

PH.D. ÉRTEKEZÉS

Gömbszimmetrikus, sztatikus megoldások a
 k -eszencia elméletben és minimálisan csatolt
skalármező folyadékleírása a téridőfelbontások
nemmerőleges $2+1+1$ formalizmusában

Szerző: *Nagy Cecília*
okleveles fizikus

Témavezető: *Dr. Keresztes Zoltán*
egyetemi docens
SZTE Elméleti Fizikai Tanszék

FIZIKA DOKTORI ISKOLA
ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉK
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM TTIK

2026

SZEGED

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	8
1.1. Sötét anyag	9
1.2. Sötét energia	19
1.3. Módosított gravitációelméletek	26
1.3.1. Fekete lyukak	33
1.3.2. Energia-impulzus tenzor alakjai és energiafeltételek	38
1.4. Téridőfelbontások	44
1.4.1. Kovariáns formalizmus	44
1.4.2. ADM formalizmus	56
1.4.3. A disszertáció saját eredményeit bemutató fejezetek rövid összefoglalása	66
2. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontás	68
2.1. Egyértelmű mértékrögzítés	77
2.2. Az általános relativitáselmélet hamiltoni formalizmusa	82
2.3. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ téridőfelbontás és az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus	90
2.4. Összefoglalás	99
3. Gömbszimmetrikus, sztatikus megoldások nem minimálisan csatolt k-eszencia elméletben	101
3.1. A Horndeski hatás nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontása a (k^a, l^a) bázisban	101
3.2. A Horndeski hatás nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontása az (n^a, m^a) bázisban	105
3.3. Az EFT hatás első rendű variációja, a mezőegyenletek	109
3.3.1. Az EFT hatás változói a gömbszimmetrikus és sztatikus háttéren	109
3.3.2. Az EFT hatás elsőrendű variációja	110
3.3.3. Az EFT mezőegyenletek	111
3.3.4. Az EFT mezőegyenletek az (n^a, m^a) bázisban	116
3.4. Fekete lyukak és csupasz szingularitások	118
3.4.1. A Schwarzschild határeset	118
3.4.2. A mezőegyenletek nem minimálisan csatolt k -eszencia elméletben	119
3.4.3. Egzakt megoldások nem minimálisan csatolt k -eszencia elméletben	121
3.4.4. Gömbszimmetrikus, sztatikus fekete lyukak, csupasz szingularitások és homogén megoldások $\bar{G}_4(\phi)$ különböző megválasztásaival	123
3.4.5. Megoldások az Einstein-rendszerben	132
3.5. Összefoglalás	134

4. Minimálisan csatolt skalármező, mint nem ideális folyadék	135
4.1. Minimálisan csatolt Klein–Gordon skalármező	138
4.1.1. Időszerű skalármező gradiens	139
4.1.2. Térszerű skalármező gradiens	140
4.1.3. Nullszerű skalármező gradiens	143
4.2. Minimálisan csatolt általános skalármező	144
4.2.1. Időszerű skalármező gradiens	145
4.2.2. Térszerű skalármező gradiens	146
4.2.3. Nullszerű skalármező gradiens	146
5. Összefoglalás	149
6. Summary	153
7. Köszönetnyilvánítás	157
Hivatkozások	158

Kivonat

A galaxis forgásgörbék, a kozmikus mikrohullámú háttérsugárzás, az Ia supernóvák és még számos megfigyelés támasztja alá azt, hogy az univerzum nemcsak a Standard Modellből ismert anyagfajtákat tartalmazza. A Planck Kollaboráció 2020-ban bejelentett eredményei alapján a Standard Modellhez köthető (ún. barionikus) anyag, mintegy 4,93%-a az univerzum teljes anyagának. A fennmaradó részt a sötét anyag (26,42%) és a sötét energia (68,67%) alkotja, amelyek mibenléte nem tisztázott. Ezzel párhuzamosan szintén elgondolkodtató, hogy a fizika alapvető kölcsönhatásai közül a téridő geometriáját, illetve az azon történő mozgást meghatározó gravitáció a kvantumtérelmélet keretei között nem renormálható. Ezen problémák megoldásának egy irányát képviseli az általános relativitáselméletet egy skalármező bevezetésével módosító Horndeski elmélet, amely a skalármezőre és a metrikára legfeljebb másodrendű dinamikai egyenleteket eredményez. A Horndeski elméletre egy olyan az általános relativitáselmülethez képest magasabb rendű járulékokat tartalmazó elméletként is tekinthetünk, amely a még nem ismert, nagy energiás kvantumgravitációs elmélet alacsony energiás effektív térelméleti közelítéséből származik. A módosított gravitációelméletekre a kozmológiai és asztrofizikai megfigyelések kényszereket jelentenek. A gravitációs hullámok fénysebességét nagy pontossággal bizonyító GW170817 gravitációs hullám és GRB170817A gamma sugárzási események miatt a Horndeski elmélet Kinetic Gravity Braiding alosztálya fogadható el életképes fizikai elméletnek.

A disszertáció első részében bemutatom a nemmerőleges $2+1+1$ dimenziós téridőfelbontást, amely a merőleges $s+1+1$ formalizmus általánosítása amennyiben $s=2$. A nemmerőleges $2+1+1$ téridőfelbontás alkalmazása mellett biztosítható az egyértelmű mértékrögzítés a Horndeski elméleten belüli gömbszimmetrikus, sztatikus téridők perturbációinak tárgyalásakor, mivel a 3-dimenziós hiperfelületek merőlegességét nem szükséges megkövetelni a perturbáció során. A nemmerőleges $2+1+1$ formalizmus kidolgozásához származtattam a beágyazást jellemző geometriai mennyiségeket, továbbá a geometriai mennyiségek és a metrikus változók, valamint a metrikus változók koordináta deriváltjai közötti összefüggéseket. Ez lehetővé teszi a Ricci-skalár felbontását mind a $t=\text{konst.}$ idő koordináta által meghatározott 3-dimenziós hiperfelület sereghez adaptált (n^a, m^a) bázisban, mind a $\chi=\text{konst.}$ tér koordináta által meghatározott 3-dimenziós hiperfelület sereghez adaptált (k^a, l^a) bázisban. Levezettem a nemmerőleges $2+1+1$ formalizmus (n^a, m^a) bázisában az általános relativitáselmélet kanonikus moz-

gásegyenleteit. Összehasonlítottam a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus geometriai mennyiségeit az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus kinematikai mennyiségeivel. Megállapítottam, hogy az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus ξ , Ω , Ω^a örvény komponenseinek megfelelő geometriai mennyiségek nem jelennek meg a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban.

A disszertáció második részében bemutatom az $L_5^H = 0$ Horndeski elméletbeli Lagrange-sűrűségek kifejtéseit a téridő nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontása során az (n^a, m^a) , illetve a (k^a, l^a) bázisokban használt geometriai mennyiségekkel. Megállapítom, hogy a Lagrange-sűrűségek felbontott alakja egyszerűbb a (k^a, l^a) bázisban. Levezettem a gömbszimmetrikus, sztatikus háttérre vonatkozó mezőegyenleteket a (k^a, l^a) bázisban felbontott effektív térelméleti hatásból. A mezőegyenleteket felírtam a Kinetik Gravity Braiding alosztályba tartozó k -eszencia elméletekre. Ezen alosztály esetén megállapítottam, hogy csak az Einstein–Hilbert hatásból származtatható a Schwarzschild megoldás. Egy, a metrikus függvényekre vonatkozó feltevés mellett több új sztatikus, gömbszimmetrikus téridő megoldást származtattam analitikusan. Ezek aszimptotikusan nem sík téridők. A származtatott megoldások horizont nélküli szingularitást, egy vagy két horizonttal rendelkező fekete lyukat tartalmaznak, avagy olyan téridők, amelyekben a központi szingularitás mellett a belső, vagy az egyetlen horizonton kívül logaritmikus szingularitás jelenik meg.

A disszertáció harmadik részében bemutatom a minimálisan csatolt Klein–Gordon, valamint az általános skalármezőre vonatkozó folyadékleírásokat időszerű, térszerű és nullszerű skalármező gradiens választása mellett felhasználva a 4-dimenziós metrikus tenzor nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontott alakját. Az Einstein–Hilbert hatáshoz minimálisan csatolt Klein–Gordon mező, vagy az $L(\phi, X)$ Lagrange-sűrűséggel definiált skalármező, amennyiben az időszerű gradienssel rendelkezik, úgy a skalármezőre vonatkozó energia-impulzus tenzor ideális folyadékot ír le. Térszerű, vagy nullszerű skalármező gradienssel rendelkező Klein–Gordon, vagy $L(\phi, X)$ -el adott általános skalármező energia-impulzus tenzora I-es, vagy II-es típusú nem ideális folyadék.

Abstract

Galaxy rotation curves, the cosmic microwave background, type Ia supernovae, and several other observations support that the universe contains more than just those kind of matters known from the Standard Model. According to the results announced by the Planck Collaboration in 2020, the Standard Model-related (so-called baryonic) matter accounts for about 4.93% of the total matter in the universe. The remaining part is made up of dark matter (26.42%) and dark energy (68.67%). The nature of these matter types is unclear. Parallel with this, it is also thought-provoking that, one of the fundamental interactions in physics determining the geometry of spacetime, cannot be renormalized within the framework of quantum field theory. One direction for solving these problems is represented by the Horndeski theory, which modifies the general relativity by introducing a scalar field and it contains dynamical equations of at most second order for the scalar field and the metric. The Horndeski theory can also be viewed as a theory containing higher-order contributions to general relativity, derived from the low-energy effective field theory approximation of as-yet-unknown, high-energy quantum gravity theory. Modified gravity theories are constrained by cosmological and astrophysical observations. Due to the GW170817 gravitational wave and GRB170817A gamma ray burst events, which prove that the gravitational waves propagate with the speed of light, only the Kinetic Gravity Braiding subclass of the Horndeski theory can be accepted as a physical theory.

In the first part of the dissertation, I present the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ spacetime decomposition, which is a generalization of the orthogonal $s + 1 + 1$ formalism provided $s = 2$. By using the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ spacetime decomposition, unambiguous gauge fixing can be ensured during the perturbation of spherically symmetric, static spacetimes discussed in the Horndeski theory, since the orthogonality of the 3-dimensional hypersurfaces does not need to be required. To develop the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism, I derived the geometric quantities characterizing the embedding, the relations between the geometric quantities and the metric variables as well as the relations between the geometric quantities and the coordinate derivatives of metric variables. This enables the decomposition of the Ricci scalar both in the (n^a, m^a) basis adapted to the family of 3-dimensional hypersurfaces defined by the $t = \text{const.}$ timelike coordinate, and in the (k^a, l^a) basis adapted to the family of 3-dimensional hypersurfaces defined by the $\chi = \text{const.}$ spacelike coordinate. I derived the canonical equations

of motion of general relativity in the (n^a, m^a) basis of the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism. I compared the geometric quantities of the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism with the kinematic quantities of the $1 + 1 + 2$ covariant formalism. I found that there are no geometric quantities in the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism corresponding to the vorticity components ξ , Ω , Ω^a of the $1 + 1 + 2$ covariant formalism.

In the second part of the dissertation, I present the Horndeski Lagrangian with $L_5^H = 0$ in terms of variables occurring in the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ spacetime decomposition using either (n^a, m^a) or (k^a, l^a) basis. The decomposed Lagrangian takes a simpler form when using the (k^a, l^a) basis. I derive the field equations for spherically symmetric, static background from a generic effective field theory action depending on variables occurring in using (k^a, l^a) basis. I give the field equations for k -essence theories of the subclass of Kinetic Gravity Braiding. For these theories, I established that the Schwarzschild solution can only be derived from the Einstein–Hilbert action. I found new static and spherically symmetric spacetime solutions analytically when using a certain additional assumption for the metric functions. These solutions are not asymptotically flat. The derived solutions contain i) a central singularity without horizons, ii) black holes with one or two horizons, iii) beside the central singularity, a logarithmic singularity occurring outside the single horizon or the internal horizon.

In the third part of the dissertation, I present the fluid description of a minimally coupled Klein–Gordon and a generic scalar field with Lagrangian $L(\phi, X)$, where ϕ is the scalar field, while $X = \partial_a \phi \partial^a \phi / 2$. I investigated all the cases, when the scalar field gradient is i) timelike, ii) spacelike and iii) null, using the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ decomposition of 4-dimensional metric. I concluded that the energy-momentum tensor of the scalar field describes a perfect fluid, a type I imperfect fluid and a type II imperfect fluid, when the scalar field gradient is timelike, spacelike and null, respectively.

1. Bevezetés

A mai modern kozmológia és gravitációelméletek kialakulását számos ókori, reneszánsz filozófus, fizikus és csillagász alapozta meg. Leírták az első törvényeket, például a bolygók egymáshoz képesti mozgásáról, földi körülmények között lévő kiterjedt testek, vagy tömegpontok dinamikájáról, és a szabadesésről. Mérőföldkövek voltak Kopernikusz első Nap középpontú, illetve homogén és izotróp kozmológiai elve, amely ellentmondott az arisztotelészi tanoknak; az atomisták két képviselője, Leucippus és Democritus által tett feltételezés, miszerint minden anyag oszthatatlan építőelemekből, ún. atomokból épül fel, amelyekből végtelen mennyiség található a végtelen univerzumban; Epicurus *Letter to Herodotus* c. műve, amelyben elsőként esik szó a multiverzumok létezésének lehetőségéről; Kepler által a Mars mozgásának megfigyelései alapján a bolygómozgásokat tárgyaló három törvény; Galilei kísérleti bizonyítéka az ekvivalencia elvére, amely kimondja, hogy a szabadesés sebessége a testek tömegétől független.

Newton jegyezte le az első gravitációs törvényt 1687-ben a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*-ban. A newtoni gravitáció alap elve, hogy a gravitáció tömeggel rendelkező testek között létrejövő vonzó erő, amely a tömegekkel „egyidőben keletkezik” és a közöttük lévő távolságtól függetlenül „azonnal hat”, azaz a gravitációs erő végtelen sebességgel terjed. Gravitációelmélete földi léptékben, homogén, gyenge gravitációs tér esetén közel pontos eredményeket adott a testek mozgására a Földön és az égitestek mozgására a Naprendszer belső régióiban. Bevezette az inerciarendszer fogalmát, eszközendszert adott a kor csillagászainak, amellyel az asztrofizikai objektumok tömegét meg tudták határozni azok megfigyelt mozgása alapján. Ennek következményeként az Uránusz keringési anomáliáit megfigyelve jelentette ki U. Le Verrier és J. C. Adams egy újonnan feltételezett naprendszerbeli bolygó jelenlétét, amely direkt észlelése után J. Galle a Neptunusz nevet adta [1]. Ehhez hasonlóan a Merkúr perihélium vándorlását is egy addig nem megfigyelt bolygóval, a Vulkánnal próbálta magyarázni Le Verrier, ebben az esetben hibásan [2].

A gravitáció leírásában a következő paradigma váltást Einstein általános relativitáselmélete jelentette. Az általános relativitáselméletben a gravitációt a geodetikus-egyenlet és az Einstein-egyenlet geometriai módon írja le, azaz a gravitáció azonos a téridő görbületével. Az Einstein-i gravitációt a *Gravitation* című könyvben C. W. Misner, K. S. Thorne és J. A. Wheeler a következőképpen szemlélteti: „Space tells matter how to move. Matter tells space how to curve” [3], azaz „A tér megmondja az anyag

hogyan mozogjon. Az anyag megmondja a térnek hogyan görbüljön”. A Newton-i gravitációs törvénnyel ellentétben, az általános relativitáselmélet alapján a gravitáció (például gravitációs hullámként) fénysebességgel terjed; nem erő, hanem görbület, amelynek geometriáját a metrika 10 db független komponense határozza meg; tömeggel nem rendelkező elemi részecskékre, hullámokra is „hat”, azaz az elemi részecskék a görbült téridőre vonatkozó geodetikus-egyenlet által meghatározott pályán haladnak. Az általános relativitáselmélet ezek mellett új jelenségeket is jósolt. Gyenge gravitáció esetén leírja a Naprendszer bolygóinak perihélium vándorlását, a gyenge gravitációs lencsézést, a gravitációs mikrolencsézést, a gravitációs fényelhajlást, a gravitációs hullámokat, a gravitációs vöröseltolódást, a radarvisszhangot. Erős gravitációban Schwarzschild vezette le az első fekete lyukat [4], de a féreg lyukak és az erős gravitációs lencsézés is az általános relativitáselmélet megoldásaiból adódnak extrém görbült téridőben.

Az általános relativitáselmélet számos megfigyelési eredményt igazolt és Naprendszer léptékben ($\sim 5 \cdot 10^9 km$ sugárban) a kor legmegbízhatóbb elmélete volt, ennek ellenére nem minden problémát oldott meg. A galaxis klaszterekben a galaxisok, továbbá a galaxisok szélső régióiban a barionikus anyag detektált mozgása sötét anyag bevezetése nélkül nem magyarázható. Az Ia típusú szupernóvák luminozitás távolsága és vöröseltolódása között fennálló relációból kapott Hubble-paraméter érték alapján az univerzum gyorsulva tágul, amely akkor lehetséges, ha az univerzum sötét energiát is tartalmaz. Ugyancsak probléma volt, hogy a Standard Modellben szereplő anyagformákkal nem feloldható a standard kozmológiai modell horizont, síkság és mágneses molopólus problémái, amelyek megoldását az univerzum keletkezésének dinamikáját leíró inflációra vonatkozó elméletek tűzték ki célul.

1.1. Sötét anyag

F. Zwicky az 1930-as években tanulmányozta a Coma klaszter galaxisainak mozgását. Folyóiratcikkeiben A. van Maanen által mért látszólagos szögsebességeket, valamint E. Hubble által meghatározott távolságokat és mért látszólagos radiális sebességeket [5] használta fel. Eredményei szerint a Coma klaszter galaxisainak számolt valódi radiális sebességei a vártnál nagyobbak, mint az következne a látható anyag feltételezett tömegéből. Az NGC 4051 és M33 galaxisok esetén ez a különbség körülbelül két nagyságrend volt. F. Zwicky a vizsgált galaxisok tömegét a viriál tétel alkalmazásával adta

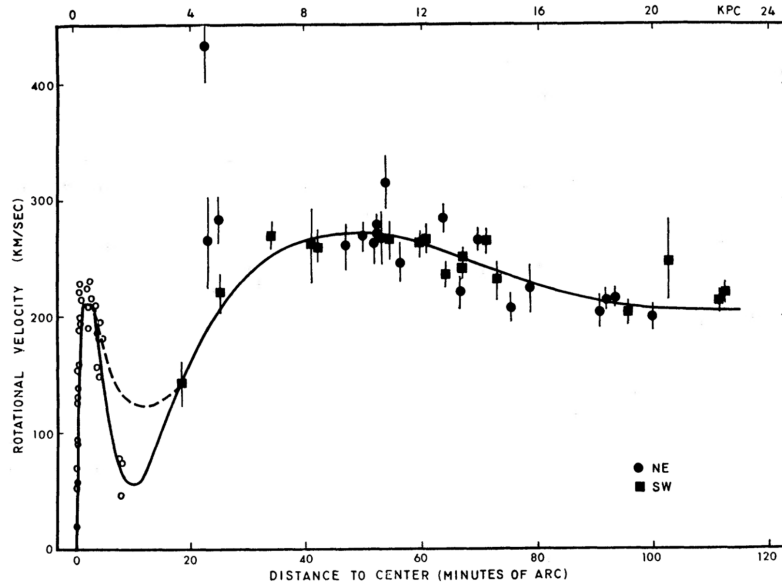
meg a megfigyelési adatokra alapozva. Úgy gondolta, hogy amennyiben a mérések nem hibásak, akkor a galaxisokban és klaszterekben detektált látható anyagon kívül az ún. „sötét objektumok” is nagy mennyiségben jelen vannak [6], [7]. Az említett sötét objektumokat számos cikkében sötét anyagnak nevezte el.

F. Zwicky-vel párhuzamosan figyelte meg a Virgo klasztert S. Smith, majd meghatározta a klaszter teljes tömegét és a galaxisok átlag tömegét. E. Hubble által megadott átlag galaxis tömegnél két nagyságrenddel nagyobbat számolt. Erre magyarázata az volt, hogy nagy tömegű és alacsony luminozitású hideg köd található a klaszter galaxisai között [8].

F. Zwicky és S. Smith állításaira sokan évekig csak hibaként tekintettek. F. Zwicky eredményei valóban nem voltak pontosak, mivel azokat befolyásolta E. Hubble és M. Humason által megadott Hubble-paraméter mai értéke, azaz a $H_0 = 558 \pm 56 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ Hubble-konstans [5]. Ez viszont majdnem egy nagyságrenddel nagyobb volt, mint a $H_0 = 68,4_{-0,8}^{+1,0} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ érték, amit a Planck Kollaboráció 2020-ban publikált [9].

C. V. Rubin 1960-as években W. K. Ford-al az Andromeda-galaxis különböző régióit vizsgálta a centrumától mért $R = 0 - 24 \text{ kpc}$ ($\sim 0 - 120$ ívperc) között DTM csöves spektrográffal az $[N II]$ és $H\alpha$ emissziós vonalak rögzítésével. Mérési eredményeiket 1970-ben az American Astronomical Society egy konferenciáján mutatták be. Az M31 látható anyagának (V) keringési sebességét körmozgás feltételezése mellett származtatták, továbbá szerkezeti modelleket alakítottak ki a spirálgalaxisokra, többek között a Tejútrendszerre is. A méréseiket felhasználva, az általuk alkalmazott modellek eredményeit összefoglaló 3. táblázat alapján megállapították, hogy a galaxis középpontjának $R = 0,4 \text{ kp}$ tartományában a látható anyag sebessége a $V \sim 227 \text{ km/s}$ lokális maximumot éri el. A centrumot alkotó sűrű, körülbelül $M \sim 6 \cdot 10^9 M_\odot$ tömegű ($M_\odot = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$), gyorsan keringő látható anyag $R = 2 \text{ kp}$ körül ugrásszerűen megritkul, sebességéből veszít. Az $R = 4 - 14 \text{ kp}$ -ig a galaxis teljes tömege lineárisan növekszik, majd lelassul és $R = 24 \text{ kp}$ -en belül eléri az $M \sim 1,85 \cdot 10^{11} M_\odot$ -et. Megjegyzik továbbá, hogy a galaxis központjában mért sebességek megegyeznek a $H I$ 21-cm rádiómegfigyelésekkel, viszont az általuk mért $\sim 270 \text{ km/s}$ maximum sebesség $\sim 9 \text{ kp}$ távolságban magasabbnak adódott, mint a 21 cm-es mérés esetén. Eredményeik egy kiragadott részét az 1. ábra szemlélteti. A tömeg számolása során a Kuzmin (1952) és Brandt (1960) által bemutatott tömeg-sebesség összefüggést alkalmazták [10].

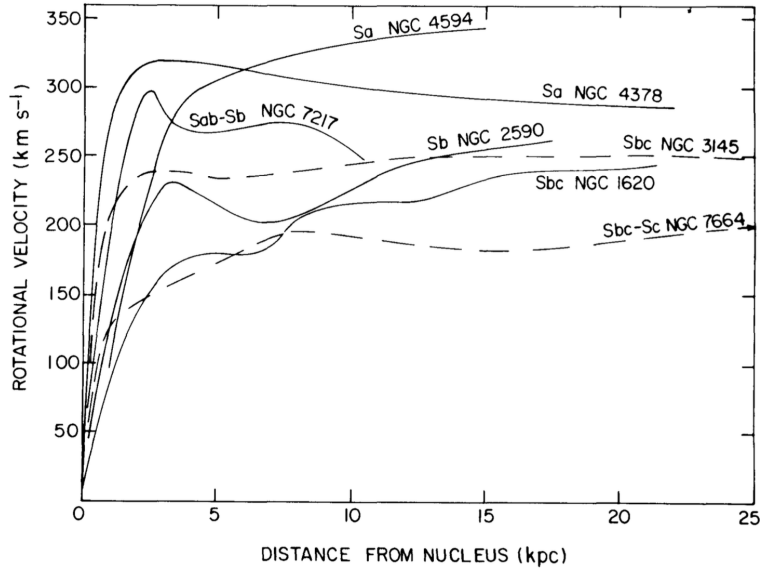
C. V. Rubin és W. K. Ford munkája ösztönözte a csillagászokat és a fizikusokat, hogy a galaxis forgásgörbéket tovább tanulmányozzák. Közöttük kiemelkedő volt K. C. Freeman [11], D. H. Rogstad, G. S. Shostak [12], M. S. Roberts, A. H. Rots [13], R. N. Whitehurst [14], majd később T. S. van Albada és társai [15], Carignan és társai



1. ábra. Az M31 galaxis forgásgörbéje, ahol a 123 darab $[N II]$ emissziós spektrum alapján meghatározott keringési sebességek negyedrendű polinommal vannak illesztve $R \leq 12$ ívperc esetén, míg $R \geq 12$ ívperc távol a galaxis centrumtól ötödrendű polinom illesztést alkalmaztak [10].

[16], akik számos galaxis esetén alátámasztották, hogy a galaxis forgásgörbék mindegyikénél a barionikus anyag emissziós vonalaiból származtatott kerületi sebességek közel konstansok a galaxisok centrumtól mért távoli tartományaiban. 1978-ban C. V. Rubin, W. K. Ford és N. Thonnard cikkükben újabb 10 darab nagy intenzitású spirál galaxis forgásgörbéjét mutatták be, ahol a megfigyelést kiterjesztették a galaxisok centrumtól mért még távolabbi tartományaiba is. Ezen eredmények egy részét a 2. ábra szemlélteti. Kimondták továbbá, hogy minden galaxis a centrumától $50kpc$ távolságig konstans forgásgörbével rendelkezik. Szintén először beszéltek a galaxis külső régióiban gömbszerűen, ún. halókban elhelyezkedő „hiányzó” (nem látható) többlet anyagról. Ez utóbbi, csupán elméleti feltételezés volt, hiszen vizsgálatuk csak a galaxis korongjára terjedt ki [17].

Az egymást igazoló mérési eredmények miatt elkezdődött a hiányzó tömeg, azaz a sötét anyag keresése, továbbá annak a meghatározása, hogy mekkora részét teszi ki az univerzum teljes anyagának. Legbiztosabb sötét anyag jelöltnek gondolták a kompakt objektumokat, például fehér, barna és vörös törpéket, forró Jupitereket és egyéb bolygókat, neutron csillagokat, kis tömegű, inaktív fekete lyukakat, amelyek összefoglaló

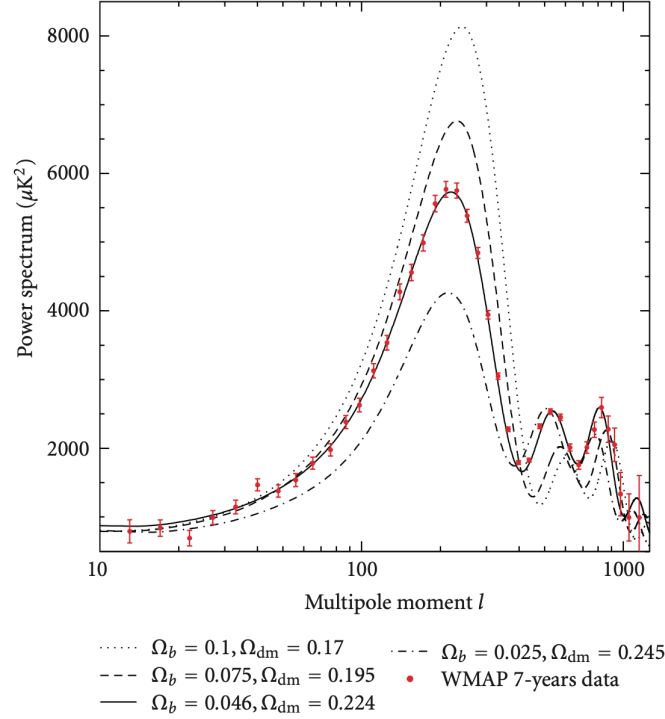


2. ábra. Hét galaxis forgásgörbéje, ahol az illesztések során a kiugró keringési sebességek nem lettek figyelembe véve [17].

neve a Massive Astrophysical Compact Halo Objects, röviden MACHOs. A kompakt objektumok detektálását gravitációs mikrolencsézés megfigyelésével végzik, amelynek elméleti alapjait Einstein fektette le, viszont gyakorlatba ültetésére később került sor [18]. 1986-ban B. Paczynski javasolta C. V. Rubin, W. K. Ford és N. Thonnard cikkére hivatkozva, hogy célszerű lenne mikrolencsézési megfigyeléseket végezni a Tejútrendszer és más galaxisok feltételezett sötét anyag halójában [19]. A MACHOs detektálására kialakított mikrolencsézési megfigyelések során nagy számú csillag csoportosulásokat monitoroztak a kiválasztott galaxisok közelében, figyelve a csillagok intenzitás változását. Ezen megfigyelések egyik jelentős célpontja a Nagy Magellán-felhő törpegalaxis volt. Megalapult 1993-ban a MACHO Kollaboráció. Körülbelül 6 év alatt 14-17 darab mikrolencsézés eseményt detektáltak a Mount Stromlo Observatórium 1,27m átmérőjű távcsövével. A $40 \cdot 10^6$ darab csillag folyamatos megfigyelése során megállapították, hogy a Tejútrendszer halójának 8 – 50%-a lehet $0,15 - 0,9 M_{\odot}$ tömegű kompakt objektum [20]. A velük párhuzamosan működő EROS és EROS-2 (azaz Experience pour la Recherche d'Objects Sombres) kollaborációk majdnem ugyanennyi idő alatt egyetlen nem kizárt mikrolencsézést észleltek a várt 39 helyett, így szűkítve 8%-ra a kompakt objektumok jelenlétét a Tejútrendszer halójában [21],[22].

