konvergencia vizsgálatakor elegendő az $(x, y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]$ pontpárokkal foglalkoznunk. A $\{c_{jk}\}$ jelölés a fejezet során mindvégig az 1,1 indexű tagtól indul, viszont szükség szerint $c_{0k} = c_{j0} = 0$.

A $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z_{jk}$ kettős sor regulárisan konvergens, ha a

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} z_{jk}$$

téglalap alakú összegek véges számhoz konvergálnak, amikor m és n egymástól függetlenül a végtelenbe tart, továbbá a

$$\sum_{j=1}^{\infty} z_{jn}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

úgynevezett "sorösszegek", valamint a

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_{mk}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

"oszlopösszegek" is konvergensek. Amennyiben a sor- ill. oszlopösszegek konvergenciáját nem követeljük meg, csak a téglalap alakú összegek konvergenciáját, akkor Pringsheim értelemben vett konvergenciáról beszélünk. Amely kettős sor reguláris értelemben konvergens, az Pringsheim értelemben is az, viszont a fordított irányú érvelés nem igaz. A reguláris konvergencia definíciójával ekvivalens (lásd [9]) a következő: $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z_{jk}$ regulárisan konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan pozitív $m_0 = m_0(\varepsilon)$ küszöbszám, melyre

$$\left|\sum_{j=m}^{M}\sum_{k=n}^{N} z_{jk}\right| < \varepsilon$$

fennáll minden olyan m, n, M, N számokra, melyekre $m+n > m_0$, $1 \le m \le M$, $1 \le n \le N$.

Az egyváltozós Chaundy–Jolliffe-tételhez hasonlóan, a kettős szinuszsorok esetében is ismert egy tétel akkor, amikor az együtthatók nemnegatív, monoton nemnövő kettős sorozatot alkotnak. A nemnegatív valós $\{c_{jk}\}$ kettős sorozat monoton nemnövő, ha

$$\Delta_{10}c_{jk} \ge 0,\ \Delta_{01}c_{jk} \ge 0,\ \Delta_{11}c_{jk} \ge 0, \quad j,k = 1,2,\dots,$$

ahol

$$\Delta_{10}c_{jk} := c_{jk} - c_{j+1,k}\,, \qquad \Delta_{01}c_{jk} := c_{jk} - c_{j,k+1}\,,$$
$$\Delta_{11}c_{jk} := \Delta_{10}(\Delta_{01}c_{jk}) = \Delta_{01}(\Delta_{10}c_{jk}) = c_{jk} - c_{j+1,k} - c_{j,k+1} + c_{j+1,k+1}\,.$$

Žak és Šneider tétele a következő:

2.1.1. Tétel. [14] *Ha* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{R}_+$ *monoton nemnövő, akkor* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x,y)*-ban akkor és csak akkor, ha*

$$jkc_{jk} \to 0, \quad \text{ha} \quad j+k \to \infty. \tag{2.2}$$

2.2. Az NBVDS és MVBVDS osztályok

A monotonitás általánosításaképp először definiáljuk az NBVS osztály kétdimenziós megfelelőjét.

Definíció. A $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozatot *Non-onesided Bounded Variation Double Sequence*-nek nevezzük, röviden $\{c_{jk}\} \in$ NBVDS, ha létezik csak a $\{c_{jk}\}$-tól függő C konstans, melyre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10}c_{jn}| \le C\big(|c_{mn}| + |c_{2m,n}|\big), \tag{2.3}$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01}c_{mk}| \le C\big(|c_{mn}| + |c_{m,2n}|\big), \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1}\left|\Delta_{11}c_{jk}\right| \le C\big(|c_{mn}|+|c_{2m,n}|+|c_{m,2n}|+|c_{2m,2n}|\big). \tag{2.5}$$

Könnyen meggondolható, hogy bármely nemnegatív, monoton nemnövő kettős sorozat NBVDS-beli.

Az MVBVS osztály kétdimenziós megfelelője a következő.

Definíció. A $\{c_{jk}\}\subset\mathbb{C}$ kettős sorozatot MVBVDS-belinek (*Mean Value Bounded Variation Double Sequences*) nevezzük, ha léteznek C és $\lambda\ge 2$ konstans számok, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1}|\Delta_{10}c_{jn}| \le \frac{C}{m}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}|c_{jn}|, \quad m\ge\lambda,\ n\ge 1, \tag{2.6}$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta_{01}c_{mk}| \le \frac{C}{n}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}|c_{mk}|, \quad m\ge 1,\ n\ge\lambda, \tag{2.7}$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta_{11}c_{jk}| \le \frac{C}{mn}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}|c_{jk}|, \quad m,n\ge\lambda. \tag{2.8}$$

Megmutatjuk, hogy az MVBVDS és az NBVDS osztályok között valódi tartalmazási reláció áll fenn.

2.2.1. Tétel. [7] MVBVDS $\supsetneqq$ NBVDS.

A 2.1.1. Tétel általánosítása a következő:

2.2.2. Tétel. [7] *Legyen* $\{c_{jk}\}\subset\mathbb{C}$ *kettős sorozat* MVBVDS*-beli.*
(i) *Ha* (2.2) *teljesül, akkor* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x,y)*-ban.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_{jk}\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x,y)*-ban, akkor* (2.2) *fennáll.*

Speciálisan, ha $\{c_{jk}\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ kettős sorozat MVBVDS-beli, akkor (2.2) szükséges és elegendő feltétele annak, hogy (2.1) reguláris konvergenciája egyenletes legyen (x,y)-ban.

2.3. Segédállítások

A 2.2.1. és 2.2.2. Tételek bizonyítása előtt belátunk két lemmát, melyek az MVBVDS osztályba tartozó sorozatok fontos tulajdonságait mutatják meg.

2.3.1. Lemma. [7] *Tegyük fel, hogy* $\{c_{jk}\}\subset\mathbb{C}$ *teljesíti a* (2.2) *és* (2.8) *feltételeket. Ekkor*

$$mn\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}c_{jk}|\to 0, \quad \textit{ha}\ m+n\to\infty\ \textit{és}\ m,n\ge\lambda. \tag{2.9}$$

Továbbá,

$$mn\sum_{j=m}^{\infty}\sup_{k\ge n}|\Delta_{10}c_{jk}|\to 0,\quad mn\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{j\ge m}|\Delta_{01}c_{jk}|\to 0, \tag{2.10}$$

ha $m+n\to\infty$ *és* $m,n\ge\lambda$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Ekkor (2.2) szerint létezik $m_0=m_0(\varepsilon)$ küszöbszám, melyre $jk|c_{jk}|\le\varepsilon$ bármely $j+k>m_0$ esetén. Így (2.8)-at felhasználva kapjuk, hogy bármely $m+n>m_0$ és $m,n\ge\lambda$ esetén igaz a következő:

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}c_{jk}| &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=2^r m}^{2^{r+1}m-1}\sum_{k=2^s n}^{2^{s+1}n-1}|\Delta_{11}c_{jk}|\\
&\le C\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r+s}mn}\sum_{j=[2^r m/\lambda]}^{[\lambda 2^r m]}\sum_{k=[2^s n/\lambda]}^{[\lambda 2^s n]}|c_{jk}|\\
&\le \frac{C\varepsilon}{mn}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r+s}}\sum_{j=[2^r m/\lambda]}^{[\lambda 2^r m]}\sum_{k=[2^s n/\lambda]}^{[\lambda 2^s n]}\frac{1}{jk}\\
&\le \frac{4\lambda^4 C\varepsilon}{mn}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{2^r}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2^s}=\frac{16\lambda^4C\varepsilon}{mn},\end{aligned}$$

ami igazolja (2.9)-et. (2.10) első része következik a

$$\sum_{j=m}^{\infty}\sup_{k\ge n}|\Delta_{10}c_{jk}|\le\sum_{j=m}^{\infty}\sup_{k\ge n}\sum_{\nu=k}^{\infty}|\Delta_{11}c_{j\nu}|\le\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}c_{jk}|$$

egyenlőtlenségből, a második része pedig hasonló módon belátható. ■

2.3.2. Lemma. [7] *Legyen* $\{c_{jk}\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ MVBVDS-*beli a* C *és* λ *konstansokkal. Ekkor*

$$mnc_{mn}\le(3C+2)\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}c_{jk},\quad ha\ m,n\ge\lambda. \tag{2.11}$$

Bizonyítás. Legyen $m,n\ge\lambda$ tetszőleges. Ekkor (2.6) szerint bármely $m+1\le\mu\le 2m$ és ν egész számokra

$$c_{m\nu}\le\sum_{j=m}^{\mu-1}|\Delta_{10}c_{j\nu}|+c_{\mu\nu}\le\sum_{j=m}^{2m-1}|\Delta_{10}c_{j\nu}|+c_{\mu\nu}\le\frac{C}{m}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}c_{j\nu}+c_{\mu\nu}.$$

Hasonlóan kapjuk, (2.7)-et alkalmazva, hogy bármely μ és $n+1\le\nu\le 2n$-re

$$c_{\mu n}\le\frac{C}{n}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}c_{\mu k}+c_{\mu\nu}.$$

Továbbá, bármely $m+1\le\mu\le 2m,\ n+1\le\nu\le 2n$ egész számokra fennáll a

$$c_{mn}=\sum_{j=m}^{\mu-1}\sum_{k=n}^{\nu-1}\Delta_{11}c_{jk}+c_{m\nu}+c_{\mu n}-c_{\mu\nu}\le\sum_{j=m}^{\mu-1}\sum_{k=n}^{\nu-1}|\Delta_{11}c_{jk}|+c_{m\nu}+c_{\mu n}$$

$$\leq \sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta_{11}c_{jk}| + c_{m\nu} + c_{\mu n} \leq \frac{C}{mn}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_{jk} + c_{m\nu} + c_{\mu n}$$

egyenlőtlenség. Összegezve a legutóbb kapott egyenlőtlenséget a μ és ν megengedett értékeire,

$$\begin{aligned} mnc_{mn} &\leq C \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_{jk} + m\sum_{\nu=n+1}^{2n} c_{m\nu} + n\sum_{\mu=m+1}^{2m} c_{\mu n} \\ &\leq C \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_{jk} + C\sum_{\nu=n+1}^{2n}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} c_{j\nu} + C\sum_{\mu=m+1}^{2m}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_{\mu k} \\ &+ 2\sum_{\mu=m+1}^{2m}\sum_{\nu=n+1}^{2n} c_{\mu\nu} \leq (3C+2)\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} c_{jk}. \end{aligned}$$

Ezzel beláttuk (2.11)-et. ■

2.4. A 2.2.1. és 2.2.2. Tételek bizonyítása

A 2.2.1. Tétel bizonyítása. Megmutatjuk, hogy MVBVDS $\supseteq$ NBVDS. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $\{c_{jk}\} \in$ NBVDS-beli sorozatot a C konstanssal. (2.3) és (2.4) szerint $\{c_{jk}\}_{j=1}^{\infty} \in$ NBVS $\subset$ MVBVS és $\{c_{jk}\}_{k=1}^{\infty} \in$ NBVS $\subset$ MVBVS, ezért a (2.6) és (2.7) egyenlőtlenségek fennállnak C helyett $6C$-vel és $\lambda = 3$-mal (lásd [7]). Tehát már csak (2.8)-at kell igazolnunk. Legyen $m, n \geq 6$. Ekkor (2.3)-at alkalmazva a μ, ν párokra, ahol

$$m - [m/6] \leq \mu \leq m + [m/6], \quad n - [n/6] \leq \nu \leq n + [n/6],$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=m-[m/6]}^{m+[m/6]}\sum_{\nu=n-[n/6]}^{n+[n/6]}\sum_{j=\mu}^{2\mu-1}\sum_{k=\nu}^{2\nu-1}|\Delta_{11}c_{jk}| \\ &\qquad \leq C\sum_{j=m-[m/6]}^{m+[m/6]}\sum_{k=n-[n/6]}^{n+[n/6]}\left(|c_{jk}| + |c_{2j,k}| + |c_{j,2k}| + |c_{2j,2k}|\right). \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenség bal oldalán $|\Delta_{11}c_{jk}|$ legalább

$$\left(\left[\frac{m}{6}\right]+1\right)\left(\left[\frac{n}{6}\right]+1\right) \geq \frac{mn}{36} \text{ -szor}$$

szerepel minden $m \leq j \leq 2m-1$, $n \leq k \leq 2n-1$ indexpárra, valamint a jobb oldalon $|c_{jk}|$ lehetséges indexeire

$$\min j \geq m - \left[\frac{m}{6}\right] \geq \frac{m}{3}, \quad \min k \geq n - \left[\frac{n}{6}\right] \geq \frac{n}{3},$$

illetve $|c_{2j,2k}|$ lehetséges indexeire

$$\max j \le 2\left(m + \left[\frac{m}{6}\right]\right) \le 3m, \quad \max k \le 2\left(n + \left[\frac{n}{6}\right]\right) \le 3n,$$

továbbá egyetlen indexpár sem szerepel egynél többször, hiszen

$$\max j \le m + \left[\frac{m}{6}\right] < 2\left(m - \left[\frac{m}{6}\right]\right) \le \min 2j,$$

és hasonlóan k-ra. Tehát

$$\frac{mn}{36}\sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta_{11}c_{jk}| \le C\sum_{j=[m/3]}^{3m}\sum_{k=[n/3]}^{3n}|c_{jk}|,$$

így $\{c_{jk}\} \in$ MVBVDS a $36C$ és $\lambda = 3$ konstansokkal.

Ezek után példát mutatunk olyan sorozatra, mely MVBVDS \ NBVDS-beli. Vegyünk egy olyan $\{c_k\}$ sorozatot, mely MVBVS-beli a C és λ konstansokkal, de nem NBVS-beli, és legyen $c_{jk} := c_j c_k$. Ekkor (2.6) teljesül, hiszen

$$\sum_{j=m}^{2m-1}|\Delta_{10}c_{jn}| = |c_n|\sum_{j=m}^{2m-1}|\Delta c_j| \le |c_n|\frac{C}{m}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}|c_j| = \frac{C}{m}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}|c_{jn}|,$$

és (2.7) hasonlóan igazolható. Továbbá,

$$\begin{aligned}\sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta_{11}c_{jk}| &= \sum_{j=m}^{2m-1}|\Delta c_j|\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta c_k| \le \frac{C}{m}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}|c_j|\frac{C}{n}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}|c_k| \\ &= \frac{C^2}{mn}\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}|c_{jk}|,\end{aligned}$$

tehát $\{c_{jk}\} \in$ MVBVDS a C^2 és λ konstansokkal. Ellenben, mivel $\{c_k\} \notin$ NBVS, ezért c_{jk} definíciója miatt sem (2.3), sem (2.4) nem teljesül. ■

A 2.2.2. Tétel bizonyítása. Legyen $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ MVBVDS-beli a C és λ konstansokkal.

(i) rész: Tegyük fel, hogy (2.2) fennáll. A (2.6) és (2.7) feltételek teljesülése miatt $\{c_{jn}\}_{j=1}^{\infty} \in$ MVBVS bármely n-re és $\{c_{mk}\}_{k=1}^{\infty} \in$ MVBVS bármely m-re, ezért az 1.1.2. Tétel alkalmazható, így a

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{jn}\sin jx, \quad n = 1,2,\ldots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk}\sin ky, \quad m = 1,2,\ldots \tag{2.12}$$

sor- ill. oszlopösszegek egyenletesen konvergensek x-ben ill. y-ban, ezáltal (x,y)-ban is. Az elkövetkezőkben az $s(m,M;n,N;x,y)$ jelölést használjuk a téglalap alakú összegek rövidítésére:

$$s(m,M;n,N;x,y) := \sum_{j=m}^{M}\sum_{k=n}^{N} c_{jk}\sin jx\sin ky.$$

Mivel $s(m,M;n,N;0,y) = s(m,M;n,N;x,0) = 0$, ezért elegendő az $(x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi)$ pontpárokkal foglalkoznunk. Legyen

$$\mu(x) := \left[\frac{1}{x}\right] \quad \text{és} \quad \nu(x) := \left[\frac{1}{y}\right].$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor (2.2)-ből következik, hogy létezik olyan $m_1 = m_1(\varepsilon) > \lambda$, melyre

$$mn|c_{mn}| \le \varepsilon \quad \text{bármely } m,n > m_1 \text{ esetén.}$$

Továbbá, 2.3.1. Lemma szerint létezik $m_2 = m_2(\varepsilon) > \lambda$, melyre

$$mn\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}c_{jk}| \le \varepsilon, \quad mn\sum_{j=m}^{\infty}\sup_{k\ge n}|\Delta_{10}c_{jk}| \le \varepsilon, \quad mn\sum_{k=n}^{\infty}\sup_{j\ge m}|\Delta_{01}c_{jk}| \le \varepsilon$$

bármely $m,n > m_2$ esetén. Legyen $m_0 := \max\{m_1,m_2\}$.

Az $|s(m,M;n,N;x,y)|$ téglalap alakú összegek abszolút értékének becslésekor négy alapesetet különböztetünk meg, az m,M és a μ ill. az n,N és a ν viszonya alapján.