A 20. század közepe fele sokakat elkezdett foglalkoztatni az egyre több felfede-

zett elem eredete. Modelleket állítottak fel a csillagokban lezajló fúziós folyamatokra, megállapítva hogyan keletkezhettek a hidrogénnél és héliumnál nehezebb elemek az univerzumban. 1939-ben H. Bethe levezette a proton-proton lánchoz és a szén-nitrogén-oxigén ciklushoz kötött energiatermelést a csillagokban [23]. F. Hoyle bemutatta, hogy masszív csillagokban a vasnál könnyebb elemből álló mag kialakulása lehetséges, továbbá a vasnál nehezebb elemek szupernóva robbanásból származhatnak [24]. Azonban sokkal több héliumot találtak megfigyelésekkel, mint ami a csillagokban zajló fúziós folyamatok során létrejöhet. Nem sokkal később R. A. Alpher, H. Bethe és G. Gamow a fúzió mellett egy új lehetséges magyarázatot talált az elemek kialakulására. Cikkük szerint mind a könnyű, mind a nehéz elemek keletkezhettek az univerzum korai időszakában annak hűlése következtében neutron befogással [25]. Számolásaikat R. A. Alpher javította J. W. Follin és R. C. Herman segítségével, pontosítva a korai univerzumban kialakult hélium mennyiségét, amely alapján arra jutottak, hogy a héliumnál nehezebb elemek eredete nem erre az időszakra tehető [26], így keletkezésük továbbra is a csillagok energiatermelésére volt visszavezetve. A kozmikus mikrohullámú háttér-sugárzás (Cosmic Microwave Background, azaz CMB) felfedezése új utat nyitott a korai univerzum fejlődésének és a nukleoszintézis kutatásának [27]. A CMB hőmérséklete alapján kimondták, hogy a megtalálható nagy mennyiségű hélium 26-28%-a, továbbá a ${}^6\text{Li}$, ${}^9\text{Be}$, ${}^{10}\text{B}$, ${}^{11}\text{B}$ nagy része, míg a ${}^7\text{Li}$ körülbelül 20%-a nukleoszintézis következtében jöhetett létre [28]. A nukleoszintézisből származó deutérium mennyiséget nagy pontossággal S. Burles, K. M. Nollett és M. S. Turner figyelték meg először, majd $\Omega_b h^2 = 0,020 \pm 0,002$ értékre, azaz 4,35%-ra becsülték az univerzumban megtalálható barionikus anyag sűrűségét, ahol $h = H_0/100 = 0,678 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ a redukált Hubble-konstans [29]. A CMB hőmérséklet fluktuációjának elméleti levezetése, valamint az azzal kapcsolatos teljesítmény spektrum l páros és páratlan módusainak illesztése, a barionikus akusztikus osszcillációk (Baryon Acoustic Oscillation vagy BAO) vizsgálata további lehetőséget biztosított az univerzum fejlődésének és anyagi összetételének megállapítására, és a Hubble-konstans pontosítására [30], [31]. Mivel a sötét anyag nem vesz részt elektromágneses kölcsönhatásban, ezért a CMB közvetlen információt nem szolgáltat mennyiségéről. Azonban a sötét anyag a galaxisok halójában a barionikus anyaghoz csoportosul, így a struktúra képződésben jelentős szerepe volt. Ennek következtében a teljesítményspektrum csúcsainak mért elhelyezkedése, alakja, közvetett információt szolgáltat a sötét anyag sűrűségéről, amelyet a 3. ábra szemléltet. Műholdak épültek, kollaborációk alapultak azért, hogy a CMB hőmérséklet fluktuációit pontosabban, finomabb felbontással tudják rögzíteni. Az erre szánt leg-sikeresebb mérőműszerek a 2010-ben küldetését befejező WMAP, a Planck, a Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS), amely utóbbi a BAO mérésére specializáló-



3. ábra. A CMB hőmérséklet fluktuációira vonatkozó teljesítmény spektrum illesztések különböző Ω_b barionikus anyag és Ω_{dm} sötét anyag sűrűség esetén, felhasználva a WMAP adatait úgy, hogy $1 = \Omega_b + \Omega_{dm} + \Omega_\Lambda$, ahol Ω_Λ a sötét energia sűrűsége [30], [32].

dott [33]. A WMAP és a BAO mérések adatai alapján a barionikus anyag mennyisége $\Omega_b h^2 = 0,02223 \pm 0,00033$, a sötét anyag mennyisége $\Omega_c h^2 = 0,1153 \pm 0,0019$, míg a Hubble-konstans $H_0 = 69,32 \pm 0,80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [34]. A Planck kollaboráció és a BAO mérések alapján a sötét anyag $\Omega_c h^2 = 0,120 \pm 0,001$ és a barionikus anyag $\Omega_b h^2 = 0,0224 \pm 0,0001$ mennyiségben található meg az univerzumban, továbbá a Hubble-konstans értéke $H_0 = 67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [9].

A korai univerzumban lezajló nukleoszintézis elmélet sikereire alapozva tették fel, hogy a nagy mennyiségű sötét anyag ún. primordiális fekete lyukak formájában a nukleoszintéziskor, vagy azt megelőző időszakban jöhetett létre. A legkorábbi időszak, amikor primordiális fekete lyuk keletkezhetett B. J. Carr és S. W. Hawking szerint a Planck időre tehető $\sim 10^{-43} \text{ s}$. Ekkor a részecske-plazma inhomogenitásaiból származó lokális sűrűsödések által keletkezett fekete lyuk tömege $10^{-5} g$, sugara 10^{-33} cm , míg hasonló módon, de a nukleoszintézis idejében kialakult fekete lyuk tömege $10^7 M_\odot$ lenne

[35]. A primordiális fekete lyuk létrejötte után tömeget tud nyerni, amennyiben a környezetében lévő részecskék akkréció útján beleesnek. Ezt az ún. Zeldovich–Novikov féle lassú akkrécióval írták le, amely szerint

$$M \sim \frac{t}{1 + \frac{t}{t_0} \left(\frac{t_0}{M_0} - 1 \right)},$$

ahol M_0 a primordiális fekete lyuk keletkezés-kori tömege $M_\odot$ -ben kifejezve, t_0 a primordiális fekete lyuk keletkezésének ideje, míg M a t időbeli primordiális fekete lyuk tömege. Amennyiben az univerzum kezdeti időszakában $M_0 \sim t_0$, akkor a lassú akkréció miatt a primordiális fekete lyuk tömege azonos arányban nő, mint ahogy az idő telik. Ez azt eredményezi, hogy a jelenben olyan nagy lenne egy ilyen primordiális fekete lyuknak a horizontja, hogy az akkréció következtében vagy már beleestünk, vagy elkezdtünk beleesni. Ez nagy valószínűséggel nem történt meg a megfigyelések és tapasztalataink alapján. Feltették, hogy a Zeldovich–Novikov akkréció csak a háttér energiasűrűségének egy bizonyos mértékéig zajlik, az univerzum ún. sugárzás általt dominált időszakában. Az ilyen módon keletkező primordiális fekete lyukak tömege a sugárzás dominált időszak és az akkréció leálta után körülbelül $10^{15} - 10^{17} M_\odot$ -re nőne, amely magyarázata lehetne a megfigyelt szupermasszív fekete lyukaknak a galaxisok középpontjában. Az univerum ilyen korai időszakában keletkezett nagy tömegű fekete lyukak azonban a CMB szerkezetében jelentős fluktuációként jelennének meg, amelyet a CMB mérései nem mutatnak. Ezért, vagy nem keletkeztek primordiális fekete lyukak, vagy nem a Zeldovich–Novikov akkréciós folyamat írja le keletkezésük utáni fejlődésüket, vagy keletkezésükkor fennállt az $M_0 < t_0$ feltétel. Ha $M_0 < t_0$, úgy a primordiális fekete lyuk akkréciója elhanyagolható mértékű, ezért mérete és tömege nem változik, így napjainkban tömegük nem sokkal $10^{-5}g$ felett lehet. Hawking egy következő folyóiratcikkében bemutatta a fekete lyukak (és fehér lyukak) termodinamikai leírását. Levezette azok erős gravitációs terének köszönhető spontán részecske-párkeltésből adódó $1,2 \cdot 10^{26} M^{-1} K$ hőmérsékletű sugárzását [36]. A Hawking sugárzás során a „lyukak” veszítenek tömegükből, miközben horizontjuk csökken és hőmérsékletük nő. A folyamat során $\sim 10^{-26} M^3 s$ alatt párolognak el teljesen (itt M az adott fekete lyuk grammal megadott tömege). Egy fekete lyuk párolgásából származó részecske sugárzás detektálása szinte lehetetlen, mivel hőmérséklete $10^{-7} K$, amely az univerzum $2,73 K$ hőmérsékletéhez képest elenyésző. D. N. Page és Hawking új tömegkritériumot határozott meg a primordiális fekete lyukakra, figyelembe véve azok párolgását is. Megállapították, hogy azok a primordiális fekete lyukak, amelyek kezdeti tömege kevesebb, mint $5 \cdot 10^{14} g$ volt mára teljesen elpárologtak. Azonban az $5 \cdot 10^{14} g$ -nál csak egy kicsit nagyobb tömegű primordiális fekete lyukak jelenleg $2,5 \cdot 10^{11} K = 20 MeV$

hőmérsékletűek, ami alapján $\sim 2,5 \cdot 10^{17} \text{ ergs/s}$ energiát sugároznak. Ezen sugárzás 1%-a graviton, 45% neutrínó, 45% elektron vagy pozitron, és 9% foton. Feltételezéseik alapján a primordiális fekete lyukaktól származó sugárzás foton formájában eljuthat a Földre és detektálható 120 MeV -os nagy energiájú gamma sugárzásként bármely irányból [37]. Sötét anyag szerepet betöltő primordiális fekete lyukak tömegét nagy százalékban körülbelül naptömegűnek, vagy a naptömeg néhányszorosának gondolták, amelyek jelentős számban kettős rendszereket alkothatnak [38].

A LIGO és Virgo kollaborációk által végzett gravitációs hullám detektálás [39] után számos folyóiratcikk foglalkozott a primordiális fekete lyukak kimutatásával sztochasztikus gravitációs hullám háttér formájában. A 2016 után megnövekvő gravitációs hullám észlelések nem igazolták ezt, amelynek oka az is lehet, hogy a primordiális fekete lyuk kettősök összeolvadásából származó sztochasztikus gravitációs hullám háttér alacsonyabb frekvenciájú, mint amin LIGO és Virgo detektorok mérnek [40]-[42].

A MeV energiájú gamma kitörési, mikrolencsézési, röntgen pulzár általi lencsézési megfigyelésekből származó eredmények arra mutatnak, hogy bolygó méretű, vagy naptömegű, vagy a naptömeg több tízszerese méretű primordiális fekete lyukak nem adják ki a jelenleg ismert teljes sötét anyag mennyiséget. A további ismeretek szerint a $10^{17} - 10^{22} g$, azaz aszteroid tömegű primordiális fekete lyukak lehetnek jó sötét anyag jelöltek, amelyekkel kapcsolatban is felmerült néhány probléma:

- Jelenleg a MeV gamma detektorral és mikrolencsézéssel észlelhető aszteroid tömegű primordiális fekete lyukak tömege $10^{22} g$, vagy e fölötti, emiatt szükséges technikai fejlesztéseket bevezetni a teljes aszteroid tömegű primordiális fekete lyuk spektrum megfigyelése érdekében [43];

- A primordiális fekete lyukak kialakulását biztosító lokális sűrűsödések leírásához az ún. ultra-lassú-gördülés inflációs modell alkalmazása az elterjedt. Ez a modell azonban további finomhangolást igényel ahhoz, hogy a CMB teljesítmény spektrumot a méréseknek megfelelően adja vissza továbbá, hogy a megfigyelésekkel kompatibilis számú és eloszlású primordiális fekete lyukak keletkezését írja le [44], [45];

- Galaxis és klaszter léptékben a primordiális fekete lyukak eloszlásának egyeznie kell a megfigyelt sötét anyag eloszlással a homogén és izotróp univerzumban. Amennyiben a primordiális fekete lyukak tekinthetők sötét anyagnak, akkor az univerzum fejlődésének a sugárzás és anyag energiasűrűségek egyenlőségének időszaka után elkezdődött a primordiális fekete lyukak klasztereződése. Az így kialakult kettős vagy többes rendszerek születésének és fejlődésének elméleti tanulmányozása máig zajlik, figyelembe véve a sötét anyag halókban történő csoportosulását [46].

A sötét anyag azonosítására keletkeztek részecskefizikai modellek is, amelyek a Standard Modell problémáinak megoldására épültek. Ezek például a Higgs/hierarchia prob-

léma és az erős CP-probléma. A Higgs/hierarchia probléma szerint nem lehet tudni, hogy az elektrogyenge szimmetria sértésből származó Higgs bozon tömege miért kicsi, azaz miért éppen $m_h \sim 100\text{GeV} \ll M_{Pl}$. Az erős CP-problémában az erős kölcsönhatást leíró kvantum-színdinamika (quantum chromodynamics, azaz QCD) esetén nem figyelhető meg töltés (C) és paritás (P) szimmetria sértés, annak ellenére, hogy az elmélet megengedi. A Higgs/hierarchia probléma egy megoldásaként az ún. WIMP-eket (azaz Weakly Interacting Massive Particles), míg az erős CP-problémánál az ún. axionokat vezették be, amelyek ugyancsak megfelelő sötét anyag jelöltnek mutatkoztak. Tekintve a mért CMB hőmérséklet fluktuációt a struktúrafejlődést leíró numerikus szimulációk alapján a megfelelő sötét anyag részecske nem relativisztikus, avagy „hideg”, nem barionikus, és stabil az univerzum korát tekintve, továbbá gravitációsan, esetleg gyengén kölcsönható. Ezeknek a feltételeknek megfeleltek a WIMP-ek, az axionok, az ún. steril neutrínók, de felmerültek az extra dimenziókat, vagy a szuperszimmetriát (SUSY) tárgyaló elméletek is a sötét anyag magyarázatára [47].

Kézenfekvő feltételezésnek tűnt elsőre, hogy a hosszú ideig stabil, gyenge és gravitációs kölcsönhatásban résztvevő neutrínókra essen a választás, mint sötét anyag. A neutrínók keletkezésének és a neutrínóoszilláció magyarázatával számos kutató foglalkozott megállapítva, hogy az univerzum kezdeti szakaszában nagy mennyiségű neutrínó keletkezett [48]. A neutrínók azonban kis tömegük miatt forró sötét anyag jelöltek, ennek következtében vagy kizárták őket vagy alternatív elméletekkel magyarázták sötét anyag jellegüket [32], [49]–[53]. Egy ilyen elméleti ötlet abból a tényből származik, hogy a Standard Modellben a fermionok és anti párjaik jobb és bal kezesek is lehetnek, azonban nem detektáltak még jobb kezes neutrínót, vagy bal kezes antineutrínót. 1994-ben S. Dodelson és L. Widrow a jobb kezes neutrínókról, azaz steril neutrínókról tették fel, hogy lehetnek hideg vagy forró sötét anyag részecskék. Steril neutrínó keletkezhet királis oszcilláció során [47], [54], [55]. Jelenlétükre szóródási anomáliák megfigyelésével következtetnek, amelyek detektálását a Liquid Scintillator Neutrino Detector (LSND) kísérlet [56] tűzte ki célul. Jelenleg a steril neutrínók ki lettek zárva, mint sötét anyag részecskék a Chandra [57], a MiniBooNE [58] detektor és az IceCube [59] mérései alapján, mivel nem találtak anomáliákat a mérésekben.

A WIMP egy $m_{weak} \sim 10\text{GeV} - \text{TeV}$ tömegű részecske, amely kölcsönhat a W és Z bozonokkal. Keletkezését a részecske sötét anyag feltételezett létrejöttével azonosnak gondolják, azaz az ún. termikus kifagyás (thermal freeze out) folyamatához kötik [60]. A termikus kifagyás szerint, az univerzum sugárzás dominált időszakában a kezdeti forró és sűrű sötét anyag termikus egyensúlyban van a Standard Modell részecske-plazmával. Az univerzum tágulása során azonban hőmérséklet lecsökkent az ún. T_f kifagyási hőmérsékletre. A T_f az a hőmérséklet, amikor a tágulás sebessége

meghaladja a sötét anyag bomlási sebességét, azaz a sötét anyag részecskék annyira eltávolodtak egymástól, hogy nem tudtnak annihilálódni. A termikus kifagyás után a sötét anyag részecskék mennyisége a T_f „pillanatbeli” számukkal közel azonos maradt az univerzumban. A folyamatot a Boltzmann egyenlet numerikus megoldásával modellezték [61]. A Higgs/hierarchia probléma egy másik megoldásként lett bevezetve a SUSY, amely szerint minden Standard Modell részecskének létezik egy szuperszimmetrikus részecske párja, amelyek a spin kivételével ugyanolyan kvantumszámúak. Az egyik ilyen szuperszimmetrikus részecske a neutralínó vagy a gravitínó, amelyek szintén megfelelő WIMP és SuperWIMP (azaz nagyon gyengén kölcsönható WIMP) jelöltek [62]. WIMP részecske lehet az univerzális extra dimenziók (Universal Extra Dimensions, UED) elmélete alapján bevezetett ún. Klauza–Klein sötét anyag is, amely T. Klauza és O. Klein nevéhez köthető [63], [64]. Az UDE elméletben minden Standard Modell részecskének van végtelen Klauza–Klein részecske párja, egy darab minden ún. Klauza–Klein szinten. Azonban a Standard Modell részecskének és Klauza–Klein részecske párjának a spinjük azonos, ezért ez az elmélet a Higgs/hierarchia problémát nem oldotta meg [47]. A WIMP-ek detektálása érdekében több kollaboráció is megalapult, például a Fermi-LAT [65], a XENON [66], a LUX [67], és a DarkSide [68]. Két Standard Modell részecske ütköztetésekor keletkező Standard Modell részecskék mellett kerestek WIMP-eket az LHC részecske gyorsítóban is sikertelenül [69].

Axion sötét anyag bevezetésekor, az erős CP-probléma feloldása érdekében egy a pszeudoskalármezőt tartalmazó kölcsönhatási taggal egészítik ki a QCD Lagrange-sűrűséget, amelyben az f_a axion bomlási paraméter adja meg, hogy a CP szimmetria mennyire van sértve. Az f_a arányos az a pszeudoskalármező m_a tömegével úgy, hogy

$$m_a = \frac{1}{f_a} \frac{\sqrt{m_u m_d}}{m_u + m_d} m_\pi f_\pi \approx 6 \mu eV \left(\frac{10^{12} GeV}{f_a} \right),$$

ahol m_u a „fel” („up”) kvark tömege, m_d a „le” („down”) kvark tömege, m_π a pion tömege és f_π a pion bomlási konstansa. A erős CP-probléma első elméleti megoldása R. D. Peccei és H. R. Quinn nevéhez köthető [47], [70]–[72]. Az axionok kölcsönhatnak gluonokkal, fermionokkal és fotonokkal, ezért az axion tömegének számos független kényszerrel kell teljesítenie. Az axionok megfigyelése egy Standard Modell elemi részecskével való szóródás útján laboratóriumi, vagy kozmológiai mérésekkel történik. A kezdeti elképzelések szerint $m_a \sim MeV$, majd $m_a \geq 10 keV$, amely ugyancsak ki lett zárva, mivel gyorsabb műion bomlást eredményezne, mint amit megfigyelnek. Amennyiben $m_a \sim 1 eV$ nagyságú, úgy a vörös óriások gyorsabban hűlnének [18], az 1987A szupernóva megfigyelés szerint pedig $m_a \lesssim 10^{-3} eV$ [73]. Kifejezetten sötét anyag axionok keresése érdekében alapult meg az ún. Axion Dark Matter Experience (ADMX) és

ADMX-HF (HF, mint High Frequency), amely az $a\gamma^* \rightarrow \gamma$ Primakoff folyamaton alapszik, kihasználva a galaxis halókban a feltételezett axion-foton csatolódást. Sötét anyag axionok keletkezésére utaló jeleket keresnek a Nap koronájában [74]. A KA-GRA gravitációshullám detektor szintén alkalmas axion sötét anyag keresésre a lézerek polarizációjában történő változások detektálása útján [75]. Az axionok kialakulhattak termikus folyamatok útján, mint a Standard Modell elemi részecskék az univerzum sugárzás dominált időszakában, azonban ebben az esetben nem tudja kitenni a teljes sötét anyag mennyiséget [76]. Az axionok keletkezhetnek nem termális úton is, amikor az univerzum hőmérséklete elérte $T \sim f_a$ értéket. Ekkor következik be az ún. Peccei–Quinn fázisátmenet, azaz az axion mező helyről helyre más értéket vehet fel a minimálistól eltérően. A Peccei–Quinn fázisátmenet különböző jóslatokat ad az axionok mennyiségére az univerzumban attól függően, hogy az az infláció előtt, vagy után következik be, amely esetek bizonyítása és elemzése jelenleg is kutatott [47].

1.2. Sötét energia

Az általános relativitáselméletből levezethető az univerzum tágulása, viszont az 1920-as években az ún. „steady-state” vagy „állandó állapotú” univerzum-kép volt elfogadott, amelynek biztosítása érdekében Einstein a Λ kozmológiai konstanssal egészítette ki az Einstein-egyenletet. Hubble 1929-ben megfigyeléseivel bizonyította az univerzum tágulását [77], ezért Einstein a Λ kozmológiai konstansról később úgy nyilatkozott, hogy „the biggest blunder of my life”, azaz az „élete legnagyobb baklövése” [3].

A sötét energia fogalmának tényleges és tudatos kialakulása az univerzum kései szakaszának gyorsuló tágulásához köthető, amely felismeréséhez az ún. „standard vagy standardizálható gyertyának” nevezett Ia típusú szupernóvák megfigyelései vezettek. Ezen felfedezésért S. Perlmutter, B. Schmidt és A. Reiss 2011-ben Nobel-díjat kapott [78]–[81]. Az Ia típusú szupernóva különlegessége annak kialakulásának folyamatához köthető. Egy kettős rendszert alkotó fehér törpe és vörös óriás közötti tömeg akkréció során a fehér törpe tömege nő. Amennyiben a fehér törpe tömege átlépi az ún. $1,44M_\odot$ Chandrasekhar határtömeget, akkor fekete lyukká zuhan össze a gravitáció hatására [82]. Az így kialakult Ia típusú szupernóvák luminozitása közelítőleg megegyezik. A luminozitás változása és értékei a közeli, azaz kis vöröseltolódású ($z < 0,1$) Ia szupernóvák megfigyeléséből ismert adat. A detektált maximum luminozitással (L)

és fluxussal (f) direkt módon kiszámolható az objektum d_L luminozítás távolsága:

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi f} .$$

Egy asztrofizikai objektum d_L luminozítás távolsága kapcsolatban van a vöröseltolódással, amelyből további kozmológiai paraméterek származtathatók.

A homogén és izotróp univerzumot a Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker (FLRW) téridő írja le, amely a

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right] ,$$

ívelemnégyszettel rendelkezik, ahol $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ úgy, hogy $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A $\kappa = \pm 1, 0$ a görbületi index, amely kifejezi a térbeli geometriát: 0 euklideszi, -1 hiperbolikus, $+1$ gömbi, valamint $a(t)$ a skálafaktor. Az FLRW téridő az

$$R_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right)$$

Einstein-egyenlet alapján megköveteli, hogy az univerzum anyagára vonatkozó T_{ab} energi-impulzus tenzor ideális folyadék legyen, amelynek elemei: $T_{00} = \rho$ az energiasűrűség; $T_{0\mu} = 0$; $T_{\mu\nu} = a^2 p g_{\mu\nu}$, ahol p az izotróp nyomás. A továbbiakban az $a, b = 0, 1, 2, 3$ latin indexek a téridőindexek, míg a $\mu, \nu = 1, 2, 3$ görög indexek a térindexek, továbbá a kifejezések a fénysebesség $c = 1$ egységben értendők. Ezek ismeretében a kozmológia két dinamikai egyenlete származtatható. Az egyik az

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) \quad (1.1)$$

Raychaudhuri-egyenlet, amely az Einstein-egyenlet 00 komponense. A másik az

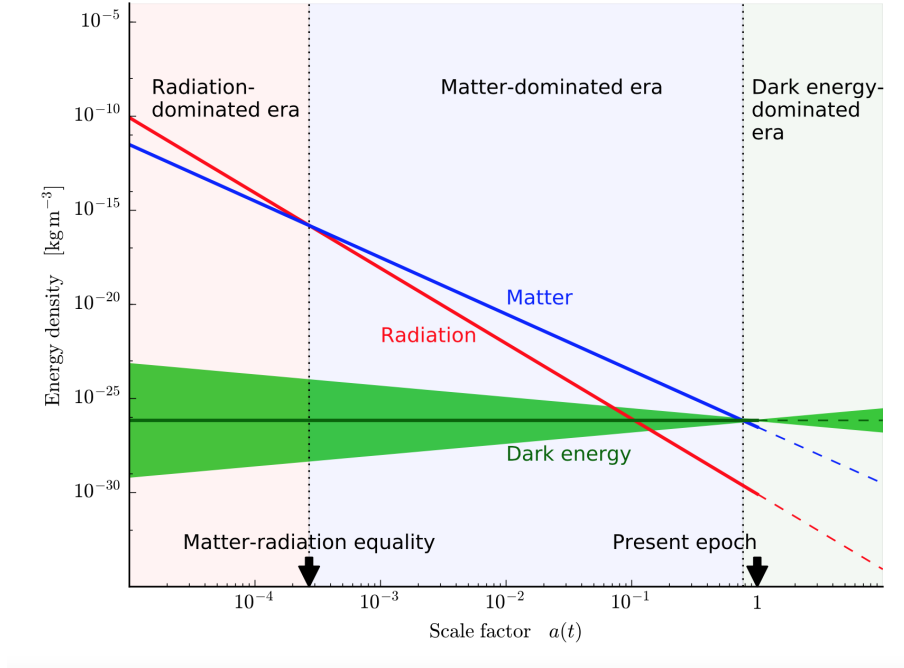
$$\frac{\dot{a}^2 + \kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (1.2)$$

Friedmann-egyenlet, amely az Einstein-egyenlet 00 és $\mu\nu$ komponenseinek különbségéből vezethető le. A $\nabla^a T_{ab} = 0$ összefüggésből a

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (1.3)$$

a folytonossági-egyenlet, amely a Raychaudhuri- és Friedmann-egyenletből is kapható.

A dinamikai egyenletek megoldásához szükség van a ρ és p között fenálló állapot-egyenletre, különben az egyenletrendszer nem zárt. A kezdeti univerzum sugárzás-dominált volt, ezért $p = \rho/3$, valamint $\rho_R \sim a^{-4} \sim t^{-2}$ és $a_R \sim t^{1/2}$. A foton lecsatólódás után ($T \sim 3000K$, $z \sim 1100$) az univerzum anyaga porral modellezhető,



4. ábra. Az univerzum korai időszakában a ρ_R energiasűrűség volt domináns (piros), ezért ezt nevezik a sugárzás-dominált (radiation-dominated) időszaknak. A sugárzás-dominált időszak az anyag-sugárzás egyenlőségig (matter-radiation equality) tartott. Az anyag-sugárzás egyenlőség után a ρ_M energiasűrűség (kék) volt meghatározó. Az anyag-dominált (matter-dominated) időszak vége körülbelül $z \sim 0,55$. Ezután a $w = -1 \pm 0,2$ állapotegyenlettel rendelkező sötét energia ρ_Λ energiasűrűsége (zöld) vált dominánssá. A sötét energia-dominált (dark energy-dominated) időszak napjainkig tart [83].

ekkor $p = 0$, így $\rho_M \sim a^{-3} \sim t^{-2}$ és $a_M \sim t^{2/3}$. A késői univerzum struktúraképződési szakaszában feltették, hogy az univerzumban a Λ kozmológiai konstans, azaz sötét energia-dominancia van. Ekkor $p = -\rho$, amelyből $\rho_\Lambda \sim \text{áll.}$ illetve $a_\Lambda \sim e^{Ht}$. Az univerzum egyes korszakaiban a ρ_R , ρ_M és ρ_Λ energiasűrűségek egymáshoz képesti arányát a 4. ábra mutatja be.

Az (1.2) Friedmann-egyenlet átírható a

$$\frac{H^2}{H_0^2} = -\frac{\kappa}{H_0^2 a_0^2} \frac{a_0^2}{a^2} + \frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_\Lambda + \rho_M + \rho_R)$$

módon. Amennyiben behelyettesítjük az energiasűrűség időfejlődésére vonatkozó össze-

függéseket, és elvégezzük az $x = a/a_0$ változócsereét, akkor az

$$\frac{\dot{x}^2}{H_0^2 x^2} = \Omega_\kappa x^{-2} + \Omega_\Lambda + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}$$

egyenletet kapjuk úgy, hogy

$$\Omega_\kappa = -\frac{\kappa}{H_0^2 a_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_\Lambda, \quad \Omega_M = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{M_0}, \quad \Omega_R = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{R_0}.$$

Az új változókbán az a_0 a skálafaktor „mai” értéke, az Ω_M magába foglalja a barionikus anyagot és a sötét anyagot, az Ω_R elhanyagolható, ha az univerzum késői időszakát vizsgáltuk, valamint $1 = \Omega_\kappa + \Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R$.

A kozmológiával kapcsolatos megfigyelések egyik célja az $a(t)$ skálafaktor időbeli fejlődésének lehető legpontosabb meghatározása, ezért az $a(t)$ Taylor-sorából a következő kozmológiai paramétereket definiálták:

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{\dot{a}}{a}, \quad q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad Q(t) = \frac{\ddot{a}\dot{a}^2}{\dot{a}^3}, \\ X(t) &= \frac{\ddot{a}\dot{a}^3}{\dot{a}^4}, \quad Y(t) = \frac{d^5 a}{dt^5} \frac{a^4}{\dot{a}^5}, \quad Z(t) = \frac{d^6 a}{dt^6} \frac{a^5}{\dot{a}^6}. \end{aligned}$$

Itt $H(t)$ a Hubble-paraméter, $q(t)$ a lassulási paraméter, $Q(t)$ „jerk” azaz „hirtelen rántás”, $X(t)$ „snap” azaz „hirtelen mozdulat”, $Y(t)$ „crackle” azaz „ropogás”, $Z(t)$ „pop” azaz „pattogás”, valamint magasabb rendű idő deriváltjai is lehetnek kozmológiai paraméterek [84]-[87]. A $q(t)$ lassulási paraméter mai értéke alapján lehet eldönteni, hogy a jelenben az univerzum tágulása lassul ($q_0 > 0$), vagy gyorsul ($q_0 < 0$).

Tekintve, hogy a detektált foton ($ds^2 = 0$) radiálisan terjed ($d\theta = 0$, $d\varphi = 0$), jövő irányítottságú és $\kappa = 0$, akkor

$$(1+z) = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)},$$

azaz

$$(1+z) = \frac{a_0}{a(t)},$$

ahol ν_e a foton kibocsájtáskori frekvenciája, ν_o a foton megfigyelt frekvenciája, t_e a foton kibocsájtásának időpontja, t_o a foton megfigyelésének időpontja, $a_0 = a(t_o)$. A luminozítás távolságot a

$$d_L \sim a_0 r(z) (1+z) \tag{1.4}$$

adja meg, ahol $a_0 r(z)$ a szögátmérő távolságból származtatható [88]-[90]. FLRW téridő

esetén az (1.4) összefüggésben

$$r(z) = \begin{cases} \sin \left[\int_{t(z)}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \right] , & \text{ha } \kappa = +1 \\ \int_{t(z)}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} , & \text{ha } \kappa = 0 \\ \sinh \left[\int_{t(z)}^{t_o} \frac{dt}{a(t)} \right] , & \text{ha } \kappa = -1 . \end{cases}$$

Amennyiben $\kappa = 0$, úgy a

$$d_L \sim \frac{(1+z)}{H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^1 dx \left[x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_\kappa x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_R x^{-4}} \right]^{-1}$$

a luminozítás távolság [91].

Az Ia típusú szupernóva megfigyelések során a

$$d_L \sim \frac{1}{H_0} \left[z + z^2 \frac{(1-q_0)}{2} \right]$$

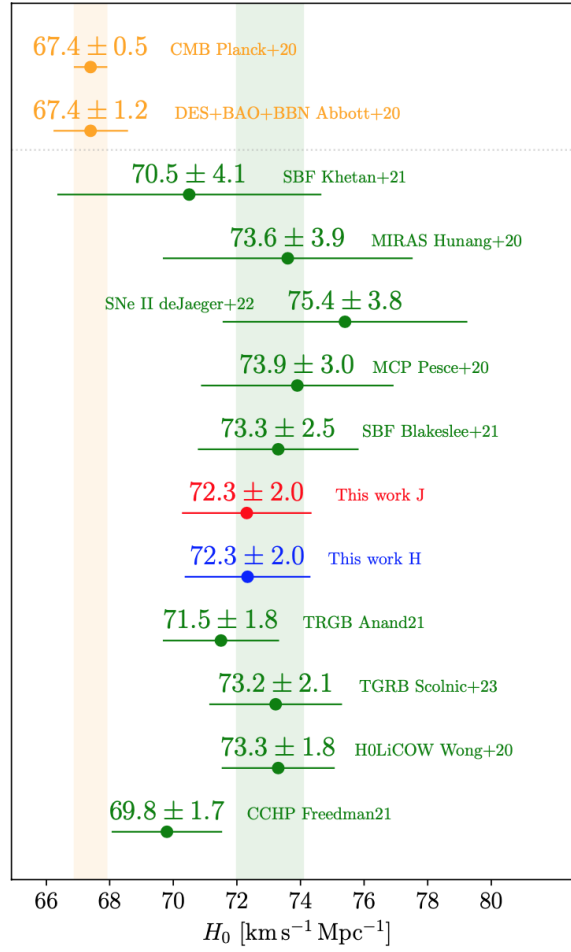
közelítést alkalmazták, amely segítségével a lassulási paraméter

$$q_0 \sim \frac{1}{2} \sum_J \Omega_J (1 + 3w_I) .$$

A mérésekből a $q_0 \sim -0,55$, valamint a $H_0 = 74,8 \pm 3,1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ értékeket kapták [80], [81], ahol $J = \Lambda, \kappa, M, R$ és $w_J = p_J/\rho_J$. Az univerzumban megtalálható anyagformák sűrűségét és a kozmológiai paramétereket több száz nagy vöröseltolódású ($z \sim 1$) Ia típusú szupernóva megfigyelésből származtatták. Ezen szupernóva megfigyeléseket például a SuperNova Legacy Survey (SNLS) [92], Hubble Teleszkóp [93] és az ESSENCE (Equation of State: SuperNova trace Cosmic Expansion) [94] felmérések végeztek.

A késői univerzum gyorsulva tágulásának megállapítása után köztudottá vált, hogy a homogén, izotróp univerzum a barionikus anyagon és a hideg sötét anyagon kívül sötét energiát is tartalmaz. A gravitációsan taszító sötét energiát először a Λ kozmológiai konstanssal vezették be, amelyet a Λ CDM ($\Lambda \rightarrow p_{DE} = -\rho_{DE}$, $w_{DE} = -1$, CDM $\rightarrow p_{CDM} = 0$, $\Omega_M = \Omega_b + \Omega_{CDM}$) modellnek, vagy standard kozmológia modellnek neveznek.

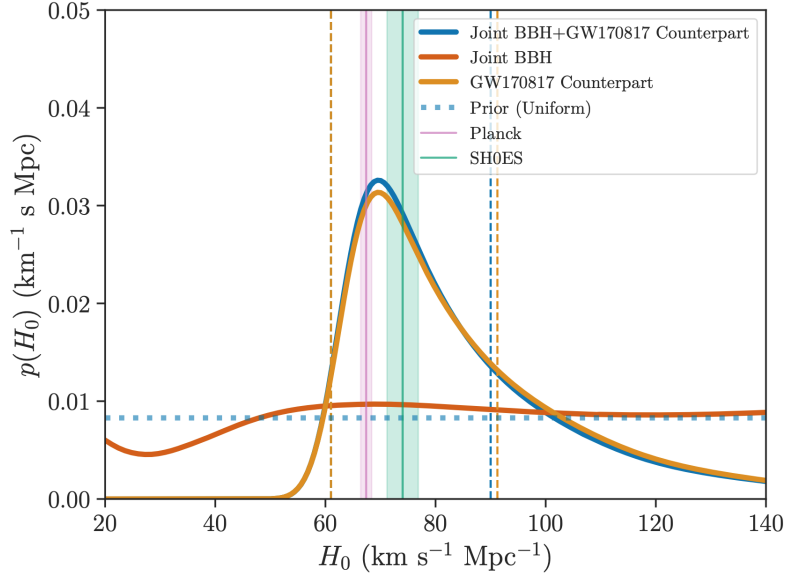
Az Ia típusú szupernóva megfigyelések feldolgozásával lehetőség adódott a kozmológiai paraméterek CMB és BAO mérésektől független meghatározására. A Planck Kollaboráció és a BAO mérései alapján a Λ CDM modellre kapott $H_0 = 67,4 \pm$



5. ábra. Az ábrán a CMB (narancssárga) és Ia típusú szupernóva (zöld) megfigyelésekből származtatott H_0 értékek összehasonlítása látható a [96] folyóiratcikk szerzőinek eredményeivel (piros, kék).

$0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [9] azonban hibahatáron kívül eltér a Hubble Teleszkóp és a SH0ES kutatócsoport Ia típusú szupernóva (UV-IR) megfigyeléseiből származtatott $H_0 = 73,30 \pm 1,04 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ értékétől [95]. Számos kollaborációt és kutatócsoportot foglalkoztat napjainkig a H_0 meghatározása, de jelenleg sem lehet tudni, hogy az Ia típusú szupernóvák megfigyeléseiből vagy a CMB és BAO mérésekből származó eredmények adják meg a valódi H_0 -t. Ezt nevezik Hubble-feszültségnek („Hubble-tension”), amely feloldása érdekében tett kísérleteket az 5. ábra szemlélteti [96].

A Hubble-feszültség végső eldöntését remélték egy további, az eddigiektől eltérő mérési módszer biztosításával, például a gravitációs hullámok mérésével, amelytől ígéretes



6. ábra. Az ábrán a Planck (levendula), a SH0ES (türkiz), továbbá a neutroncsillag kettős összeolvadásából származó GW170817 gravitációs hullám eseményből és elektromágneses társ-eseményéből (kék) származtatott H_0 értékek összehasonlítása látható a [104] folyóiratcikk alapján. A GW170817 esemény és a társ-esemény hibáját a függőleges kék és narancssárga szaggatott vonalak jelölik.

eredményeket vártak a sötét anyag kérdésben is (primordiális fekete lyukak egybeolvadásának detektálása, sztochasztikus gravitációs hullám háttér). A gravitációs hullám a Minkowski metrika elsőrendű perturbációja esetén a vákuum Einstein-egyenlet megoldása. A gravitációs hullám egy h_+ plusz és $h_\times$ kereszt polarizációból áll, amely a téridő két pontja közötti távolság periodikus változása. A gravitációs hullám fénysebességgel terjed, viszont eltérően az elektromágneses sugárzástól, a forrása a tömegeloszlásra vonatkozó kvadrupól-momentum változás. Az első kettős rendszert alkotó pulzár detektálása és egyúttal a gravitációs hullám létezésének első, de közvetett észlelése R. A. Hulse és J. H. Taylor nevéhez köthető az 1974-1975-es években [97]. A mérés során nagy pontossággal igazolták egy neutron csillagból és egy pulzárból álló kettős forgási sebességének időbeli változásának elméleti jóslatát, amit a rendszer által kisugárzott gravitációs hullám okoz. Az első, közvetlen fekete lyukak összeolvadásából létrejött gravitációs hullám rögzítése az általános relativitáselmélet után egy évszázaddal később, 2015-ben történt [98]. A gravitációs hullám esemény detektálását a LIGO majd az aLIGO (advanced LIGO) kollaboráció végezte, amelyek műszerrendszerét és infra-

struktúráját évtizedekig építették. Az aLIGO detektorrendszer két lézer interferométer Livingston és Hanford területén. A gravitációs hullám esemény $\sim 10^{-18}m$ periodikus távolságváltozást okozott a detektorok karjaiban. Ezt azóta számos további gravitációs hullám detektálás követte, amelyek két fekete lyuk, egy fekete lyuk és egy neutron csillag, vagy két neutron csillag összeolvadásából jöttek létre [99]-[103]. Később további gravitációs hullám detektorokat építettek, ezek a Pisa melletti Virgo detektor és Japánban a KAGRA detektor. Habár az aLIGO, a Virgo és a KAGRA megfelelő érzékenységgű a gravitációs hullám detektáláshoz, viszont a Hubble-feszültséget nem tudta feloldani, mivel az aLIGO és Virgo adatai alapján $H_0 \sim 68,7^{+17,0}_{-7,8} km.s^{-1} Mpc^{-1}$ [104]-[107], amelyet a 6. ábra mutat be.

1.3. Módosított gravitációelméletek

A sötét anyagként és sötét energiaként értelmezett megfigyelési eredmények magyarázatának egy másik irányát képviselő elméletek az általános relativitáselmélet (esetenként a Newton-i gravitáció [108], [109]) módosítását javasolják. Ezek szerint nem új anyag- vagy energiaformák bizonyítékai a megfigyelések, hanem annak, hogy nem az általános relativitáselmélet a megfelelő elmélet, amely leírja az univerzum dinamikáját asztrofizikai és kozmológiai léptékben.

Egy általános relativitáselméleten túli elmélet megalkotásának számos módja van, például: egy, kettő, s db dimenzós bővítéssel {Klauza–Klein gravitáció [110], [111], Dvali–Gabadadze–Porrati (DGP) [112], ún. Dark Dimension (DD) forgatókönyvek [113] és egyéb Brán elménetek [114]}; a metrikus tenzor szabadsági fokai mellett az elmélet kiegészítése skalármezővel {Galileon elméletek, Horndeski elméletek, Kinetik Gravity Braiding vagy KGB elméletek, Einstein–Dilaton–Gauss–Bonnet gravitáció [115]}, vektormezővel {Einstein–æther gravitáció [116]}, tenzorral {Bimetric elméletek [117], Multimetric elmélet [118]}, esetleg ezek kombinációjával vagy megtöbbszörözésével {Tensor-Vector-Scalar azaz TeVeS gravitációs elméletek [119], két skalármezőt tartalmazó k -eszencia elmélet [120]}; tömeges gravitonnal {Massive Gravity [121]}; az általános relativitáselmülethez képest magasabb rendű görbületi tagok behozásával {Hořava–Lifschitz gravitációs elmélet [122], [123], $f(R)$ gravitáció}, nem-lokális operátorok hozzáadásával {Non-local gravitációs elméletek [124]}; stb. A módosításokat szűkségszerű úgy bevezetni, hogy az adott új elmélet Naprendszer léptékben az Einstein-i gravitációt adja és megfeleljen a megfigyelésekből adódó kényszereknek.

Az általános relativitáselmélet publikációja után pár évvel egyrészt a tudományos kíváncsiság által vezérelve [125], másrészt az Einstein–Hilbert hatás nem-renormalizálhatóságának megoldása érdekében korrekciós tagok bevezetésével [126], [127] jelentek meg az első olyan – Extended Theory of Gravity (ETG) névvel összefogott – elméletek, amelyek a Ricci-skalár mellett/helyett magasabb rendű görbületi tagokat ($R^{ab}R_{ab}$, $R^{abcd}R_{abcd}$, $R\Box R$, stb.) is tartalmaztak. Ezeknek az elméleteknek egy ága az $f(R)$ elmélet, amelyben az R Ricci-skalárt egy tőle függő általános függvénnyel helyettesítik. A metrikus $f(R)$ elméletek Lagrange-sűrűsége az

$$L_{f(R)} = f(R)$$

alakú, ahol

$$f(R) = \dots + \frac{\alpha_2}{R^2} + \frac{\alpha_1}{R} - 2\Lambda + R + \frac{R^2}{\beta_2} + \frac{R^3}{\beta_3} \dots$$

és az α_i , β_i konstansok. Később újabb alternatívák jelentek meg: a Palatini $f(\mathcal{R})$ gravitáció [128], és a metric-affin $f(R)$ gravitáció [129], [130].

Az ETG esetén, viszont instabilitások is felmerültek [131]. Közülük kiemelendő figyelmet kapott (de nem az egyetlen) az Ostrogradsky-instabilitás, amelyre sokkal korábban, 1850-ben M. V. Ostrogradsky már rámutatott [132], [133]. Levezette, hogy a változók elsőrendnél magasabb rendű időderiváltjait tartalmazó Lagrange-függvényből (pl. $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x})$ vagy $\mathcal{L}(\phi^a, \dot{\phi}^a, \ddot{\phi}^a)$) származtatott Hamilton-függvény lineárisan instabil. Ezt a [134] hivatkozásban ismertették, amelyben a $\ddot{\phi}$ másodrendű időderiváltat tartalmazó Lagrange-függvény első tagjának $(2-1)$ szorzásával, a $\ddot{\phi} = \psi$ változócserével, majd egy teljes időderivált elhagyásával, végül a $q = (\phi + \psi)/\sqrt{2}$, $Q = (\phi - \psi)/\sqrt{2}$ újabb változócserével ([134] folyóiratcikk (2), (3) egyenletek) az

$$\mathcal{L} = -\frac{b}{2}\dot{q}^2 + \frac{b}{2}\dot{Q}^2 - U(\phi) \quad (1.5)$$

csak elsőrendű időderiváltakat tartalmazó Lagrange-függvényt alakították ki. Az (1.5) egyenletben a negatív előjelű kinetikus tagot hívják „ghost”, azaz „szellem” instabilságnak.

Az első, skalármezővel módosított gravitáció elmélet P. Jordan dolgozta ki, amelyben a φ skalármező a $\varphi^\gamma R$ nem minimális csatolási tagon és egy kinetikus tagon keresztül jelenik meg a gravitációs hatásban, ahol $\gamma = \text{konst}$ [135], [136]. P. Jordan skalár-tenzor elméletére alapozva C. Brans és R. H. Dicke az

$$L_{BD} = \varphi R - \frac{\omega}{\varphi} g^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi - V(\varphi)$$

($\gamma = 1$) Lagrange-sűrűséget vezetett be a [137] folyóiratcikkben, ahol ω dimenziómentes csatolási konstans és a φ skalármező reciproka arányos az effektív gravitációs állandóval. Amennyiben $V(\varphi) = 0$ és $\omega \rightarrow \infty$, úgy a származtatott mozgásegyenlet az

Einstein-egyenlet. Brans és Dicke szerint „in any sensible theory ω must be of the general order of magnitude of unity”, azaz az ω csatolási konstansnak egy nagyságrendnyinek kell lennie, ellenkező esetben elhanyagolható mértékben térne el az általános relativitáselmélettől. Az 1947-ben rögzített Merkúr perihélium vándorlás szöge alapján 8%-os hibával $\omega \gtrsim 6$ nagyságot adták meg [137], [138]. Az ω csatolási konstans értékét később a bolygók perihélium vándorlásának és a Shapiro-késés (radarvisszhang) mérésével pontosították, például: a Viking projekt alapján $\omega \gtrsim 1000$ [139]; a VLBI (Very Long Baseline Interferometry rádiótávcső rendszer) mérései szerint $\omega \gtrsim 3600$ [140], később $\omega \gtrsim 40000$ [141].

Egy skalár-tenzor elmélet megalkotása kiindulhat szimmetriai megfontolásból, amelynek egyik képviselője a Galileon elméletcsalád. A Galileon elmélet megalkotását a sötét energia problémát Λ kozmológiai konstans nélkül megoldó, de ghost-instabilitást mutató DGP 5-dimenziós, „self-accelerating” (azaz „ön-gyorsító”) brán-modell inspirálta [112], [142]. A Galileon elmélet, a klasszikus Galilei csoport analógiájára, a skalármező gradiensére vonatkozó $\partial_a \pi \rightarrow \partial_a \pi + b_a$ eltolás szimmetriával rendelkezik (azaz $\pi \rightarrow \pi + b_a x^a + c$). Az

$$\begin{aligned} L_{Gal} = & c_1 \pi + c_2 X - c_3 \square \pi + c_4 X [(\square \pi)^2 - \nabla_a \nabla_b \pi \nabla^a \nabla^b \pi] \\ & - \frac{c_5}{3} X [(\square \pi)^3 - 3 \square \pi \nabla_a \nabla_b \pi \nabla^a \nabla^b \pi + 2 \nabla_a \nabla_b \pi \nabla^a \nabla^c \pi \nabla^b \nabla_c \pi] \end{aligned}$$

4-dimenziós Lagrange-sűrűség a π skalármező másodrendű deriváltjait tartalmazza, Ostrogradsky-instabilitásoktól mentes, továbbá $c_1, \dots, c_5 = \text{konst.}$, $X = -\frac{1}{2} \nabla_a \pi \nabla^a \pi$, ∇_a a 4-es kovariáns deriválás, míg $\square = g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ a d’Lambert operátor [143]. Ez a Lagrange-sűrűség módosítható újabb tagok bevezetésével, amelyek mellett a mező-egyenletek továbbra is mind a metrikára, mind a skalármezőre másodrendű dinamikai egyenleteket adnak. Ekkor kapjuk a kovariáns Galileon elméletet [144], [145], ahol

$$\begin{aligned} L_{kGal} = & c_1 \pi + c_2 X - c_3 X \square \pi + c_4 X \left[\frac{1}{2} X R + (\square \pi)^2 - \nabla_a \nabla_b \pi \nabla^a \nabla^b \pi \right] \\ & - c_5 X \left[-X G^{ab} \nabla_a \nabla_b \pi + \frac{1}{3} (\square \pi)^3 - \square \pi \nabla_a \nabla_b \pi \nabla^a \nabla^b \pi \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \nabla_a \nabla_b \pi \nabla^a \nabla^c \pi \nabla^b \nabla_c \pi \right]. \end{aligned}$$

Ennél még általánosabb esetben vezették be az ún. általánosított Galileon (azaz generalized Galileon) elméletet, amely ugyancsak ghost-mentes, míg a Lagrange-sűrűség $\nabla_a \nabla_b \pi$ -ben polinomiális [145]. Az általánosított Galileon elmélet 4-dimenzióban meg egyezik a Horndeski elmélettel, amiben a hatás az

$$S^H = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L^H, \quad (1.6)$$

ahol az

$$L^H = \sum_{K=2}^5 L_K^H, \quad (1.7)$$

Horndeski Lagrange-sűrűség egy összegből épül fel [146]. Ennek tagjai az

$$L_2^H = G_2(\phi, X), \quad (1.8)$$

$$L_3^H = G_3(\phi, X)\square\phi, \quad (1.9)$$

$$L_4^H = G_4(\phi, X)R - 2G_{4X}(\phi, X) [(\square\phi)^2 - \nabla^a\nabla^b\phi\nabla_a\nabla_b\phi], \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} L_5^H = & G_5(\phi, X)G_{ab}\nabla^a\nabla^b\phi \\ & + \frac{1}{3}G_{5X}(\phi, X) [(\square\phi)^3 - 3\square\phi\nabla_a\nabla_b\phi\nabla^a\nabla^b\phi \\ & + 2\nabla_a\nabla_b\phi\nabla^a\nabla^c\phi\nabla^b\nabla_c\phi]. \end{aligned} \quad (1.11)$$

A $G_I(\phi, X)$ és $I = 1, \dots, 5$ általános függvények, a G_{IX} a G_I függvény X szerinti deriváltja. A Horndeski elmélet a legáltalánosabb egy skalármezőt tartalmazó módosított gravitációelmélet, amely Ostrogradsky-instabilitástól mentes, azaz ezen elméletben a metrikára és a skalármezőre is legfeljebb másodrendű dinamikai egyenletek vonatkoznak. A skalár-tenzor elméletek egy nagy csoportja a Horndeski elmélet részét képezi, például az $f(R)$ gravitáció legegyszerűbb változatánál $G_3 = 0 = G_5$ és $G_2 = V(\phi)$, $G_4 = \phi$; Brans–Dicke elméleteknél $G_3 = 0 = G_5$ és $G_2 = \frac{\omega}{\phi}X - V(\phi)$, $G_4 = \phi$ stb. (ld. [134], [147]). Léteznek a Horndeski elméleteken túli elméletek, ilyenek az ún. Degenerate Higher Order Scalar-Tensor (DHOST) gravitációs elméletek [148], a Gleyzes–Langlois–Piazza–Vernizzi (GLPV) elméletek [149], [150] stb. A Horndeski Lagrange-sűrűség összegében szereplő tagok bizonyos mechanizmusokat írnak le, amelyek a továbbiakban lesznek bemutatva.

A megfigyelések alapján a Λ CDM modell által bevezetett sötét energia állapotegyenlete a WMAP, eCMB, BAO, H_0 és SNe adatok felhasználásával a következőnek adódott: ha w_{DE} konstans, úgy sík univerzum esetén az értéke $-1,71 < w_{DE} < -1,084 \pm 0,063$; nem sík univerzumban a $w_{DE} > -1,122^{+0,068}_{-0,067}$; ha az állapotegyenletet a $w(a) = w_0 + w_a(1-a)$ módon adják meg, akkor sík univerzumban a $w_0 = -1,17^{+0,13}_{-0,12}$, míg $w_a = 0,35^{+0,50}_{-0,49}$ [34]. A 20. század második felétől a Λ kozmológia konstans, az univerzum vákuum energiasűrűségével, azaz null-ponti energiájával azonosították. Azonban a kozmológiai megfigyelésekből adódó energiasűrűsége a Λ kozmológiai konstansnak ~ 120 nagyságrenddel kisebb volt, mint amit a kvantumtérelmélet keretei között származtattak [151]. A feltűnő különbség miatt a Quintessence elméletben egy „dinamikus kozmológiai konstans” vezettek be, amelynek a sötét energia helyettesítése

mellett a korai univerzum inflációjának leírása is célja volt [152], [153]. Az elméletben a Q önkölcsönható skalármező (Q , mint „quintessence”, azaz kvintesszencia) dinamikája a $V(Q) \sim Q^{-\alpha}$ potenciál által van meghatározva ($\alpha > 0$). Hátránya, hogy a kapott kvintesszencia energiasűrűség és nyomás csak folyamatos finomhangolás útján illeszkedik a CMB és BAO megfigyelési eredményekből kapott sötét energia fejlődéshez, továbbá a $w_{DE} > -1$ állapotegyenletet eredményezi [154], [155]. A kvintesszencia bevezetése ellenére meglévő kozmológiai problémák megoldása érdekében alakultak ki az ún. Unified Dark Energy (UDE) vagy Unified Dark Matter (UDM) modellek. Ezek szerint a sötét anyag és a sötét energia ugyanazon „folyadék” különböző állapotai. Ennek leírásához egzotikus állapotegyenleteket kerestek és vizsgáltak meg az univerzum különböző időszakaira nézve [156]–[160]. Egy másik megközelítés során a Lagrange-sűrűséget egy skalármezőre vonatkozó nem-lineáris kinetikus taggal egészítették ki, így kapva a k -esszencia (k -essence) elméletet [161], [162]. A k -esszencia elméletben a Lagrange-sűrűség az

$$L_{k\text{-essence}} = \frac{1}{6}R - L_k(\varphi, X) + L_M(g^{ab}, \Psi) ,$$

amelyben

$$L_k = K(\varphi) \tilde{p}(X) , \quad X = \frac{1}{2} \nabla_a \varphi \nabla^a \varphi , \quad K(\varphi) \sim \frac{1}{\varphi^2}$$

a $8\pi G/3 = 1$ egységben, továbbá

$$\rho_k = 2X\tilde{p}_X - \tilde{p} , \quad p_k = K(\varphi) \tilde{p}(X) .$$

A dinamikus k -mező a sugárzás-dominált időszakra jellemző állapotegyenlettel ($w_k \sim 1/3$) rendelkezik. A porra vonatkozó állapotegyenletet azonban nem tudja teljesíteni, mivel $z = 1000$ esetén befagy, ekkor $w_k \sim -1$. Az anyag-dominált időszak végén, nem teljesen igazodva a mérési eredményekhez ($z \sim 3-5$ estén kezd el w_k növekedni), lassan beindítja az univerzum gyorsulva tágulását. A k -esszencia elméletnek is megjelentek további alternatívái, például k -esszencia UDM [163], „fantom” („phantom”) k -esszencia [164], „fantom” brán kozmológia [165], k -esszencia két skalármező bevezetésével [120]. A k -esszencia elmélet tagjainak legnagyobb része a Horndeski elmélet alesetei. Ezen elméletek a megfelelő L_2^H választásával vezethetők be, így a Horndeski elméletben az L_2^H Lagrange-sűrűség írja le a kései univerzum gyorsulva tágulását.

A Horndeski elméletben az L_3^H Lagrange-sűrűség a különböző árnyékolási tagokat tartalmazza, amely biztosítja az Einstein-i elmélet érvényességét Naprendszer léptékben. Vainshtein nevéhez köthető az első árnyékolási mechanizmus felismerése, amikor az ún. Fierz–Pauli tömeges graviton elmélet van Dam–Veltman–Zakharov (vDVZ) diszkontinuitását próbálta megoldani [166]–[168]. A vDVZ diszkontinuitás szerint, bármilyen kis graviton tömeg esetén a Fierz–Paul elmélet jelentős eltérést mutat az általános

relativitáselmélettől, például a fényelhajlás, vagy a perihélium vándorlás mértékében. Vainshtein megállapította, hogy a vDVZ diszkontinuitás a gravitációs forrástól bizonyos (r_V , azaz Vainshtein-sugár) távolságon belül nem linearitást okoz a perturbációs egyenletekben. Ennek megoldásaként bevezetett egy r_V alatt domináns és a nem linearitást kompenzáló tömeg tagot, amely r_V felett elhanyagolható [134], [169], [170]. Később Vainshtein módszerét nem tömeges gravitációs elméletekre is alkalmazták, kifejezetten Galileon és Horndeski elméleteknél annak érdekében, hogy a gravitációs források egy bizonyos környezetében az általános relativitáselmélet határesetét kapják vissza [134], [171]. Tömeges skalármező esetén az árnyékoló mechanizmus kialakítását az ún. chameleon elméletek tárgyalják [172], [173]. Léteznek további árnyékolási módszerek például a k -Mouflage [174] és symmetron elméletek [175], [176].

Hasonlóan a kvantumtérelmélet ún. effektív térelméleti közelítéséhez (Effective Field Theory, EFT), a módosított gravitációelméletek tekinthetők úgy is, mint az Einstein–Hilbert hatás magasabb rendű korrekciói. A gravitáció EFT közelítését először az egy skalármezőt tartalmazó inflációs modellekben alkalmazták. A kozmológiai perturbációkat az ún. Goldstone bozon idő transzláció sértése alapján vezették be [177]–[180], amely leírás a Standard Modell részecskefizikában az $SU(2) \times U(1)$ spontán szimmetriasértésből származó Higgs bozon analógiájára történ [181]–[185]. Az FLRW téridőben a kozmológiai perturbációs számítás során az inflációt generáló skalármező időfüggő, amely perturbációkra változatlan marad a $\delta\phi(t, \bar{x}) = 0$ unitáris mérték választásával. Ebből a mértékválasztásból következik, hogy a $\phi = \text{konst.}$ meghatároz egy időskálát, továbbá a $3 + 1$ téridőfelbontás térszerű 3-dimenziós hiperfelületekre merőleges időszerű n_a normálisát. Az EFT alapján az általános relativitáselmélet a jelenleg még nem ismert, a gravitációt kvantum skálán leíró, nagy energiás térelmélet alacsony energiás közelítésének tekinthető [186]. Az említett nagy energiás térelméletek például a Loop Quantum Gravity (LQG) [187], DD [113], M-elmélet [188], és egyéb elméletek [189]. Alacsony energiás EFT-nek tekinthetők például a gravitációt klasszikusan kezelő módosított gravitációelméletek, így a Horndeski elmélet is, a változók jó megválasztásával [190]–[197].