(a) eset: $m_0 < m \le M \le \mu$ és $m_0 < n \le N \le \nu$. Ekkor mivel $0 < jx < 1$ és $0 < ky < 1$, ezért

$$|s(m,M;n,N;x,y)| \le xy\sum_{j=m}^{M}\sum_{k=n}^{N}|c_{jk}| \le \frac{1}{\mu\nu}\sum_{j=m}^{\mu}\sum_{k=n}^{\nu}\varepsilon \le \varepsilon.$$

(b) eset: $\max\{m_0,\mu\} < m \le M$ és $m_0 < n \le N \le \nu$. Ekkor a következőképpen becsülünk.

$$\begin{aligned}|s(m,M;n,N;x,y)| &= \sum_{k=n}^{N}\sin ky\left|\sum_{j=m}^{M}c_{jk}\sin jx\right| \le y\sum_{k=n}^{N}k\left|\sum_{j=m}^{M}c_{jk}\sin jx\right|\\ &\le \frac{1}{\nu}\sum_{k=n}^{\nu}k\left|\sum_{j=m}^{M}c_{jk}\sin jx\right|.\end{aligned}$$

Ezután az utolsó összeget Abel-átrendezéssel átalakítva, majd a konjugált Dirichlet-magfüggvény ismert becslését alkalmazva – hasonlóan az 1.2.2. Tétel (i) részének bizonyításához – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=m}^{M}c_{jk}\sin jx\right| &\le \sum_{j=m}^{M-1}|\Delta_{10}c_{jk}||\widetilde{D}_j(x)| + |c_{Mk}||\widetilde{D}_M(x)| + |c_{mk}||\widetilde{D}_{m-1}(x)|\\ &\le \frac{\pi}{x}\sum_{j=m}^{M-1}|\Delta_{10}c_{jk}| + |c_{Mk}| + |c_{mk}|.\end{aligned}$$

Így az eredeti becslést folytatva

$$|s(m,M;n,N;x,y)| \le \frac{\pi}{x\nu}\sum_{k=n}^{\nu}k\left(\sum_{j=m}^{M-1}|\Delta_{10}c_{jk}| + |c_{Mk}| + |c_{mk}|\right)$$

$$\le \frac{\pi}{\nu} \sum_{k=n}^{\nu} \left(mk \sum_{j=m}^{\infty} |\Delta_{10} c_{jk}| + Mk|c_{Mk}| + mk|c_{mk}| \right),$$

az m_0 definícióját felhasználva pedig

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le \frac{\pi}{\nu} \sum_{k=n}^{\nu} 3\varepsilon \le 3\pi\varepsilon.$$

(c) eset: $m_0 < m \le M \le \mu$ és $\max\{m_0, \nu\} < n \le N$. Ezen eset (b) szimmetrikus párja, és ahhoz hasonló érveléssel adódik, hogy

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le 3\pi\varepsilon.$$

(d) eset: $\max\{m_0, \mu\} < m \le M$ és $\max\{m_0, \nu\} < n \le N$. Ekkor kettős Abel-átrendezéssel adódik, hogy

$$\begin{aligned} s(m, M; n, N; x, y) = &\sum_{j=m}^{M-1} \sum_{k=n}^{N-1} \widetilde{D}_j(x) \widetilde{D}_k(y) \Delta_{11} c_{jk} \\ &+ \sum_{j=m}^{M-1} \widetilde{D}_j(x) \widetilde{D}_N(y) \Delta_{10} c_{jN} - \sum_{j=m}^{M-1} \widetilde{D}_j(x) \widetilde{D}_{n-1}(y) \Delta_{10} c_{jn} \\ &+ \sum_{k=n}^{N-1} \widetilde{D}_M(x) \widetilde{D}_k(y) \Delta_{01} c_{Mk} - \sum_{k=n}^{N-1} \widetilde{D}_{m-1}(x) \widetilde{D}_k(y) \Delta_{01} c_{mk} \\ &+ c_{MN} \widetilde{D}_M(x) \widetilde{D}_N(y) - c_{Mn} \widetilde{D}_M(x) \widetilde{D}_{n-1}(y) \\ &- c_{mN} \widetilde{D}_{m-1}(x) \widetilde{D}_N(y) + c_{mn} \widetilde{D}_{m-1}(x) \widetilde{D}_{n-1}(y), \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned} |s(m, M; n, N; x, y)| \le \frac{\pi^2}{xy} \Bigg(&\sum_{j=m}^{M-1} \sum_{k=n}^{N-1} |\Delta_{11} c_{jk}| + \sum_{j=m}^{M-1} |\Delta_{10} c_{jN}| + \sum_{j=m}^{M-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \\ &+ \sum_{k=n}^{N-1} |\Delta_{01} c_{Mk}| + \sum_{k=n}^{N-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \\ &+ |c_{MN}| + |c_{Mn}| + |c_{mN}| + |c_{mn}| \Bigg) \\ \le \pi^2 mn \Bigg(&\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} c_{jk}| + 2 \sum_{j=m}^{\infty} \sup_{k \ge n} |\Delta_{10} c_{jk}| \\ &+ 2 \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{j \ge m} |\Delta_{01} c_{jk}| + 4 \sup_{j \ge m, k \ge n} |c_{jk}| \Bigg). \end{aligned}$$

Végül, az m_0 definíciója alapján

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le 9\pi^2 \varepsilon.$$

Az alapesetekben kapott becslések alapján belátjuk, hogy tetszőleges $M \ge m > m_0$, $N \ge n > m_0$ és (x, y) esetén

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le (9\pi^2 + 6\pi + 1)\varepsilon. \tag{2.13}$$

Legyen (x, y) tetszőleges, de rögzített számpár, ekkor μ és ν is rögzített szám, melyek m_0-hoz való viszonya ismeretlen. Kilenc esetet tárgyalunk, ami által az összes szükséges m, M, n, N számnégyest megvizsgáljuk. μ és ν értékétől függően előfordulhat, hogy egyes esetekben nincsen olyan m, M, n, N számnégyes, mely teljesíti az adott eset feltételeit; ezzel együtt vizsgálatunk teljeskörű. Megjegyzendő, hogy az 5. eset tetszőleges μ, ν pár esetén megvalósul.

1. eset: $m_0 < m \le M \le \mu$ és $m_0 < n \le N \le \nu$. Ez megegyezik (a) alapesettel, ekkor tehát $|s(m, M; n, N; x, y)| \le \varepsilon$.

2. eset: $\max\{m_0, \mu\} < m \le M$ és $m_0 < n \le N \le \nu$. Ezt az esetet tárgyaltuk (b)-ben. Ekkor $|s(m, M; n, N; x, y)| \le 3\pi\varepsilon$.

3. eset: $m_0 < m \le \mu < M$ és $m_0 < n \le N \le \nu$. Ekkor az (a) és (b) alapesetekbeli becsléseket felhasználva kapjuk, hogy

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le |s(m, \mu; n, N; x, y)| + |s(\mu + 1, M; n, N; x, y)| \le (3\pi + 1)\varepsilon.$$

4. eset: $m_0 < m \le M \le \mu$ és $\max\{m_0, \nu\} < n \le N$. Ezt az esetet tárgyaltuk (c)-ben (ez a 2. eset szimmetrikus párja). Ekkor $|s(m, M; n, N; x, y)| \le 3\pi\varepsilon$.

5. eset: $\max\{m_0, \mu\} < m \le M$ és $\max\{m_0, \nu\} < n \le N$. Ez megegyezik (d) alapesettel, tehát $|s(m, M; n, N; x, y)| \le 9\pi^2\varepsilon$.

6. eset: $m_0 < m \le \mu < M$ és $\max\{m_0, \nu\} < n \le N$. A (c) és (d) alapesetekbeli becsléseket felhasználva kapjuk, hogy

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le |s(m, \mu; n, N; x, y)| + |s(\mu + 1, M; n, N; x, y)| \le (9\pi^2 + 3\pi)\varepsilon.$$

7. eset: $m_0 < m \le M \le \mu$ és $m_0 < n \le \nu < N$. Ez a 3. eset szimmetrikus párja, az (a) és (c) alapesetek figyelembe vételével

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le |s(m, M; n, \nu; x, y)| + |s(m, M; \nu + 1, N; x, y)| \le (3\pi + 1)\varepsilon.$$

8. eset: $\max\{m_0, \mu\} < m \le M$ és $m_0 < n \le \nu < N$. Ez a 6. eset szimmetrikus párja, a (b) és (d) alapeseteket felhasználva kapjuk, hogy

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le |s(m, M; n, \nu; x, y)| + |s(m, M; \nu + 1, N; x, y)| \le (9\pi^2 + 3\pi)\varepsilon.$$

9. eset: $m_0 < m \le \mu < M$ és $m_0 < n \le \nu < N$. Az (a)–(d) alapeseteket összegezve adódik, hogy ekkor

$$|s(m, M; n, N; x, y)| \le |s(m, \mu; n, \nu; x, y)| + |s(\mu + 1, M; n, \nu; x, y)|$$

$$+|s(m,\mu;\nu+1,N;x,y)|+|s(\mu+1,M;\nu+1,N;x,y)|$$
$$\leq (9\pi^2+6\pi+1)\varepsilon.$$

Ezzel beláttuk (2.13)-at. Ahhoz, hogy igazoljuk (2.1) egyenletes, reguláris konvergenciáját, szükség van még annak bebizonyítására, hogy $|s(m,M;n,N;x,y)|$ elég kicsi, ha $m+n$ elég nagy. Ehhez rögzítsünk egy tetszőleges $\eta>0$ számot. Válasszuk a (2.13)-beli ε-t a következőképpen:

$$\varepsilon := \frac{\eta}{2(9\pi^2+6\pi+1)}. \tag{2.14}$$

Tudjuk, hogy a (2.12)-beli első m_0 db sorösszeg és első m_0 db oszlopösszeg egyenletesen konvergens. Tehát létezik $n_1=n_1(\eta)$, amelyre

$$|s(m,M;n,N;x,y)| \leq \frac{\eta}{2},$$

ha (x,y) tetszőleges, valamint $n_1<m\leq M$ és $1\leq n\leq N<m_0$, vagy $1\leq m\leq M<m_0$ és $n_1<n\leq N$. Legyen $n_0:=\max\{m_0,n_1\}$. Ekkor (2.13) és (2.14) alapján tetszőleges (x,y) esetén $|s(m,M;n,N;x,y)|\leq\eta$, ha $n_0<m\leq M,\ 1\leq n\leq N$ vagy $1\leq m\leq M,\ n_0<n\leq N$. Mivel η tetszőleges volt, ezért az imént kapott egyenlőtlenség biztosítja számunkra (2.1) egyenletes, reguláris konvergenciáját. Ezzel beláttuk a tétel első részét.

(ii) rész: Tegyük fel, hogy $\{c_{jk}\}\subset\overline{\mathbb{R}}_+$ és (2.1) reguláris konvergenciája egyenletes (x,y)-ban. Mivel $\{c_{jn}\}_{j=1}^\infty\in$ MVBVS bármely n-re, $\{c_{mk}\}_{k=1}^\infty\in$ MVBVS bármely m-re és a (2.12)-beli sor- ill. oszlopösszegek egyenletesen konvergensek (x,y)-ban, ezért az 1.1.2. Tétel szerint (2.2) fennáll azon esetekben, amikor k rögzített és $j\to\infty$ ill. amikor j rögzített és $k\to\infty$. Tehát elegendő belátnunk (2.2)-t abban az esetben, amikor j és k is a végtelenbe tart.

Legyen $m,n\geq 4\lambda$ és

$$x(m):=\frac{\pi}{2\lambda m},\quad y(n):=\frac{\pi}{2\lambda n}.$$

Ekkor bármely $[m/\lambda]\leq j\leq[\lambda m]$ esetén

$$\frac{\pi}{8\lambda^2}=\frac{m}{4\lambda}\frac{\pi}{2\lambda m}\leq\left(\frac{m}{2\lambda}-1\right)\frac{\pi}{2\lambda m}\leq jx(m)\leq\lambda m\frac{\pi}{2\lambda m}=\frac{\pi}{2},$$

ugyanígy,

$$\frac{\pi}{8\lambda^2}\leq ky(n)\leq\frac{\pi}{2},\quad \text{ha}\quad [n/\lambda]\leq k\leq[\lambda n].$$

A 2.3.2. Lemmabeli (2.11)-et felhasználva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}c_{jk}\sin(jx(m))\sin(ky(n))\geq\sin^2\frac{\pi}{8\lambda^2}\cdot\sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]}c_{jk}$$

$$\geq \sin^2 \frac{\pi}{8\lambda^2} \cdot \frac{1}{(3C+2)} mnc_{mn},$$

ahol a bal oldal tart a 0-hoz, ha $m, n \to \infty$, mivel (2.1) reguláris konvergenciája egyenletes (x, y)-ban. Tehát (2.2)-t beláttuk a $j, k \to \infty$ esetben is, amivel a tétel második részét is igazoltuk.

Ezzel a 2.2.2. Tétel bizonyítást nyert. ■

2.5. Az SBVDS$_1$ és SBVDS$_2$ osztályok

Célunk az MVBVDS osztály bővítése úgy, hogy a 2.2.2. Tételt általánosítani tudjuk. Ehhez két új sorozatosztályt definiálunk.

Definíció. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozat SBVDS$_1$-beli (*Supremum Bounded Variation Double Sequences of 1st type*), ha léteznek olyan C és $\lambda \geq 2$ konstansok illetve $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty}$ végtelenbe tartó sorozatok, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda,\, n \geq 1, \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \leq \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \geq 1,\, n \geq \lambda, \tag{2.16}$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \geq \lambda. \tag{2.17}$$

Definíció. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozat SBVDS$_2$-beli (*Supremum Bounded Variation Double Sequences of 2nd type*), ha léteznek olyan C, $\lambda \geq 2$ konstansok és $\{b(l)\}_{l=1}^{\infty}$ végtelenbe tartó sorozat, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \sup_{M \geq b(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda,\, n \geq 1, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \leq \frac{C}{n} \sup_{N \geq b(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \geq 1,\, n \geq \lambda, \tag{2.19}$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \geq \lambda. \tag{2.20}$$

Az egyváltozós esethez hasonlóan SBVDS$_2$ definíciójában is feltehetjük, hogy $\{b(l)\}$ monoton nemcsökkenő, ha azonban az SBVDS$_1$ definíciójánál használt $\{b_1(l)\}$ és $\{b_2(l)\}$ sorozatoktól elvárnánk, hogy monoton nemcsökkenők legyenek, akkor bizonyos $\{c_{jk}\}$ sorozatokat kivennénk az SBVDS$_1$ osztályból.

Az MVBVDS és az újonnan definiált sorozatosztályok között az alábbi tartalmazási reláció áll fenn.

2.5.1. Tétel. [6] $\mathrm{SBVDS}_2 \supsetneq \mathrm{SBVDS}_1 \supsetneq \mathrm{MVBVDS}$.

A 2.2.2. Tétel általánosítása a következő:

2.5.2. Tétel. [6] (i) *Ha a* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* SBVDS_2*-beli, valamint* (2.2) *teljesül, akkor* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban.*
(ii) *Megfordítva, ha a* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SVBVDS_1*-beli és* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban, akkor* (2.2) *fennáll.*

2.5.3. Következmény. *Ha a* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SBVDS_1*-beli, akkor* (2.2) *szükséges és elegendő feltétele annak, hogy* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes legyen* (x, y)*-ban.*

2.6. A 2.5.1. és 2.5.2. Tételek bizonyítása

A 2.5.1. Tétel bizonyítása. Könnyen látható, hogy $\mathrm{SBVDS}_2 \supseteq \mathrm{SBVDS}_1$, hiszen a $\{b(l) = \min\{b_1(l), b_2(l), b_3(l)\}\}$ sorozat definiálása biztosítja számunkra, hogy bármely SBVDS_1-beli sorozat SBVDS_2-beli.