Már a fentebb említett módosított gravitációelméletek száma is sok, így felmerül a kérdés „Melyik a jó elmélet?“, „Szükséges-e, hogy ennyi legyen?“, erre viszont nem létezik egyértelmű válasz a jelenlegi ismeretek alapján. A megfigyelésekből származtatott kényszerekkel dönthető el, hogy az új elméletek közül, melyek megfelelők a valóság leírására. Az „egészséges“ módosított gravitációelméletekre rámutató megfigyelési eredmény volt az első gravitációs hullám mérés, az első neutroncsillag-fekete lyuk kettőstől származó gravitációs hullám és gamma kitörés (gamma-ray burst, GRB) detektálása, valamint az Event Horizon Teleszkóppal felvett első fekete lyuk fénykép [198]–[209]. Ez

utóbbi esetben még szükséges megvárni a nagyobb felbontású képalkotást a pontosabb paraméter meghatározásokhoz. Szintén módosított gravitációelmélet „szűrővé” válhat a jövőben a gravitációs hullám lecsengési fázisának mérése, azaz a gravitációs hullám visszhangok (echo) megfigyelése, mivel a visszhang alakja elméletenként változik [210]. A módosított gravitációelméleteket jelentősen korlátozta a gravitációs hullám és Fermi detektorokkal érzékelt GW170817 és GRB170817A események között mért időkülönbség, amelyből nagy pontossággal határozták meg a gravitációs hullám terjedési sebességét [211], [212]. Az ebből megadott EFT és további paraméter értékek [213] alapján a Horndeski családban a $G_4(\phi, X) = G_4(\phi)$ és $G_5(\phi, X) = \text{konst.}$ korlátokat adták meg, amelynek például a KGB [214], a k -eszencia [215], az $f(R)$ és a Brans–Dicke elméletek megfelelnek. A GW170817 és GRB170817A események alapján kizárták a tömeges gravitációs elméleteket, valamint a magasabb rendű görbületi tagokat tartalmazó elméleteket szűkítették. A kényszerek folyamatos pontosítása elméletcsoportokként jelenleg is zajlik a növekvő megfigyelési események alapján [216]. A gravitációs hullám terjedési sebességével kapcsolatos $c_T(k)$ paraméter szerint kizártnak és korlátozottnak kimondott elméleteknek lehet létjogosultságuk extrém erős gravitációs körülmények között. Ennek oka, hogy az aLIGO és Virgo detektorok $10 - 100\text{ Hz}$ közötti frekvencia tartományban mérnek, azonban az EFT által jósolt sötét energia skála 20 nagyságrenddel kisebb. Emiatt ezen elméletekre a jövőben felépülő és $10^{-1} - 1\text{ Hz}$ frekvencia tartományon belül mérő LISA (Laser Interferometer Space Antenna) által rögzített, szupermasszív fekete lyukak összeolvadásából származó gravitációs hullám mérések jelentenek majd kényszereket [217]-[223].

Az újszerű elméletekben kérdés, hogy megjelennek-e olyan objektumok (például fekete lyukak), mint amik az általános relativitáselméletben, ha igen, akkor azok stabilak-e. Szintén érdekes kérdés, hogy a kozmológia jellegű megfigyelésekkel illesztkednek-e ezek a modellek sötét energia és/vagy sötét anyag nélkül, azaz lehet-e a sötét anyagnak, illetve a sötét energiának tulajdonított jelenségeket alternatív gravitációs elméletként felfogni. Ezért érdemes a módosított gravitációelméletekkel generált fekete lyuk megoldások megkeresése különböző szimmetriával rendelkező téridőkben (gömbszimmetrikus és sztatikus, tengelyszimmetrikus és forgó, esetleg töltéssel rendelkező), perturbációszámítással stabilitásvizsgálat elvégzése, a származtatott gravitációs hullámok elemzése, a fényelhajlás vizsgálata, kozmológiai modelleknél a struktúráképződés tanulmányozása stb. [224]-[231].

1.3.1. Fekete lyukak

A fekete lyukak létezését elsőként J. Michell feltételezte 1784-ban, kettős és hármas rendszerek vizsgálatakor. Megállapította, hogy az univerzumban lehetnek olyan nem világító objektumok, amelyek átmérőjükhöz képest olyan sűrűek, hogy az információ fény formájában nem tudna eljutni egy megfigyelőhöz, ezért ezen objektumok jelenlétére csak a társcsillag mozgásából lehet következtetni. J. Michell publikációjától függetlenül, 10 évvel később P. S. Laplace ugyanezt írta le. Azonban a fekete lyukak elméleti levezetésére több, mint 100 évet kellett várni [232].

A fekete lyukak matematikai alapjait az általános relativitáselmélet biztosította, aminek a felhasználásával K. Schwarzschild levezette a gömbszimmetrikus, sztatikus vákuum téridő fekete lyukat [4]. A fekete lyuk megnevezést később, J. A. Wheeler adta. A fekete lyuk a téridő egy olyan régiója ahonnan a fény sem tud kijutni, azaz „region of no escape” vagy „a region of spacetime in which gravity is so strong that light cannot escape” [233], [234]. A „region of no escape” a fekete lyuk ún. eseményhorizontja, amely mögött vagy van szingularitás, vagy nincs. Az eseményhorizonton kívül számos különböző horizont definíció ismert, például látszó (apparent) horizont, csapdázó (trapping) horizont, Killing-horizont, Rindler-horizont, kauzális horizont stb [235]. Azonban sztatikus vagy stacionárius fekete lyukak esetén a látszó, a csapdázó és a Killing horizont egybe esik az eseményhorizonttal. A téridő tartalmaz szingularitást, amennyiben legalább egy metrika komponens és legalább egy görbületi skalár (például a $K = R^{abcd}R_{abcd}$ Kretschmann-skalár) a végtelenbe tart a téridő egy tartományában. A gömbi koordinátában megadott

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2Gm}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (1.12)$$

Schwarzschild téridőben fizikai szingularitás van az $r = 0$ -ban, mivel $K \sim r^{-6} \rightarrow \infty$. A Schwarzschild téridő eseményhorizontja az $r_s = 2Gm$ Schwarzschild-sugárnál helyezkedik el, ahol $g_{rr} \rightarrow \infty$, de a K skalár nem divergál. Ez a Schwarzschild koordinátákban egy koordináta szingularitás. A metrika vizsgálatakor érdemes a fény terjedését követő radiális null geodetikusokhoz rendelt ($ds^2 = 0$, $d\theta = 0$, $d\varphi = 0$) ún. Eddington–Finkelstein koordinátákba való áttérés [236]. Ekkor az (1.12) ívelemnégyzet az $u = t - r^*$ retardált (kimenő) és a $v = t + r^*$ avanzsált (bemenő) idő koordinátákban a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2$$

vagy

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (1.13)$$

alakú, ahol $r^* = \int \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} dr$ a „teknőc” koordináta. Az (1.13) alapján az Eddington–Finkelstein koordinátákba írt g_{vv} metrika komponense csak $r = 0$ esetén tart a végtelenbe. Radiálisan terjedő fényjelet tekintve az (1.13) ívelemnégyszet az

$$0 = \left[\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right) dv - 2dr \right] dv \quad (1.14)$$

egyenletre egyszerűsödik, amelyből

$$dv = 0 \rightarrow v = \text{konst.}$$

és

$$\frac{dv}{dr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{Gm}{r} \right)^{-1}.$$

Legyen $\bar{t} = v - r$ egy újra definiált Eddington–Finkelstein koordináta [91], ekkor az (1.14) egyenletből

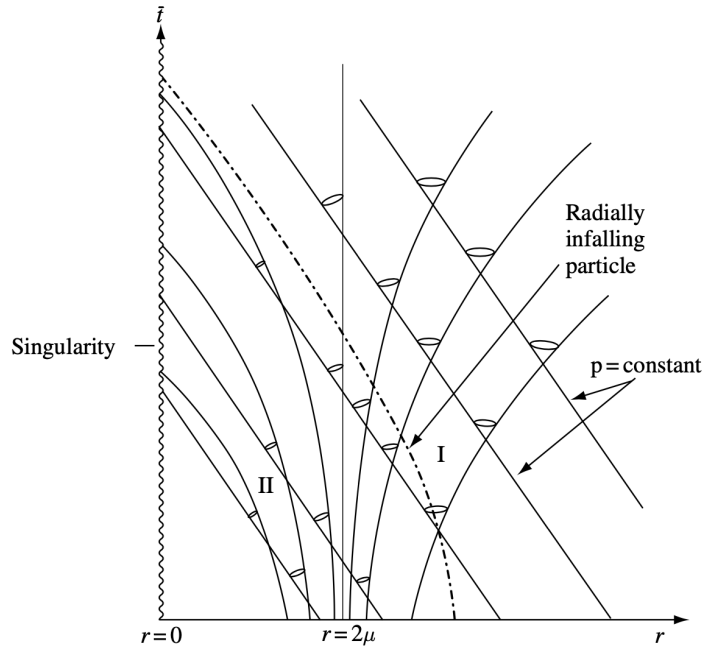
$$\begin{aligned} \bar{t} + r &= \text{konst.}, \\ d\bar{t} &= \frac{(r + 2Gm)}{(r - 2Gm)} dr, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \bar{t} &= -r + \text{konst.}, \\ \bar{t} &= r + 4Gm \ln \left| \frac{r}{2Gm} - 1 \right| + \text{konst.} \end{aligned}$$

Ezek alapján az $r = r_s$ esetén a foton pályája egy függőleges egyenes, azaz a fény a horizonton „ragad”. Ha $r < r_s$ a foton az r_s horizont alatt marad és a szingularitás felé tart. A Schwarzschild téridőben az r_s eseményhorizontnak nevezett matematikai határ(felület) elválasztja a téridőnek az **I**: $r_s < r < \infty$ és **II**: $0 < r < r_s$ részeit, ahol a foton **I** $\rightarrow$ **II** haladása megengedett, míg a **II** $\rightarrow$ **I** nem megengedett. Ezt a 7. ábra szemlélteti (lásd bővebben a [91], [233], [237], [238] hivatkozásokban).

A gömbszimmetrikus, sztatikus Schwarzschild megoldás után sok figyelem összpontosult az egzakt megoldások vizsgálatára. A fekete lyukak létezését véglegesen akkor fogadták el, amikor J. R. Oppenheimer és H. Snyder egy nagytömegű csillag fejlődésének leírásakor a gravitációs kollapszus végálatotaként a Schwarzschild megoldást kapta [3], [239].



7. ábra. A Schwarzschild fekete lyuk szerkezete az újra definiált Eddington–Finkelstein koordinátákban. A hullámos függőleges vonal jelöli a szingularitást (singularity) $r = 0$ -ban. A függőleges egyenes vonal $r = 2\mu$ -nél a fekete lyuk horizontja. A pont-vonal egy radiálisan a fekete lyukba eső részecske (radially infalling particle) pályája [91].

Majdnem Schwarzschild-al egy időben H. Reissner és G. Nordström egymástól függetlenül mutatták be a gömbszimmetrikus, sztatikus és töltéssel rendelkező téridő vákuum megoldásait. A töltés és a tömeg arányától függően a Reissner–Nordström téridő tartalmazhat kettő, vagy egy horizonttal rendelkező fekete lyukakat, továbbá horizont nélküli ún. csupasz szingularitásokat [91], [240]–[242].

Az 1960-as években R. P. Kerr egy komplex null tetráddal felépített ívelemnégyzetel való „kísérletezés” során kapta meg az első tengelyszimmetrikus, forgó fekete lyukat [243]–[248]. A Kerr metrika az $r = 0$ esetében szinguláris, ahol a szingularitás a szimmetriatengely körül, $\theta = \pi/2$ síkban egy a sugarú korong peremén található gyűrű (a felület többi pontja reguláris). Az $m^2 > a^2$ esetén a metrika két koordináta szingularitást tartalmaz, így a gyűrűs szingularitást, egy r_- sugarú belső és egy r_+ sugarú külső eseményhorizont veszi körül. Amennyiben $m = a$, akkor a gyűrűs szingularitást egy eseményhorizont takarja, míg nem rendelkezik horizonttal, ha $m^2 < a^2$ [91], [249]. A Kerr megoldást Newmann általánosította elektromos töltés bevezetésével [251].

A téridő megoldásokra több feltétel is vonatkozik, ezek közül az egyik a kozmikus

cenzor hipotézis, amely szerint csupasz szingularitások nem léteznek az univerzumban, azaz egy valós fekete lyuknak mindig van eseményhorizontja [252]. A hipotézisnek létezik erős és gyenge változata és további pontosításai a kizárandó szingularitásokkal kapcsolatban [253].

Egy másik feltétel a fekete lyukakat jellemző paraméterekre vonatkozik. Egy általános relativitáselméleti fekete lyukat három paraméter határoz meg, az m fekete lyuk tömeg, a q töltés és az $a = hc/Gm$ forgási paraméter, ahol h az egységnyi tömegre jutó impulzusmomentum egy térbeli végtelenben lévő megfigyelő szemszögéből [254]. Ezek alapján a Schwarzschild fekete lyukat m jellemzi, a Reissner–Nordström fekete lyukat az m és q , a Kerr fekete lyukat az m és az a ($a^2 < m^2$), míg a Kerr–Newmann fekete lyukat mindhárom paraméter.

Az általános relativitáselmélet helyébe lépő, vagy azt kiegészítő módosított gravitációelméletek megjelenése új téridő megoldásokat is hozott. Felmerült a kérdés, hogy ezen fekete lyukak mennyiben térhetnek el az általános relativitáselméletben megjelenőktől, valamint a módosított gravitáció elméleti nagy tömegű csillagok végállapotai milyen megoldások lehetnek. Hawking megmutatta, hogy a Brans–Dicke elméletben (úgy, hogy $V(\phi) = 0$) egy csillag végállapotaként előálló fekete lyuknak stacionáriusnak (azaz tengelyszimmetrikusnak vagy sztatikusnak) kell lennie, amely akkor lehetséges, ha a skalármező gradiense zérus, azaz $\phi = \text{konst.}$ Ebből az következik, hogy az így előálló stacionárius Brans–Dicke megoldás azonos az általános relativitáselméletbelivel, tehát ugyanúgy csak az m , q , a paraméterek határozzák meg. Ez az ún. „Nincs-haj tétel”, azaz „No-hair theorem” [255]. A Nincs-haj tétel bizonyítva lett gömbszimmetrikus, sztatikus és aszimptotikusan sík, vagy aszimptotikusan de Sitter téridőkre több skalármezőt tartalmazó elméletekben [256]. Numerikus szimulációkkal igazolták a tétel helyességét sztatikus, d -dimenziós téridő megoldásai esetén, olyan elméletekben, ahol a skalármező úgy csatolódik az Einstein–Hilbert hatásához, hogy teljesíti a szuperszimmetrikus húrelmélet pozitív energia tételét (Positive Energy Theorem, azaz PET) [257]. Sotiriou és Faraoni kimondta a Nincs-haj tételt stacionárius, izolált, aszimptotikusan sík fekete lyukakra az $\omega = \omega(\phi)$ csatolási függvénnyel és $V(\phi)$ potenciállal rendelkező általánosított Brans–Dicke elméletekben [258]. Kovariáns $1 + 1 + 2$ formalizmus alkalmazása mellett egy általános potenciállal rendelkező, nem minimálisan csatolt Klein–Gordon skalármező esetén is igaznak bizonyult a tétel [259]. Sztatikus és aszimptotikusan sík megoldások elemzése során, Horndeski, Horndeski-n túli, Einstein–Scalar–Gauss–Bonnet és Chern–Simons elméletekben, megfigyelésekkel kompatibilis esetekben is azt találták, hogy a kapott fekete lyukaknak vagy nincs haja, vagy „elhanyagolható haja” van. Az utóbbi esetben, ha a skalármező kozmológiailag releváns ($\Omega_\phi \sim \mathcal{O}(1)$), akkor a skalár haj elhanyagolhatóan kicsi lesz a fekete lyuk

környezetében [260].

Galileon elméletekben gömbszimmetrikus, sztatikus téridőknél a tételt szintén igaznak találták, viszont L. Hui és A. Nicolis úgy nyilatkozott, hogy „black holes famously have no hair – except when they do” [261]. A Nincs-haj tétel alóli kivételekre E. J. Weinberg mutatott rá. Úgy gondolta, hogy a tétel általános anyagra és csak asztrofizikai méretű, szabályos szimmetriával rendelkező, stabil fekete lyukakra lett kimondva, ellenben nem vonatkozik például szubatomi méretű vagy egyéb komplex anyag-gravitáció csatolással rendelkező elméletekbeli fekete lyukakra. Állítását bizonyította mágnesesen töltött fekete lyukra spontán szimmetriasértő Yang–Mills–Higgs elméletekben [262]. Hasonló eredményt kaptak nem-Ábeli fekete lyukakra is az Einstein–Yang–Mills elméletekben [263]. Asszimptotikusan sík téridőben minimálisan csatolt, önkölcsönható skalármező esetén exponenciálisan eltűnő skalár hajjal rendelkező sztatikus, izotróp fekete lyukat találtak, ahol a $V(\phi)$ kölcsönható skalárpotenciál negatív értékeket is felvesz (sértve a domináns energiafeltételt) [264]. Konformisan csatolt önkölcsönható tömeges skalármezővel rendelkező elméletben skalár hajjas, sztatikus fekete lyukat is származtattak [265]. Szintén vannak olyan gömbszimmetrikus, sztatikus, hajjas fekete lyukak a Galileon elméletekben, amikor J^r Noether áram komponens zérus (mivel $\nabla_a J^a = 0$), viszont $\partial_r \phi \neq 0$. Ez olyan esetekben állt elő, amikor a Galileon Lagrange-sűrűséghez lineárisan csatolódik a

$$\mathcal{G} = R^{abcd}R_{abcd} - 4R^{ab}R_{ab} + R^2$$

Gauss–Bonnet invariáns, például $G_5 \sim \ln|X| + \bar{G}_5(X)$ [266]. Gömbszimmetrikus, sztatikus téridő esetén származtattak egy elsődleges és másodlagos skalár hajjal rendelkező, aszimptotikusan sík fekete lyuka. Ekkor egy $\phi(t, r)$ skalármezőből felépített Galileon elmélet a $\beta G^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi$ Einstein-tenzorral kialakított tagot tartalmazza ($\beta = \text{konst.}$) úgy, hogy $\partial G_4/\partial X \neq 0$ és $J^r = 0$, míg $\partial_r \phi \neq 0$ [267]. Elsődleges skalár haja van egy fekete lyuknak, ha az m, q, a paraméterektől eltérő ún. skalár töltés is jellemzi. Másodlagos skalár haja van egy fekete lyuknak, ha a metrika olyan eltérést tartalmaz az általános relativitáselméleti vákuum megoldáshoz képest, amely az m, q, a paraméterektől függ [260]. A KGB elméletben (azaz $G_4(\phi, X) = G_4(\phi)$ és $G_5(\phi, X) = 0$) származtattak gömbszimmetrikus, sztatikus hajjas fekete lyuk megoldásokat, amennyiben $G_3(X) \neq 0$ úgy, hogy $J^r = 0$, míg $\partial_r \phi \neq 0$ [268].

Az említetteket összefoglalva tehát elmondható, hogy téridőszingularitás esetén a görbületi tagok közül legalább egy a végtelenbe tart, csupasz szingularitás a valóságban nem létezik, továbbá „a fekete lyukaknak nincs haja, kivéve mikor van”.

1.3.2. Energia-impulzus tenzor alakjai és energiasfeltételek

Az adott gravitációelméleti hatás vákuum megoldásai tartalmazhatnak például fekete lyukakat, horizont nélküli szingularitásokat. Az univerzum anyagának vizsgálatához, viszont szükséges az anyagi hatást is bevezetni. Anyag figyelembevételével a

$$G_{ab} = \kappa^2 T_{ab}^M ,$$

az Einstein-egyenlet, ahol

$$T_{ab}^M = -\frac{2}{\kappa^2 \sqrt{-g}} \frac{\delta L_M}{\delta g^{ab}}$$

az anyag energia-impulzus tenzora, ahol $\kappa^2 = 8\pi G$, $c = 1$, g a metrika determinánsa. Az energia-impulzus tenzorra a

$$\nabla^a T_{ab}^M = 0 \quad (1.15)$$

megmaradási tétel igaz általában.

Az energia-impulzus tenzorok osztályokba sorolhatók és osztálytól függően energiasfeltételeknek felelnek meg, amelyekkel számos könyv és folyóiratcikk foglalkozik [91], [233], [238], [269]-[275]. Az osztályozás szerint, az I-es típusba sorolandó energia-impulzus tenzorok a

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

módon épülnek fel egy E_0, E_1, E_2, E_3 ortonormált bázisban, ahol E_0 időszerű, továbbá ρ és p_μ a folyadékkal együtt mozgó megfigyelő által detektált energiasűrűség és nyomás. Ebbe a típusba tartozik az ideális folyadék energia-impulzus tenzora, amely nyomása izotróp ($p_1 = p_2 = p_3 = p$), ekkor

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab} , \quad (1.16)$$

ahol u_a az ideális folyadék időszerű 4-es vektora ($u_a u^a = -1$). Megjegyzendő, hogy nem ideális folyadék esetén az energia-impulzus tenzor a

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + 2q_{(a} u_{b)} + (p h_{ab} + \pi_{ab}) \quad (1.17)$$

alakba írható. Itt $p = \bar{p} + p_{vi}$ az izotróp nyomás, amely a $\bar{p}$ nem viszkóz és p_{vi} viszkóz tagok összege, $h_{ab} = u_a u_b + g_{ab}$ az u_a -ra merőleges 3-dimenziós tér metrikája, q_a az energiaáram sűrűség, π_{ab} az anizotróp nyomás tenzor ($\pi_a^a = 0$, $\pi_{(ab)} = \frac{1}{2!} (\pi_{ab} + \pi_{ba}) =$

π_{ab}). Továbbá teljesülnek a $h_{(ab)} = h_{ab}$, $h_{ab}u^b = 0$, $\pi_{ab}u^b = 0$ és $q_a u^a = 0$ összefüggések [233], [276].

A II-es típusba tartozó energia-impulzus tenzorok

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} b+k & b & 0 & 0 \\ b & b-k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

alakúak, ahol $k = \text{konst.}$, $b = \pm 1$ megfelelő normálással, továbbá az E_0 és E_1 nullszerű sajátvektorok.

A III-as típusba sorolandók a

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

alakú energia-impulzus tenzorok, ahol az E_0 , E_1 , E_2 nullszerű sajátvektorok.

A IV-es típusba tartoznak a

$$T_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ b & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

alakú energia-impulzus tenzorok ($k^2 < 4b^2$), amelyeknek nincs egyetlen időszerű vagy nullszerű sajátvektora sem, ezért nem fizikaiak.

Az univerzumban ismert anyagfajták energia-impulzus tenzorai nem rendelkeznek negatív energiasűrűséggel, nem jellemeznék olyan tömeges vagy tömegnélküli anyagformát, amelyek fénysebességnél gyorsabban mozognak. A megfigyelések alapján a nem megvalósuló anyagformák kiszűrése érdekében egy energia-impulzus tenzornak a következő feltételeknek kell eleget tennie:

- *Gyenge energiasűrűségfeltétel:* $T_{ab}v^a v^b \geq 0$, azaz bármely megfigyelő által mért energiasűrűség nem negatív. A v^a egy 4-es időszerű egységvektor (vagy fényyszerű, ekkor *null energiasűrűségfeltételről* beszélünk) egy megfigyelő világvonalának az érintője egy tetszőleges P , $P \in \mathcal{M}$ pontban. A feltétel a következő esetekben teljesül: I-es típus $\rightarrow \rho \geq 0$, $\rho + p_\mu \geq 0$; II-es típus $\rightarrow p_2 \geq 0$, $p_3 \geq 0$, $k \geq 0$, $b = +1$; III-as és IV-es típusokra nem teljesül.

- *Domináns energiafeltétel:* $T_{ab}v^av^b \geq 0$ és $T_{ab}v^a$ nem térszerű, továbbá v^a időszzerű, azaz bármely ortonormált bázisban az energiasűrűség domináns a többi komponenshez képest: $T_{00} \geq |T_{ab}|$. Az energiasűrűség dominanciája az ismert anyagformákra természetesen mindig teljesül. A feltétel a következő módon áll fenn: I-es típus $\rightarrow \rho \geq 0, -\rho \leq p_\mu \leq \rho$; II-es típus $\rightarrow 0 \leq p_2 \leq k, 0 \leq p_3 \leq k, k \geq 0, b = +1$; III-as és IV-es típusokra nem teljesül.

- *Erős energiafeltétel:* $R_{ab}v^av^b \geq 0$, továbbá amennyiben v^a nullszzerű vektor, akkor a

$$\left(T_{ab} - \frac{1}{2}Tg_{ab}\right)v^av^b \geq 0,$$

a null konvergencia feltétel teljesül, míg időszzerű v^a esetén a

$$T_{ab}v^av^b \geq v^av_a \left(\frac{1}{2}T - \frac{1}{\kappa^2}\Lambda\right)$$

időszzerű konvergencia feltétel, ahol $T \equiv T_a^a$ és Λ a kozmológiai konstans. E szerint, ha egy időszzerű kongruencia (vektormező integrálvonalainak kötege) örvénymentes, úgy θ expanziója a geodetikusok mentén folyamatosan csökken ($\dot{\theta} < 0$), amely a gravitáció vonzó jellegének felel meg. A feltétel teljesül, ha: I. típus $\rightarrow \rho + p_\mu \geq 0, \rho + \Sigma_\mu p_\mu - \frac{\Lambda}{2\kappa^2} \geq 0$; II. típus $\rightarrow p_2 \geq 0, p_3 \geq 0, p_2 + p_3 - \frac{\Lambda}{2\kappa^2} \geq 0, k \geq 0, b = +1$.

Van olyan eset, amikor az energiafeltételek nem teljesülnek bizonyos anyagformák energia-impulzus tenzoraira, mégis tekinthetők fizikainak, vagy egy jó modellnek, amely egy adott fizikai problémát megold. Ebben az esetben az említett osztályozási típusok és energiafeltételek módosulnak, kiegészülnek. Például az erős energiafeltételt vizsgálva, vegyünk egy egyszerű minimálisan csatolt Klein–Gordon skalármezővel kialakított

$$S = \kappa^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[R - \frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi - V(\phi) \right] + S^M[g^{ab}, \Psi] \quad (1.18)$$

hatást. Az erős energiafeltétel akkor teljesül, ha $V(\phi) \geq 0$ időszzerű és térszerű skalármező gradiens mellett. Ha a skalármező gradiense fényszerű, akkor $V(\phi) = 0$. Azonban az inflációs elméletekben az infláció beindításához szükséges, hogy $V(\phi) < 0$, azaz az erős energiafeltétel sérül, ld. [177], [272]–[276].

A hatás egy tetszőleges, egy skalármezőt tartalmazó skalár-tenzor elméletben formálisan az

$$S[.] = S^G[g^{ab}, \phi] + S^\phi[g^{ab}, \phi] + S^M[g^{ab}, \Psi] \quad (1.19)$$

alakban írható, ahol $S^M[g^{ab}, \Psi]$ reprezentálja az anyagi hatást, amely Ψ tetszőleges anyagi mezőtől és a g^{ab} metrikától függ. Az $S^G[g^{ab}, \phi]$ hatás olyan tagokat tartalmaz,

amelyben a skalármező nem minimálisan csatolódik a metrikához. Az $S^\phi [g^{ab}, \phi]$ a skalármezőre vonatkozó hatás. Az $S^G [g^{ab}, \phi]$ és $S^\phi [g^{ab}, \phi]$ tag elsőrendű variációiból kapjuk meg az Einstein-egyenletet és a ϕ skalármezőre vonatkozó mezőegyenletet. A skalármezőnek az energia-impulzus tenzora a

$$T_{ab}^\phi = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S^\phi}{\delta g^{ab}}$$

módon adható meg, ahol T_{ab}^ϕ függ a skalármező metrikához való csatolódásától. Legyen

$$S = \kappa^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\xi(\phi) R - \frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi - V(\phi) \right] + S^M [g^{ab}, \Psi] , \quad (1.20)$$

ahol

$$S^G [g^{ab}, \phi] = \kappa^2 \int d^4x \sqrt{-g} [\xi(\phi) R]$$

és

$$S^\phi [g^{ab}, \phi] = -\kappa^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi + V(\phi) \right] .$$

Az (1.20) hatás esetén a skalármező nem minimálisan csatolódik a metrikához, míg minimálisan csatolódik az anyaghoz. Az (1.18) alapján a skalármező csatolása minimális, mind a gravitációs, mind az anyagi szektorhoz, ha $\xi(\phi) = 1$.

A $V(\phi) = 0$ Brans–Dicke hatás esetén, azaz

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \nabla_a \phi \nabla^a \phi \right] + S^M [g^{ab}, \Psi] , \quad (1.21)$$

ahol

$$S^G [g^{ab}, \phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R]$$

és

$$S^\phi [g^{ab}, \phi] = -\frac{1}{8\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\omega}{\phi} \nabla_a \phi \nabla^a \phi \right] ,$$

megmutatták a [277], [278] folyóiratcikkekben, hogy Weyl vagy konformis transzformáció után az $S^G [g^{ab}, \phi] + S^\phi [g^{ab}, \phi] + S^M [g^{ab}, \Psi]$ hatást az $\check{S}^{EH} [\check{g}^{ab}] + \check{S}^\phi [\check{g}^{ab}, \check{\phi}] + \check{S}^M [\check{g}^{ab}, \check{\phi}, \check{\Psi}]$ alakba átírható. Azaz a transzformáció utáni hatás egy átparaméterezett $\check{S}^{EH} [\check{g}^{ab}]$ Einstein–Hilbert hatásból, egy a gravitációs szektorral minimálisan csatolódó skalármező $\check{S}^\phi [\check{g}^{ab}, \check{\phi}]$ hatásból, és a skalármezővel nem minimálisan csatolódó $\check{S}^M [\check{g}^{ab}, \check{\phi}, \check{\Psi}]$ anyagi hatásból áll. Az első rendszert, ahol $S^G [g^{ab}, \phi]$ tartalmazza a skalármező nem minimális csatolású hozzájárulását Jordan-rendszernek (azaz Jordan-frame) nevezik, amelyből konformis transzformációval lehet az Einstein-rendszerbe (azaz Einstein-frame) jutni [277]–[281]. Amennyiben a skálár-tenzor elmélet a metrikához

minimálisan csatolódo skalármezőt tartalmaz, úgy az Einstein- és Jordan-rendszer egybeesik. Konformis transzformáció során legyen $(\mathcal{M}, g_{ab})$ egy téridő, ahol $\mathcal{M}$ egy n dimenziós sokaság, a g_{ab} rajta értelmezett metrikával. Ha az $\Omega(x)$ egy sima és pozitív függvény, amely a $x = (\bar{x}, t)$ téridőkoordinátáktól függ, akkor a g_{ab} metrika konformis transzformációja egy $\check{g}_{ab}$ metrikába a

$$g_{ab} \rightarrow \check{g}_{ab} = \Omega^2(x) g_{ab} \quad (1.22)$$

módon történik. A konformis transzformáció az ívelemnégyzet egy

$$ds^{*2} = \Omega^2(x) ds^2$$

lokális átskálázása, azaz nem koordináta transzformáció. A [277] hivatkozásban a konformis transzformáció során az (1.21) hatást az

$$\Omega = \sqrt{G\phi}$$

konformis faktoral az

$$\check{S} = \int d^4x \left\{ \sqrt{-\check{g}} \left[\frac{\check{R}}{8\pi G} - \frac{1}{2} \nabla_a \check{\phi} \nabla^a \check{\phi} \right] + \exp \left(-8 \sqrt{\frac{\pi G}{2\omega + 3}} \check{\phi} \right) \check{L}^M(\check{g}^{ab}, \check{\Psi}) \right\} ,$$

alakba írták át, ahol

$$d\check{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega + 3}{16\pi G}} \frac{d\phi}{\phi}$$

és $\omega > -3/2$. A megmaradási tétel nem invariáns a konformis transzformációra csak abban az esetben, ha $T = 0$ [233], [277], ekkor az Einstein-rendszerben is igaz, hogy $\nabla^a \check{T}_{ab} = 0$ és $\check{T} = 0$. A Jordan-rendszerben az anyag energia-impulzus tenzorára igaz az (1.15) egyenlet (egzotikus anyagokat kivéve), azonban ez a T_{ab}^ϕ esetén nem mindig teljesül. Az Einstein-rendszerben rendszerbe történő áttérés után általánosságban elmondható, hogy a kontrahált Bianchi azonosság teljesül [277], [282], [283], azaz

$$\nabla^a \check{G}_{ab} = \nabla^a \check{T}_{ab}^\phi + \nabla^a \check{T}_{ab}^M = 0 .$$

Konformis rendszerekből több is létezik, és minden konformis rendszerben a fizikai egyenletek különbözőek [283]-[285].

A skalár-tenzor gravitációelméletekben a skalármezőre vonatkozó energia-impulzus tenzor elemzésével, a skalármező folyadék reprezentációjával számos folyóiratcikk foglalkozott az inflációs kozmológiában, UDE, EDM elméletekben, és a k -esszencia elméletben is [177], [286]-[291]. A [292] hivatkozásban egy anizotróp folyadék energia-impulzus tenzorának két ideális folyadékból történő konstrukcióját mutatták be. Az

Einstein–Hilbert hatás egy Klein–Gordon típusú skalármezővel és egy ($L_{int} = -\frac{1}{2}\xi\phi^2 R$) kölcsönhatási taggal történő kiegészítése esetén levezették hogy, ha $\xi \rightarrow 0$, úgy a skalármező egy ideális folyadékkal reprezentálható, míg $\xi \neq 0$ esetén nem ideális folyadékként írható le [293], [294]. A skalármező nem ideális folyadék leírását általános Brans–Dicke és $f(R)$ elméletekben is bevezették [278], [295], [296]. Radiális irányítottaságú q_a energiaáram sűrűséggel rendelkező anizotróp folyadékot vizsgáltak a [297] hivatkozásban, és összefüggésbe hozták töltéssel, térfogati- vagy nyírási viszkozitással rendelkező folyadékkal, valamint fényszerű folyadékkal. Kanonikus, minimálisan csatolt skalármezőt null pornak feleltettek meg a [298] folyóiratcikkben.

A [299] folyóiratcikkben az (1.18) minimálisan csatolt Klein–Gordon mező folyadék-leírását vizsgálták. Időszerű skalármező gradiens esetén a Klein–Gordon skalármező energia-impulzus tenzora egy ideális folyadék, amelynek az energiasűrűsége a

$$\rho^{PF} = -\frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla^a\phi + V(\phi)$$

és izotróp nyomása a

$$p^{PF} = -\frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla^a\phi - V(\phi) .$$

Igazolták a [293] hivatkozás eredményeit, amely szerint az $L_1 = p^{PF}$ és $L_2 = -\rho^{PF}$ Lagrange-sűrűségek ekvivalensen leírják az ideális folyadékot, ha $V(\phi) = 0$ vagy $\nabla_a\phi\nabla^a\phi = 0$ [238], [300]–[302]. Térszerű skalármező gradiens választásával, viszont a

$$\rho = \frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla^a\phi - V(\phi) \tag{1.23}$$

energiasűrűséget és a

$$p = -\frac{1}{6}\nabla_a\phi\nabla^a\phi - \frac{5}{3}V(\phi) \tag{1.24}$$

nyomást kapták. Az (1.23) és (1.24) összefüggéseket, úgy származtatták, hogy a [299] cikk (4) és (5) egyenleteit alkalmazták térszerű skalármező gradiensre. Ekkor az $L_1 \neq p$ és az $L_2 = \pm\rho$ Lagrange-sűrűségeket kapták, valamint amikor levezették a mezőegyenleteket az előálló skalármező energia-impulzus tenzor nem az (1.23) energiasűrűséget és az (1.24) nyomást tartalmazta. Ez onnan eredt, hogy a [299] cikk (4) és (5) összefüggéseit a $h_{ab} = u_a u_b + g_{ab}$ felbontásból vezették le, ahol $u_a u^a = -1$. Azonban, ha u_a időszerű, akkor térszerű vagy nullszerű skalármező gradiens választásakor az $u_a \sim \nabla_a\phi$ összefüggés nem alkalmazható. A [299] hivatkozásba felmerült problémát a [303] folyóiratcikkben orvosolták. A [303]-ben bemutatták a p nyomásra és ρ energiasűrűségre vonatkozó helyes összefüggéseket, amelyekből származtatták térszerű és nullszerű gradiensű minimálisan csatolt skalármező energia-impulzus tenzorát.

1.4. Téridőfelbontások

A téridő felbontásának módszerével a gravitációt leíró mennyiségek dinamikai információt hordozó részei szeparálhatók, így ezen paraméterek fejlődése közvetlenül elemezhető. A módszer során a változók száma növekszik, amely szimmetria választással és mértékrögzítéssel csökkenthető. A téridő felbontásnak tárgyalási módjai, továbbá alkalmazásai többfélék. A felbontási módszerek két széles körben használt technikai csoportja a kovariáns, illetve az ADM formalizmus [304], azonban kidolgoztak további formalizmusokat is lásd a [305]-[316] hivatkozásokban.

1.4.1. Kovariáns formalizmus

A téridő $1 + 3$ „fűzési” („threading”) módszerét, vagyis más néven az $1 + 3$ kovariáns formalizmust 1998-ban G. F. R. Ellis és J. Ehlers foglalta össze és ismertette alkalmazását az FLRW univerzumra [317]-[320]. Az $1 + 3$ kovariáns formalizmusban az FLRW univerzum dinamikáját a *kinematikai mennyiségekre* és az ún. *gravito-elektro-mágneses mennyiségekre* vonatkozó elsőrendű differenciál egyenlet rendszer írja le. A formalizmusban az $u^a = dx^a/d\tau$ az univerzumot kitöltő anyagra jellemző időszerű ($u^a u_a = -1$) 4-es vektor, amellyel projektor-tenzorokat határoztak meg. Az egyik az

$$U_b^a = -u^a u_b ,$$

amely az u^a vektorral párhuzamosan vetítő projektor-tenzor. A másik a

$$h_{ab} = g_{ab} + u_a u_b ,$$

amely az u^a vektorra merőleges 3-dimenziós pillanatnyi nyugalmi tér (azaz „rest space”) metrikus tenzora. A g_{ab} a 4-dimenziós metrikus tenzor, τ pedig az anyag világvonala mentén értelmezett idő paraméter. A projektor-tenzorokra az alábbi összefüggések igazak:

$$\begin{aligned} U_c^a U_b^c &= U_b^a , & U_a^a &= 1 , & U_{ab} u^b &= u_a , \\ h_c^a h_b^c &= h_b^a , & h_a^a &= 3 , & h_{ab} u^b &= 0 . \end{aligned}$$

A 3-dimenziós pillanatnyi nyugalmi térhez definiált Levi-Civita szimbólum az

$$\varepsilon_{abc} = u^d \eta_{dabc} = -\eta_{abcd} u^d ,$$

amelyre igaz, hogy

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abc} &= \varepsilon_{[abc]} = \frac{1}{3!} [\varepsilon_{abc} + \varepsilon_{bca} + \varepsilon_{cab} - \varepsilon_{bac} - \varepsilon_{cba} - \varepsilon_{acb}] , \\ \varepsilon_{abc} u^c &= 0 .\end{aligned}$$

Az η_{abcd} a 4-dimenziós Levi-Civita tenzor, ahol $\eta_{abcd} = \eta_{[abcd]}$ és $\eta_{0123} = \sqrt{|\det g_{ab}|}$. A világvonal menti kovariáns idő derivált egy tetszőleges $T_{..cd}^{ab}$ tenzor esetén a

$$\dot{T}_{..cd}^{ab} = u^e \nabla_e T_{..cd}^{ab} . \quad (1.25)$$

Egy tetszőleges $T_{..cd}^{ab}$ tenzor 4-es kovariáns deriváltjának a minden indexében, a lokális 3-dimenziós térre vett projekciója pedig a

$$\mathcal{D}_e T_{..cd}^{ab} = h_k^a h_l^b h_c^j h_d^m h_e^i \nabla_i T_{..jm}^{kl} .$$

Örvénymentes esettől eltekintve ez a projekció nem azonos a $T_{..cd}^{ab}$ tenzor 3-dimenziós kovariáns deriváltjával. Egy tetszőleges v^a vektor u^a vektorra merőleges projekcióját a

$$v^{\langle a \rangle} = h_b^a v^b$$

módon jelölték, míg egy tetszőleges T^{ab} tenzor szimmetrikus, nyommentes 3-dimenziós térre vett projekciója a

$$T^{\langle ab \rangle} = \left[h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] T^{cd} .$$

Ezen utóbbi jelölésekkel egy tetszőleges v^a vektor és T^{ab} tenzor (1.25) szerinti időderiváltjának 3-dimenziós térre vett projekciója pedig:

$$\begin{aligned}\dot{v}^{\langle a \rangle} &= h_b^a \dot{v}^b , \\ \dot{T}^{\langle ab \rangle} &= \left[h_c^{(a} h_d^{b)} - \frac{1}{3} h^{ab} h_{cd} \right] \dot{T}^{cd} .\end{aligned}$$

Kinematikai mennyiségeket az u^a vektor 4-es kovariáns deriváltjának felbontásából definiáltak:

$$\begin{aligned}\nabla_a u_b &= g_a^c g_b^d \nabla_c u_d = (h_a^c - u_a u^c) (h_b^d - u_b u^d) \nabla_c u_d \\ &= h_a^c h_b^d \nabla_c u_d - h_a^c u_b u^d \nabla_c u_d - u_a u^c h_b^d \nabla_c u_d + u_a u^c u_b u^d \nabla_c u_d \\ &= -u_a u^c h_b^d \nabla_c u_d + h_a^c h_b^d \nabla_c u_d \\ &= -u_a h_b^d A_d + \frac{1}{2} h_a^c h_b^d \nabla_c u_d + \frac{1}{2} h_a^c h_b^d \nabla_c u_d + \frac{1}{2} h_a^d h_b^c \nabla_c u_d - \frac{1}{2} h_a^d h_b^c \nabla_c u_d \\ &= -u_a A_b + h_a^{(c} h_b^{d)} \nabla_c u_d + h_a^{[c} h_b^{d]} \nabla_c u_d + \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \nabla_c u_d - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \nabla_c u_d \\ &= -u_a A_b + \left(h_a^{(c} h_b^{d)} - \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \right) \nabla_c u_d + h_a^{[c} h_b^{d]} \nabla_c u_d + \frac{1}{3} h_{ab} h^{cd} \nabla_c u_d \\ &= -u_a A_b + \mathcal{D}_a u_b = -u_a A_b + \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3} \theta h_{ab} .\end{aligned} \quad (1.26)$$

Itt felhasználták, hogy $u^d \nabla_c u_d = 0$. Az

$$A_b = \dot{u}_b = u^c \nabla_c u_b \quad (1.27)$$

az u^a gyorsulás vektora. Ez geodetikus pályán eltűnik. A

$$\theta = \mathcal{D}_a u^a = h^{ab} \nabla_a u_b \quad (1.28)$$

az u^a vektormező integrálgörbéiből álló görbesereg expansziója. Az expanszió reprezentálja az u^a sebességgel mozgó anyagfolyam térfogati tágulásának mértékét. FRLW téridőn a Hubble-paraméter: $H = \theta/3$. A görbesereg nyírás tenzora a

$$\sigma_{ab} = \mathcal{D}_{\langle a} u_{b \rangle} = \left[h_a^{(i} h_b^{j)} - \frac{1}{3} h_{ab} h^{ij} \right] \nabla_i u_j , \quad (1.29)$$

amely az anyagfolyam áramlási irányra merőleges torzulását írja le, miközben térfogata változatlan marad. A nyírás tenzorra az alábbi összefüggések vonatkoznak:

$$\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)} , \quad \sigma_{ab} u^b = 0 , \quad \sigma_a^a = 0 .$$

A görbesereg örvény tenzora az

$$\omega_{ab} = \mathcal{D}_{[a} u_{b]} = \frac{1}{2} (h_a^i h_b^j - h_b^i h_a^j) \nabla_i u_j , \quad (1.30)$$

amely az anyagfolyam forgását jellemzi annak áramlási iránya mentén egy nem forgó lokális inerciarendszerhez képest. Továbbá $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$, $\omega_{ab} u^b = 0$. Az örvény tenzorból bevezethető az

$$\omega^a = \frac{1}{2} \varepsilon^{abc} \omega_{bc} \quad (1.31)$$

örvény vektor, amelyre teljesül, hogy

$$\omega^a \omega_{ab} = 0 , \quad \omega^a u_a = 0 .$$

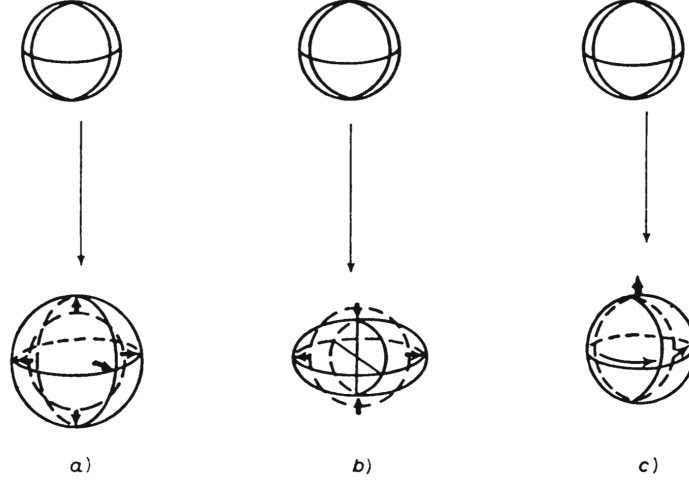
Az ω^a 3 darab független komponenssel rendelkezik, ahogy ω_{ab} is. A kinematikai mennyiségekből származtatott skalárok, az

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \omega_{ab} \omega^{ab} ,$$

azaz az örvény mértéke, és a

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ab} \sigma^{ab} ,$$

azaz a nyírás mértéke. Az expanszió, nyírás és örvény hatását egy egységni térfogatú folyadék gömbön a 8. ábra mutatja be.



8. ábra. Az a) ábra oszlopban látható egy gömb térfogategységnyi folyadék expanziója, a b) ábra oszlopban a nyírás, míg a c) ábra oszlopban az örvény hatása látható [317]. A b) és c) esetekben a folyadék térfogata változatlan.

A gravito-elektro-mágneses mennyiségek a C_{abcd} Weyl-tenzor 1 + 3 felbontásából származnak a következőképpen. A 4-dimenziós Riemann-tenzor felbontható az alábbi módon:

$$R_{abcd} = C_{abcd} - \frac{1}{2}(R_{ac}g_{bd} + R_{bd}g_{ac} - R_{ad}g_{bc} - R_{bc}g_{ad}) + \frac{1}{6}R(g_{ac}g_{db} - g_{ad}g_{cb}) .$$

Ennek spúrja az $R^a_{bad} = R_{bd}$ Ricci-tenzor és a spúrmentes része a C_{abcd} Weyl-tenzor, továbbá $R^{ab}_{..ab} = R^b_b = R$ a Ricci-skalár, míg $C^a_{..bad} = 0 = C^{ab}_{..ab}$ [320], [321]. A Riemann-tenzor teljesíti a következő azonosságokat:

$$R_{[ab][cd]} = R_{abcd} = R_{cdab} , \quad R_{a[bcd]} = 0 ,$$

amelyeket a Weyl-tenzor úgy szintén teljesít. Az

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = \kappa^2 T_{ab} \iff R_{ab} = \Lambda g_{ab} + \kappa^2 \left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right) , \quad (1.32)$$

Einstein-egyenlet határozza meg a Riemann-tenzor spúrját, azaz a Ricci-tenzort, a téridő minden pontjában, az adott pontban lévő anyag alapján. A Riemann-tenzor spúrmentes részének az 1 + 3 kovariáns felbontása hasonló az elektrodinamikában az ugyancsak antiszimmetrikus és spúrmentes 4-dimenziós F_{ab} elektromágneses tértenzor felbontásához. Az F_{ab} tenzor az $E_a = F_{ab}u^b$ elektromos és $H_a = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}F^{bc}$ mágneses

3-dimenziós vektorokból áll, ahol $E_a u^a = 0 = H_a u^a$. A Weyl-tenzor ehhez hasonlóan az u^a vektorra merőleges, 3-dimenziós pillanatnyi nyugalmi tereken definiált

$$E_{ab} = C_{ajbl} u^j u^l, \quad E_{ab} = E_{(ab)}, \quad E_a^a = 0, \quad E_{ab} u^b = 0$$

elektromos Weyl görbületi részre és a

$$H_{ab} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ajl} C_{..bk}^{jl} u^k, \quad H_{ab} = H_{(ab)}, \quad H_a^a = 0, \quad H_{ab} u^b = 0$$

mágneses Weyl görbületi részre bontható.

Az u^a 4-es sebességgel mozgó anyag energia-impulzus tenzorát az (1.17) összefüggés határozza meg, amelyből leolvasható, hogy

$$\begin{aligned} \rho &= T_{ab} u^a u^b, \\ p &= \frac{1}{3} T_{ab} h^{ab}, \\ q_a &= -T_{bc} u^b h^{ca}, \\ \pi_{ab} &= h_{(a}^c h_{b)}^d T_{cd}. \end{aligned}$$

Felhasználva az (1.32) Einstein-egyenletet és a T_{ab} felbontását, a

$$2\nabla_{[a} \nabla_{b]} u_c = R_{abcd} u^d$$

Ricci-azonosság, a

$$\nabla_{[e} R_{ab]cd} = 0$$

Bianchi-azonosság és az (1.15) egyenlet 1 + 3 kovariáns felbontásából végül számos elsőrendű dinamikai- és kényszeregyenlet vezethető le. A Ricci-azonosság felbontásából 3 mozgásegyenlet, a Raychaudhuri-egyenlet, az örvény és a nyírás fejlődésegyenletei, valamint 3 kényszeregyenlet származtatható. A Bianchi-azonosság felbontása további 2 kényszeregyenlet mellett 2 fejlődésegyenletet eredményez. Az utóbbiak az elektromos és mágneses Weyl görbületi részekre vonatkozó fejlődésegyenletek. Az energia- és impulzusmegmaradásra vonatkozó (1.15) egyenlet 1 + 3 kovariáns felbontása szintén 2 mozgásegyenletet eredményez. Az örvény fejlődésegyenletének további kontrakciójából pedig az általánosított Friedmann-egyenlet adódik.

Az 1 + 3 kovariáns formalizmus további felbontását, az 1 + 1 + 2 kovariáns formalizmust dolgozta ki C. A. Clarkson és R. K. Barret a [322] folyóiratcikkükben. Az új formalizmus egyik célja az inhomogén téridők vizsgálata volt asztrofizikai léptékben az 1 + 3 kovariáns formalizmushoz hasonló matematikai módszerrel. Feltették, hogy a háttér rendelkezik egy szimmetriával, ami térszerű irányt jelöl ki, például lokális forgásszimmetria vagy gömbszimmetria esetén. Bevezettek az u^a 4-es vektorra merőleges n^a

4-es radiális irányítottságú térszerű vektort ($u_a n^a = 0$, $n_a n^a = 1$), amellyel definiáltak egy az n^a -ra és u^a -ra merőleges 2-dimenziós felületre vetítő

$$N_a^b \equiv h_a^b - n_a n^b = g_a^b + u_a u^b - n_a n^b$$

projektort teljesítve az

$$N_a^a = 2, \quad N_{ab} n^a = 0, \quad N_{ab} u^a = 0$$

kifejezéseket. A 2-dimenziós Levi-Civita 2-tenzor az

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_{abc} n^c = u^d \eta_{dabc} n^c, \quad (1.33)$$

amely teljesíti az alábbiakat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab} n^b &= 0, \quad \varepsilon_{abc} = n_a \varepsilon_{bc} - n_b \varepsilon_{ac} + n_c \varepsilon_{ab}, \\ \varepsilon_{ab} \varepsilon^{cd} &= N_a^c N_b^d - N_a^d N_b^c, \quad \varepsilon_a^c \varepsilon_{cb} = N_{ab}, \quad \varepsilon_{ab} \varepsilon^{ab} = 2. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Bármely $\psi_{ab}^{..cb}$ tenzor esetén az 1 + 3 formalizmus során ismertetett, a 4-dimenziós kovariáns deriválnak az u^a -ra minden indexben merőleges projekciója tovább bontható az n^a -val párhuzamos és merőleges részekre:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{ab}^{..cb} &= n^i \mathcal{D}_i \psi_{ab}^{..cb}, \\ \delta_e \psi_{ab}^{..cb} &= N_e^i N_a^k N_b^m N_j^c N_l^d \mathcal{D}_i \psi_{km}^{..jl}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

A δ_a derivált az n^a tekintetében minden indexben merőleges projekciója a $\mathcal{D}_a$ deriválnak. Az 1 + 1 + 2 formalizmusban további kinematikai mennyiségek is megjelennek, amelyek az n^a vektor $\mathcal{D}_a$ deriváltjának a 2-dimenziós felületre vetítésekor jelennek meg:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_a n_b &= h_a^i h_b^j \nabla_i n_j = h_a^i h_b^j g_i^m g_j^k \nabla_m n_k = h_a^i h_b^j (h_i^m - u_i u^m) (h_j^k - u_j u^k) \nabla_m n_k \\ &= h_a^i h_b^j (h_i^m h_j^k - h_i^m u_j u^k - u_i u^m h_j^k + u_i u^m u_j u^k) \nabla_m n_k \\ &= h_a^i h_b^j h_i^m h_j^k \nabla_m n_k = h_a^i h_b^j \mathcal{D}_i n_j = (N_a^i + n^i n_a) (N_b^j + n^j n_b) \mathcal{D}_i n_j \\ &= N_a^i N_b^j \mathcal{D}_i n_j + \frac{1}{2} N_b^i N_a^j \mathcal{D}_i n_j - \frac{1}{2} N_b^i N_a^j \mathcal{D}_i n_j \\ &\quad + N_b^j n^i n_a \mathcal{D}_i n_j + N_a^i n^j n_b \mathcal{D}_i n_j + n^i n_a n^j n_b \mathcal{D}_i n_j \\ &= N_{(a}^i N_{b)}^j \mathcal{D}_i n_j + N_{[a}^i N_{b]}^j \mathcal{D}_i n_j + N_b^j n^i n_a \mathcal{D}_i n_j \\ &\quad + N_a^i n^j n_b \mathcal{D}_i n_j + n^i n_a n^j n_b \mathcal{D}_i n_j \\ &= \left(N_{(a}^i N_{b)}^j - \frac{1}{2} N_{ab} N^{ij} \right) \mathcal{D}_i n_j + \frac{1}{2} N_{ab} N^{ij} \mathcal{D}_i n_j \\ &\quad + N_{[a}^i N_{b]}^j \mathcal{D}_i n_j + N_b^j n^i n_a \mathcal{D}_i n_j + N_a^i n^j n_b \mathcal{D}_i n_j + n^i n_a n^j n_b \mathcal{D}_i n_j \\ &= \zeta_{ab} + \frac{1}{2} N_{ab} \phi + \xi \varepsilon_{ab} + n_a a_b. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Itt felhasználták, hogy

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{D}_a (n^b n_b) = n^b \mathcal{D}_a n_b + n_b \mathcal{D}_a n^b = n^b \mathcal{D}_a n_b + n_b h_a^i h_j^b \nabla_i n^j \\
&= n^b \mathcal{D}_a n_b + n_b h_a^i h_j^b \nabla_i (g^{jm} n_m) = n^b \mathcal{D}_a n_b + n_j h_a^i g^{jm} \nabla_i n_m \\
&= n^b \mathcal{D}_a n_b + n_b (h^{jm} - u^j u^m) h_j^b h_a^i \nabla_i n_m = n^b \mathcal{D}_a n_b + n_b h_j^b h^{jm} h_a^i \nabla_i n_m \\
&= n^b \mathcal{D}_a n_b + n^k g_{bk} h_j^b h^{jm} h_a^i \nabla_i n_m = n^b \mathcal{D}_a n_b + n^k h_{bk} h_j^b h^{jm} h_a^i \nabla_i n_m \\
&= n^b \mathcal{D}_a n_b + n^k h_{kj} h^{jm} h_a^i \nabla_i n_m = n^b \mathcal{D}_a n_b + n^b h_b^m h_a^i \nabla_i n_m \\
&= n^b \mathcal{D}_a n_b + n^b \mathcal{D}_a n_b = 2n^b \mathcal{D}_a n_b ,
\end{aligned} \tag{1.37}$$

és

$$\begin{aligned}
\xi \varepsilon_{km} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{km} \varepsilon^{ab} N_a^i N_b^j \mathcal{D}_i n_j = \frac{1}{2} (N_k^a N_m^b - N_k^b N_m^a) N_a^i N_b^j \mathcal{D}_i n_j \\
&= \frac{1}{2} (N_k^i N_m^j - N_k^j N_m^i) \mathcal{D}_i n_j = N_{[k}^i N_{m]}^j \mathcal{D}_i n_j .
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Az (1.36) összefüggésben a

$$\phi = \delta_a n^a = N_a^b N_c^a \mathcal{D}_b n^c = N_a^b \mathcal{D}_b n^a = N^{ab} \mathcal{D}_b n_a , \tag{1.39}$$

amely a 2-dimenziós felület expaziójának mértéke. A

$$\zeta_{ab} = \delta_{\{a} n_{b\}} = \left[N_{(a}^c N_{b)}^d - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \right] \mathcal{D}_c n_d \tag{1.40}$$

a nyírás, amely a 2-dimenziós felület torzulásából származik. Az

$$\begin{aligned}
a_a &= \hat{n}_a = n^b \mathcal{D}_b n_a = n^b h_b^i h_a^k \nabla_i n_k = n^b h_b^i h_a^k \nabla_i (g_k^m n_m) \\
&= g_k^m n^b h_b^i h_a^k \nabla_i n_m = (h_k^m - u^m u_k) n^b h_b^i h_a^k \nabla_i n_m \\
&= n^b h_a^k h_b^i h_k^m \nabla_i n_m = n^b h_a^k \mathcal{D}_b n_k = n^b (N_a^k + n_a n^k) \mathcal{D}_b n_k \\
&= n^b N_a^k \mathcal{D}_b n_k = \hat{n}_{\bar{a}}
\end{aligned} \tag{1.41}$$

a gyorsulás. Az n^a örvényének mértéke a

$$\xi = \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \delta_a n_b , \tag{1.42}$$

amely a 2-dimenziós felület elfordulását reprezentálja. Az n^a vektor 4-es kovariáns deriváltjának u^a -val párhuzamos projekciója az

$$\begin{aligned}
\dot{n}^a &= u^b \nabla_b n_a = u^b \nabla_b (n_c g_a^c) = g_a^c u^b \nabla_b n_c \\
&= (N_a^c - u^c u_a + n^c n_a) u^b \nabla_b n_c \\
&= N_a^c u^b \nabla_b n_c - u^c u_a u^b \nabla_b n_c \\
&= N_{ac} u^b \nabla_b n^c + u_a n_c u^b \nabla_b u^c \\
&= \alpha_a + \mathcal{A} u_a ,
\end{aligned} \tag{1.43}$$

ahol

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= n^a A_a = n^a u^b \nabla_b u_a , \\ \alpha_a &= \dot{n}_{\bar{a}} = N_{ab} \dot{n}^b = N_{ab} u^c \nabla_c n^b .\end{aligned}\quad (1.44)$$

Az (1.43) származtatásakor felhasználták, hogy $u_a u^b \nabla_b n^a = -n^a u^b \nabla_b u_a$ és $n_c \nabla_b n^c = 0$.