Ezután konstruálunk egy $\{c_{jk}\} \in \mathrm{SBVDS}_2 \setminus \mathrm{SBVDS}_1$ sorozatot. E célból vegyünk egy tetszőleges pozitív nemnövő $\{d_r\}_{r=1}^{\infty}$ sorozatot, valamint legyen $m_r = 2^{(2^{2r})}$, $(r = 1, 2, \ldots)$. $\{c_{jk}\}$ első sora legyen az 1.2.1. Tétel bizonyításabeli első példasorozat megfelelője, mely SBVS-beli a $C = 4$ és $\lambda = 2$ konstansokkal:

$$c_{j1} := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j < m_1, \\ d_r, & \text{ha} \quad j = m_r, \\ 0, & \text{ha} \quad m_r < j < m_r^2, \\ d_r, & \text{ha} \quad m_r^2 \le j < 2m_r^2, \\ 0, & \text{ha} \quad 2m_r^2 \le j < m_{r+1}. \end{cases}$$

A második sor legyen az 1.2.1. Tétel bizonyításabeli második példasorozat megfelelője, mely SBVS_2-beli a $C = 4$ konstanssal és a $b(l) = l^{1/2}$ sorozattal:

$$c_{j2} := \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad j < m_1, \\ d_r\, n_r^{-2}, & \text{ha} \quad j = m_r, \\ 0, & \text{ha} \quad m_r < j < m_r^2, \\ d_{r+1}\, m_{r+1}^{-3/2}, & \text{ha} \quad m_r^2 \le j \le 2m_r^2, \\ 0, & \text{ha} \quad 2m_r^2 < j < m_{r+1}. \end{cases}$$

Végül, a maradék sorok álljanak csupa 0-ból:

$$c_{jk} := 0, \quad j \ge 1,\ k \ge 3.$$

Ekkor meggondolható, hogy semmilyen C és λ esetén sem definiálható olyan $\{b_1(l)\}$ sorozat, mely teljesítené a (2.15) feltételt minden $m \geq \lambda$-ra, mert elég nagy m esetén vagy az $n = 1$, vagy az $n = 2$ esetben a kívánt egyenlőtlenség nem állna fenn (a logikusnak tűnő $\{b_1(l)\} = [l/2]$ esetén az $m = m_r, n = 2$ esetben elég nagy r-et véve sérül (2.15), míg a másik logikusnak tűnő $\{b_1(l)\} = l^{1/2}$ esetén az $m = m_r^2, n = 1$ esetben sérül (2.15), ha r elég nagy). Tehát $\{c_{jk}\} \notin \mathrm{SBVDS}_1$. Másrészről, $\{c_{jk}\}$ összes sora SBVS_2-beli a $C = 4$ konstanssal és a $b(l) = l^{1/2}$ sorozattal. Továbbá, (2.19) és (2.20) is fennáll tetszőleges C és $\{b(l)\}$ választással, ha λ értékét 3-nak definiáljuk. Tehát a (2.18)–(2.20) feltételek teljesülnek, ha $C = 4$, $\lambda = 3$ és $b(l) = l^{1/2}$, így $\{c_{jk}\} \in \mathrm{SBVDS}_2$. Az imént említett példa $\{c_{jk}\}$-ra igen egyszerű volt, hiszen csak két sorában volt nem nulla elem, de könnyen megadható jóval komplikáltabb $\mathrm{SBVDS}_2 \setminus \mathrm{SBVDS}_1$-beli sorozat is, melynek több sorában is van nem nulla elem (akár mindben).

Annak belátásához, hogy $\mathrm{SBVDS}_1 \supseteq \mathrm{MVBVDS}$, tekintsünk egy tetszőleges $\{c_{jk}\}$ kettős sorozatot, mely MVBVDS-beli a C és λ konstansokkal. Ekkor (2.15) fennáll a $C' = ([\lambda^2]+1)C$, $\lambda' = [\lambda^2]+1$ és $b_1(l) = [l/\lambda]$ választással, hiszen (2.6) szerint

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} |c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \sum_{r=1}^{\lambda'} \sum_{j=r[m/\lambda]}^{2r[m/\lambda]} |c_{jn}|$$
$$\leq \frac{C'}{m} \max_{[m/\lambda] \leq M \leq \lambda'[m/\lambda]} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda, n \geq 1.$$

Hasonlóan, (2.7) alkalmazásával megkapható, hogy (2.16) szintén fennáll a C', λ' és $b_2(l) = b_1(l)$ esetben. A (2.17) feltétel pedig (2.8)-ból következik:

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sum_{r=1}^{\lambda'} \sum_{s=1}^{\lambda'} \sum_{j=r[m/\lambda]}^{2r[m/\lambda]} \sum_{k=s[n/\lambda]}^{2s[n/\lambda]} |c_{jk}|$$
$$\leq \frac{\lambda'^2 C}{mn} \sup_{M+N \geq [m/\lambda]+[n/\lambda]} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \geq \lambda.$$

Tehát $\{c_{jk}\} \in \mathrm{SBVDS}_1$ a $C'' = ([\lambda^2]+1)^2 C$, $\lambda' = [\lambda^2]+1$, $b_1(l) = b_2(l) = [l/\lambda]$ és $b_3(l) = [l/\lambda] - 1$ választással.

Végül, könnyű belátni, hogy ha $\{c_{jk}\}$ olyan, hogy első sora, $\{c_{j1}\}$, $\mathrm{SBVS}_2 \setminus \mathrm{MVBVS}$-beli és $c_{jk} = 0$, ha $j \geq 1$, $k \geq 2$, akkor $\{c_{jk}\} \in \mathrm{SBVDS}_1 \setminus \mathrm{MVBVDS}$. Nyilvánvalóan léteznek az előző példánál bonyolultabb $\mathrm{SBVDS}_1 \setminus \mathrm{MVBVDS}$-beli sorozatok is, de most csak azt mutattuk meg, hogy ilyen sorozatok léteznek. ■

Mint a 2.2.2. Tétel bizonyítása előtt tettük, most is bebizonyítunk két lemmát.

2.6.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *teljesíti a* (2.2) *és* (2.20) *feltételeket. Ekkor a 2.3.1. Lemma* (2.9) *és* (2.10) *állításai fennállnak.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor (2.2) szerint létezik $m_0 = m_0(\varepsilon)$ küszöbszám, melyre $jk|c_{jk}| \le \varepsilon$ bármely $j + k > m_0$ esetén. Továbbá létezik olyan m_1, melyre bármely $j > m_1$ esetén $b(j) > m_0$. Így bármely $m + n > m_1$, $m, n \ge \lambda$-ra

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}|\Delta_{11}c_{jk}| &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=2^r m}^{2^{r+1}m-1}\sum_{k=2^s n}^{2^{s+1}n-1}|\Delta_{10}c_{jk}| \\
&\le \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{C}{2^{r+s}mn}\sup_{M+N\ge b(2^r m+2^s n)}\sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N}|c_{jk}| \\
&\le \frac{C\varepsilon}{mn}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r+s}}\sup_{M+N\ge b(2^r m+2^s n)}\sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N}\frac{1}{jk} \\
&\le \frac{4C\varepsilon}{mn}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r+s}} \le \frac{16C\varepsilon}{mn},
\end{aligned}$$

ezzel (2.9)-et igazoltuk. Innen (2.10) a korábban látott módon következik. ■

2.6.2. Lemma. *Legyen* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ SBVDS$_1$*-beli a* C *és* $\lambda \ge 2$ *konstansokkal, valamint a* $\{b_1(l)\}, \{b_2(l)\}, \{b_3(l)\}$ *sorozatokkal. Ekkor*

$$\begin{aligned}
mnc_{mn} \le{}& C\sup_{M+N\ge b_3(m+n)}\sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N}c_{jk} + C\sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)}\sum_{k=n}^{2n}c_{jk} \\
&+ C\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)}c_{jk} + 2\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=n}^{2n}c_{jk}, \quad \textit{ha } m,n\ge\lambda.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Bizonyítás. Legyen $m, n \ge \lambda$ tetszőleges. Ekkor (2.15) szerint bármely $m + 1 \le \mu \le 2m$ és ν egész számokra

$$\begin{aligned}
c_{m\nu} &\le \sum_{j=m}^{2m-1}|\Delta_{10}c_{j\nu}| + c_{\mu\nu} \le \frac{C}{m}\max_{b_1(m)\le M\le\lambda b_1(m)}\sum_{j=M}^{2M}c_{j\nu} + c_{\mu\nu} \\
&\le \frac{C}{m}\sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)}c_{j\nu} + c_{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

Hasonlóan, (2.16)-ot használva adódik, hogy bármely μ és $n + 1 \le \nu \le 2n$-re

$$c_{\mu n} \le \frac{C}{n}\sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)}c_{\mu k} + c_{\mu\nu}.$$

(2.17) szerint bármely $m + 1 \le \mu \le 2m$, $n + 1 \le \nu \le 2n$ egész számokra fennáll a következő:

$$\begin{aligned}
c_{mn} &\le \sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1}|\Delta_{11}c_{jk}| + c_{m\nu} + c_{\mu n} \\
&\le \frac{C}{mn}\sup_{M+N\ge b_3(m+n)}\sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N}c_{jk} + c_{m\nu} + c_{\mu n}.
\end{aligned}$$

Ezt összevetve az előbb kapott két egyenlőtlenséggel adódik, hogy

$$c_{mn} \le \frac{C}{mn} \sup_{M+N\ge b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N} c_{jk} + \frac{C}{m}\sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} c_{j\nu} + \frac{C}{n}\sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} c_{\mu k} + 2c_{\mu\nu}.$$

Behelyettesítve az előbb kapott egyenlőtlenségbe a $\mu = m+1,\dots,2m$, $\nu = n+1,\dots,2n$ értékeket, majd összeadva a megfelelő oldalakat kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} mnc_{mn} \le C &\sup_{M+N\ge b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N} c_{jk} + \sum_{\nu=n+1}^{2n} C \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} c_{j\nu} \\ &+ \sum_{\mu=m+1}^{2m} C \sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} c_{\mu k} + 2\sum_{\mu=m+1}^{2m}\sum_{\nu=n+1}^{2n} c_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

amiből következik (2.21), ezzel a lemma állítását beláttuk. ■

A 2.5.2. Tétel bizonyítása. (i) rész: Legyen $\{c_{jk}\} \in \mathrm{SBVDS}_2$, és tegyük fel, hogy (2.2) fennáll. Ekkor a (2.18) és (2.19) feltételek teljesülése miatt $\{c_{jn}\}_{j=1}^{\infty} \in \mathrm{SBVS}_2$ bármely n-re és $\{c_{mk}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathrm{SBVS}_2$ bármely m-re, így az 1.2.2. Tétel szerint a (2.12)-beli sor- és oszlopösszegek egyenletesen konvergensek x-ben ill. y-ban. Ezen észrevétel után a (2.1) egyenletes, reguláris konvergenciája a 2.2.2. Tétel bizonyításának megismétlésével igazolható, csupán a 2.3.1. Lemma helyett a 2.6.1. Lemmát kell alkalmaznunk.

(ii) rész: Ezúttal tegyük fel, hogy $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ SBVDS_1-beli és (2.1) reguláris konvergenciája egyenletes (x,y)-ban. Mivel a $\{c_{jn}\}_{j=1}^{\infty}$ sorok és a $\{c_{mk}\}_{k=1}^{\infty}$ oszlopok is SBVS_2-beliek, ezért a (2.12)-beli sor- és oszlopösszegek egyenletesen konvergensek (x,y)-ban, és így az 1.2.2. Tétel szerint (2.2) fennáll, ha $j\to\infty$ és k rögzített illetve ha j rögzített és $k\to\infty$. Annak igazolásához, hogy (2.2) teljesül akkor is, amikor j és k is a végtelenbe tart, legyen $m,n \ge 4\lambda$ és

$$x_1(m) := \frac{\pi}{4m},\quad x_2(m) := \frac{\pi}{4\lambda m},\quad y_1(n) := \frac{\pi}{4n},\quad y_2(n) := \frac{\pi}{4\lambda n}.$$

Ekkor (a korábban már látott módon) megmutatható, hogy

$$\begin{aligned} \sin(jx_1(m)), \sin(ky_1(n)) &\ge \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{ha} \quad m\le j\le 2m,\ n\le k\le 2n,\\ \sin(jx_2(m)), \sin(ky_2(n)) &\ge \sin\frac{\pi}{4\lambda}, \quad \text{ha} \quad m\le j\le 2\lambda m,\ n\le k\le 2\lambda n. \end{aligned}$$

A 2.6.2. Lemma szerint

$$\begin{aligned} C &\sup_{M+N\ge b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N} c_{jk}\sin(jx_1(M))\sin(ky_1(N)) \\ +C &\sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)}\sum_{k=n}^{2n} c_{jk}\sin(jx_2(m))\sin(ky_1(n)) \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} c_{jk}\sin(jx_1(m))\sin(ky_2(n))\\
&+2\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=n}^{2n} c_{jk}\sin(jx_1(m))\sin(ky_1(n))\\
&\quad\ge \frac{C}{2}\sup_{M+N\ge b_3(m+n)}\sum_{j=M}^{2M}\sum_{k=N}^{2N} c_{jk}+C\sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)}\sum_{k=n}^{2n} c_{jk}\\
&\quad+C\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4\lambda}\right)\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} c_{jk}+\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=n}^{2n} c_{jk}\\
&\quad\ge \min\left\{\frac{C}{\sqrt{2}}\sin\frac{\pi}{4\lambda},1\right\} mnc_{mn}.
\end{aligned}
$$

Mivel bármely x, y esetén

$$
\sum_{j=m}^{M}\sum_{k=N}^{N} c_{jk}\sin jx\sin ky\to 0,\quad \text{ha } m,n\to\infty,
$$

ezért a (2.22) bal oldala 0-hoz tart, ha m, n tart a végtelenbe, hiszen a $\{b_1\}, \{b_2\}$ és $\{b_3\}$ sorozatok a végtelenbe tartanak. Így (2.2) teljesül akkor is, amikor j, k tart a végtelenbe. Ezzel a 2.5.2. Tétel második részét is beláttuk. ■

3. fejezet

Szinuszintegrálok

3.1. Előzmények

Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény, ahol $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$. A fejezet során az

$$\int_0^\infty f(x) \sin tx \, dx \tag{3.1}$$

alakú szinuszintegrálok t-ben vett egyenletes konvergenciáját vizsgáljuk, ahol $t \in \mathbb{R}$. Mivel a szinusz függvény páratlan, és a 0 helyen eltűnik, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $t \in \mathbb{R}_+$. A (3.1) integrál konvergenciája az

$$\int_0^b f(x) \sin tx \, dx$$

improprius részletintegrálok konvergenciáját jelenti, ahol b tart a végtelenbe. Annak érdekében, hogy biztosítsuk az iménti részletintegrálok létezését (véges értékét), a továbbiakban feltesszük, hogy $xf(x)$ lokálisan integrálható az $\overline{\mathbb{R}}_+$ zárt félegyenesen:

$$xf(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+), \tag{3.2}$$

ekkor ugyanis

$$\left| \int_0^b f(x) \sin tx \, dx \right| \le t \int_0^b x \left| f(x) \right| dx < \infty, \quad b, t > 0.$$

A (3.2) feltétel egyben azt is biztosítja, hogy f a 0-n kívül lokálisan integrálható, azaz $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, hiszen

$$\int_a^b \left| f(x) \right| dx \le \frac{1}{a} \int_a^b x \left| f(x) \right| dx < \infty, \quad a > 0.$$

Összevetve (1.1) és (3.1) alakját, megállapíthatjuk, hogy (3.1) a (1.1) nem diszkrét megfelelője (a szinuszsorbeli x szerepét az integrálbeli t veszi át), ezt az ezután következő tételek is alátámasztanak. Az analógiát azonban árnyalja az a tény, hogy míg a szinuszsorok esetében az összegfüggvény 2π szerint periodikus, addig a szinuszintegrálok nem feltétlenül periodikus függvények, ez például az L^1-konvergencia vizsgálatakor jelent problémát (az általunk vizsgált egyenletes konvergencia esetében nem).

Elsőként a nemnegatív, monoton nemnövő f függvények által meghatározott (3.1) integrálokra bebizonyított tételt ismertetjük. Ezen tétel az 1.1.1. Tétel nem diszkrét, nem periodikus megfelelője.

3.1.1. Tétel. [10] *Legyen $f(x) : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ monoton nemnövő, melyre* (3.2) *fennáll. Ekkor a* (3.1) *szinuszintegrál akkor és csak akkor egyenletesen konvergens t-ben, ha*

$$xf(x) \to 0, \quad ha \quad x \to \infty. \tag{3.3}$$

Az iménti tétel általánosításához alapötletet nyújt az 1.1. alfejezetben taglalt általánosított sorozatosztályok fogalma. Ennek megfelelően általánosított monoton függvényosztályokat fogunk definiálni. A diszkrét esetben használt Δ kifejezést (ami változást jelöl), felváltja a derivált fogalma. Ezen céllal az f függvényről azt is fel fogjuk tenni, hogy lokálisan abszolút folytonos $\mathbb{R}_+$-on, jelölésben $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, hiszen ekkor f-nek majdnem mindenütt létezik a deriváltja, f', és f' lokálisan Lebesgue-integrálható, valamint

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \quad b > a > 0.$$

Az általánosított függvényosztályok közül az NBVS és az MVBVS sorozatosztályok megfelelői a következők:

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvényt NBVF($\mathbb{R}_+$)-belinek (*Non-onesided Bounded Variation Function*-nek) nevezzük, ha léteznek a C, $A > 0$ konstansok, melyekre f teljesíti az

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \le C\left(\left|f(a)\right| + \left|f(2a)\right|\right), \quad a > A$$

feltételt.