Bármely 4-dimenziós Y^a vektor az 1+3 kovariáns felbontással az u^a -val párhuzamos vetítés útján egy ψ skalárra, míg az u^a -ra merőleges projekcióból egy 3-dimenziós ψ^a vektorra bontható fel. A 3-dimenziós ψ^a vektor egy további 1+2 kovariáns felbontással az n^a -va párhuzamos projekcióból származó Ψ skalárra, valamint az n^a -ra és az u^a -ra merőleges projekcióból egy 2-dimenziós Ψ^a vektorra szeparálható úgy, hogy

$$\psi^a = n^a \Psi + \Psi^a , \quad \Psi = \psi_a n^a , \quad \Psi^a = \psi_b N^{ba} . \quad (1.45)$$

Egy 3-dimenziós, szimmetrikus, spúrmentes ψ_{ab} tenzor további 1+2 felbontása a

$$\psi_{ab} = \psi_{\langle ab \rangle} = \Psi \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) + \Psi_{(a} n_{b)} + \Psi_{ab} \quad (1.46)$$

alakú, ahol

$$\begin{aligned}\Psi &= n^a n^b \psi_{ab} = -N^{ab} \psi_{ab} , \\ \Psi_a &= N_a^b n^c \psi_{bc} , \\ \Psi_{ab} &= \psi_{\{ab\}} = \left[N_{(a}^c N_{b)}^d - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \right] \psi_{cd} .\end{aligned}\quad (1.47)$$

A 2-dimenziós Ψ skalár, a Ψ_a vektor és a Ψ_{ab} tenzor $\mathcal{D}_a$ deriváltjának az 1+2 projekciója a következő:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_a \Psi &= h_a^b \mathcal{D}_b \Psi = (N_a^b + n_a n^b) \mathcal{D}_b \Psi = N_a^b \mathcal{D}_b \Psi + n_a n^b \mathcal{D}_b \Psi \\ &= \delta_a \Psi + n_a \hat{\Psi} , \\ \mathcal{D}_a \Psi_b &= h_a^d h_b^c \mathcal{D}_d \Psi_c = (N_a^d + n_a n^d) (N_b^c + n_b n^c) \mathcal{D}_d \Psi_c \\ &= N_a^d N_b^c \mathcal{D}_d \Psi_c + n_b n^c N_a^d \mathcal{D}_d \Psi_c + n_a n^d N_b^c \mathcal{D}_d \Psi_c + n_a n_b n^c n^d \mathcal{D}_d \Psi_c \\ &= \delta_a \Psi_b - n_b \Psi_c N_a^d \mathcal{D}_d n_c + n_a N_b^c n^d \mathcal{D}_d \Psi_c - n_a n_b \Psi_c n^d \mathcal{D}_d n^c \\ &= \delta_a \Psi_b - n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c + n_a N_b^c \hat{\Psi}_c - n_a n_b \Psi_c n^d \mathcal{D}_d n^c \\ &= \delta_a \Psi_b + n_a N_b^c \hat{\Psi}_c - n_a n_b \Psi_c a^c - n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c \\ &= \delta_a \Psi_b + n_a \hat{\Psi}_{\bar{b}} - n_a n_b \Psi_c a^c - n_b (\xi \varepsilon_{ia} + \zeta_{ia}) \Psi^i - \frac{1}{2} n_b \Psi_a \phi ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a \Psi_{bc} &= h_a^d h_b^e h_c^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} = (N_a^d + n_a n^d) (N_b^e + n_b n^e) (N_c^m + n_c n^m) \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&= N_a^d N_b^e N_c^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} + N_a^d N_b^e n_c n^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} + n_a n^d N_b^e N_c^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&\quad + n_a n^d N_b^e n_c n^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} + N_a^d n_b n^e N_c^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} + N_a^d n_b n^e n_c n^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&\quad + n_a n^d n_b n^e N_c^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} + n_a n_b n_c n^e n^m n^d \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&= \delta_a \Psi_{bc} - 2n_a n_{(b} \Psi_{c)i} a^i - N_a^d N_b^e n_c \Psi_{em} \mathcal{D}_d n^m - N_a^d n_b \Psi_{em} N_c^m \mathcal{D}_d n^e \\
&\quad + N_a^d n_b n_c n^e n^m \mathcal{D}_d \Psi_{em} + n_a n_b n_c n^e n^m n^d \mathcal{D}_d \Psi_{em} + n_a N_b^e N_c^m n^d \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&= \delta_a \Psi_{bc} - 2n_a n_{(b} \Psi_{c)i} a^i - n_c \Psi_b^i N_{(i}^e N_{a)}^d \mathcal{D}_d n_e - n_c \Psi_b^i N_{[i}^e N_{a]}^d \mathcal{D}_d n_e \\
&\quad - n_b \Psi_c^i N_{(i}^e N_{a)}^d \mathcal{D}_d n_e - n_b \Psi_c^i N_{[i}^e N_{a]}^d \mathcal{D}_d n_e + n_a N_b^e N_c^m n^d \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&= \delta_a \Psi_{bc} - 2n_a n_{(b} \Psi_{c)i} a^i - n_c \Psi_b^i \xi \varepsilon_{ia} - n_b \Psi_c^i \xi \varepsilon_{ia} - n_c \Psi_b^i \zeta_{ia} - n_b \Psi_c^i \zeta_{ia} \\
&\quad - \frac{1}{2} n_c \Psi_b^i N_{ia} N^{ed} \mathcal{D}_d n_e - \frac{1}{2} n_b \Psi_c^i N_{ia} N^{ed} \mathcal{D}_d n_e + n_a N_b^e N_c^m n^d \mathcal{D}_d \Psi_{em} \\
&= \delta_a \Psi_{bc} - 2n_a n_{(b} \Psi_{c)i} a^i - n_{(c|} \Psi_{a|b)} \phi - 2n_{(c|} \Psi_{|b)}^i (\xi \varepsilon_{ia} + \zeta_{ia}) + n_a \hat{\Psi}_{bc}^- .
\end{aligned}$$

Az előző számolásnál felhasználták, hogy

$$\begin{aligned}
n_a \hat{\Psi}_b &= n_a N_b^j n^i \mathcal{D}_i \Psi_j = n_a \hat{\Psi}_b^- , \\
n_a \hat{\Psi}_{bc} &= n_a N_b^k N_c^j n^i \mathcal{D}_i \Psi_{kj} = n_a \hat{\Psi}_{bc}^- , \\
\Psi_c n^c &= 0 , \\
\Psi_{cm} n^m &= 0 , \\
0 &= n^d \mathcal{D}_d (\Psi_c n^c) = \Psi_c n^d \mathcal{D}_d n^c + n^c n^d \mathcal{D}_d \Psi_c , \\
0 &= n^d \mathcal{D}_d (\Psi_{ac} n^c) = \Psi_{ac} n^d \mathcal{D}_d n^c + n^c n^d \mathcal{D}_d \Psi_{ac} , \\
0 &= n^a n^d \mathcal{D}_d (\Psi_{ac} n^c) = n^a \Psi_{ac} n^d \mathcal{D}_d n^c + n^a n^c n^d \mathcal{D}_d \Psi_{ac} \\
&= n^a n^c n^d \mathcal{D}_d \Psi_{ac} ,
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c &= \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c + \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c \\
&= \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c - \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_a^c N_i^d \mathcal{D}_d n_c \\
&\quad + \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_a^c N_i^d \mathcal{D}_d n_c + \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_i^c N_a^d \mathcal{D}_d n_c \\
&= \frac{1}{2} n_b \Psi^i (N_i^c N_a^d - N_a^c N_i^d) \mathcal{D}_d n_c + n_b \Psi^i N_{(a}^c N_{i)}^d \mathcal{D}_d n_c \\
&= \frac{1}{2} n_b \Psi^i (N_i^c N_a^d - N_a^c N_i^d) \mathcal{D}_d n_c + n_b \Psi^i [N_{(a}^c N_{i)}^d \\
&\quad - \frac{1}{2} N_{ai} N^{cd}] \mathcal{D}_d n_c + \frac{1}{2} n_b \Psi^i N_{ai} N^{cd} \mathcal{D}_d n_c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n_b \xi \varepsilon_{ia} \Psi^i + n_b \Psi^i \zeta_{ia} + \frac{1}{2} n_b \Psi_a N^{cd} \mathcal{D}_d n_c \\
&= n_b \left[(\xi \varepsilon_{ia} + \zeta_{ia}) \Psi^i + \frac{1}{2} \Psi_a \phi \right] ,
\end{aligned}$$

valamint az (1.34), (1.35) és (1.38) összefüggéseket.

Az (1.45)-(1.47) egyenletekben definiált mennyiségekhez hasonló változók kialakításával az 1+3 kovariáns formalizmusban ismertetett kinematikai mennyiségek felbontásai az

$$\begin{aligned}
A^a &= \dot{u}^a = u^c \nabla_c u^a = g_b^a A^b = (h_b^a - u_b u^a) A^b \\
&= (N_b^a + n^a n_b) A^b = \mathcal{A}^a + \mathcal{A} n^a , \\
\omega^a &= N_b^a \omega^b + n^a n_b \omega^b = \Omega n^a + \Omega^a , \\
\sigma_{ab} &= \Sigma \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) + 2 \Sigma_{(a} n_{b)} + \Sigma_{ab} ,
\end{aligned} \tag{1.48}$$

továbbá a gravito-elektro-mágneses mennyiségek a

$$\begin{aligned}
E_{ab} &= \mathcal{E} \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) + 2 \mathcal{E}_{(a} n_{b)} + \mathcal{E}_{ab} , \\
H_{ab} &= \mathcal{H} \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) + 2 \mathcal{H}_{(a} n_{b)} + \mathcal{H}_{ab} ,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

amelyeket a

$$\begin{aligned}
\sigma_{ab} &= g_a^c g_b^d \sigma_{cd} = (N_a^c - u^c u_a + n^c n_a) (N_b^d - u^d u_b + n^d n_b) \sigma_{cd} \\
&= (N_a^c + n^c n_a) (N_b^d + n^d n_b) \sigma_{cd} \\
&= N_a^c N_b^d \sigma_{cd} + N_a^c n^d n_b \sigma_{cd} + n^c n_a N_b^d \sigma_{cd} + n^c n_a n^d n_b \sigma_{cd} \\
&= N_{(a}^c N_{b)}^d \sigma_{cd} + N_{[a}^c N_{b]}^d \sigma_{cd} + N_a^c n^d n_b \sigma_{cd} + n^c n_a N_b^d \sigma_{cd} + n_a n_b n^c n^d \sigma_{cd} \\
&= N_{(a}^c N_{b)}^d \sigma_{cd} - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \sigma_{cd} + n_a N_b^d n^c \sigma_{cd} \\
&\quad + n_b N_a^d n^c \sigma_{cd} + n_a n_b n^c n^d \sigma_{cd} - \frac{1}{2} N_{ab} n^c n^d \sigma_{cd} \\
&= \Sigma_{ab} + n_a \Sigma_b + n_b \Sigma_a + \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) \Sigma
\end{aligned} \tag{1.50}$$

példa alapján származtattak felhasználva, hogy a σ_{ab} , az E_{ab} és a H_{ab} szimmetrikus tenzorok. Az n^a vektor 4-es kovariáns deriváltjának felbontása

$$\begin{aligned}
\nabla_a n_b &= g_a^c g_b^d \nabla_c n_d = (h_a^c - u_a u^c) (h_b^d - u_b u^d) \nabla_c n_d \\
&= h_a^c h_b^d \nabla_c n_d - h_a^c u_b u^d \nabla_c n_d - u_a u^c h_b^d \nabla_c n_d + u_a u^c u_b u^d \nabla_c n_d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -u_a u_b n_d u^c \nabla_c u^d + \mathcal{D}_a n_b + u_b n_d h_a^c \nabla_c u^d - u_a (N_b^d + n_b n^d) u^c \nabla_c n_d \\
&= -u_a u_b n_d u^c \nabla_c u^d + \mathcal{D}_a n_b + u_b n_d h_a^c \nabla_c u^d \\
&\quad - u_a N_b^d u^c \nabla_c n_d - u_a n_b n^d u^c \nabla_c n_d \\
&= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \mathcal{D}_a n_b + u_b n_d h_a^c \nabla_c u^d \\
&= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \mathcal{D}_a n_b + u_b h_a^c n^d \left(-u_c A_d + \sigma_{cd} + \omega_{cd} + \frac{1}{3} \theta h_{cd} \right) \\
&= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \mathcal{D}_a n_b + u_b n^d N_a^c \sigma_{cd} + u_b n^d N_a^c \omega_{cd} \\
&\quad + u_b n_a n^c n^d \sigma_{cd} + u_b n_a n^c n^d \omega_{cd} + \frac{1}{3} \theta n_a u_b \\
&= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \mathcal{D}_a n_b + \left(\Sigma + \frac{1}{3} \theta \right) n_a u_b + \Sigma_a u_b + u_b n^d N_a^c \omega_{cd} \\
&= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \mathcal{D}_a n_b + \left(\Sigma + \frac{1}{3} \theta \right) n_a u_b + \Sigma_a u_b \\
&\quad - u_b n^{[c} N_a^{d]} \omega_{cd} + u_b n^{(d} N_a^{c)} \omega_{cd} \\
&= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \zeta_{ab} + \frac{1}{2} N_{ab} \phi + \xi \varepsilon_{ab} + n_a a_b \\
&\quad + \left(\Sigma + \frac{1}{3} \theta \right) n_a u_b + \Sigma_a u_b - u_b \varepsilon_{ac} \Omega^c
\end{aligned} \tag{1.51}$$

felhasználva, hogy

$$\begin{aligned}
\omega^b &= \frac{1}{2} (n^b \varepsilon^{ij} - n^i \varepsilon^{bj} + n^j \varepsilon^{bi}) \omega_{ij} , \\
\Omega &= n_b \omega^b = \frac{1}{2} n_b \varepsilon^{bij} \omega_{ij} = \frac{1}{2} n_b (n^b \varepsilon^{ij} - n^i \varepsilon^{bj} + n^j \varepsilon^{bi}) \omega_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \omega_{ij} , \\
\Omega^a &= N_b^a \omega^b = \frac{1}{2} N_b^a \varepsilon^{bij} \omega_{ij} = \frac{1}{2} N_b^a (n^b \varepsilon^{ij} - n^i \varepsilon^{bj} + n^j \varepsilon^{bi}) \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} N_b^a (-n^i \varepsilon^{bj} + n^j \varepsilon^{bi}) \omega_{ij} \\
\varepsilon_{ca} \Omega^a &= \varepsilon_{ca} N_b^a \omega^b = \frac{1}{2} N_b^a (-n^i \varepsilon^{bj} + n^j \varepsilon^{bi}) \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} N_b^a [-n^i (N_c^b N_a^j - N_c^j N_a^b) + n^j (N_c^b N_a^i - N_c^i N_a^b)] \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} [-n^i (N_b^a N_c^b N_a^j - N_b^a N_c^j N_a^b) + n^j (N_b^a N_c^b N_a^i - N_b^a N_c^i N_a^b)] \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} [-n^i (N_c^j - 2N_c^j) + n^j (N_c^i - 2N_c^i)] \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} (n^i N_c^j - n^j N_c^i) \mathcal{D}_{[i} u_{j]} = n^{[i} N_c^{j]} \omega_{ij} ,
\end{aligned} \tag{1.52}$$

továbbá az (1.26), (1.31), (1.33), (1.34), (1.36), (1.43), (1.48) és (1.50) összefüggéseket.

Az u^a vektor 4-es kovariáns deriváltjának felbontása pedig

$$\begin{aligned}
\nabla_a u_b &= -u_a A_b + \mathcal{D}_a u_b = -u_a (\mathcal{A}n_b + \mathcal{A}_b) + \frac{1}{3}\theta h_{ab} + \sigma_{ab} + \omega_{ab} \\
&= -u_a (\mathcal{A}n_b + \mathcal{A}_b) + \frac{1}{3}\theta (N_{ab} + n_a n_b) + \Sigma_{ab} + n_a \Sigma_b + n_b \Sigma_a \\
&\quad + \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) \Sigma + \varepsilon_{ab} \Omega + n_a \varepsilon_{bi} \Omega^i - n_b \varepsilon_{ai} \Omega^i, \tag{1.53}
\end{aligned}$$

úgy, hogy

$$\begin{aligned}
\omega_{ab} &= g_a^i g_b^j \omega_{ij} = h_a^i h_b^j \omega_{ij} = h_a^{[i} h_b^{j]} \omega_{ij} = \frac{1}{2} (h_a^i h_b^j - h_b^i h_a^j) \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} (N_a^i + n_a n^i) (N_b^j + n_b n^j) \omega_{ij} - \frac{1}{2} (N_b^i + n_b n^i) (N_a^j + n_a n^j) \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} (N_a^i N_b^j + N_a^i n_b n^j + n_a n^i N_b^j) \omega_{ij} - \frac{1}{2} (N_b^i N_a^j + n_b n^i N_a^j + n_a n^i N_b^j) \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} N_a^i N_b^j \omega_{ij} + \frac{1}{2} n_b n^j N_a^i \omega_{ij} + \frac{1}{2} n_a n^i N_b^j \omega_{ij} - \frac{1}{2} N_b^i N_a^j \omega_{ij} \\
&\quad - \frac{1}{2} n_a n^j N_b^i \omega_{ij} - \frac{1}{2} n_b n^i N_a^j \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} (N_a^i N_b^j - N_b^i N_a^j) \omega_{ij} + \frac{1}{2} n_a (n^i N_b^j - n^j N_b^i) \omega_{ij} - \frac{1}{2} n_b (n^i N_a^j - n^j N_a^i) \omega_{ij} \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ab} \varepsilon^{ij} \omega_{ij} + n_a n^{[i} N_b^{j]} \omega_{ij} - n_b n^{[i} N_a^{j]} \omega_{ij} \\
&= \varepsilon_{ab} \Omega + n_a \varepsilon_{bi} \Omega^i - n_b \varepsilon_{ai} \Omega^i,
\end{aligned}$$

ahol a (1.34), (1.48), (1.50) és (1.52) összefüggéseket alkalmazták, valamint az $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$ tulajdonságot [323].

A formalizmus matematikai kidolgozása után gömbszimmetrikus, sztatikus háttér választása mellett és vákuumban ($T_{ab} = 0$, $G_{ab} = 0$) származtatták az 1 + 3 kovariáns formalizmus dinamikai- és kényszeregyenleteinek további 1+2 felbontását. Eredményül 11 darab „propagációs” (n^a menti fejlődés) egyenletet, 11 darab „evolúciós” (u^a menti fejlődés) egyenletet, 5 darab kevert fejlődésegyenletet és 3 darab kényszeregyenletet kaptak. A propagációs egyenletek a mennyiségek elsőrendű „ $\wedge$ ” és „ δ ” deriváltjait tartalmazzák, az evolúciós egyenletekben a változóknak az elsőrendű „ $\cdot$ ” és „ δ ” deriváltjai szerepelnek, a kevert fejlődésegyenletekben a változók elsőrendű „ $\cdot$ ”, „ $\wedge$ ” és „ δ ” deriváltjai is megjelennek, míg a kényszeregyenletekben a változóknak csak az elsőrendű „ δ ” deriváltjai vannak a további derivált nélküli tagokon kívül. Megállapították, hogy Schwarzschild megoldás esetén az $\{\mathcal{A}, \mathcal{E}, \phi\}$ változók és „ $\wedge$ ” deriváltjaik nem eltűnők. A Schwarzschild fekete lyuk környezetében gravitációs hullámokat vizsgáltak származtatva a Regge–Wheeler és Zerilli egyenleteket az 1 + 1 + 2 kovariáns formalizmusban.

A 4-dimenziós téridő 1 + 1 + 2 kovariáns felbontási módszerének számos alkalmazása van. A formalizmus bevezetése után C. A. Clarkson általános forgási szimmetriával

rendelkező téridők esetén ugyancsak megadta a háttérre vonatkozó dinamikai egyenleteket, valamint levezette az elsőrendű perturbációs egyenleteket [323]. Az általánosabb szimmetria választás miatt, ekkor a háttér téridőre 11 darab propagációs egyenlet, 5 darab evolúciós egyenlet, 5 darab kevert fejlődésegyenlet és 3 darab kényszeregyenlet vonatkozik. A formalizmust alkalmazták a Kerr-téridő esetén az ergorégió kívüli rész geometriai vizsgálatára [324]. Nyírásmentes, lokálisan forgásszimmetrikus (azaz Locally Rotationally Symmetric, LRS-II) ideális folyadékként leírható rendszerek dinamikáját és geometriai osztályozását ismertették az $1+1+2$ kovariáns leírás alkalmazásával a [325] munkában. Kantowski–Sachs háttér esetén örvénymentes, ideális folyadék perturbációs egyenleteit mutatták be a kovariáns formalizmusban a [326] hivatkozásban. Általánosítva a kovariáns felbontást, 5-dimenziós, lokális forgásszimmetriával rendelkező téridőnél kidolgozták az $1+1+3$ kovariáns téridőfelbontást, majd alkalmazták a Brán elméletekben a fejlődés egyenletek és kényszeregyenletek meghatározásához [327].

A disszertációban az ADM formalizmus nemmerőleges $2+1+1$ általánosítását mutatom be, azonban az $1+1+2$ kovariáns formalizmusban megismert kinematikai mennyiségek és a disszertációban használt geometria mennyiségek között van átjárás, amelyet a 2.3. alfejezetben mutatok be.

1.4.2. ADM formalizmus

A gravitáció kanonikus mozgásegyenleteit 1962-ben publikálta R. Arnowitt, S. Deser és C. W. Misner, amelyhez kidolgozták és alkalmazták a téridő ún. *metrikus változók* szerinti $3+1$ dimenziós felbontását, azaz az ADM formalizmust [328], [329]. Munkájukban bemutatták az általános relativitáselmélet hamiltoni tárgyalását, amely során származtatták a gravitációra vonatkozó kanonikus egyenleteket. Az általános relativitáselméleti Lagrange-sűrűséget új paraméterek bevezetésével átalakították Liouville-formába úgy, hogy 4 darab Lagrange-multiplikátort vezettek be a 4 darab kényszeregyenletnek megfelelően, amelyek a 3-dimenziós N_a shift vektor és az N lapse függvény.

A formalizmus kidolgozásakor az Einstein–Hilbert hatásban szereplő Lagrange-sűrűség ún. Palatini-alakjából indultak ki, ekkor

$$S = \int dx^4 \tilde{\mathbf{g}}^{ab} \tilde{R}_{ab}(\tilde{\Gamma}) , \quad (1.54)$$

ahol $\tilde{\mathbf{g}}^{ab} = \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab}$, $\tilde{g}^{ab}$ 4-dimenziós metrika inverze, $\tilde{g}$ a 4-dimenziós metrika determinánsa, míg a 4-dimenziós Ricci-tenzor az

$$\tilde{R}_{ab}(\tilde{\Gamma}) = \partial_i \tilde{\Gamma}_{a.b}^i - \partial_b \tilde{\Gamma}_{a.i}^i + \tilde{\Gamma}_{a.b}^i \tilde{\Gamma}_{i.k}^k - \tilde{\Gamma}_{a.k}^i \tilde{\Gamma}_{b.i}^k ,$$

amely az ún. $\tilde{\Gamma}_{a.c}^b$ affinitástól vagy affin konnexió együttthatótól függ [328], [329]. A továbbiakban a 4-dimenziós mennyiségeket hullámvonal jelöli. A hatás inverz metrika szerinti variációjából a

$$\tilde{G}_{ab} = \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{R} = 0$$

Einstein-egyenletet, és az affinitás szerinti első rendű variációból a

$$\tilde{\nabla}_c \tilde{g}^{ab} \equiv \partial_c \tilde{g}^{ab} + \tilde{g}^{ai} \tilde{\Gamma}_{i.c}^b + \tilde{g}^{bi} \tilde{\Gamma}_{i.c}^a - \tilde{g}^{bi} \tilde{\Gamma}_{i.c}^a = 0 \quad (1.55)$$

összefüggést kapták, ahol $\tilde{\nabla}$ a 4-dimenziós affin konnexió. Torziómentes téridőn az (1.55) háttérre vonatkozó egyenletből következik, hogy

$$\tilde{\Gamma}_{a.b}^i = \widetilde{\{a.b\}^i} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{ik}(\partial_a \tilde{g}_{bk} + \partial_b \tilde{g}_{ak} - \partial_k \tilde{g}_{ab}) ,$$

azaz az affinitás a Christoffel-szimbólum, amely a metrikával kompatibilis Levi-Civita konnexió együttthatója [329], ekkor

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{g}_{bc} = 0 .$$

A 3 + 1 formalizmusban a 4-dimenziós metrikát felbontották az

$$N \equiv (-\tilde{g}^{00})^{-1/2}$$

lapse függvényre, az

$$N_a \equiv \tilde{g}_{\mu 0}$$

shift vektorra és a

$$g_{ab} \equiv \tilde{g}_{\mu\nu}$$

3-dimenziós metrikára, továbbá ezek alapján kapható, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{00} &= -(N^2 - N_a N^a) , \quad \tilde{g}^{00} = -\frac{1}{N^2} , \\ \tilde{g}^{\mu 0} &= \frac{N^a}{N^2} , \quad N^a = \tilde{g}^{ab} N_b . \end{aligned}$$

Ekkor a 4-dimenziós metrika inverze a

$$\tilde{g}^{ab} = g^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} ,$$

valamint a 4-dimenziós metrika determinánsa a

$$\sqrt{-\tilde{g}} = N \sqrt{g} .$$

Bevezették a

$$\pi^{ab} = \sqrt{-\tilde{g}} \left(\tilde{\Gamma}_{i,j}^{.0} - g_{ij} \tilde{\Gamma}_{k,m}^{.0} g^{km} \right) g^{ia} g^{jb}$$

kanonikus impulzust. A kanonikus impulzussal helyettesíthető a

$$K_{\mu\nu} = -\tilde{\nabla}_\mu n_\nu = -g_\mu^c g_\nu^d \tilde{\nabla}_c n_d \implies K_{ab} = -\partial_a n_b + n_i \tilde{\Gamma}_{a,b}^i = N \tilde{\Gamma}_{a,b}^{.0}$$

a beágyazásra jellemző külső görbület úgy, hogy

$$\pi^{ab} = -\sqrt{g} (K^{ab} - g^{ab} K) .$$

A K_{ab} az $n_a = -N\delta_a^0$ időszerű normális 4-dimenziós kovariáns deriváltjának a teljesen térszerű része, valamint $K = K_{ab}g^{ab} = K_a^a$. Megjegyzendő, hogy bár az $a, b, c, \dots$ téridőindexek, viszont csak a hullámvonallal jelölt mennyiségek 4-dimenziósak, ezért a $\mu, \nu, \alpha, \dots$ térindexek külön használata nem szükségszerű. Az (1.54) Palatini Lagrange-sűrűség Liouville-formáját kialakították a 3 + 1 formalizmusban, amely az

$$L = -g_{ab} \partial_t \pi^{ab} - NR^0 - N_a R^a - 2\partial_a \left(\pi^{ab} N_b - \frac{1}{2} \pi N^a + \sqrt{g} D^a N \right) , \quad (1.56)$$

ahol $\pi = g_{ab} \pi^{ab} = \pi_a^a$ és 3-dimenzióban a „ D ” esetén igaz, hogy $D_a g_{bc} = 0$. Az

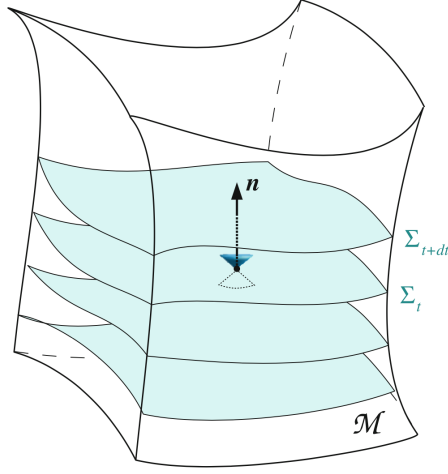
$$\begin{aligned} R^0 &= -\sqrt{g} \left[R + \frac{1}{g} \left(\frac{1}{2} \pi^2 - \pi^{ab} \pi_{ab} \right) \right] , \\ R^a &= -2D_b \pi^{ab} \end{aligned}$$

a kényszerek, továbbá R a 3-dimenziós Ricci-skalár, amely a 3-dimenziós g_{ab} metrikától függ. Az (1.56) felbontott alak alapján az Einstein-i gravitáció Hamilton-sűrűsége vákuumban a

$$H = NR^0 + N_a R^a .$$

Levezették az (1.56) Lagrange-sűrűséget tartalmazó hatás π^{ab} és g^{ab} szerinti variációjából a kanonikus koordinátákra és kanonikus impulzusokra vonatkozó mozgásegyenleteket, amelyek a

$$\begin{aligned} \partial_t g_{ab} &= \frac{2N}{\sqrt{g}} \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \pi \right) + 2D_{(a} N_{b)} , \\ \partial_t \pi^{ab} &= -N\sqrt{g} \left(R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R \right) + \frac{Ng^{ab}}{2\sqrt{g}} \left(\pi^{ij} \pi_{ij} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ &\quad - \frac{2N}{\sqrt{g}} \left(\pi^{ai} \pi_i^b - \frac{1}{2} \pi \pi^{ab} \right) + \sqrt{g} (D^a D^b N - g^{ab} D_i D^i N) \\ &\quad + D_i (N^i \pi^{ab}) - 2\pi^{i(a} D_i N^{b)} , \end{aligned}$$



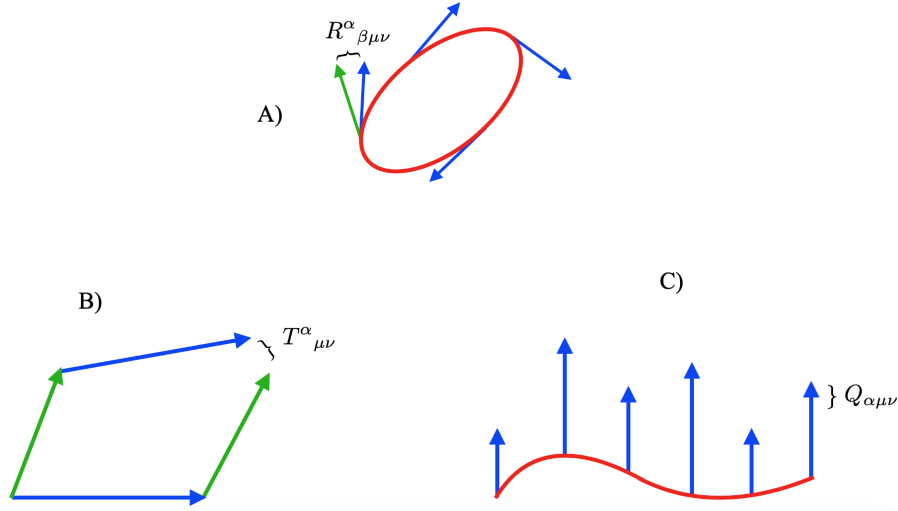
9. ábra. Egy $\mathcal{M}$ téridő föliázása látható Σ_t térszerű hiperfelület sereggel, ahol $\mathbf{n}$ időszerű normális merőleges a $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ hiperfelületekre [329].

továbbá a kényszerekre az

$$R^0 = 0 = R^a$$

eredményt kapták vissza az N és N_a szerinti variációkból. Ezután a Poisson-zárójelek bevezetésével megadták a kanonikus egyenleteket. Megállapították, hogy az N_a és N Lagrange-multiplikátorok a koordináták fejlődését határozzák meg az időszerű n^a normálisra merőleges $t = \text{konst.}$ hiperfelületekről hiperfelületekre, viszont nem töltenek be dinamikai szerepet. Az ADM téridőfelbontást mutatja be a 9. ábra. A gravitáció kanonikus formalizmusának tárgyalása mellett ismertették a gravitáció kvantálásának lehetőségét és korlátait. A Palatini formalizmusban [330], a $3 + 1$ dimenziós ADM téridőfelbontással levezették a Gauss–Codazzi relációkat és az illesztési feltételeket is a [331], [332] folyóiratcikkekben. Megállapították, hogy a kapott határtag az általános relativitáselméleti Gibbons–Hawking–York határtaggal azonos vákuum téridők esetén, de eltérhet anyagi hatás jelenlétében.