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvényt MVBVF($\mathbb{R}_+$)-belinek (*Mean Value Bounded Variation Function*-nek) nevezzük, ha léteznek a C, $A > 0$ és $\lambda \ge 2$ konstansok, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \le \frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A. \tag{3.4}$$

[10]-ben belátták, hogy $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+) \supseteq \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}_+)$. $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli függvényre példa az $\frac{1}{1+x} \sin\left(\frac{\pi}{\ln 2} \ln x\right)$ függvény (lásd 4.2.1. Tétel bizonyítása). Továbbá a következő tétel is bebizonyítást nyert:

3.1.2. Tétel. [10] *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$, *és* (3.2) *fennáll.*

(i) *Ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *és* (3.3) *teljesül, akkor a* (3.1) *integrál egyenletesen konvergens* t*-ben.*

(ii) *Megfordítva, ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (3.1) *konvergenciája egyenletes* t*-ben, akkor* (3.3) *fennáll.*

Mivel a nemnegatív, monoton nemnövő függvények nem feltétlenül lokálisan abszolút konvergensek, de az $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli függvények igen, ezért $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ nem tartalmazza a nemnegatív, monoton nemnövő függvények osztályát, azaz a 3.1.2. Tétel nem a 3.1.1. Tétel általánosítása. Ha azonban az f nemnegatív, monoton nemnövő függvényről feltesszük, hogy $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, akkor $f'(x) \ge 0$ miatt világos, hogy $f \in \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}_+)$ (és így $f \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$), ezért a lokálisan abszolút konvergens függvények körében a 3.1.1. Tételt általánosítja a 3.1.2. Tétel.

3.2. Új eredmények

Célunk a 3.1.2. Tétel kiterjesztése $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$-nál bővebb függvényosztály(ok)ra. Ehhez segítséget jelentenek az 1.2. alfejezetben definiált sorozatosztályok. Azok nem diszkrét megfelelőit a következőképpen definiáljuk.

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvényt $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-belinek (*Supremum Bounded Variation Function*-nek) nevezzük, ha léteznek a C, $A > 0$ és $\lambda \ge 2$ konstansok, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \le \frac{C}{a} \sup_{b \ge a/\lambda} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A. \tag{3.5}$$

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvény $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$-beli (*Supremum Bounded Variation Function of 2nd type*), ha léteznek a C, $A > 0$ konstansok és a $B(x) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ végtelenbe tartó függvény, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \le \frac{C}{a} \sup_{b \ge B(a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A. \tag{3.6}$$

A diszkrét esethez hasonlóan, ha az előbbi definícióban szereplő $B(x)$ függvényről megszabjuk, hogy monoton nemcsökkenő legyen, $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ tartalma változatlan marad.

Megmutatjuk, hogy az $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$, $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$ és $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ osztályok között valódi tartalmazási reláció áll fenn.

3.2.1. Tétel. [5] *Ha* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$*, akkor* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$*. A fordított irányú állítás nem igaz, azaz létezik olyan* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$*, mely nem* $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$*-beli. Röviden,* $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+) \supsetneqq \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$.

3.2.2. Tétel. [5] $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+) \supsetneqq \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$*. Továbbá, ha* $f(x)$ $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$*-beli, de nem* $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$*-beli, akkor* (3.3) *fennáll.*

3.2.3. Tétel. [5] *Ha* $f(x) \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ *és* (3.2) *fennáll, akkor a 3.1.2. Tétel* (i) *és* (ii) *állításai teljesülnek* $f(x)$*-re.*

3.2.4. Következmény. *Ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$*-beli, akkor* (3.3) *szükséges és elegendő feltétele annak, hogy* (3.1) *egyenletesen konvergens legyen* t*-ben.*

3.3. Az állítások igazolása

A 3.2.1. Tétel bizonyítása. Annak igazolásához, hogy bármely $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli függvény $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli is, legyen $f \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ a hozzá tartozó C, $A > 0$ és $\lambda \geq 2$ konstansokkal. Továbbá jelöljük μ-vel azt az egész számot, melyre $2^\mu \leq \lambda^2 < 2^{\mu+1}$. Ekkor (3.4) szerint bármely $a > A$ esetén

$$\int_a^{2a} |f'(x)|\,dx \leq \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\,dx \leq \frac{C}{a}\left\{\int_{a/\lambda}^{2a/\lambda} + \int_{2a/\lambda}^{4a/\lambda} + \ldots + \int_{2^\mu a/\lambda}^{2^{\mu+1}a/\lambda}\right\}|f(x)|\,dx$$
$$\leq \frac{(\mu+1)C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} |f(x)|\,dx.$$

Tehát f $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli a $(\mu+1)C$, A és λ konstansokkal.

Ezután megadunk egy olyan f függvényt, mely $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)\backslash\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli. Bebizonyítjuk, hogy az $f_1(x) = \sin x/\ln(1+x)$ nullához tartó függvény ilyen. Egyrészről, bármely $a > 2\pi$-re igaz az

$$\int_a^{2a} |f_1'(x)|\,dx = \int_a^{2a} \left|\frac{\cos x}{\ln(1+x)} - \frac{\sin x}{(1+x)\ln^2(1+x)}\right| dx$$

$$\geq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(1+x)} \right| dx - \int_a^{2a} \left| \frac{\sin x}{(1+x)\ln^2(1+x)} \right| dx$$
$$\geq \frac{a}{\pi \ln(1+2a)} - \frac{4a}{\pi a \ln^2(1+a)},$$

egyenlőtlenséglánc, így

$$\int_a^{2a} \left| f_1'(x) \right| dx \to \infty, \quad \text{ha} \quad a \to \infty.$$

Ellenben, $a > 2\lambda \geq 4$ esetén

$$\frac{C}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left| f_1(x) \right| dx \leq \frac{C}{a \ln(a/\lambda)} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} |\sin(x)|\, dx \leq \frac{C}{a \ln(a/\lambda)} \cdot \frac{4\lambda a}{\pi} \leq \frac{4\lambda C}{\pi \ln 2}.$$

Tehát nem léteznek olyan C, A és λ konstansok, melyekre fennáll a (3.4) egyenlőtlenség minden $a > A$ esetén, azaz $f_1 \notin \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$. Másrészről viszont $f_1 \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, hiszen $a > \pi$ esetén

$$\int_a^{2a} \left| f_1'(x) \right| dx \leq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{\ln(1+x)} \right| dx + \int_a^{2a} \left| \frac{\sin x}{(1+x)\ln^2(1+x)} \right| dx \leq \frac{8a}{\pi \ln(1+a)}$$
$$\leq \frac{8 \ln(1+2a^2)}{a \ln(1+a)} \int_{a^2}^{2a^2} \left| \frac{\sin x}{\ln(1+x)} \right| dx \leq \frac{24}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} \left| f_1(x) \right| dx,$$

ahol $\lambda \geq 2$ értékét tetszőlegesen választhatjuk; ez pedig azt jelenti, hogy (3.5) fennáll a $C = 24$, $A = \pi$ és $\lambda = 2$ konstansokkal.

Hasonló érveléssel igazolható, hogy pl. az $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \sin x/(1+x)$, $f_4(x) = \sin x/(1+x)^2$ függvények is $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$-beliek. A felsorolt példákat azért érdemes megemlíteni, mert érzékelteti, hogy az $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$ osztályban vannak olyan nem $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli függvények, melyek különböző tulajdonságúak:

$$f_1(x) \to 0,\ x f_1(x) \to \infty;\ f_3(x) \to 0,\ x f_3(x) \to 1 \text{ és } f_4(x) \to 0,\ x f_4(x) \to 0. \qquad \blacksquare$$

A 3.2.2. Tétel bizonyítása. Nyilvánvaló, hogy ha a (3.5) egyenlőtlenség fennáll, akkor (3.6) is fennáll, mégpedig a $B(x) = x/\lambda$ választással. Tehát az $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ osztály tartalmazza $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-t. Ezután megmutatjuk, hogy az $f(x) = \sin x/(1+x)^3$ függvény $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli. Egyrészről, bármely $a > 2\pi$ esetén

$$\int_a^{2a} \left| f'(x) \right| dx = \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{(1+x)^3} - \frac{3 \sin x}{(1+x)^4} \right| dx \geq \int_a^{2a} \left| \frac{\cos x}{(1+x)^3} \right| dx - \int_a^{2a} \left| \frac{3 \sin x}{(1+x)^4} \right| dx$$

$$\geq \frac{a}{\pi(1+2a)^3} - \frac{12a}{\pi(1+a)^4},$$

így

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \sim \frac{1}{8\pi a^2}.$$

Viszont $a > \lambda \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} \left|f_2(x)\right| dx &\leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \frac{1}{(1+b)^3} \int_b^{2b} |\sin(x)|\, dx \\ &\leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \frac{4b}{\pi(1+b)^3} = \frac{4C}{\lambda\pi(1+a/\lambda)^3} = \frac{4C\lambda^2}{\pi(\lambda+a)^3},\end{aligned}$$

azaz nem léteznek olyan C, A és λ konstansok, melyekre fennáll a (3.5) egyenlőtlenség minden $a > A$ esetén, tehát $f \notin \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. Másrészről, $a > 4\pi^2$-re teljesül a következő:

$$\begin{aligned}\int_a^{2a} \left|f_2'(x)\right| dx &\leq \int_a^{2a} \left|\frac{\cos x}{(1+x)^3}\right| dx + \int_a^{2a} \left|\frac{3\sin x}{(1+x)^4}\right| dx \leq \frac{16a}{\pi(1+a)^3} \\ &\leq \frac{16\sqrt{a}(1+2\sqrt{a})^3}{(1+a)^3} \int_{\sqrt{a}}^{2\sqrt{a}} \left|\frac{\sin x}{(1+x)^3}\right| dx \leq \frac{320}{a} \sup_{b \geq \sqrt{a}} \int_b^{2b} \left|f_2(x)\right| dx.\end{aligned}$$

Így (3.6) fennáll a $C = 320$, $A = 4\pi^2$ konstansokkal és a $B(x) = \sqrt{x}$ választással, azaz $f \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$.

Végül, a tétel utolsó állításának igazolásához tekintsünk egy tetszőleges $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli f függvényt. C, A és $B(x)$ legyenek az f-hez tartozó, (3.6)-beli konstansok ill. függvény. Továbbá legyen

$$I_a := \sup_{b \geq a} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx \quad \text{és} \quad I := \limsup_{a\to\infty} I_a,$$

ahol $I_a, I \in [0,\infty]$. Nyilvánvaló, hogy I_a monoton nemnövő függvénye a-nak. Ezért ha $I = \infty$, akkor $I_a = \infty$ minden a esetén, és így (3.5) fennáll a C és A konstansokkal és tetszőleges λ-val, ami ellentmondás, hiszen $f \notin \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. Ha $0 < I < \infty$, akkor létezik olyan $A'(> A)$, melyre $I < I_a < J < \infty$ bármely $a > A'$ esetén. Ekkor is ellentmondásra jutunk, hiszen (3.5) fennáll a $C \cdot J/I$ és A'' konstansokkal és tetszőleges λ-val, ahol A'' az a szám, melyre bármely $a > A''$ teljesíti $B(a) > A'$-t. Végül, ha $I = 0$, akkor a következőképpen gondolkodunk:

$$f(t) - f(a) = f(t) + \int_a^t f'(x)\, dx, \quad a < t,$$

így

$$\left|f(a)\right| \le \left|f(t)\right| + \int_a^t \left|f'(x)\right| dx \le \left|f(t)\right| + \int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \quad a < t < 2a.$$

Integrálva t szerint az iménti egyenlőtlenséglánc bal és jobb oldalát az $[a, 2a]$ intervallumon, figyelembe véve (3.6)-ot, adódik, hogy

$$\begin{aligned} a\left|f(a)\right| &\le \int_a^{2a} \left|f(t)\right| dt + a\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \\ &\le \int_a^{2a} \left|f(x)\right| dx + C \sup_{b\ge B(a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx = I_a + C\cdot I_{B(a)} \end{aligned} \tag{3.7}$$

bármely $a > A$-ra. Innen pedig következik (3.3), hiszen $\lim I_a = \lim I_{B(a)} = 0$. ■

A 3.2.3. Tétel bizonyítása. Legyen $f \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ a C, A konstansokkal és $B(x)$-szel, valamint tegyük fel, hogy (3.2) fennáll.

(i) rész: Tegyük fel, hogy (3.3) teljesül. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$a\int_a^{\infty} \left|f'(x)\right| dx \to 0, \quad \text{ha} \quad a\to\infty. \tag{3.8}$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot. (3.3) szerint létezik olyan x_0 küszöbszám, melyre $x|f(x)| < \varepsilon$, ha $x > x_0$. Mivel B(x) tart a végtelenbe, ezért létezik x_1 úgy, hogy bármely $x > x_1$ teljesíti a $B(x) > x_0$ egyenlőtlenséget. Ekkor (3.6)-ot használva adódik, hogy tetszőleges $a > x_1$-re fennáll a következő:

$$\begin{aligned} a\int_a^{\infty} \left|f'(x)\right| dx &= a\sum_{r=0}^{\infty} \int_{2^r a}^{2^{r+1}a} \left|f'(x)\right| dx \le C\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \sup_{b\ge B(2^r a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx \\ &\le C\varepsilon \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \sup_{b\ge B(2^j a)} \int_b^{2b} \frac{dx}{x} \le C\varepsilon \ln 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \le (\ln 4\, C)\varepsilon. \end{aligned}$$

Tehát (3.8) igaz. (3.1) egyenletes konvergenciája pedig a [10, Theorem 2] tétel (lásd 3.1.2. Tétel) első részének bizonyításának megismétlésével következik (3.8)-ból.

(ii) rész: Most azt tesszük fel, hogy $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és (3.1) egyenletesen konvergens t-ben. Ekkor

$$J_b(t) := \int_b^{2b} f(x) \sin tx\, dx \to 0, \quad \text{ha} \quad b\to\infty,$$

és az iménti konvergencia egyenletes t-ben. Így

$$\sup_{b\ge a} \left(\sup_t J_b(t) \right) \to 0, \quad \text{ha} \quad a\to\infty. \tag{3.9}$$

Legyen
$$t(b) := \frac{\pi}{4b}, \quad b > 0.$$
Ekkor tetszőleges $b \le x \le 2b$ esetén
$$\frac{\pi}{4} \le t(b)\,x \le \frac{\pi}{2}$$
és így
$$\sin\left(t(b)\,x\right) \ge \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$
Az előző egyenlőtlenség felhasználásával adódik, hogy
$$\begin{aligned} I_a &= \sup_{b\ge a} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx \le \sqrt{2} \sup_{b\ge a} \sin\frac{\pi}{4} \int_b^{2b} f(x)\,dx \\ &\le \sqrt{2} \sup_{b\ge a} \int_b^{2b} f(x) \sin\left(t(b)\,x\right) dx \le \sqrt{2} \sup_{b\ge a} \left(\sup_t J_b(t) \right) \end{aligned}$$
innen pedig (3.9) szerint
$$I_a \to 0, \quad I_{B(a)} \to 0, \quad \text{ha} \quad a \to \infty.$$
Végül, a (3.7) egyenlőtlenség alkalmazásával megkapjuk (3.3)-at. ∎

3.4. Formális deriválás és integrálás

Tekintsük az
$$\int_0^\infty x^r f(x) \sin tx\,dx \tag{3.10}$$
szinuszintegrált, ahol r egész szám. Az 1.4. alfejezethez hasonlóan, itt is csak a páros r-ekkel foglalkozunk, ekkor a (3.10) integrál pozitív r esetén (3.1) r-szeres t-szerinti formális deriváltja, negatív r esetén (3.1) r-szeres t-szerinti formális integrálja, az $r = 0$ esetben pedig a (3.10) és a (3.1) integrálok megegyeznek. Az alfejezet eredményei [5]-ben is olvashatók.

A nemnegatív, monoton nemnövő $f(x)$ függvények osztálya zárt az $1/x$-szel való szorzásra, viszont nem zárt az x-el való szorzásra, ellenben, mint azt a következő tétel mutatja, MVBVF($\mathbb{R}_+$) mindkét műveletre zárt.

3.4.1. Tétel. *Legyen* $f(x) \in$ MVBVF($\mathbb{R}_+$). *Ekkor tetszőleges rögzített* r *egész szám esetén* $g_r(x) = x^r f(x)$ *szintén* MVBVF($\mathbb{R}_+$)*-beli.*

Bizonyítás. Legyen $f(x$ MVBVF($\mathbb{R}_+$)-beli a C, A és λ konstansokkal. A teljes indukció értelmében elegendő megmutatni, hogy $g_1(x) = xf(x) \in$ MVBVF($\mathbb{R}_+$) és $g_{-1}(x) = f(x)/x \in$ MVBVF($\mathbb{R}_+$). A (3.4) felhasználásával adódik, hogy bármely $a > A$ esetén

$$\int_a^{2a} \left|g_1'(x)\right| dx \le \int_a^{2a} \left|xf'(x)\right| dx + \int_a^{2a} \left|f(x)\right| dx \le 2a \int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx + \frac{1}{a}\int_a^{2a} \left|xf(x)\right| dx$$
$$\le 2C \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left|f(x)\right| dx + \frac{1}{a}\int_a^{2a} \left|g_1(x)\right| dx \le \frac{2C\lambda+1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left|g_1(x)\right| dx,$$

azaz g_1 teljesíti a (3.4) feltételt a $2C\lambda+1$, A és λ konstansokkal. Hasonlóan,

$$\int_a^{2a} \left|g_{-1}'(x)\right| dx \le \int_a^{2a} \frac{1}{x}\left|f'(x)\right| dx + \int_a^{2a} \frac{1}{x^2}\left|f(x)\right| dx \le \frac{1}{a}\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx + \frac{1}{a}\int_a^{2a} \frac{1}{x}\left|f(x)\right| dx$$
$$\le \frac{C}{a^2} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left|f(x)\right| dx + \frac{1}{a}\int_a^{2a} \left|g_{-1}(x)\right| dx \le \frac{C\lambda+1}{a} \int_{a/\lambda}^{\lambda a} \left|g_{-1}(x)\right| dx,$$

tehát g_{-1} is MVBVF($\mathbb{R}_+$)-beli a $C\lambda+1$, A és λ konstansokkal. ■

Az iménti tétel és a 3.1.2. Tétel összevetéséből következik

3.4.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in$ MVBVF($\mathbb{R}_+$), (3.2) *fennáll és* r *pozitív páros szám.*

(i) *Ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *és* $x^{r+1} f(x) \to 0$, *ha* $x \to \infty$, *akkor a* (3.10) *szinuszintegrál egyenletesen konvergens* t*-ben.*

(ii) *Megfordítva, ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *és a* (3.10) *integrál konvergenciája egyenletes* t*-ben, akkor* $x^{r+1} f(x) \to 0$, *ha* $x \to \infty$.

Az iménti állítások igazak maradnak akkor is, ha r *negatív páros szám és* $x^{r+1} f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Az SBVF($\mathbb{R}_+$) függvényosztályra a 3.4.1. Tétel fele igaz.

3.4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in$ SBVF($\mathbb{R}_+$). *Ekkor tetszőleges rögzített* r *pozitív egész szám esetén* $g_r(x) = x^r f(x) \in$ SBVF($\mathbb{R}_+$).

Bizonyítás. Legyen $f(x$ SBVF($\mathbb{R}_+$)-beli a C, A és λ konstansokkal. Elegendő megmutatni, hogy $g_1(x) = xf(x) \in$ SBVF($\mathbb{R}_+$). A (3.5) alkalmazásával adódik, hogy bármely $a > A$ esetén

$$\int_a^{2a} \left|g_1'(x)\right| dx \le 2a \int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx + \frac{1}{a}\int_a^{2a} \left|xf(x)\right| dx$$

$$\leq 2C \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} |f(x)|\,dx + \frac{1}{a} \int_a^{2a} |g_1(x)|\,dx$$

$$\leq \frac{2C\lambda+1}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} |g_1(x)|\,dx,$$

azaz g_1 teljesíti a (3.5) feltételt a $2C\lambda+1$, A és λ konstansokkal. ■

A fenti tétel és a 3.2.3. Tételt összevetve adódik

3.4.4. Következmény. *Ha* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, (3.2) *fennáll és* r *pozitív páros szám, akkor* a 3.4.2. *Következmény* (i) *és* (ii) *állításai fennállnak.*

Meggondolható, hogy $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ nem zárt sem az $1/x$-szel, sem az x-el való szorzásra.

4. fejezet

Kettős szinuszintegrálok

4.1. Kettős integrálok konvergenciája

Tekintsük az

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) \sin ux \sin vy \, dx\, dy, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

alakú kettős szinuszintegrálokat, ahol $f(x,y) : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$, hiszen a szinusz függvény páratlan, és a 0 helyen 0 értéket vesz fel. A fejezet célja annak megállapítása ill. igazolása, hogy a (4.1) integrál reguláris konvergenciájának milyen szükséges és elegendő feltételei vannak.

Mielőtt a reguláris konvergenciát definiáljuk, tekintsük a Pringsheim-féle konvergencia fogalmát. Ezen konvergencia a diszkrét esethez (lásd 2.1. alfejezet) hasonlóan definiált. Legyen $\Phi : \overline{\mathbb{R}}^2_+ \to \mathbb{C}$, melyre $\Phi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}^2_+)$. Azt mondjuk, hogy az

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(x,y)\, dx\, dy \tag{4.2}$$

kettős integrál Pringsheim értelemben konvergens, ha az

$$I_\Phi(0,b_1;0,b_2) := \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} \Phi(x,y)\, dx\, dy$$

integráloknak létezik véges határértéke, ha $b_1, b_2 \to \infty$ (b_1 és b_2 egymástól függetlenül tart a végtelenbe). A Cauchy-féle konvergencia kritérium következtében (4.2) Pringsheim értelemben konvergens akkor és csak akkor, ha bármely $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $b_0 = b_0(\varepsilon)$ küszöbszám, melyre

$$|I_\Phi(0,b_1;0,b_2) - I_\Phi(0,b_3;0,b_4)| \le \varepsilon, \qquad \text{ha } \min\{b_1,b_2,b_3,b_4\} > b_0.$$

A Pringsheim-konvergencia maga után vonja az alábbi maradékintegrálokra vonatkozó konvergenciát:

$$I_\Phi(a_1,b_1;a_2,b_2) = I_\Phi(0,b_1;0,b_2) - I_\Phi(0,a_1;0,b_2) - I_\Phi(0,b_1;0,a_2) + I_\Phi(0,a_1;0,a_2) \to 0,$$
$$\text{ha } \min\{a_1,a_2\} \to \infty,\ b_1 > a_1 > 0, b_2 > a_2 > 0.$$

A reguláris konvergenciát a maradékintegrálokkal definiáljuk: a (4.2) integrál regulárisan konvergens akkor, ha

$$I_\Phi(a_1,b_1;a_2,b_2) \to 0, \quad \text{ha } a_1 + a_2 \to \infty,\ b_1 > a_1 \geq 0, b_2 > a_2 \geq 0.$$

Az iménti feltétel ekvivalens azzal, hogy az alábbi két feltétel mindegyike teljesül:

$$I_\Phi(a_1,b_1;0,b_2) \to 0, \quad \text{ha } b_1 > a_1 \to \infty, \text{ és } b_2 > 0 \text{ tetszőleges}$$

és

$$I_\Phi(0,b_1;a_2,b_2) \to 0, \quad \text{ha } b_2 > a_2 \to \infty, \text{ és } b_1 > 0 \text{ tetszőleges.}$$

Az előző ekvivalens átírásból látszik, hogy a reguláris konvergencia maga után vonja a Pringsheim-féle konvergenciát, hiszen

$$I_\Phi(0,b_1;0,b_2) - I_\Phi(0,b_3;0,b_4) = I_\Phi(\min\{b_1,b_3\}, \max\{b_1,b_3\}; 0, \min\{b_2,b_4\})$$
$$+ I_\Phi(0, \min\{b_1,b_3\}; \min\{b_2,b_4\}, \max\{b_2,b_4\}).$$

Ellenben nem minden Pringsheim értelemben konvergens kettős integrál regulárisan konvergens, erre példa olvasható [8]-ban.

Visszatérve a (4.1) kettős szinuszintegrálra, ahhoz, hogy az

$$I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v) := \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y) \sin ux \sin vy \, dx\, dy$$

részletintegrálok létezzenek bármely $b_1 > a_1 \geq 0$, $b_2 > a_2 \geq 0$ és $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$ esetén, a továbbiakban feltesszük, hogy

$$xyf(x,y) \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}^2_+). \tag{4.3}$$

Ekkor ugyanis bármely $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2_+$ esetén az alábbi improprius integrálok léteznek, és véges értéket vesznek fel:

$$\int_0^{b_1}\int_0^{b_2} xy\left|f(x,y)\right| dx\, dy < \infty.$$

A (4.3) feltétel egyben azt is biztosítja, hogy $f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, mivel

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \left|f(x,y)\right| dx\,dy \le \frac{1}{a_1 a_2}\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} xy\left|f(x,y)\right| < \infty$$

bármely $b_1 > a_1 > 0$, $b_2 > a_2 > 0$ esetén.

4.2. Új eredmények

A továbbiakban az $f(x,y) : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ függvényről feltesszük, hogy lokálisan abszolút folytonos $\mathbb{R}^2_+$-en, jelölésben $f(x,y) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, ami alatt azt értjük, hogy az $f_x(x,y) := \partial f(x,y)/\partial x$ és az $f_y(x,y) := \partial f(x,y)/\partial y$ parciális deriváltak léteznek $\mathbb{R}^2_+$-en mindenütt,

$$\int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y)\,dx = f(b_1,y) - f(a_1,y), \quad b_1 > a_1 > 0,\ y > 0,$$

$$\int_{a_2}^{b_2} f_y(x,y)\,dy = f(x,b_2) - f(x,a_2), \quad b_2 > a_2 > 0,\ x > 0,$$

továbbá az $f_{xy}(x,y)$ és $f_{yx}(x,y)$ vegyes parciális deriváltak léteznek, $f_{xy} = f_{yx}$ $\mathbb{R}^2_+$-en majdnem mindenütt, és

$$\int_{a_1}^{b_1} f_{xy}(x,y)\,dx = f_y(b_1,y) - f_y(a_1,y), \quad b_1 > a_1 > 0,\ y > 0,$$

$$\int_{a_2}^{b_2} f_{xy}(x,y)\,dy = f_x(x,b_2) - f_x(x,a_2), \quad b_2 > a_2 > 0,\ x > 0.$$

Ekkor a vegyes parciális deriváltak és az f függvény között fennáll az

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy = f(b_1,b_2) - f(a_1,b_2) - f(b_1,a_2) + f(a_1,a_2)$$

összefüggés ($b_1 > a_1 > 0$, $b_2 > a_2 > 0$).

A következő függvényosztályok az $\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}_+)$ és $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ osztályok kétdimenziós megfelelői:

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f(x,y) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$ függvény $\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$-beli, ha létezik olyan, csak f-től függő, C konstans, melyre

$$\int_{a_1}^{2a_1} \left|f_x(x,y)\right| dx \le C\left(\left|f(a_1,y)\right| + \left|f(2a_1,y)\right|\right), \quad a_1, y > 0, \tag{4.4}$$

$$\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_y(x,y)\right| dy \le C\left(\left|f(x,a_2)\right| + \left|f(x,2a_2)\right|\right), \quad x, a_2 > 0, \tag{4.5}$$

$$\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\,dy \le C\Big(\left|f(a_1,a_2)\right| + \left|f(a_1,2a_2)\right| + \left|f(2a_1,a_2)\right| + \left|f(2a_1,2a_2)\right|\Big), \quad a_1, a_2 > 0. \tag{4.6}$$

Definíció. Az $f(x,y) \in AC_{loc}(\mathbb{R}^2_+)$ függvényt MVBVF$(\mathbb{R}^2_+)$-belinek nevezzük, ha léteznek olyan, csak f-től függő, C és $\lambda \ge 2$ konstansok, amelyekre

$$\int_{a_1}^{2a_1} \left|f_x(x,y)\right| dx \le \frac{C}{a_1}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} \left|f(x,y)\right| dx, \quad a_1, y > 0, \tag{4.7}$$

$$\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_y(x,y)\right| dy \le \frac{C}{a_2}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} \left|f(x,y)\right| dy, \quad x, a_2 > 0, \tag{4.8}$$

$$\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\,dy \le \frac{C}{a_1 a_2}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} \left|f(x,y)\right| dx\,dy, \quad a_1, a_2 > 0. \tag{4.9}$$

4.2.1. Tétel. MVBVF$(\mathbb{R}^2_+) \supsetneqq$ NBVF$(\mathbb{R}^2_+)$.

4.2.2. Tétel. *Legyen $f \in$ MVBVF$(\mathbb{R}^2_+)$ olyan függvény, amelyre* (4.3) *fennáll.*
(i) *Ha $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ és*

$$xyf(x,y) \to 0, \quad ha \quad x + y \to \infty, \tag{4.10}$$

akkor a (4.1) *integrál reguláris konvergenciája egyenletes $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és a* (4.1) *reguláris konvergenciája egyenletes $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$-ben, akkor* (4.10) *fennáll.*

Az előző tétel ill. az alábbi következmény egyaránt kis eltéréssel olvasható [8]-ban, mivel az ott bebizonyított tételek tartalmaznak egy olyan plusz feltételt, mely elhagyható, amint az az itteni bizonyításból kiderül.

4.2.3. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ MVBVF$(\mathbb{R}^2_+)$-beli, akkor* (4.10) *szükséges és elegendő feltétele annak, hogy* (4.1) *egyenletesen konvergens legyen (u,v)-ben.*

A monotonitást két dimenzióban többféle módon is szokás definiálni. A fejezetben során az $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ függvényt akkor nevezzük monoton nemnövőnek, ha mindkét változójában monoton nemnövő, és

$$f(x_1,y_1) - f(x_2,y_1) - f(x_1,y_2) + f(x_2,y_2) \ge 0,$$

ha $x_2 > x_1 > 0$, $y_2 > y_1 > 0$. Világos, hogy ha $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, akkor f pontosan akkor monoton nemnövő, ha

$$f_x(x,y) \le 0, \quad f_y(x,y) \le 0 \quad \text{és} \quad f_{xy}(x,y) \ge 0 \quad \text{majdnem mindenütt},$$

ezen feltételek pedig maguk után vonják a (4.4)–(4.6) feltételeket, azaz az $\mathbb{R}^2_+$-en értelmezett, nemnegatív, lokálisan abszolút folytonos, monoton nemcsökkenő függvények $\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$-beliek, ezáltal $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$-beliek.

4.2.4. Következmény. *Ha $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ monoton nemnövő és $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, akkor* (4.10) *szükséges és elegendő feltétele annak, hogy* (4.1) *egyenletesen konvergens legyen (u,v)-ben.*

Megjegyezzük, hogy hasonló állítást láttak be [11]-ben az $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ monoton nemnövő, nem feltétlenül lokálisan abszolút folytonos függvényekre is.

4.3. Segédállítások

4.3.1. Lemma. *Tegyük fel, hogy $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, $g \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ és $xg(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$. Ha létezik olyan C konstans, melyre bármely $a > 0$ esetén*

$$\int_a^{2a} |g'(x)|\, dx \le C\big(|g(a)| + |g(2a)|\big),$$

akkor tetszőleges $a > 0$-ra

$$\int_a^{2a} |g'(x)|\, dx \le \frac{4C}{a} \int_{a/4}^{4a} |g(x)|\, dx.$$

A 4.3.1. Lemma azonnal következik a [10, Theorem 3] bizonyításából.

4.3.2. Lemma. *Legyen $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ olyan függvény, mely teljesíti* (4.3)*-at. Ha* (4.10) *fennáll, akkor*

$$a_1 y \int_{a_1}^{\infty} \big|f_x(x,y)\big|\, dx \to 0, \quad \text{ha} \quad a_1 + y \to \infty,\ a_1, y > 0, \tag{4.11}$$

$$x a_2 \int_{a_2}^{\infty} \big|f_y(x,y)\big|\, dy \to 0, \quad \text{ha} \quad x + a_2 \to \infty,\ x, a_2 > 0, \tag{4.12}$$

$$a_1 a_2 \int_{a_1}^{\infty}\int_{a_2}^{\infty} \big|f_{xy}(x,y)\big|\, dx\, dy \to 0, \quad \text{ha} \quad a_1 + a_2 \to \infty,\ a_1, a_2 > 0. \tag{4.13}$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített, valamint a C, λ konstansok az f-hez tartozó MVBVF$(\mathbb{R}^2_+)$ definícióbeli számok. A (4.10) feltételből következik, hogy létezik olyan $x_1 > 0$ küszöbszám, melyre

$$xy\left|f(x,y)\right| \le \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x+y > x_1. \tag{4.14}$$

(4.11) igazolásához tekintsünk olyan tetszőleges, rögzített a_1, y számokat, melyekre $a_1 + y > \lambda x_1$. Ekkor (4.7) és (4.14) használatával becsüljünk a következő módon:

$$\begin{aligned} a_1 y \int_{a_1}^{\infty} \left|f_x(x,y)\right| dx &= a_1 y \sum_{r=0}^{\infty} \int_{2^r a_1}^{2^{r+1} a_1} \left|f_x(x,y)\right| dx \le a_1 y \sum_{r=0}^{\infty} \frac{C}{2^r a_1} \int_{2^r a_1/\lambda}^{\lambda 2^r a_1} \left|f(x,y)\right| dx \\ &\le C \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} \int_{2^r a_1/\lambda}^{\lambda 2^r a_1} \frac{\varepsilon}{x}\, dx = C\varepsilon \ln(\lambda^2) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^r} = (4C \ln\lambda)\,\varepsilon, \end{aligned}$$

amiből következik (4.11).

(4.12) hasonlóan bizonyítható, a (4.7) feltétel helyett (4.8)-at alkalmazva.