Az ADM formalizmust a Palatini formalizmuson kívül a nem metrikus módosított gravitációelméletekben is felhasználták, ezek a Teleparallel Gravity (TG) és a Symmetric Teleparallel Gravity (STG) [333]. A TG és STG elméletekben a gravitáció geometria, viszont nem azonosítja csak a téridő görbületével. A bevezetett $\tilde{\Gamma}_{ab}^c$ affin konnexió együttható a $\{\tilde{c}_{ab}\}$ Christoffel-szimbólum mellett a $\tilde{T}_{.ab}^c = 2\tilde{\Gamma}_{[ab]}^c$ torziót és a



10. ábra. Az A) rajz szemlélteti az általános relativitáselmélet által megfogalmazott gravitációt. Amennyiben egy vektort eltolunk végig egy zárt görbe mentén, akkor a vektor elfordulásának mértékét fogja megadni az R^a_{bcd} . A B) rajz mutatja be TG változatát az általános relativitáselméletnek. Ebben az esetben két vektor egymás mentén történő eltolása során keletkező nem záródást adja meg a T^a_{bc} . A C) rajz az általános relativitás STG analógiáját ábrázolja, amiben egy vektor transzformációjakor keletkező változás a vektor hosszában a Q^a_{bc} nemmetricitásos kötődik [333].

$\tilde{Q}_{cab} = \tilde{\nabla}_c \tilde{g}_{ab}$ nemmetricitást tartalmazza úgy, hogy

$$\tilde{\Gamma}^c_{.ab} = \widetilde{\{^c_{ab}\}} + \frac{1}{2}\tilde{T}^c_{.ab} + \tilde{T}^c_{(a.b)} + \frac{1}{2}\tilde{Q}^c_{.ab} - \tilde{Q}^c_{(a.b)} . \quad (1.57)$$

Az (1.57) összefüggésben a 2. és 3. tag a

$$\tilde{K}^c_{.ab} = \frac{1}{2}\tilde{T}^c_{.ab} + \tilde{T}^c_{(a.b)}$$

kontorzió (contorsion), a 4. és 5. tag az

$$\tilde{L}^c_{.ab} = \frac{1}{2}\tilde{Q}^c_{.ab} - \tilde{Q}^c_{(a.b)}$$

diszformáció (disformation). A $\widetilde{\{^c_{ab}\}}$ Christoffel-szimbólum a $\tilde{\mathcal{D}}$ 4-dimenziós Levi-Civita konnexió együtthatója, mivel $\tilde{\mathcal{D}}_a \tilde{g}_{bc} = 0$. A 4-dimenziós Riemann-tenzort az

$$\tilde{R}^c_{.dab} = \partial_a \tilde{\Gamma}^c_{.bd} + \partial_b \tilde{\Gamma}^c_{.ad} + \tilde{\Gamma}^c_{.ai} \tilde{\Gamma}^i_{.bd} - \tilde{\Gamma}^c_{.bi} \tilde{\Gamma}^i_{.ad}$$

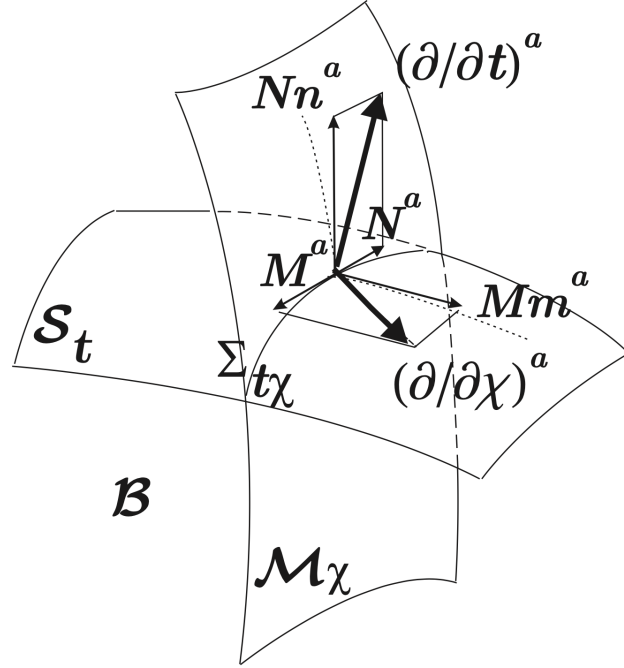
kifejezés adja. A fenti fogalmak bevezetése alapján, tehát egy módosított gravitációelmélet metrikus amennyiben $\tilde{Q}^c_{.ab}(\tilde{\Gamma}, \tilde{g}) = 0$, torziómentes amennyiben $\tilde{T}^c_{.ab}(\tilde{\Gamma}, \tilde{g}) = 0$,

továbbá a téridő sík, ha $\tilde{R}_{.dab}^c(\tilde{\Gamma}) = 0$ [333]. A $\tilde{Q}_{.ab}^c$, a $\tilde{T}_{.ab}^c$ és az $\tilde{R}_{.dab}^c$ jelentését egy vektor transzformációja során a 10. ábra mutatja be. A nem metrikus TG elméletek közé sorolható a TEGR (Teleparallel Equivalent of General Relativity) elmélet, amelyre a fenti jellemzést alkalmazva igaz, hogy $\tilde{Q}_{.ab}^c(\tilde{\Gamma}, \tilde{g}) = 0$, $\tilde{T}_{.ab}^c(\tilde{\Gamma}, \tilde{g}) \neq 0$, $\tilde{R}_{.dab}^c(\tilde{\Gamma}) = 0$, míg az STG elmélet STEGR (Symmetric Teleparallel Equivalent of General Relativity) alosztályára a $\tilde{Q}_{.ab}^c(\tilde{\Gamma}, \tilde{g}) \neq 0$, $\tilde{T}_{.ab}^c(\tilde{\Gamma}, \tilde{g}) = 0$, $\tilde{R}_{.dab}^c(\tilde{\Gamma}) = 0$ összefüggések vonatkoznak [333], [332]. A TEGR és STEGR elméletek egyik célja az Einstein-i gravitációelmélet eredményeinek származtatása, például a naprendszerbeli tesztek, általános relativitáselméleti fekete lyukak reprodukálása. A TG és STG elméletekben szintén felhasználták az ADM téridőfelbontást [334].

Az ADM formalizmust alkalmazták továbbá a metrikus módosított gravitációelméletekben. A 3+1 téridőfelbontásban tárgyalták a kozmológiai perturbációs számítás EFT közelítését unitáris mérték választásával [335]. Horndeski elmélet bővítése során a mezőegyenleteket ADM változókba írták, majd megadták a megfelelő Hamilton-sűrűséget a [336] folyóiratcikkben. Az ADM formalizmus használatával a Ricci-skalárral csatolt Scalar–Gauss–Bonnet (sGB) gravitációs elméletben sztatikus, vagy forgó téridő megoldásokat vezettek le [338]. Bemutatták az általános relativitáselméleti ideális folyadék hidrodinamikai egyenleteit az ADM formalizmusban, amelyet egy kifejlesztett kód segítségével vezettek le, továbbá a kód lehetővé teszi, hogy bármilyen relativisztikus ideális folyadék szimulációját elkészítsék [337]. A Mathematica-ban írt ún. GRAVITAS kód az általános relativitáselméleti mozgásegyenletek megoldására és töltéssel nem rendelkező, nemforgó fekete lyukak gráf diagrammjainak ábrázolására alakítottak ki [339]. A GRAVITAS fejlesztése során beépítették a gráf diagrammok 3 + 1 dimenziós ADM felbontáson belüli reprodukálását is [340].

Az ADM formalizmus esetén szintén felmerült a téridő további felbontása, amelynek fő oka az időfejlődés vizsgálata mellett egy térbeli szimmetria menti térbeli terjedés tanulmányozása. Azonban ennek is többféle megközelítése létezik, például a Killing-vektormezőt alkalmazó $[(2 + 1) + 1]$ dimenziós téridőfelbontás [341], az általános relativitáselméleti fekete lyukak spinor analíziséhez kifejlesztett $1 + 1 + 1 + 1$ dimenziós Newman–Penrose formalizmus [342]–[344], valamint az ún. merőleges $s+1+1$ dimenziós ADM-szerű téridőfelbontás [345], [346].

A merőleges $s+1+1$ formalizmus a disszertáció 2. fejezetében és a [347]–[351] hivatkozásokban bemutatott formalizmus előzménye. A merőleges $s+1+1$ formalizmusban az $(s+2)$ -dimenziós $\mathcal{B}$ téridő fóliázható $(s+1)$ -dimenziós térszerű $\mathcal{S}_t$ ($t = \text{konst.}$) hiperfelület sereggel, amelynek normálisa n^a időszerű, továbbá az $(s+1)$ -dimenziós $\mathcal{M}_\chi$ ($\chi = \text{konst.}$, ahol χ térszerű koordináta) hiperfelület sereggel, amelynek normálisa m^a



11. ábra. Az $(s+2)$ dimenziós $\mathcal{B}$ téridő fóliázása $(s+1)$ dimenziós térszerű $\mathcal{S}_t$ és időszerű $\mathcal{M}_\chi$ hiperfelület seregekkel. Az ábrán a $\partial/\partial t$ és a $\partial/\partial \chi$ fejlődés vektorok felbontása is látható [345].

térszerű [345]. Az $s+1+1$ dimenziós formalizmusban a fóliázás merőleges, ekkor az n^a és m^a normálisok ugyancsak merőlegesek egymásra, valamint az $\mathcal{N} = 0$, amely a térszerű fóliázásból adódó $(s+1)$ -dimenziós shift vektor egyik komponense (ld. 2. fejezetben). Ebből következik, hogy mind az $\mathcal{S}_t$ mind az $\mathcal{M}_\chi$ hiperfelület seregekhez adaptálható az $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_i\}$ ortonormált bázis és $f^{\mathbf{B}} = \{\bar{n}, \bar{m}, F^j\}$ duális bázisa, amelyben az $(s+2)$ -dimenziós metrika

$$g_{ab} = -n_a n_b + m_a m_b + h_{ab}$$

alakú, továbbá

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a &\equiv N n^a + N^a, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a &\equiv M m^a + M^a. \end{aligned}$$

A h_{ab} az $\mathcal{S}_t$ és $\mathcal{M}_\chi$ hiperfelület seregek metszete által meghatározott s -dimenziós $\Sigma_{t\chi}$ hiperfelületen értelmezett indukált metrika. Az N^a és M^a vektorok az $(s+1)$ -dimenziós

megfelelő shift vektorok s -dimenziós komponensei, amelyek a $\Sigma_{t\chi}$ érintői, amíg N és M lapse-függvények. A következő relációk teljesülnek: $n_a N^a = 0$, $m_a M^a = 0$, $m_a N^a = 0$, $n_a M^a = 0$, $h_{ab} n^a = 0$, $h_{ab} m^a = 0$. A fóliázást a 11. ábra mutatja be. A formalizmussal a g_{ab} helyettesíthető a h_{ab} , N^a , M^a , N , M metrikus változókkal. Az n_a és m_a 1-formák $(s+2)$ -dimenziós deriváltjaival bevezették a beágyazást jellemző mennyiségeket, amelyek a metrikus változókkal állnak kapcsolatban és a fóliázás geometriai leírását teszik lehetővé. A formalizmust alkalmazták a gravitáció hamiltoni dinamikájának leírására ahol, mint a $3+1$ dimenziós ADM téridőfelbontásban, a beágyazási mennyiségek kanonikus változók szerepét töltik be [346]. Kozmológiai vizsgálatokat végeztek a formalizmus alkalmazásával Brán elméletekben [352]. Használták gömbszimmetrikus, sztatikus háttér mellett egy EFT hatásból származtatott mezőegyenletek bemutatására, valamint gömbszimmetrikus, sztatikus téridők perturbációs számítása során [197]. Azonban a fóliázás merőlegességének megválasztása miatt nem tudtak megfelelő mértékrögzítést tenni a perturbáció páros szektorában [197], [348].

A [197] hivatkozásban a

$$\begin{aligned} ds^2 = & (-N^2 + \mathcal{N}^2 + N_a N^a) dt^2 + 2(M\mathcal{N} + N_a M^a) dt d\chi \\ & + (M^2 + M_a M^a) d\chi d\chi + 2N_a dt dx^a + 2M_a d\chi dx^a \\ & + h_{ab} dx^a dx^b \end{aligned} \quad (1.58)$$

merőleges $2+1+1$ dimenziós téridőfelbontással kialakított ívelemnégyzetet veszik [345]. A továbbiakban a háttér gömbszimmetrikus és sztatikus, $s=2$, valamint a hullámvonal jelöli a 4-dimenziós mennyiségeket. Az (1.58) ívelemnégyzet az elsőrendű perturbáció után a

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\bar{s}^2 + \delta_1(ds^2) + \delta_2(ds^2) , \\ d\bar{s}^2 &= -\bar{N}^2 dt^2 + \bar{M}^2 dr^2 + \bar{h}_{ab} dx^a dx^b , \\ \delta_1(ds^2) &= -2\bar{N}\delta N dt^2 + 2\bar{M}\delta M dr^2 + 2\bar{M}\mathcal{N} dt dr \\ &\quad + 2\delta N_a dt dx^a + 2\delta M_a dr dx^a + \delta_1 h_{ab} dx^a dx^b , \\ \delta_2(ds^2) &= -((\delta N)^2 - \mathcal{N}^2 - \delta N_a \delta N^a) dt^2 \\ &\quad + ((\delta M)^2 + \delta M_a \delta M^a) dr^2 \\ &\quad + 2[\mathcal{N}\delta M + \delta N_a \delta M^a] dt dr + \delta_2 h_{ab} dx^a dx^b . \end{aligned}$$

Perturbáció során a mennyiségek az

$$N = \bar{N} + \delta N$$

módon változnak. A felülvonás jelzi a változók háttéren vett értékét, míg δ az attól való eltérés. Kezdetben a fóliázás merőlegességét csak a háttére szabták ki ($\bar{\mathcal{N}} =$

0). A perturbációs változóktól függő mennyiségek variációja különbözhet rendenként, amelyet a δ_1 és δ_2 jelöl. A perturbatív vektorok és szimmetrikus tenzorok az alábbi módon bonthatók fel gömbszimmetrikus, sztatikus háttéren:

$$\begin{aligned}\delta N_a &= D_a P + E_{,a}^b D_b Q , \\ \delta M_a &= D_a V + E_{,a}^b D_b W , \\ \delta h_{ab} &= h_{ab} A + D_a D_b B + \frac{1}{2} (E_{,a}^c D_c D_b + E_{,b}^c D_c D_a) C .\end{aligned}\quad (1.59)$$

A rotációmentes rész a páros, míg a divergenciamentes rész a páratlan szektor. Az $E_{ab} = \sqrt{\bar{h}} \varepsilon_{ab}$ egy tenzor sűrűség, amelyben az ε_{ab} a Levi-Civita 2-tenzor, $\bar{h}$ pedig a 2-dimenziós indukált metrika determinánsa. Ezek alapján a merőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontás és az (1.59) alkalmazásával, a gömbszimmetrikus, sztatikus háttéren a perturbációk páros szektorát a δN , δM , $\mathcal{N}$, P , V , A , B változók, míg a páratlan szektorát a Q , W , C változók írják le. A [197] hivatkozásban a Horndeski és a GLPV skalár-tenzor elméletekben alkalmazták a merőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontást a perturbációs egyenletek levezetéséhez. Ekkor a ϕ skalármező perturbációja, mint páros változó ugyancsak megjelenik. A páros és páratlan változók száma mértékrögzítéssel csökkenthető. A mértéktranszformáció során az

$$\widehat{x}^a = \tilde{x}^a + \tilde{\xi}^a , \quad (1.60)$$

infinitezimális koordináta transzformációt vezették be, ahol a

$$\tilde{\xi}^a = (\xi^t, \xi^r, \bar{D}^a \xi + E^{ba} \bar{D}_b \eta) \quad (1.61)$$

generátor 2-dimenziós részét az (1.59)-nek megfelelően bontották fel. Itt és a későbbiekben a „ $\widehat{}$ ” jelöli a transzformáció utáni mennyiségeket. A [197] hivatkozásban a 4-dimenziós metrika generátor menti Lie-deriváltjával megadták a metrika perturbációját egy új koordináta rendszerben úgy, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_\xi \tilde{g}_{ab} &= \delta \tilde{g}_{ab} - \widehat{\delta \tilde{g}_{ab}} \\ \widehat{\delta \tilde{g}_{ab}} &= \delta \tilde{g}_{ab} + \tilde{\nabla}_a \tilde{\xi}_b + \tilde{\nabla}_b \tilde{\xi}_a .\end{aligned}\quad (1.62)$$

A páros perturbációs változók a mértéktranszformáció után

$$\widehat{\delta N} = \delta N - \bar{N} \partial_t \xi^t - \partial_r \bar{N} \xi^r ,$$

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{N}} &= \mathcal{N} - \frac{\bar{N}^2}{\bar{M}} \partial_r \xi^t + \bar{M} \partial_t \xi^r , \\
\widehat{\delta M} &= \delta M + \xi^r \partial_r \bar{M} + \bar{M} \partial_r \xi^r , \\
\widehat{P} &= P - \bar{N}^2 \xi^t + \partial_t \xi , \\
\widehat{V} &= V + \bar{M}^2 \xi^r + \partial_r \xi - \frac{2}{r} \xi , \\
\widehat{A} &= A + \frac{2}{r} \xi^r , \\
\widehat{B} &= B + 2\xi , \\
\widehat{\delta \phi} &= \delta \phi - \xi^r \partial_r \bar{\phi} .
\end{aligned} \tag{1.63}$$

A páratlan perturbációs változók esetén a

$$\begin{aligned}
\widehat{Q} &= Q + \partial_t \eta , \\
\widehat{W} &= W + \partial_r \eta - \frac{2\eta}{r} , \\
\widehat{C} &= C + 2\eta
\end{aligned} \tag{1.64}$$

eredményt kapták. A [197] hivatkozásban a módosított gravitációelméletek EFT közelítésének alkalmazása miatt az unitér mérték választása mellett döntöttek, azaz $\widehat{\delta \phi} = 0$, amelyből következik, hogy

$$\xi^r = \frac{\delta \phi}{\partial_r \bar{\phi}} .$$

Ennek a megfontolásnak szintén oka volt, hogy az időszerű fóliázást a $\phi = \text{konst.}$ hiperfelületek által határozták meg. Ezt a választást radiális unitér mértéknek is nevezik, továbbá mivel ϕ határozza meg a radiális fejlődést, így független változóként nem jelenik meg a hatásban. Következőnek a konformis mértéket választották, ekkor a háttér indukált metrika és a perturbáció utáni metrika között konformis transzformációt szabtak meg, azaz

$$h_{ab} = e^{2\zeta} \bar{h}_{ab} . \tag{1.65}$$

A konformis mértékben a 2-dimenziós indukált metrika perturbációja

$$\begin{aligned}
\delta h_{ab} &= h_{ab} - \bar{h}_{ab} = e^{2\zeta} \bar{h}_{ab} - \bar{h}_{ab} \\
&= \bar{h}_{ab} (1 + 2\zeta + 2\zeta^2) - \bar{h}_{ab} \\
&= (2\zeta + 2\zeta^2) \bar{h}_{ab} = \delta_1 h_{ab} + \delta_2 h_{ab} , \\
\delta_1 h_{ab} &= 2\zeta \bar{h}_{ab} , \\
\delta_2 h_{ab} &= 2\zeta^2 \bar{h}_{ab} ,
\end{aligned} \tag{1.66}$$

az inverzé pedig a

$$\begin{aligned}
 \delta h^{ab} &= h^{ab} - \bar{h}^{ab} = e^{-2\zeta} \bar{h}^{ab} - \bar{h}^{ab} \\
 &= \bar{h}^{ab} (1 - 2\zeta + 2\zeta^2) - \bar{h}^{ab} \\
 &= (-2\zeta + 2\zeta^2) \bar{h}^{ab} = \delta_1 h^{ab} + \delta_2 h^{ab}, \\
 \delta_1 h^{ab} &= -2\zeta \bar{h}^{ab}, \\
 \delta_2 h^{ab} &= 2\zeta^2 \bar{h}^{ab}.
 \end{aligned} \tag{1.67}$$

A konformis mértékben $\widehat{B} = 0$ és $\widehat{C} = 0$, azaz

$$\xi = -\frac{B}{2}, \quad \eta = -\frac{C}{2},$$

valamint az A perturbációs változó helyét a ζ konformis faktor veszi át. Az utolsó szabadsági fokot végül a merőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós formalizmus miatt a fóliázó hiperfelület seregek merőlegességének megtartására kellett használniuk, azaz $\widehat{\mathcal{N}} = 0$. Ekkor a

$$\xi^t = \int dr \frac{2\bar{M}}{\bar{N}} \left(\mathcal{N} + \frac{\bar{M}}{2} \partial_t \xi^r \right) + F(t, \theta, \varphi)$$

integrált kapták, ahol az integrációs konstans egy tetszőleges $F(t, \theta, \varphi)$ függvény, amely miatt a mértékrögzítés nem tehető egyértelművé. Az egyértelmű mértékrögzítéshez szükségük lett volna még egy szabadsági fokra, amellyel a $\widehat{P} = 0$.

A [197] folyóiratcikkbemutatott nem egyértelmű mértékrögzítés oka a fóliázás merőlegességének megkövetelése a perturbáció után is. Ennek feloldása érdekében dolgoztam ki a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontást, amely segítségével elértem az egyértelmű mértékrögzítést, ezt a 2. fejezetben részletezem.

1.4.3. A disszertáció saját eredményeit bemutató fejezetek rövid összefoglalása

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontás alkalmazásának alap ötlete az EFT elméletekbeli gömbszimmetrikus, sztatikus megoldások és a perturbációk vizsgálata volt, kifejezetten a páros szektorra összpontosítva, mivel a páratlan szektor perturbációs egyenletei megegyeznek merőleges és nemmerőleges dupla fóliázásban.

A 2. fejezetben a [347]-[351] hivatkozásokban kidolgozott matematikai formalizmust, a formalizmussal elért egyértelmű mértékrögzítést és az általános relativitáselmélet hamiltoni tárgyalását mutatom be.

A 3. fejezetben a nemmerőleges dupla fóliázás formalizmusának alkalmazásával egy EFT hatás esetén, gömbszimmetrikus és sztatikus téridő megoldásokat ismertetek

radiális unitér és konformis mértékben. A megoldások a nem minimálisan csatolt k -eszencia elmélet esetére specializáltak, ahol a G_4 függvény különböző választásával több eset is adódott. Ezeket az eredményeket a [353] hivatkozás foglalja össze.

A 4. fejezetben a [354] hivatkozásban ismertetett minimálisan csatolt skalármező folyadék leírását tárgyalom, ahol a skalármező energia-impulzus tenzorát a 4-dimenziós metrika $2 + 1 + 1$ felbontott alakjának segítségével adom meg nullszerű, időszerű és térszerű skalármező gradiens esetén.

A dolgozat további részében az alkalmazott jelölések: a latin- illetve görög indexek absztrakt indexek 4-, illetve 3-dimenzióban, a vastag kis- és nagybetűs latin indexek pedig (például $\mathbf{i}$, illetve $\mathbf{A}$) 2, illetve 4-dimenziós bázisvektorok nevében jelennek meg, és a $-, +, +, +$ szignatúrát használom.

2. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontás

A későbbiekben alkalmazásra kerülő nemmerőleges $2 + 1 + 1$ téridőfelbontást foglalom össze ebben a fejezetben, amely a [347]-[351] hivatkozásokban található. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus a [345] által bemutatott merőleges $s + 1 + 1$ kettős fóliázásból indul ki úgy, hogy $s = 2$ és $\mathcal{N} \neq 0$.

A kétszeresen fóliázható 4-dimenziós téridő $\mathcal{B}$ felbontható 3-dimenziós időszerű $\mathfrak{M}_\chi$ ($\chi = \text{konst.}$) és 3-dimenziós térszerű $\mathcal{S}_t$ ($t = \text{konst.}$) hiperfelület seregekkel. Az időszerű és térszerű 3-dimenziós hiperfelületek metszete egy 2-dimenziós $\Sigma_{t\chi}$ felület, amelyen a 2-dimenziós indukált metrika a g_{ab} . Az $e_{\mathbf{A}} = \{\partial/\partial t, \partial/\partial \chi, E_{\mathbf{i}}\}$ és az $e^{\mathbf{B}} = \{dt, d\chi, E^{\mathbf{j}}\}$ a $\mathcal{B}$ -n értelmezett ortonormált bázis, illetve ennek duális bázisa. Az $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_{\mathbf{i}}\}$ és az $f^{\mathbf{B}} = \{\bar{n}, \bar{m}, F^{\mathbf{j}}\}$ az $\mathcal{S}_t$ -n értelmezett ortonormált bázis, illetve ennek duális bázisa, ahol $\bar{n}_a = -n_a$, $\bar{m}_a = m_a$, $n_a n^a = -1$, $m_a m^a = 1$, $m_a n^a = 0$. A $g_{\mathbf{A}} = \{k, l, G_{\mathbf{i}}\}$ és a $g^{\mathbf{B}} = \{\bar{k}, \bar{l}, G^{\mathbf{j}}\}$ az $\mathfrak{M}_\chi$ -n értelmezett ortonormált bázis, illetve ennek duális bázisa, ahol $\bar{k}_a = -k_a$, $\bar{l}_a = l_a$, $k_a k^a = -1$, $l_a l^a = 1$, $l_a k^a = 0$. Továbbá

$$E_{\mathbf{i}} = F_{\mathbf{i}} = G_{\mathbf{i}} = \frac{\partial}{\partial y^{\mathbf{i}}} . \quad (2.1)$$

A 4-dimenziós metrika felbontott alakjai az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületeken értelmezett bázisokban:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ab} &= -n_a n_b + m_a m_b + g_{ab} \\ &= -k_a k_b + l_a l_b + g_{ab} . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Az n_a az $\mathcal{S}_t$ hiperfelületek, amíg az l_a az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületek normálisai, továbbá a g_{ab} indukált metrika g_b^a vegyes indexű alakja $\Sigma_{t\chi}$ -re történő projekciós tenzor. Az m_a , k_a , n_a és l_a a $\Sigma_{t\chi}$ felületre merőlegesek.

A t és χ koordináta vonalak tangens vektorainak felbontása az (n^a, m^a) bázisban az

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = N n^a + N^a + \mathcal{N} m^a , \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi}\right)^a = M m^a + M^a + \mathcal{M} n^a \quad (2.4)$$

alakú, ahol N a lapse függvény, N^a és $\mathcal{N}$ pedig a 3-dimenziós shift vektor $2 + 1$ felbontásából származó komponensek. Az M egy lapse függvény, továbbá M^a és $\mathcal{M}$ egy 3-dimenziós shift vektor $2 + 1$ felbontásából származó komponensek. A következő relációk igazak:

$$\begin{aligned} m_a N^a &= 0 , & n_a N^a &= 0 , & k_a N^a &= 0 , & l_a N^a &= 0 , \\ n_a M^a &= 0 , & m_a M^a &= 0 , & k_a M^a &= 0 , & l_a M^a &= 0 . \end{aligned}$$

Az N^a térszerű, a $\partial/\partial t$ időszerű és jövőirányított, ezért

$$N^2 - \mathcal{N}^2 > g_{ab}N^aN^b \geq 0 ,$$

valamint N pozitív. Az $e^{\mathbf{B}}$, $f^{\mathbf{B}}$ és $g^{\mathbf{B}}$ bázisok közötti kapcsolat származtatása során az $\langle e^{\mathbf{B}}, e_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle$ és $\langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \langle g^{\mathbf{B}}, g_{\mathbf{A}} \rangle$ dualitási relációkat használtam. A $\langle dt, \partial/\partial\chi \rangle = 0$ eredményből adódott, hogy a 3-dimenziós shift vektor $\mathcal{M}$ komponense zérus. Az $\langle f^{\mathbf{B}}, f_{\mathbf{A}} \rangle = \delta_{\mathbf{A}}^{\mathbf{B}} = \langle g^{\mathbf{B}}, g_{\mathbf{A}} \rangle$ dualitási relációk számolása során kaptam meg a $\partial/\partial t$ és $\partial/\partial\chi$ fejlődésvektorok felbontását a (k^a, l^a) bázisban, amelyek a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = \frac{N}{\mathbf{c}} k^a + N^a , \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a = M(-\mathfrak{s}k^a + \mathbf{c}l^a) + M^a . \quad (2.6)$$

Az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisok közötti transzformáció a

$$\begin{pmatrix} k_a \\ l_a \end{pmatrix} = (N^2 - \mathcal{N}^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} N & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a \\ m_a \end{pmatrix} , \quad (2.7)$$

azaz a

$$\begin{pmatrix} k_a \\ l_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & \mathfrak{s} \\ \mathfrak{s} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_a \\ m_a \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

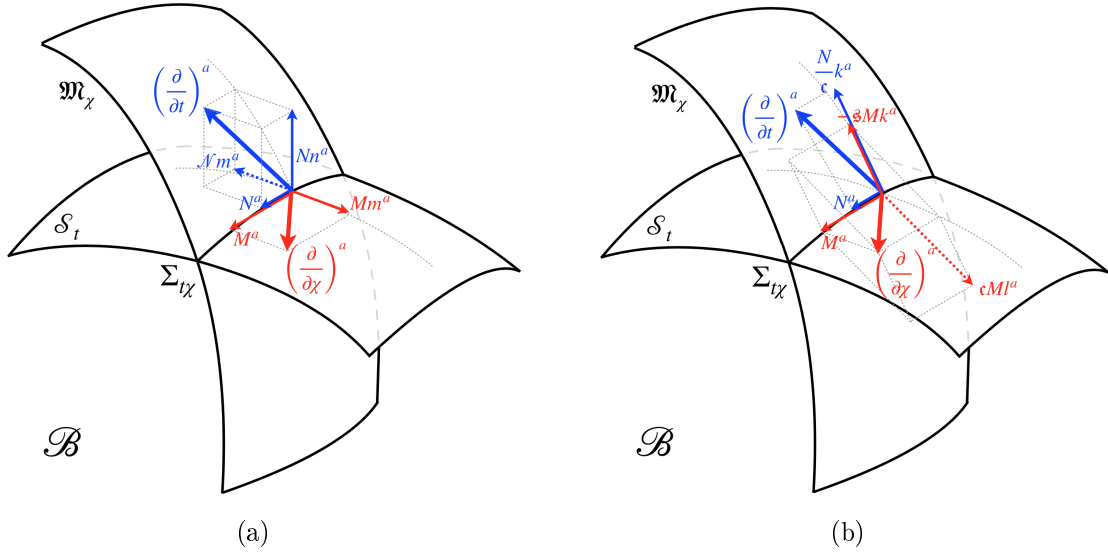
Lorentz-forgatás, ahol $\mathfrak{s} = \sinh \psi$ és $\mathbf{c} = \cosh \psi$. A (2.7) és (2.8) összefüggések alapján

$$\mathcal{N} = N \tanh \psi . \quad (2.9)$$

A nemmerőleges 2 + 1 + 1 dimenziós téridőfelbontást a 12. ábra mutatja be az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisokban.