Végül, (4.13) igazolásához, legyen $a_1 + a_2 > \lambda x_1$. Ekkor a (4.9) és (4.14) egyenlőtlenségeket figyelembe véve adódik, hogy

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \int_{a_1}^{\infty}\int_{a_2}^{\infty} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\,dy &= a_1 a_2 \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \int_{2^r a_1}^{2^{r+1} a_1} \int_{2^s a_2}^{2^{s+1} a_2} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\,dy \\ &\le \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{C}{2^{r+s}} \int_{2^r a_1/\lambda}^{\lambda 2^r a_1} \int_{2^s a_2/\lambda}^{\lambda 2^s a_2} \left|f(x,y)\right| dx\,dy \\ &\le C \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+s}} \int_{2^r a_1/\lambda}^{\lambda 2^r a_1} \int_{2^s a_2/\lambda}^{\lambda 2^s a_2} \frac{\varepsilon}{xy}\, dx\,dy \\ &= C\varepsilon \ln^2(\lambda^2) \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+s}} = (16 C \ln^2\lambda)\,\varepsilon, \end{aligned}$$

ami biztosítja (4.13) igaz voltát. ■

4.3.3. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f \in$ MVBVF$(\mathbb{R}^2_+)$ *a* C, λ *konstansokkal. Ekkor tetszőleges* $a_1, a_2 > 0$ *esetén*

$$a_1 a_2 f(a_1, a_2) \le (3C+1) \int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} \int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\, dx\,dy. \tag{4.15}$$

Bizonyítás. Mivel $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, ezért bármely $a_1 \le s \le 2a_1$ és $a_2 \le t \le 2a_2$ esetén

$$f(a_1,a_2) - f(a_1,t) - f(s,a_2) + f(s,t) = \int_{a_1}^{s}\int_{a_2}^{t} f_{xy}(x,y)\, dx\,dy,$$

továbbá

$$f(s,t) - f(a_1,t) = \int_{a_1}^{s} f_x(x,t)\,dx$$

és

$$f(s,t) - f(s,a_2) = \int_{a_2}^{t} f_y(s,y)\,dy.$$

Az előző egyenlőségek és a (4.7)–(4.9) egyenlőtlenségek felhasználásával kapjuk, hogy $a_1 \le s \le 2a_1$ és $a_2 \le t \le 2a_2$-re

$$\begin{aligned}
f(a_1,a_2) &= \big(f(a_1,t) - f(s,t)\big) + \big(f(s,a_2) - f(s,t)\big) + f(s,t) + \int_{a_1}^{s}\int_{a_2}^{t} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \\
&= f(s,t) - \int_{a_1}^{s} f_x(x,t)\,dx - \int_{a_2}^{t} f_y(s,y)\,dy + \int_{a_1}^{s}\int_{a_2}^{t} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy \\
&\le f(s,t) + \int_{a_1}^{s} \big|f_x(x,t)\big|\,dx + \int_{a_2}^{t} \big|f_y(s,y)\big|\,dy + \int_{a_1}^{s}\int_{a_2}^{t} \big|f_{xy}(x,y)\big|\,dx\,dy \\
&\le f(s,t) + \int_{a_1}^{2a_1} \big|f_x(x,t)\big|\,dx + \int_{a_2}^{2a_2} \big|f_y(s,y)\big|\,dy + \int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2} \big|f_{xy}(x,y)\big|\,dx\,dy \\
&\le f(s,t) + \frac{C}{a_1}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} f(x,t)\,dx + \frac{C}{a_2}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(s,y)\,dy + \frac{C}{a_1 a_2}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

A legutoljára kapott becslés bal oldalát, $f(a_1,a_2)$-t, valamint jobb oldalát integráljuk s és t szerint az $[a_1,2a_1]\times[a_2,2a_2]$ téglalapon, ekkor

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 f(a_1,a_2) &\le \int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2} f(s,t)\,ds\,dt + C\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2}^{2a_2} f(x,t)\,dx\,dt \\
&\quad + C\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(s,y)\,ds\,dy + C\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\,dx\,dy \\
&\le (3C+1)\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\,dx\,dy,
\end{aligned}$$

amiből következik (4.15), hiszen $\lambda \ge 2$. ■

4.4. A 4.2.1. és 4.2.2. Tételek bizonyítása

A 4.2.1. Tétel bizonyítása. Először bebizonyítjuk, hogy $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+) \supset \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$. Legyen $f(x,y) \in \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ a C, A konstansokkal. Mivel $f(x,y) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, ezért tetszőleges $y>0$ esetén $g(x):=f(x,y)\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ és tetszőleges $x>0$ esetén $g(y):=f(x,y)\in AC_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, így a (4.4) és (4.5) feltételek teljesülése miatt alkalmazhatjuk a 4.3.1. Lemmát, amiből (4.7) és (4.8) azonnal adódik C helyett $4C$-vel és a $\lambda=4$ konstanssal. Be kell még látnunk továbbá, hogy (4.9) fennáll. (4.6) alkalmazásával adódik, hogy tetszőleges a_1,a_2 pozitív számokra

$$\begin{aligned}
J &:= \int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}\left(\int_{s/2}^{2s}\int_{t/2}^{2t}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy\right)ds\,dt\\
&= \int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}\left(\left\{\int_{s/2}^{s}\int_{t/2}^{t}+\int_{s/2}^{s}\int_{t}^{2t}+\int_{s}^{2s}\int_{t/2}^{t}+\int_{s}^{2s}\int_{t}^{2t}\right\}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy\right)ds\,dt\\
&\le C\int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}\Big(\left|f(s/2,t/2)\right|+2\left|f(s/2,t)\right|+\left|f(s/2,2t)\right|+2\left|f(s,t/2)\right|+4\left|f(s,t)\right|\\
&\qquad +2\left|f(s,2t)\right|+\left|f(2s,t/2)\right|+2\left|f(2s,t)\right|+\left|f(2s,2t)\right|\Big)\,ds\,dt\\
&= C\Big\{4\int_{3a_1/4}^{a_1}\int_{3a_2/4}^{a_2}+4\int_{3a_1/4}^{a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}+\int_{3a_1/4}^{a_1}\int_{3a_2}^{4a_2}+4\int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2/4}^{a_2}+4\int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}\\
&\qquad +\int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2}^{4a_2}+\int_{3a_1}^{4a_1}\int_{3a_2/4}^{a_2}+\int_{3a_1}^{4a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}+\frac{1}{4}\int_{3a_1}^{4a_1}\int_{3a_2}^{4a_2}\Big\}\left|f(s,t)\right|ds\,dt\\
&\le 4C\int_{3a_1/4}^{4a_1}\int_{3a_2/4}^{4a_2}\left|f(s,t)\right|ds\,dt.
\end{aligned}$$

Másrészről, ha $3a_1/2\le s\le 2a_1$ és $3a_2/2\le t\le 2a_2$, akkor $[s/2,2s]\supset[a_1,2a_1]$ és $[t/2,2t]\supset[a_2,2a_2]$, így

$$J\ge \int_{3a_1/2}^{2a_1}\int_{3a_2/2}^{2a_2}\left(\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy\right)ds\,dt=\frac{a_1a_2}{4}\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy.$$

A fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$\frac{a_1a_2}{4}\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy\le 4C\int_{3a_1/4}^{4a_1}\int_{3a_2/4}^{4a_2}\left|f(s,t)\right|ds\,dt,$$

innen

$$\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy\le\frac{16C}{a_1a_2}\int_{a_1/4}^{4a_1}\int_{a_2/4}^{4a_2}\left|f(s,t)\right|ds\,dt.$$

Tehát a (4.7)–(4.9) feltételek teljesülnek a $16C$ és $\lambda=4$ konstansokkal. Tehát $f(x,y)\in MVBVF(\mathbb{R}^2_+)$, azaz $MVBVF(\mathbb{R}^2_+)\supseteq NBVF(\mathbb{R}^2_+)$.

Ezután megadunk egy olyan példafüggvényt, mely $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)\setminus\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$-beli. Legyen

$$G(x,y)=g(x)g(y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2_+,$$

ahol g a következő:

$$g(x)=\frac{1}{1+x}\sin\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln x\Big),\quad x\in\mathbb{R}_+.$$

Könnyen látható, hogy $g(x)$ folytonos, $g(x)\to 0$, ha $x\to\infty$, $xg(x)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$, továbbá

$$g'(x)=\frac{\pi}{\ln 2}\frac{1}{x(1+x)}\cos\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln x\Big)-\frac{1}{(1+x)^2}\sin\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln x\Big),$$

azaz $g(x)\in\mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$. $g(x)\notin\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}_+)$, mivel

$$g(2^k)=\frac{1}{1+2^k}\sin k\pi=0,\quad k\in\mathbb{Z},$$

viszont g'-nek nincs más pontban zérushelye, így

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}}|g'(x)|\,dx>0,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Ellenben bármely $a>0$ esetén

$$\begin{aligned}
\int_a^{2a}|g'(x)|\,dx &\le \frac{\pi}{\ln 2}\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{1+x}\Big|\cos\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln x\Big)\Big|\,dx+\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{1+x}\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln x\Big)\Big|\,dx\\
&=\frac{\pi}{\ln 2}\frac{1}{a}\int_a^{2a}\frac{1}{1+x}\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln x+\frac{\pi}{2}\Big)\Big|\,dx+\frac{1}{a}\int_a^{2a}|g(x)|\,dx\\
&=\frac{\pi}{\ln 2}\frac{1}{a}\int_{\sqrt{2}a}^{2\sqrt{2}a}\frac{1}{\sqrt{2}+t}\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{\ln 2}\ln t\Big)\Big|\,dt+\frac{1}{a}\int_a^{2a}|g(x)|\,dx \qquad \big(t:=\sqrt{2}x\big)\\
&\le\Big(\frac{\pi}{\ln 2}+1\Big)\frac{1}{a}\int_{a/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a}|g(x)|\,dx,
\end{aligned}$$

így a (3.4) feltétel fennáll a $C=\pi/\ln 2+1$, $\lambda=2\sqrt{2}$ és tetszőleges A konstans választásával, azaz $g\in\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$.

Világos, hogy $G(x,y)$ folytonos, $G(x,y)\to 0$, ha $x+y\to\infty$, $xyG(x,y)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}^2_+)$, továbbá

$$G_x(x,y)=g'(x)g(y),\quad G_y(x,y)=g(x)g'(y),\quad G_{xy}(x,y)=g'(x)g'(y),$$

azaz $G(x,y)\in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$. $G(x,y)\notin \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$, mivel

$$\int_{2^k}^{2^{k+1}} |G_x(x,y)|\,dx > 0 = |G(2^k,y)| + |G(2^{k+1},y)|, \quad y \neq 2^k, k\in\mathbb{Z},$$

azaz (4.4) nem teljesülhet (hasonlóan, a (4.5) és (4.6) feltételek sem teljesülhetnek). Ezzel szemben, bármely $a_1, y>0$ esetén

$$\int_{a_1}^{2a_1} |G_x(x,y)|\,dx = |g(y)|\int_{a_1}^{2a_1} |g'(x)|\,dx \le |g(y)|\left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)\frac{1}{a_1}\int_{a_1/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_1} |g(x)|\,dx$$
$$= \left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)\frac{1}{a_1}\int_{a_1/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_1} |G(x,y)|\,dx,$$

hasonlóan,

$$\int_{a_2}^{2a_2} |G_y(x,y)|\,dy \le \left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)\frac{1}{a_2}\int_{a_2/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_2} |G(x,y)|\,dy, \quad x, a_2>0.$$

Valamint tetszőleges $a_1, a_2>0$-ra

$$\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2} |G_{xy}(x,y)|\,dx\,dy = \int_{a_1}^{2a_1} |g'(x)|\,dx\cdot\int_{a_2}^{2a_2} |g'(y)|\,dy$$
$$\le \left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)\frac{1}{a_1}\int_{a_1/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_1} |g(x)|\,dx\cdot\left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)\frac{1}{a_2}\int_{a_2/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_2} |g(y)|\,dy$$
$$= \left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)^2\frac{1}{a_1a_2}\int_{a_1/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_1}\int_{a_2/(2\sqrt{2})}^{2\sqrt{2}a_2} |G(x,y)|\,dx\,dy.$$

Tehát a (4.7)–(4.9) feltételek teljesülnek a $C=\left(\frac{\pi}{\ln 2}+1\right)^2$ és $\lambda = 2\sqrt{2}$ konstansokkal, azaz $G\in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$. Ezzel igazoltuk, hogy $G\in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)\setminus \mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$. ■

A 4.2.2. Tétel bizonyítása. Legyen $f\in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ a C, λ konstansokkal, valamint tegyük fel, hogy (4.3) fennáll.

(i) rész: Tegyük fel, hogy (4.10) teljesül. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges, rögzített. Ekkor (4.10) szerint létezik $x_1>0$ küszöbszám, melyre (4.14) fennáll. Továbbá, a 4.3.2. Lemma szerint létezik olyan $x_2>0$, melyre

$$a_1 y\int_{a_1}^{\infty} \left|f_x(x,y)\right|\,dx \le \varepsilon, \quad \text{ha} \quad a_1+y>x_2, \quad a_1, y>0, \tag{4.16}$$

$$x a_2 \int_{a_2}^{\infty} \left| f_y(x,y) \right| dy \le \varepsilon, \quad \text{ha} \quad x + a_2 > x_2, \quad x, a_2 > 0, \tag{4.17}$$

$$a_1 a_2 \int_{a_1}^{\infty} \int_{a_2}^{\infty} \left| f_{xy}(x,y) \right| dx\, dy \le \varepsilon, \quad \text{ha} \quad a_1 + a_2 > x_2, \quad a_1, a_2 > 0. \tag{4.18}$$

Ezután rögzítsük az x_0 küszöbszámot a következőképpen: $x_0 := \max\{x_1, x_2\}$.

A következőkben az

$$I_f(a_1, b_1; a_2, b_2; u, v) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y) \sin ux \sin vy \, dx\, dy$$

kettős integrálok abszolút értékét fogjuk becsülni, ahol $a_1 + a_2 > x_0$, $b_1 > a_1 \ge 0$, $b_2 > a_2 \ge 0$ és $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$ tetszőleges. Négy alapesetet különböztetünk meg, az a_1, b_1 és az $1/u$ ill. az a_2, b_2 és az $1/v$ viszonya alapján. Minden alapesetben és későbbi esetben feltételezzük, hogy $a_1 + a_2 > x_0$ és $b_1 > a_1 \ge 0$, $b_2 > a_2 \ge 0$.

(a) eset: $a_1 < b_1 \le 1/u$ és $a_2 < b_2 \le 1/v$. Figyelembe véve, hogy

$$0 \le \sin ux \le ux, \text{ ha } 0 < x \le 1/u \quad \text{és} \quad 0 \le \sin vy \le vy, \text{ ha } 0 < y \le 1/v,$$

valamint (4.14)-et alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left| I_f(a_1, b_1; a_2, b_2; u, v) \right| &\le \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \left| f(x,y) \right| ux\, vy \, dx\, dy \le \frac{1}{b_1 b_2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} xy \left| f(x,y) \right| dx\, dy \\ &\le \frac{1}{b_1 b_2} \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \varepsilon \, dx\, dy \le \varepsilon. \end{aligned}$$

(b) eset: $1/u \le a_1 < b_1$ és $a_2 < b_2 \le 1/v$. Először Fubini tételét, majd a $0 \le \sin vy \le vy$ $(0 < y \le 1/v)$ egyenlőtlenséget felhasználva, egy parciális integrálást végrehajtva, végül a (4.14) és (4.16) egyenlőtlenségeket alkalmazva adódik, hogy

$$\begin{aligned} \left| I_f(a_1, b_1; a_2, b_2; u, v) \right| &= \left| \int_{a_2}^{b_2} \sin vy \cdot \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y) \sin ux \, dx \right) dy \right| \\ &\le \int_{a_2}^{b_2} vy \left| \int_{a_1}^{b_1} f(x,y) \sin ux \, dx \right| dy \\ &\le \frac{1}{1/v} \int_{a_2}^{b_2} y \left| \left[-f(x,y) \frac{\cos ux}{u} \right]_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y) \frac{\cos ux}{u} \, dx \right| dy \\ &\le \frac{1}{1/v} \int_{a_2}^{b_2} \left(a_1 y \left| f(a_1, y) \right| + b_1 y \left| f(b_1, y) \right| + a_1 y \int_{a_1}^{\infty} \left| f_x(x,y) \right| dx \right) dy \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{b_2} \int_{a_2}^{b_2} 3\varepsilon \, dy \leq 3\varepsilon.$$

(c) eset: $a_1 < b_1 \leq 1/u$ és $1/v \leq a_2 < b_2$. Ez a (b) eset szimmetrikus párja, analóg módon igazolható, hogy ekkor is

$$\left| I_f(a_1, b_1; a_2, b_2; u, v) \right| \leq 3\varepsilon.$$

(d) eset: $1/u \leq a_1 < b_1$ és $1/v \leq a_2 < b_2$. Ismét a Fubini-tételt alkalmazzuk, kétszer parciálisan integrálunk (először x szerint, majd y szerint), végül a (4.14) és a (4.16)–(4.18) egyenlőtlenségeket alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}
\left| I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v) \right| &= \left| \int_{a_2}^{b_2} \sin vy \cdot \left(\left[-f(x,y) \frac{\cos ux}{u} \right]_{a_1}^{b_1} + \int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y) \frac{\cos ux}{u} \, dx \right) dy \right| \\
&= \Bigg| \left[\frac{\cos vy}{v} \left(\left[f(x,y) \frac{\cos ux}{u} \right]_{a_1}^{b_1} - \int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y) \frac{\cos ux}{u} \, dx \right) \right]_{a_2}^{b_2} \\
&\quad - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\cos vy}{v} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[f(x,y) \frac{\cos ux}{u} \right]_{a_1}^{b_1} - \int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y) \frac{\cos ux}{u} \, dx \right) dy \Bigg| \\
&= \Bigg| \left[\frac{\cos vy}{v} \left[f(x,y) \frac{\cos ux}{u} \right]_{a_1}^{b_1} \right]_{a_2}^{b_2} - \left[\frac{\cos vy}{v} \int_{a_1}^{b_1} f_x(x,y) \frac{\cos ux}{u} \, dx \right]_{a_2}^{b_2} \\
&\quad - \int_{a_2}^{b_2} \frac{\cos vy}{v} \left[f_y(x,y) \frac{\cos ux}{u} \right]_{a_1}^{b_1} dy \\
&\quad + \int_{a_2}^{b_2} \frac{\cos vy}{v} \left(\int_{a_1}^{b_1} f_{xy}(x,y) \frac{\cos ux}{u} \, dx \right) dy \Bigg| \\
&\leq b_1 b_2 \left| f(b_1,b_2) \right| + a_1 b_2 \left| f(a_1,b_2) \right| + b_1 a_2 \left| f(b_1,a_2) \right| + a_1 a_2 \left| f(a_1,a_2) \right| \\
&\quad + a_1 b_2 \int_{a_1}^{\infty} \left| f_x(x,b_2) \right| dx + a_1 a_2 \int_{a_1}^{\infty} \left| f_x(x,a_2) \right| dx \\
&\quad + b_1 a_2 \int_{a_2}^{\infty} \left| f_y(b_1,y) \right| dy + a_1 a_2 \int_{a_2}^{\infty} \left| f_y(a_1,y) \right| dy \\
&\quad + a_1 a_2 \int_{a_1}^{\infty} \int_{a_2}^{\infty} \left| f_{xy}(x,y) \right| dx \, dy \\
&\leq 9\varepsilon.
\end{aligned}$$

Az alapesetekben kapott becslések alapján belátjuk, hogy tetszőleges (u, v) esetén

$$\left| I_f(a_1, b_1; a_2, b_2; u, v) \right| \leq 16\varepsilon, \quad a_1 + a_2 > x_0 \ (b_1 > a_1 \geq 0, b_2 > a_2 \geq 0). \tag{4.19}$$

Legyen (u,v) tetszőleges, rögzített számpár. A 2.2.2. Tétel bizonyításához hasonlóan itt is kilenc esetet kell tárgyalnunk.

1. eset: $a_1 < b_1 \le 1/u$ és $a_2 < b_2 \le 1/v$. Ez megegyezik (a) alapesettel, ekkor $\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le \varepsilon$.

2. eset: $1/u \le a_1 < b_1$ és $a_2 < b_2 \le 1/v$. Ezt az esetet vizsgáltuk (b)-ben. Tehát $\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le 3\varepsilon$.

3. eset: $a_1 < 1/u < b_1$ és $a_2 < b_2 \le 1/v$. Ekkor az (a) és (b) alapesetekbeli becsléseket felhasználva kapjuk, hogy

$$\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le \left|I_f(a_1,1/u;a_2,b_2;u,v)\right| + \left|I_f(1/u,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le 4\varepsilon.$$

4. eset: $a_1 < b_1 \le 1/u$ és $1/v \le a_2 < b_2$. Ezt az esetet tárgyaltuk (c)-ben. Ekkor $\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le 3\varepsilon$.

5. eset: $1/u \le a_1 < b_1$ és $1/v \le a_2 < b_2$. Ez megegyezik (d) alapesettel, tehát $\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le 9\varepsilon$.

6. eset: $a_1 < 1/u < b_1$ és $1/v \le a_2 \le b_2$. A (c) és (d) alapesetekbeli becsléseket felhasználva kapjuk, hogy

$$\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le \left|I_f(a_1,1/u;a_2,b_2;u,v)\right| + \left|I_f(1/u,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le 12\varepsilon.$$

7. eset: $a_1 < b_1 \le 1/u$ és $a_2 < 1/v < b_2$. Az (a) és (c) alapesetek figyelembe vételével

$$\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le \left|I_f(a_1,b_1;a_2,1/v;u,v)\right| + \left|I_f(a_1,b_1;1/v,b_2;u,v)\right| \le 4\varepsilon.$$

8. eset: $1/u \le a_1 < b_1$ és $a_2 < 1/v < b_2$. Az (b) és (d) alapeseteket felhasználva adódik, hogy

$$\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| \le \left|I_f(a_1,b_1;a_2,1/v;u,v)\right| + \left|I_f(a_1,b_1;1/v,b_2;u,v)\right| \le 12\varepsilon.$$

9. eset: $a_1 < 1/u < b_1$ és $a_2 < 1/v < b_2$. Az (a)–(d) alapeseteket összegezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|I_f(a_1,b_1;a_2,b_2;u,v)\right| &\le \left|I_f(a_1,1/u;a_2,1/v;u,v)\right| + \left|I_f(1/u,b_1;a_1,1/v;u,v)\right| \\ &\quad + \left|I_f(a_1,1/u;1/v,b_2;u,v)\right| + \left|I_f(1/u,b_1;1/v,b_2;u,v)\right| \le 16\varepsilon.\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk (4.19)-et, ami azt jelenti, hogy (4.1) reguláris konvergenciája egyenletes (u,v)-ben, azaz az (i) rész bizonyítást nyert.

(ii) rész: Tegyük fel, hogy $f:\mathbb{R}_+^2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és (4.1) reguláris konvergenciája egyenletes (u,v)-ben. Legyen $a_1,a_2>0$ tetszőleges,

$$u(a_1) := \frac{\pi}{2\lambda a_1} \qquad \text{és} \qquad v(a_2) := \frac{\pi}{2\lambda a_2}.$$

Ekkor

$$\sin\big(u(a_1)x\big) \ge \sin\frac{\pi}{2\lambda^2}, \quad \text{ha} \quad a_1/\lambda \le x \le \lambda a_1$$

és

$$\sin\big(v(a_2)y\big) \ge \sin\frac{\pi}{2\lambda^2}, \quad \text{ha} \quad a_2/\lambda \le y \le \lambda a_2.$$

Kihasználva a 4.3.3. Lemmabeli (4.15)-öt, valamint f nemnegatív voltát, adódik

$$\begin{aligned}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\sin\big(u(a_1)x\big)\sin\big(v(a_2)y\big)\,dx\,dy &\ge \Big(\sin\frac{\pi}{2\lambda^2}\Big)^2\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\,dx\,dy\\ &\ge \Big(\sin\frac{\pi}{2\lambda^2}\Big)^2\frac{1}{(3C+1)}\,a_1a_2 f(a_1,a_2),\end{aligned}$$

ahol a bal oldal 0-hoz tart, ha $a_1 + a_2 \to \infty$, mivel (4.1) reguláris konvergenciája egyenletes (u, v)-ben. Így a jobb oldal is 0-hoz tart, azaz

$$a_1a_2 f(a_1,a_2) \to 0, \quad \text{ha} \quad a_1 + a_2 \to \infty,$$

ezzel (4.10)-et igazoltuk. ■

Irodalomjegyzék

[1] T. W. CHAUNDY és A. E. JOLLIFFE, The uniform convergence of a certain class of trigonometric series, *Proc. London Math. Soc.*, **15** (1916), 214-216.

[2] M. DYACHENKO, E. LIFLYAND és S. TIKHONOV, Uniform convergence and integrability of Fourier integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **372** (2010), 328-338.

[3] M. DYACHENKO és S. TIKHONOV, Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria, *Studia Math.*, **193** (2009), 285-306.

[4] P. KÓRUS, Remarks on the uniform and L^1-convergence of trigonometric series, *Acta Math. Hungar.*, **128 (4)** (2010), 369-380.

[5] P. KÓRUS, On the uniform convergence of special sine integrals, *Acta Math. Hungar.*, **133 (1)** (2011), 82-91.

[6] P. KÓRUS, On the uniform convergence of double sine series with generalized monotone coefficients, *Periodica Math. Hungar.*, **63 (2)** (2011), 205-214.

[7] P. KÓRUS és F. MÓRICZ, On the uniform convergence of double sine series, *Studia Math.*, **193** (2009), 79-97.

[8] P. KÓRUS és F. MÓRICZ, Generalizations to monotonicity for uniform convergence of double sine integrals over $\overline{\mathbb{R}}^2_+$, *Studia Math.*, **201** (2010), 287-304.

[9] F. MÓRICZ, Some remarks on the notion of regular convergence of multiple series, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **41** (1983), 161-168.

[10] F. MÓRICZ, On the uniform convergence of sine integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **354** (2009), 213-219.

[11] F. MÓRICZ, On the uniform convergence of double sine integrals over $\overline{\mathbb{R}}^2_+$, *Analysis (München)*, **31** (2011), 191-204.

[12] R. E. A. C. PALEY, On Fourier series with positive coefficients, *J. London Math. Soc.*, **7** (1932), 205-208.

[13] S. TIKHONOV, On L_1-convergence of Fourier series, *J. Math. Anal. Appl.*, **347** (2008), 416-427.

[14] I. E. ŽAK és A. A. ŠNEIDER, Conditions for uniform convergence of double sine series (orosz), *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat.*, **4** (1966), 44-52.

[15] D. S. YU és S. P. ZHOU, A generalization of monotonicity condition and applications, *Acta Math. Hungar.*, **115** (2007), 247-267.

[16] S. P. ZHOU, P. ZHOU és D. S. YU, Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series,
online: http://arxiv.org/abs/math/0611805v1.

[17] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, Vol. I, Cambridge University Press, 1959.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretném megköszönni témavezetőmnek, Dr. Móricz Ferencnek az elmúlt években adott tanácsait, útmutatásait. Publikációs téren nyújtott segítsége nagy mértékben segítette munkámat, mely nélkül nem születhettek volna meg publikációs eredményeim és ezen dolgozat. Emellett köszönöm az SZTE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájának támogatását.

Összefoglalás

A disszertációban a szinuszsorok, kettős szinuszsorok, szinuszintegrálok és kettős szinuszintegrálok egyenletes konvergenciáját vizsgáljuk. A négy témakört a négy fejezetben külön-külön tárgyaljuk, azonban a kettős sorokra ill. integrálokra kapott eredmények esetében kihasználjuk az egyszeres sorokra ill. integrálokra bebizonyított állítások érvényességét. Az kétváltozós eredmények nem triviális kiterjesztései az egy változóban kapott eredményeknek, bár a bizonyítások között analógia felfedezhető, két változó esetén a konvergencia fogalma összetettebb, mint a jól ismert egyváltozós konvergencia fogalom, valamint a bevezetésre kerülő kétváltozós sorozat ill. függvényosztályok definiálása is több meggondolást igényel az egyváltozós esethez képest.

A dolgozat a szerző [4], [5], [6], [7], [8] cikkeiben elért eredményein alapul.

Szinuszsorok

Ebben a részben a

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \tag{1.1}$$

szinuszsorok egyenletes konvergenciájára bebizonyított állításokat foglaljuk össze. A $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ együtthatókról azt feltételezzük, hogy általánosított monoton sorozat elemei. Kutatásunk célja az MVBVS sorozatosztály megfelelő kibővítése volt, ahol MVBVS osztályt S. P. Zhou, P. Zhou és D. S. Yu [16]-ban definiálta: $\{c_k\} \in$ MVBVS (*Mean Value Bounded Variation Sequences*), ha léteznek $C, \lambda \geq 2$ konstansok, melyek teljesítik a

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k|$$

feltételt. MVBVS tartalmazza a nemnegatív, monoton nemnövő sorozatokat és az addig használt általánosított monoton sorozatosztályokat is.

Definíció. A $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatot *Supremum Bounded Variation Sequence*-nek nevezzük, jelben $\{c_k\} \in$ SBVS, ha léteznek olyan C és $\lambda \geq 1$ konstans számok, melyek csak $\{c_k\}$-tól függnek, és

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le \frac{C}{n} \sup_{m\ge[n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|$$

fennáll minden $n \ge 1$ esetén.

Definíció. A $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatot *Supremum Bounded Variation Sequence of 2nd type*-nak nevezzük, jelben $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$, ha létezik olyan C konstans és végtelenbe tartó $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ = [0,\infty)$ sorozat, melyek csak $\{c_k\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \le \frac{C}{n} \sup_{m\ge b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.$$

1.2.1. Tétel. $\mathrm{SBVS}_2 \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{SBVS} \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{MVBVS}$.

1.2.2. Tétel. *Legyen* $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* SBVS_2*-beli.*
(i) *Ha*

$$kc_k \to 0, \quad ha \quad k \to \infty, \tag{1.2}$$

akkor (1.1) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1.1) *konvergenciája egyenletes* x*-ben, akkor* (1.2) *fennáll.*

1.2.3. Következmény. *Ha a* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SBVS_2*-beli, akkor* (1.2) *szükséges és elegendő feltétel az* (1.1) *sor* x*-ben vett egyenletes konvergenciájához.*

1.2.4. Állítás. *Bármely olyan* SBVS_2*-beli sorozatra, mely nem* SBVS*-beli,* (1.2) *fennáll. Azaz az ilyen együtthatójú szinuszsorok egyenletesen konvergensek.*

Ezen részben vizsgáltuk még a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r c_k \sin kx \tag{1.9}$$

alakú szinuszsort is, mely pozitív páros r esetén (1.1) r-szeres formális deriváltja, negatív páros r esetén (1.1) r-szeres formális integrálja.

1.4.1. Tétel. *Ha* $\{c_k\}$ *sorozat* MVBVS*-beli, akkor* $\{d_k = k^r c_k\}$ *szintén* MVBVS*-beli tetszőleges rögzített* r *egész szám esetén.*

1.4.2. Következmény. *Legyen* $\{c_k\} \in \mathrm{MVBVS}$ *és* r *páros szám.*
(i) *Ha* $k^{r+1} c_k \to 0$*, akkor* (1.9) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1.9) *egyenletesen konvergens* x*-ben, akkor* $k^{r+1} c_k \to 0$.

1.4.3. Tétel. *Ha* $\{c_k\}$ *sorozat* SBVS*-beli, akkor* $\{d_k = k^r c_k\}$ *szintén* SBVS*-beli tetszőleges rögzített* r *pozitív egész szám esetén.*

1.4.4. Következmény. *Ha* $\{c_k\} \in$ SBVS *és* r *pozitív páros szám, akkor* az 1.4.2. *Következmény* (i) *és* (ii) *állításai fennállnak.*

Kettős szinuszsorok

Legyen $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, és tekintsük a

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \sin jx \sin ky \tag{2.1}$$

kettős szinuszsort. Ezen kettős sor egyenletes, reguláris konvergenciája adunk elegendő, illetve szükséges feltételeket. Az együtthatókról ekkor is feltételezzük, hogy általánosított monoton sorozat elemei.

Definíció. A $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozatot MVBVDS-belinek (*Mean Value Bounded Variation Double Sequences*) nevezzük, ha léteznek C és $\lambda \geq 2$ konstans számok, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\begin{aligned}
\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| &\leq \frac{C}{m} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda,\ n \geq 1,\\
\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| &\leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{mk}|, \quad m \geq 1,\ n \geq \lambda,\\
\sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| &\leq \frac{C}{mn} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{jk}|, \quad m, n \geq \lambda.
\end{aligned}$$

2.2.2. Tétel. *Legyen* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *kettős sorozat* MVBVDS*-beli.*
(i) *Ha*

$$jkc_{jk} \to 0, \quad \textit{ha} \quad j + k \to \infty, \tag{2.2}$$

akkor (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban, akkor* (2.2) *fennáll.*

Ezen kívül megmutattuk, hogy az MVBVDS osztály tartalmazza NBVDS-t, amely osztály pedig tartalmazza a nemnegatív, monoton nemnövő kettős sorozatokat. Később MVBVDS-t tovább általánosítottuk, mely által megkaptuk a 2.2.2. Tétel kiterjesztését.

Definíció. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozat SBVDS$_1$-beli (*Supremum Bounded Variation Double Sequences of 1st type*), ha léteznek olyan C és $\lambda \ge 2$ konstansok illetve $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty}$ végtelenbe tartó sorozatok, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \le \frac{C}{m} \max_{b_1(m) \le M \le \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \ge \lambda,\, n \ge 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \le \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \le N \le \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \ge 1,\, n \ge \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \le \frac{C}{mn} \sup_{M+N \ge b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \ge \lambda.$$

Definíció. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozat SBVDS$_2$-beli (*Supremum Bounded Variation Double Sequences of 2nd type*), ha léteznek olyan C, $\lambda \ge 2$ konstansok és $\{b(l)\}_{l=1}^{\infty}$ végtelenbe tartó sorozat, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \le \frac{C}{m} \sup_{M \ge b(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \ge \lambda,\, n \ge 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \le \frac{C}{n} \sup_{N \ge b(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \ge 1,\, n \ge \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \le \frac{C}{mn} \sup_{M+N \ge b(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \ge \lambda.$$

2.5.1. Tétel. SBVDS$_2 \supsetneqq$ SBVDS$_1 \supsetneqq$ MVBVDS.

2.5.2. Tétel. (i) *Ha a* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* SBVDS$_2$*-beli, valamint* (2.2) *teljesül, akkor* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban.*
(ii) *Megfordítva, ha a* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SVBVDS$_1$*-beli és* (2.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban, akkor* (2.2) *fennáll.*

Szinuszintegrálok

Ebben a részben az

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin tx \, dx \tag{3.1}$$

szinuszintegrálok t-ben vett egyenletes konvergenciáját vizsgáltuk, ahol $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$, valamint

$$x f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+). \tag{3.2}$$

Kibővítettük a [10]-ben definiált – az $\mathbb{R}_+$-on értelmezett, nemnegatív, lokálisan abszolút folytonos, monoton nemcsökkenő függvények osztályánál bővebb – $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ osztályt, aminek segítségével általánosítottuk az ottani eredményeket.

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvényt $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-belinek (*Supremum Bounded Variation Function*-nek) nevezzük, ha léteznek a C, $A > 0$ és $\lambda \geq 2$ konstansok, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A.$$

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvény $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$-beli (*Supremum Bounded Variation Function of 2nd type*), ha léteznek a C, $A > 0$ konstansok és a $B(x) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ végtelenbe tartó függvény, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq B(a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A.$$

3.2.1. Tétel. *Ha* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$, *akkor* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *A fordított irányú állítás nem igaz, azaz létezik olyan* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, *mely nem* $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$*-beli. Röviden,* $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+) \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$.

3.2.2. Tétel. $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+) \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Továbbá, ha* $f(x) \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, *akkor*

$$x f(x) \to 0, \quad \text{ha} \quad x \to \infty. \tag{3.3}$$

3.2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ *és* (3.2) *fennáll.*

(i) *Ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *és* (3.3) *teljesül, akkor a* (3.1) *integrál egyenletesen konvergens* t*-ben.*

(ii) *Megfordítva, ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (3.1) *konvergenciája egyenletes* t*-ben, akkor* (3.3) *fennáll.*

Végül jellemeztük az

$$\int_0^\infty x^r f(x) \sin tx \, dx \tag{3.10}$$

szinuszintegrál egyenletes konvergenciáját, mely pozitív páros r esetén (3.1) r-szeres formális deriváltja, negatív páros r esetén (3.1) r-szeres formális integrálja.

3.4.1. Tétel. *Legyen* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Ekkor tetszőleges rögzített* r *egész szám esetén* $g_r(x) = x^r f(x)$ *szintén* $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$*-beli.*

3.4.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$, (3.2) *fennáll és* r *pozitív páros szám.*

(i) *Ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *és* $x^{r+1} f(x) \to 0$*, ha* $x \to \infty$*, akkor a* (3.10) *szinuszintegrál egyenletesen konvergens* t*-ben.*

(ii) *Megfordítva, ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *és a* (3.10) *integrál konvergenciája egyenletes* t*-ben, akkor* $x^{r+1} f(x) \to 0$*, ha* $x \to \infty$.

Az iménti állítások igazak maradnak akkor is, ha r *negatív páros szám és* $x^{r+1} f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3.4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Ekkor tetszőleges rögzített* r *pozitív egész szám esetén* $g_r(x) = x^r f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$.

3.4.4. Következmény. *Ha* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, (3.2) *fennáll és* r *pozitív páros szám, akkor* a 3.4.2. *Következmény* (i) *és* (ii) *állításai fennállnak.*

Kettős szinuszintegrálok

Tekintsük az

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) \sin ux \sin vy \, dx\, dy, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \tag{4.1}$$

alakú kettős szinuszintegrálokat, ahol $f(x,y) : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény. Az f kétváltozós függvényről feltesszük, hogy lokálisan abszolút folytonos és

$$xyf(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}^2_+). \tag{4.3}$$

Definíció. Az $f(x,y) \in \mathrm{AC_{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$ függvényt $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$-belinek nevezzük, ha léteznek olyan, csak f-től függő, C és $\lambda \ge 2$ konstansok, amelyekre

$$\int_{a_1}^{2a_1} \left|f_x(x,y)\right| dx \le \frac{C}{a_1} \int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} \left|f(x,y)\right| dx, \quad a_1, y > 0,$$

$$\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_y(x,y)\right| dy \le \frac{C}{a_2} \int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} \left|f(x,y)\right| dy, \quad x, a_2 > 0,$$

$$\int_{a_1}^{2a_1} \int_{a_2}^{2a_2} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\, dy \le \frac{C}{a_1 a_2} \int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} \int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} \left|f(x,y)\right| dx\, dy, \quad a_1, a_2 > 0.$$

4.2.2. Tétel. *Legyen* $f \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ *olyan függvény, amelyre* (4.3) *fennáll.*
(i) *Ha* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ *és*

$$xyf(x,y) \to 0, \quad ha \quad x+y\to\infty, \tag{4.10}$$

akkor a (4.1) *integrál reguláris konvergenciája egyenletes* $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *és a* (4.1) *reguláris konvergenciája egyenletes* $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$*-ben, akkor* (4.10) *fennáll.*

Továbbá megmutattuk, hogy $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ osztály tartalmazza az $\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ osztályt, amely osztály pedig bővebb az $\mathbb{R}^2_+$-en értelmezett, nemnegatív, lokálisan abszolút folytonos, monoton nemcsökkenő függvények osztályánál.

4.2.4. Következmény. *Ha* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *monoton nemnövő és* $f \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, *akkor* (4.10) *szükséges és elegendő feltétele annak, hogy* (4.1) *egyenletesen konvergens legyen* (u,v)*-ben.*

Summary

Our research deals with the uniform convergence of sine series, double sine series, sine integrals and double sine integrals. The four topics are discussed in four single chapters, however, in case of double series and integrals, we use the known results for single series and integrals. Although there are some analogies between the one and two-variable cases, the two-variable cases are nontrivial extensions of the one-variable ones, since the notion of convergence in two variables are more complicated than the well-known convergence notion in one variable. Moreover, the definitions of general monotone classes of double series and two-variable functions are not as obvious as the ones of single series and one-variable functions.

The dissertation is based on papers [4], [5], [6], [7], [8] of the author.

Sine series

In this section we summarize our results for the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx. \tag{1.1}$$

We suppose that coefficients $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ are from a general monotone class of sequences. The main goal of our research was to expand class MVBVS appropriately where the notion of MVBVS was introduced by S. P. Zhou, P. Zhou and D. S. Yu in [16]: $\{c_k\} \in$ MVBVS (*Mean Value Bounded Variation Sequences*) if there exist constants C and $\lambda \geq 2$ for which

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k|$$

is satisfied. MVBVS contains the monotone nonincreasing sequences and the previously used general monotone classes.

Definition. A sequence $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ is said to be a *Supremum Bounded Variation Sequence*, shortly $\{c_k\} \in$ SBVS, if there exist constant C and $\lambda \geq 1$ depending only on $\{c_k\}$ such that

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq [n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|$$

holds for every $n \geq 1$.

Definition. We say that $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sequence is a *Supremum Bounded Variation Sequence of 2nd type*, shortly $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$, if there exist constant C and $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$ converging to infinity depending only on $\{c_k\}$ such that

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.$$

Theorem 1.2.1. $\mathrm{SBVS}_2 \supsetneqq \mathrm{SBVS} \supsetneqq \mathrm{MVBVS}$.

Theorem 1.2.2. *Let* $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ *belong to class* SBVS_2.

(i) *If*

$$kc_k \to 0 \quad as \quad k \to \infty, \tag{1.2}$$

then (1.1) *converges uniformly in* x.

(ii) *Conversely, if* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *and* (1.1) *is uniformly convergent in* x, *then* (1.2) *holds.*

Corollary 1.2.3. *If* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *belongs to* SBVS_2, *then* (1.2) *is a necessary and sufficient condition for the uniform convergence of* (1.1) *in* x.

Remark 1.2.4. *For any sequence from* SBVS_2 *which is not in* SBVS, (1.2) *is satisfied. Hence sine series with coefficients from* $\mathrm{SBVS}_2 \setminus \mathrm{SBVS}$ *are uniformly convergent.*

In this section we also studied series of the form

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r c_k \sin kx, \tag{1.9}$$

which is the formally differentiated series of (1.1) for positive even integer r and is the formally integrated series of (1.1) for negative even integer r.

Theorem 1.4.1. *If* $\{c_k\}$ *belongs to class* MVBVS, *then the sequence* $\{d_k = k^r c_k\}$ *also belongs to* MVBVS *for any fixed integer* r.

Corollary 1.4.2. *Let* $\{c_k\} \in$ MVBVS *be a complex sequence and* r *a positive even integer.*

(i) *If* $k^{r+1} c_k \to 0$, *then* (1.9) *is uniformly convergent in* x.

(ii) *Conversely, if* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *and* (1.9) *is uniformly convergent in* x, *then* $k^{r+1} c_k \to 0$.

Theorem 1.4.3. *If* $\{c_k\}$ *belongs to* SBVS, *then* $\{d_k = k^r c_k\}$ *also belongs to* SBVS *for any fixed integer* r.

Corollary 1.4.4. *For* $\{c_k\} \in$ SBVS *and any positive even integer* r, *statements* (i) *and* (ii) *of Corollary* 1.4.2 *hold.*

Double sine series

Let $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ and consider the double sine series of the form

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \sin jx \sin ky. \tag{2.1}$$

We give necessary and sufficient conditions for the above series to be uniformly convergent in the regular mean. The coefficients of the series are supposed to be from a class of general monotone double sequences.

Definition. A double sequence $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ belongs to class MVBVDS (*Mean Value Bounded Variation Double Sequences*), if there exist C and $\lambda \geq 2$ constants, depending only on $\{c_{jk}\}$, for which

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda,\, n \geq 1,$$
$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{mk}|, \quad m \geq 1,\, n \geq \lambda,$$
$$\sum_{j=m}^{2m-1}\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]}\sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{jk}|, \quad m,n \geq \lambda.$$

Theorem 2.2.2. *Let* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *belong to* MVBVDS.
(i) *If*

$$jkc_{jk} \to 0 \quad as \quad j+k \to \infty, \tag{2.2}$$

then the regular convergence of (2.1) *is uniform in* (x,y).
(ii) *Conversely, if* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *and the regular convergence of* (2.1) *is uniform in* (x,y), *then* (2.2) *holds.*

Moreover, we proved that MVBVDS contains class NBVDS, which in turn contains the nonnegative, monotonically nonincreasing sequences. Later, we generalized further class MVBVDS and got the extension of Theorem 2.2.2.

Definition. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ is said to be a *Supremum Bounded Variation Double Sequence of 1st type*, in symbols: $\{c_{jk}\} \in \mathrm{SBVDS}_1$, if there exist constants C and integer $\lambda \geq 2$ and sequences $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty}$, each one converges to infinity, all of them depend only on $\{c_{jk}\}$, such that

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda,\, n \geq 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \le \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \le N \le \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \ge 1, n \ge \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \le \frac{C}{mn} \sup_{M+N \ge b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \ge \lambda.$$

Definition. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ is said to be a *Supremum Bounded Variation Double Sequence of 2nd type*, shortly $\{c_{jk}\} \in$ SBVDS$_2$, if there exist constants C and integer $\lambda \ge 1$ and $\{b(l)\}_{l=1}^{\infty}$ converging to infinity, depending only on $\{c_{jk}\}$, such that

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \le \frac{C}{m} \sup_{M \ge b(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \ge \lambda, n \ge 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \le \frac{C}{n} \sup_{N \ge b(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \ge 1, n \ge \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \le \frac{C}{mn} \sup_{M+N \ge b(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \ge \lambda.$$

Theorem 2.5.1. SBVDS$_2 \supsetneqq$ SBVDS$_1 \supsetneqq$ MVBVDS.

Theorem 2.5.2. (i) *If* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *belongs to* SBVDS$_2$ *and* (2.2) *is satisfied, then the regular convergence of* (2.1) *is uniform in* (x, y).
(ii) *Conversely, if* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *belongs to* SVBVDS$_1$ *and the regular convergence of* (2.1) *is uniform in* (x, y)*, then* (2.2) *holds.*

Sine integrals

In this section we study the uniform convergence of the sine integrals

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin tx \, dx \tag{3.1}$$

in t, where function $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ is Lebesgue measurable, $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, $t \in \mathbb{R}$ and

$$x f(x) \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+). \tag{3.2}$$

We expand class MVBVF($\mathbb{R}_+$) defined in [10], which class contains the nonnegative, nonincreasing, locally absolutely continuous functions defined on $\mathbb{R}_+$, hence we extend the results of the that paper.

Definition. A function $f(x) \in \mathrm{AC}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ is said to belong to class SBVF($\mathbb{R}_+$) (*Supremum Bounded Variation Functions*) if there exist constants C, $A > 0$ and $\lambda \ge 2$ which depend only on f and satisfy condition

$$\int_a^{2a} \left| f'(x) \right| dx \le \frac{C}{a} \sup_{b \ge a/\lambda} \int_b^{2b} \left| f(x) \right| dx, \quad a > A.$$

Definition. A function $f(x) \in \mathrm{AC_{loc}}(\mathbb{R}_+)$ is said to be in class $\mathrm{SBVF_2}(\mathbb{R}_+)$ (*Supremum Bounded Variation Functions of 2nd type*), if there exist constants $C, A > 0$ and function $B(x) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ tending to infinity, depending only on f, such that

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \le \frac{C}{a} \sup_{b \ge B(a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A.$$

Theorem 3.2.1. *If* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$, *then* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *The reverse implication is not true, in other words, there exists an* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$ *which is not in* $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Shortly,* $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+) \supsetneqq \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$.

Theorem 3.2.2. $\mathrm{SBVF_2}(\mathbb{R}_+) \supsetneqq \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Furthermore, if* $f(x) \in \mathrm{SBVF_2}(\mathbb{R}_+) \setminus \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, *then*

$$x f(x) \to 0, \quad ha \quad x \to \infty. \tag{3.3}$$

Theorem 3.2.3. *Suppose that* $f(x) \in \mathrm{SBVF_2}(\mathbb{R}_+)$ *and* (3.2) *is satisfied.*
(i) *If* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *and* (3.3) *holds, then integral* (3.1) *converges uniformly in* t.
(ii) *Conversely, if* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *and* (3.1) *converges uniformly in* t, *then* (3.3) *holds.*

Finally we described the uniform convergence of the sine integrals

$$\int_0^\infty x^r f(x) \sin tx \, dx \tag{3.10}$$

which are the formally differentiated integrals of (3.1) for positive even integer r and are the formally integrated integrals of (3.1) for negative even integer r.

Theorem 3.4.1. *Suppose that* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Then* $g_r(x) = x^r f(x)$ *also belongs to* $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ *for any fixed integer* r.

Corollary 3.4.2. *Assume that* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$ *with property* (3.2) *and* r *is a positive even integer.*
(i) *If* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *and* $x^{r+1} f(x) \to 0$ *as* $x \to \infty$, *then the sine integral* (3.10) *converges uniformly in* t.
(ii) *Conversely, if* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *and* (3.10) *converges uniformly in* t, *then* $x^{r+1} f(x) \to 0$ *as* $x \to \infty$.
For any negative even integer r *the above statements remain true if* $x^{r+1} f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

Theorem 3.4.3. *Suppose that* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Then* $g_r(x) = x^r f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$ *for any fixed positive integer* r.

Corollary 3.4.4. *If we assume* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$ *with property* (3.2) *and* r *is an even positive integer, then statements* (i) *and* (ii) *of Corollary 3.4.2 hold.*

Double sine integrals

Consider the double sine integrals of the form

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,y) \sin ux \sin vy \, dx\, dy, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.1}$$

where $f(x,y): \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ is a Lebesgue measurable function. We suppose that the two-variable function f is locally absolutely continuous, general monotone and

$$xyf(x,y) \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}^2_+). \tag{4.3}$$

Definition. A function $f(x,y) \in \text{AC}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$ is said to be in class $\text{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$, if there exist constants C and $\lambda \geq 2$ depending only on f, such that

$$\int_{a_1}^{2a_1} \left|f_x(x,y)\right| dx \leq \frac{C}{a_1} \int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} \left|f(x,y)\right| dx, \quad a_1, y > 0,$$

$$\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_y(x,y)\right| dy \leq \frac{C}{a_2} \int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} \left|f(x,y)\right| dy, \quad x, a_2 > 0,$$

$$\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\, dy \leq \frac{C}{a_1 a_2} \int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} \left|f(x,y)\right| dx\, dy, \quad a_1, a_2 > 0.$$

Theorem 4.2.2. *Suppose that* $f \in \text{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ *with property* (4.3).
(i) *If* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$ *and*

$$xyf(x,y) \to 0 \quad as \quad x + y \to \infty, \tag{4.10}$$

then the regular convergence of (4.1) *is uniform in* $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$.
(ii) *Conversely, if* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *and the regular convergence of* (4.1) *is uniform in* (u,v), *then* (4.10) *holds.*

Furthermore, we proved that $\text{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ contains class $\text{NBVF}(\mathbb{R}^2_+)$, which is larger than the class of nonnegative, nonincreasing, locally absolutely continuous functions defined on $\mathbb{R}^2_+$.

Corollary 4.2.4. *If* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *is monotonically nonincreasing and* $f \in \text{AC}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2_+)$, *then* (4.10) *is necessary and sufficient for the regular convergence of* (4.1) *to be uniform in* (u,v).