Az n_a és l_a normálisok kovariáns deriváltjának a felbontott alakja a saját bázisaikban a

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a n_b &= \tilde{g}_a^c \tilde{\nabla}_c (\tilde{g}_b^d n_d) = \tilde{g}_a^c \tilde{g}_b^d \tilde{\nabla}_c n_d \\ &= (g_a^c - n^c n_a + m^c m_a) (g_b^d + m^d m_b) \tilde{\nabla}_c n_d \\ &= (g_a^c g_b^d - g_b^d n^c n_a + g_b^d m^c m_a + g_a^c m^d m_b - n^c n_a m^d m_b + m^c m_a m^d m_b) \tilde{\nabla}_c n_d \\ &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + g_a^c m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d + g_b^d m^c m_a \tilde{\nabla}_c n_d - n^c n_a g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d \\ &\quad - n^c n_a m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d + m^c m_a m^d m_b \tilde{\nabla}_c n_d \\ &= g_a^c g_b^d \tilde{\nabla}_c n_d + m_b (g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d) + m_a (g_b^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d) + m_a m_b (m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d) \\ &\quad - n_a (g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d) - n_a m_b (n^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d) \\ &= K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} - n_a (\mathfrak{a}_b - m_b \mathcal{L}^*) , \end{aligned} \quad (2.10)$$



12. ábra. Az a) és b) ábrák mutatják be a 4-dimenziós $\mathcal{B}$ téridő nemmerőleges fóliázását a térszerű $\mathcal{S}_t$ és az időszzerű $\mathfrak{M}_\chi$ 3-dimenziós hiperfelületekkel. Az a) ábrán a $\partial/\partial t$ és $\partial/\partial \chi$ fejlődésvektorok felbontása az $\mathcal{S}_t$ -hez adaptált (n^a, m^a) bázisban, míg a b) ábrán a fejlődésvektorok felbontása az $\mathfrak{M}_\chi$ -hez adaptált (k^a, l^a) bázisban látható [347]-[351].

valamint hasonló számolás útján a

$$\tilde{\nabla}_a l_b = L_{ab} + 2k_{(a} \mathcal{L}_{b)} + k_a k_b \mathcal{L} + l_a (\mathfrak{b}_b + k_b \mathcal{K}^*) . \quad (2.11)$$

A (2.10) és (2.11) felbontások számolása során felhasználtam a

$$\begin{aligned} g_b^a n_a &= 0 = g_b^a m_a , & g_b^a k_a &= 0 = g_b^a l_a , \\ n^a \tilde{\nabla}_b n_a &= 0 = m^a \tilde{\nabla}_b m_a , & l^a \tilde{\nabla}_b l_a &= 0 = k^a \tilde{\nabla}_b k_a , \\ g_{bc} \tilde{\nabla}_a n^c &= -n^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} , & g_{bc} \tilde{\nabla}_a m^c &= -m^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} , \\ g_{bc} \tilde{\nabla}_a k^c &= -k^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} , & g_{bc} \tilde{\nabla}_a l^c &= -l^c \tilde{\nabla}_a g_{bc} , \\ n^a \tilde{\nabla}_b m_a &= -m^a \tilde{\nabla}_b n_a , & k^a \tilde{\nabla}_b l_a &= -l^a \tilde{\nabla}_b k_a \end{aligned} \quad (2.12)$$

összefüggéseket, valamint a $D_a g_{bc} = 0$. A „ D ” a 4-dimenziós „ $\tilde{\nabla}$ ” projekciója a $\Sigma_{t\chi}$ felületre, így egy tetszőleges 4-dimenziós $\tilde{T}_{b_1 \dots b_r}^{a_1 \dots a_r}$ tenzor 4-es kovariáns deriváltjának projekciója a

$$D_a \tilde{T}_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r} \equiv g_a^c g_{c_1}^{a_1} \dots g_{c_r}^{a_r} g_{b_1}^{d_1} \dots g_{b_q}^{d_q} \tilde{\nabla}_c \tilde{T}_{d_1 \dots d_q}^{c_1 \dots c_r} . \quad (2.13)$$

A (2.10) és (2.11) felbontásokban a

$$K_{ab} \equiv D_a n_b , \quad L_{ab} \equiv D_a l_b \quad (2.14)$$

2-dimenziós tenzorok az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisban kifejtett külső görbületek. A

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_a &\equiv g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d = g_a^c m^d \tilde{\nabla}_d n_c , \\ \mathcal{L}_a &\equiv -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_c l_d = -g_a^c k^d \tilde{\nabla}_d l_c = \mathcal{K}_a + D_a \psi\end{aligned}\quad (2.15)$$

a normális fundamentális formák az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisokban. A

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &\equiv m^d m^c \tilde{\nabla}_c n_d , \\ \mathcal{L} &\equiv k^d k^c \tilde{\nabla}_c l_d\end{aligned}\quad (2.16)$$

a normális fundamentális skalárok az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisokban. További normális fundamentális skalárok a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^* &\equiv l^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d , \\ \mathcal{L}^* &\equiv n^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d ,\end{aligned}\quad (2.17)$$

amelyek az n^a és l^a normálisok $\alpha^a \equiv n^b \tilde{\nabla}_b n^a$ és $\beta^a \equiv l^b \tilde{\nabla}_b l^a$ nem gravitációs gyorsulásainak az m^a és k^a vektorokkal párhuzamos projekcióiból származnak. Az

$$\mathbf{a}_b = g_b^d n^c \tilde{\nabla}_c n_d \quad (2.18)$$

az α^a gyorsulásnak a $\Sigma_{t\chi}$ felületre projektált része, míg a β^a gyorsulásnak a $\Sigma_{t\chi}$ projekciója a

$$\mathbf{b}_b = g_b^d l^c \tilde{\nabla}_c l_d . \quad (2.19)$$

A „*” jelölést azok a beágyazási változók kapták, amelyek az n^a és l^a normálisokra merőleges m^a és k^a bázisvektorok 4-es kovariáns deriváltjainak vetítése definiál.

Felhasználva a (2.12) összefüggéseket, a k^a és m^a bázisvektorok kovariáns deriváltjainak felbontása a megfelelő bázisokban:

$$\tilde{\nabla}_a k_b = K_{ab}^* + l_a \mathcal{K}_b^* + l_b \mathcal{L}_a + l_a l_b \mathcal{K}^* - k_a (\mathbf{a}_b^* - l_b \mathcal{L}) , \quad (2.20)$$

$$\tilde{\nabla}_a m_b = L_{ab}^* + n_a \mathcal{L}_b^* + n_b \mathcal{K}_a + n_a n_b \mathcal{L}^* + m_a (\mathbf{b}_b^* + n_b \mathcal{K}) , \quad (2.21)$$

ahol a külső görbületek a

$$K_{ab}^* \equiv D_a k_b , \quad L_{ab}^* \equiv D_a m_b . \quad (2.22)$$

A normális fundamentális formákhoz hasonló mennyiségek a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_a^* &\equiv g_a^d l^c \tilde{\nabla}_c k_d , \\ \mathcal{L}_a^* &\equiv -g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d\end{aligned}\quad (2.23)$$

a megfelelő bázisokban. Az

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_b^* &= g_b^i k^a \tilde{\nabla}_a k_i, \\ \mathfrak{b}_b^* &= g_b^i m^a \tilde{\nabla}_a m_i\end{aligned}\tag{2.24}$$

az $\alpha_b^* = k^a \tilde{\nabla}_a k_b$ és $\beta_b^* = m^a \tilde{\nabla}_a m_b$ gyorsulások $\Sigma_{t\chi}$ projekciói.

Az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületek létezésének feltétele az n^a és l^a normálisok örvénymen-tessége [233], amelyet a $[m, F_j]^a$ Lie-zárójel n^a irányú tagjának és a $[k, G_j]^a$ Lie-zárójel l^a irányú tagjának eltűnése biztosít. Azaz az $\{m, F_i\}$ és $\{l, G_i\}$ vektorok az $\mathcal{S}_t$ és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületek érintőtereit határozzák meg. Ezzel szemben az $[n, F_j]^a$ és $[l, G_j]^a$ Lie zárójelek esetén az m^a és k^a irányú tagok nem zérusak. Így az m^a és k^a örényes vek-tormezők. Az $f_{\mathbf{A}}$ és $g_{\mathbf{A}}$ bázisokra vonatkozó Lie-zárójel komponenseket az 1. és a 2. táblázat foglalja össze.

	$[n, m]^a$	$[n, F_j]^a$	$[m, F_j]^a$
n^a	$\frac{1}{M} [\partial_\chi (\ln N) - \frac{1}{M} M^j \partial_j (\ln N)]$	$\partial_j (\ln N)$	0
m^a	$\frac{1}{MN} [-\partial_t M + \partial_\chi N + N^j \partial_j M - M^j \partial_j N]$	$\frac{M}{N} \partial_j (\frac{N}{M})$	$\partial_j (\ln M)$
F_i^a	$\frac{1}{MN} (-\partial_t M^i + \partial_\chi N^i + N^j \partial_j M^i - M^j \partial_j N^i)$	$\frac{1}{N} [\partial_j N^i - \frac{N}{M} \partial_j M^i]$	$\frac{\partial_j M^i}{M}$

1. táblázat. Az $f_{\mathbf{A}}$ bázisra vonatkozó Lie-zárójel komponensek [348].

	$[k, l]^a$	$[k, G_j]^a$	$[l, G_j]^a$
k^a	$\left\{ \partial_t \left(\frac{s}{N} \right) + \frac{s}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^j \partial_j \ln(MN)] - N^j \partial_j \left(\frac{s}{N} \right) + \frac{1}{\epsilon M} [\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\epsilon} \right) - M^j \partial_j \ln \left(\frac{N}{\epsilon} \right)] \right\}$	$\partial_j \left(\ln \frac{N}{\epsilon} \right)$	$-\frac{N}{\epsilon^2 M} \partial_j \left(\frac{s \epsilon M}{N} \right)$
l^a	$\frac{1}{MN} [-\partial_t (\epsilon M) + N^j \partial_j (\epsilon M)]$	0	$\partial_j \ln(\epsilon M)$
G_i^a	$\frac{1}{MN} [-\partial_t M^i + \partial_\chi N^i - M^j \partial_j N^i + N^j \partial_j M^i]$	$\frac{\epsilon}{N} (\partial_j N^i)$	$\frac{s}{N} \partial_j N^i + \frac{1}{\epsilon M} \partial_j M^i$

2. táblázat. A $g_{\mathbf{A}}$ bázisra vonatkozó Lie-zárójel komponensek [348].

A [345] hivatkozásban, a merőlegesség megválasztása miatt (azaz $\mathcal{N} = 0$) n^a , l^a , m^a , k^a vektorok hiperfelület normálisok, ezért az $n^a = k^a$, $m^a = l^a$ áll fenn. A (2.23) módon definiált formák nem tekinthetők igazi normális fundamentális formáknak, amely a k^a és m^a vektormezők örvényességéből következik. A Frobenius-tétel alkalmazásával belátható, hogy az n^a , l^a , m^a és k^a vektorok 2-dimenziós örvényei eltűnnek [233], [355],

azaz

$$\begin{aligned}
\omega_{ab}^{(\mathbf{n})} &\equiv g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c n_d = 0 , \\
\omega_{ab}^{(l)} &\equiv g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c l_d = 0 , \\
\omega_{ab}^{(\mathbf{k})} &\equiv g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d = 0 , \\
\omega_{ab}^{(\mathbf{m})} &\equiv g_{[a}^c g_{b]}^d \tilde{\nabla}_c m_d = 0 .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Emiatt a K_{ab} , L_{ab} , K_{ab}^* és L_{ab}^* szimmetrikus, „igazi” külső görbületek. Legyen a 4-dimenziós metrika most a

$$\tilde{g}_{ab} = -n_a n_b + \hat{g}_{ab} = l_a l_b + \bar{g}_{ab} \tag{2.26}$$

és a

$$\tilde{g}_{ab} = m_a m_b + \bar{h}_{ab} = -k_a k_b + \hat{h}_{ab} \tag{2.27}$$

alakú úgy, hogy

$$\begin{aligned}
\hat{g}_{ab} &= m_a m_b + g_{ab} , \\
\bar{g}_{ab} &= -k_a k_b + g_{ab} , \\
\bar{h}_{ab} &= -n_a n_b + g_{ab} , \\
\hat{h}_{ab} &= l_a l_b + g_{ab} .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ekkor a Frobenius-tétel miatt a 3-dimenziós örvények a

$$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{n})} \equiv \hat{g}_{[a}^c \hat{g}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c n_d = 0 , \tag{2.29}$$

$$\bar{\omega}_{ab}^{(l)} \equiv \bar{g}_{[a}^c \bar{g}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c l_d = 0 , \tag{2.30}$$

a normálisokra, míg

$$\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} \equiv \hat{h}_{[a}^c \hat{h}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c k_d = l_{[a} g_{b]}^d l^c \left(\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c \right) \neq 0 , \tag{2.31}$$

$$\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} \equiv \bar{h}_{[a}^c \bar{h}_{b]}^d \tilde{\nabla}_c m_d = -n_{[a} g_{b]}^d n^c \left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c \right) \neq 0 \tag{2.32}$$

a normálisokra merőleges bázisvektorokra. A (2.31) és (2.32) normálisok szerinti kontrakcióiból a

$$2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} l^b = -g_a^d l^c \left(\tilde{\nabla}_c k_d - \tilde{\nabla}_d k_c \right) = -\mathcal{K}_a^* - g_a^d k^c \tilde{\nabla}_d l_c , \tag{2.33}$$

$$2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b = -g_a^d n^c \left(\tilde{\nabla}_c m_d - \tilde{\nabla}_d m_c \right) = \mathcal{L}_a^* - g_a^d m^c \tilde{\nabla}_d n_c \tag{2.34}$$

relációk adódnak. A (2.29) és (2.30) eredményből következnek a (2.15) definíciók, azaz $\mathcal{K}_a$ és $\mathcal{L}_a$ „igazi” normális fundamentális formák. Ezzel szemben a (2.33) és (2.34)

szerint

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_a^* &= \mathcal{L}_a - 2\hat{\omega}_{ab}^{(\mathbf{k})} l^b, \\ \mathcal{L}_a^* &= \mathcal{K}_a + 2\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Azaz $\mathcal{K}_a^*$ és $\mathcal{L}_a^*$ nem rendelkezik a (2.15) szerinti szimmetria tulajdonságokkal, így nem „igazi” normális fundamentális formák.

A metrikus változók, valamint a (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisban megadott geometriai mennyiségek közötti kapcsolatok megállapításához szükséges bevezetni a Lie-deriválás $\Sigma_{t\chi}$ projekcióját. Egy tetszőleges f függvény, egy W^a vektor, egy ω_a 1-forma és egy T_b^a tenzor 4-dimenziós Lie-deriváltját V^a mentén az

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{L}}_V f &= V(f) = V^a \partial_a f = V^a \tilde{\nabla}_a f, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_V W^a &= [V, W]^a = V^b \tilde{\nabla}_b W^a - W^b \tilde{\nabla}_b V^a, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_V \omega_a &= V^b \tilde{\nabla}_b \omega_a + \omega_b \tilde{\nabla}_a V^b, \\ \tilde{\mathfrak{L}}_V T_b^a &= V^c \tilde{\nabla}_c T_b^a - T_b^c \tilde{\nabla}_c V^a + T_c^a \tilde{\nabla}_b V^c\end{aligned}\quad (2.36)$$

összefüggések adják meg. Ezek alapján egy tetszőleges 2-dimenziós $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r}$ tenzor 4-dimenziós Lie-deriváltjának a 2-dimenziós felületre vetítése az

$$\mathfrak{L}_V T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_r} = g_{c_1}^{a_1} \dots g_{c_r}^{a_r} g_{b_1}^{d_1} \dots g_{b_q}^{d_q} \tilde{\mathfrak{L}}_V T_{d_1 \dots d_q}^{c_1 \dots c_r} \quad (2.37)$$

definícióval fejezhető ki. A (2.37) felhasználásával a 2-dimenziós g_{ab} indukált metrika $(\partial/\partial t)^a$ és $(\partial/\partial \chi)^a$ folyamok menti 2-dimenziós Lie-deriváltából következik, hogy

$$\begin{aligned}K_{ab} &= \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right] - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} L_{ab}^*, \\ L_{ab} &= \frac{\mathfrak{c}}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right] + \mathfrak{s} K_{ab}, \\ K_{ab}^* &= \frac{\mathfrak{c}}{N} \left[\frac{1}{2} \partial_t g_{ab} - D_{(a} N_{b)} \right], \\ L_{ab}^* &= \frac{1}{M} \left[\frac{1}{2} \partial_\chi g_{ab} - D_{(a} M_{b)} \right].\end{aligned}\quad (2.38)$$

A többi geometriai mennyiség metrikus változóktól való függését a

$$\tilde{g} \left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}} \right) = \tilde{g}([f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}], f_{\mathbf{C}}) - \tilde{g} \left(f_{\mathbf{C}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} f_{\mathbf{B}} \right) \quad (2.39)$$

azonossággal származtattam feltéve, hogy $\tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}) = \text{állandó}$. Az $[f_{\mathbf{A}}, f_{\mathbf{B}}]$ az $f_{\mathbf{A}}$ és $f_{\mathbf{B}}$ tetszőleges bázisvektorok Lie-zárójelűei, valamint a számolás során a jelöléseket az $\tilde{g} \left(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}} \right) = \tilde{g}_{ab} f_{\mathbf{A}}^a \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} f_{\mathbf{C}}^b$ és $\tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{B}}} = f_{\mathbf{B}}^a \tilde{\nabla}_a$ módon fejtettem ki. A (2.39) definíció

használatakor figyelembe kell venni, hogy az (n^a, m^a) bázisban $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_{\mathbf{i}}\}$, míg (k^a, l^a) bázisban $f_{\mathbf{A}} \rightarrow g_{\mathbf{A}} = \{k, l, G_{\mathbf{i}}\}$. A normális fundamentális skalárok és a gyorsulások $\Sigma_{t\chi}$ projekcióinak származtatása során az $f_{\mathbf{B}} = f_{\mathbf{C}}$, ezért a $\tilde{g}(f_{\mathbf{C}}, \tilde{\nabla}_{f_{\mathbf{A}}} f_{\mathbf{B}}) = 0$ (hasonlóan a $f_{\mathbf{A}} \rightarrow g_{\mathbf{A}}$ választáskor). Az $n^a \tilde{\nabla}_a n_b = \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{n}} \mathbf{n}) f_b^{\mathbf{A}}$, az $m^a \tilde{\nabla}_a m_b = \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{m}} \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}}$, a $k^a \tilde{\nabla}_a k_b = \tilde{g}(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \mathbf{k}) g_b^{\mathbf{A}}$ és az $l^a \tilde{\nabla}_a l_b = \tilde{g}(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{l}} \mathbf{l}) g_b^{\mathbf{A}}$ számolása során az

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= -\frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} (\ln N) - M^a D_a (\ln N) \right] , \\ \mathcal{K} &= \frac{1}{MN} [\partial_t M - \partial_\chi \mathcal{N} - N^a D_a M + M^a D_a \mathcal{N}] , \\ \mathcal{L} &= -\partial_t \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) + N^a D_a \left(\frac{\mathfrak{s}}{N} \right) - \frac{\mathfrak{s}}{N} [\partial_t \ln(MN) - N^a D_a \ln(MN)] \\ &\quad - \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left[\partial_\chi \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) - M^a D_a \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) \right] , \\ \mathcal{K}^* &= \frac{1}{MN} [\partial_t (\mathfrak{c}M) - N^a D_a (\mathfrak{c}M)] , \end{aligned} \tag{2.40}$$

és az

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_a &= D_a (\ln N) , \\ \mathfrak{b}_a^* &= -D_a (\ln M) , \\ \mathfrak{a}_a^* &= D_a \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) , \\ \mathfrak{b}_a &= -D_a \ln (\mathfrak{c}M) \end{aligned} \tag{2.41}$$

eredményeket kaptam. A normális fundamentális formákra és azokhoz hasonló mennyiségekre a

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_a &= \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) - \frac{M}{2N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) , \\ \mathcal{L}_a &= \frac{1}{2MN} (\partial_t M_a - \partial_\chi N_a - N^b D_b M_a + M^b D_b N_a) + \frac{N}{2\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N} \right) , \\ \mathcal{L}_a^* &= \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right) , \\ \mathcal{K}_a^* &= \mathcal{L}_a - \frac{N}{\mathfrak{c}^2 M} D_a \left(\frac{\mathfrak{s}\mathfrak{c}M}{N} \right) \end{aligned} \tag{2.42}$$

összefüggések adódtak az $n^a \tilde{\nabla}_a m_b = \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{n}} \mathbf{m}) f_b^{\mathbf{A}}$, az $m^a \tilde{\nabla}_a n_b = \tilde{g}(f_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{m}} \mathbf{n}) f_b^{\mathbf{A}}$, a $k^a \tilde{\nabla}_a l_b = \tilde{g}(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{k}} \mathbf{l}) g_b^{\mathbf{A}}$ és az $l^a \tilde{\nabla}_a k_b = \tilde{g}(g_{\mathbf{A}}, \tilde{\nabla}_{\mathbf{l}} \mathbf{k}) g_b^{\mathbf{A}}$ kifejtéséből.

A 3. fejezetben a beágyazási változókból kialakított további skalárokat fogom felhasználni, mint változók, amelyek a

$$\begin{aligned}\varkappa &\equiv K^{ab}K_{ab} \ , \quad \lambda \equiv L^{ab}L_{ab} \ , \\ \mathfrak{K} &\equiv \mathcal{K}^a\mathcal{K}_a \ , \quad \mathfrak{L} \equiv \mathcal{L}^a\mathcal{L}_a \ , \\ K &\equiv K_a^a \ , \quad L \equiv L_a^a \ ,\end{aligned}\tag{2.43}$$

illetve a

$$\begin{aligned}\varkappa^* &\equiv K^{*ab}K_{ab}^* \ , \quad \lambda^* \equiv L^{*ab}L_{ab}^* \ , \\ \mathfrak{K}^* &\equiv \mathcal{K}^{*a}\mathcal{K}_a^* \ , \quad \mathfrak{L}^* \equiv \mathcal{L}^{*a}\mathcal{L}_a^* \ , \\ K^* &\equiv K_a^{*a} \ , \quad L^* \equiv L_a^{*a} \ .\end{aligned}\tag{2.44}$$

A beágyazási mennyiségek és az azokból képezett skalárok nem függetlenek egymástól, transzformációk útján egymásba alakíthatók, így a „ $*$ ” csillaggal jelölt mennyiségek is kifejezhetők az anélküli mennyiségekkel. Felhasználva a (2.42) összefüggést, továbbá a (2.8) és a (2.12) alapján a

$$\begin{aligned}K_{ab}^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}}(K_{ab} + \mathfrak{s}L_{ab}) \ , \\ L_{ab}^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}}(L_{ab} - \mathfrak{s}K_{ab}) \ ,\end{aligned}$$

kapcsolatot a külső görbületek között. A (2.43) és (2.44) skalárok esetén az átjárás a

$$\begin{aligned}\varkappa^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}^2}(\varkappa + 2\mathfrak{s}K_{ab}L^{ab} + \mathfrak{s}^2\lambda) \ , \\ \lambda^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}^2}(\lambda - 2\mathfrak{s}K_{ab}L^{ab} + \mathfrak{s}^2\varkappa) \ , \\ \mathfrak{K}^* &= \mathfrak{K} + 2\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathcal{K}^aD_a \ln \frac{N}{\mathfrak{c}M} + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\right)^2 \left(D_a \ln \frac{N}{\mathfrak{c}M}\right)^2 \ , \\ \mathfrak{L}^* &= \mathfrak{L} + 2\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\mathcal{L}^aD_a \ln \frac{N}{\mathfrak{c}M} + \left(\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}\right)^2 \left(D_a \ln \frac{N}{\mathfrak{c}M}\right)^2 \ , \\ K^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}}(K + \mathfrak{s}L) \ , \\ L^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}}(L - \mathfrak{s}K) \ ,\end{aligned}\tag{2.45}$$

ahol $(D_a F)^2 \equiv (D_a F)(D^a F)$ bármely F függvény esetén. Hasonló módon a (2.40) skalárookra a

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}}(\mathcal{K} - \mathfrak{s}\mathcal{L}) + \frac{\mathfrak{c}}{M}(\partial_\chi - M^a D_a) \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right) \ , \\ \mathcal{L}^* &= \frac{1}{\mathfrak{c}}(\mathfrak{s}\mathcal{K} + \mathcal{L}) + \frac{\mathfrak{c}^2}{N}(\partial_t - N^a D_a) \left(\frac{\mathcal{N}}{N}\right)\end{aligned}\tag{2.46}$$

vonatkozik. A (2.46) származtatása során felhasználtam az

$$\begin{aligned}
 n^a &= \frac{1}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \frac{1}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - \frac{1}{N} N^a + \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \frac{1}{M} M^a, \\
 m^a &= \frac{1}{M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - \frac{1}{M} M^a, \\
 l^a &= \frac{\mathfrak{s}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \frac{1}{\mathfrak{c}M} \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - \frac{\mathfrak{s}}{N} N^a - \frac{1}{\mathfrak{c}M} M^a, \\
 k^a &= \frac{\mathfrak{c}}{N} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{\mathfrak{c}}{N} N^a
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

összefüggéseket, amelyek a (2.3)-(2.6) definíciók inverzeiből következnek. Szintén alkalmaztam, hogy

$$\begin{aligned}
 l^a - \mathfrak{s}n^a &= \frac{\mathfrak{c}}{M} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^a - M^a \right], \\
 \mathfrak{s}l^a + n^a &= \frac{\mathfrak{c}^2}{N} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a - N^a \right].
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

A (2.42) esetén pedig a

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{k} - 2\mathfrak{c}^2 \mathcal{L}^a D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{N} \right) + \mathfrak{c}^4 \left[D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{N} \right) \right]^2 \tag{2.49}$$

összefüggést kaptam.

Amennyiben a $2 + 1 + 1$ felbontás esetén a fóliázást merőleges (azaz $\mathfrak{s} = 0 = \mathcal{N}$ és $\mathfrak{c} = 1$) a (2.45), (2.46) és (2.49) egyenletekbeli „*” csillagos mennyiségek a nekik megfelelő csillagtalannal lesznek azonosak, valamint $\mathfrak{K} = \mathfrak{k}$.

2.1. Egyértelmű mértékrögztítés

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontás kidolgozása után újrazvizsgáltam a [197] hivatkozásban ismertetett mértékrögztítést. Az infinitezimális koordináta transzformáció legyen az (1.60) szerint megadva és tekintsük a $\tilde{\xi}^a$ generátor (1.61) felbontását, valamint legyen a háttér gömbszimmetrikus, sztatikus, mint a [197] folyóiratcikkben. A metrika $\tilde{\xi}^a$ mentén vett Lie-deriváltja a

$$\tilde{\mathfrak{L}}_{\xi} \tilde{g}_{ab} = \delta \tilde{g}_{ab} - \widehat{\delta \tilde{g}_{ab}}, \tag{2.50}$$

ahol a Lie-deriválás az

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{L}}_{\xi}\tilde{g}_{ab} &= \tilde{\xi}^c\partial_c\tilde{g}_{ab} + \tilde{g}_{cb}\partial_a\tilde{\xi}^c + \tilde{g}_{ac}\partial_b\tilde{\xi}^c \\
&= \tilde{g}_{cb}\tilde{\nabla}_a\tilde{\xi}^c - \tilde{g}_{cb}\tilde{\Gamma}_{ai}^c\tilde{\xi}^i + \tilde{g}_{ac}\tilde{\nabla}_b\tilde{\xi}^c - \tilde{g}_{ac}\tilde{\Gamma}_{bi}^c\tilde{\xi}^i \\
&\quad + \tilde{\xi}^c\tilde{\nabla}_c\tilde{g}_{ab} + \tilde{\xi}^c\tilde{\Gamma}_{ca}^i\tilde{g}_{ib} + \tilde{\xi}^c\tilde{\Gamma}_{cb}^i\tilde{g}_{ia} \\
&= \tilde{\xi}^c\tilde{\nabla}_c\tilde{g}_{ab} + \tilde{g}_{cb}\nabla_a\tilde{\xi}^c + \tilde{g}_{ac}\nabla_b\tilde{\xi}^c \\
&= \tilde{g}_{cb}\tilde{\nabla}_a\tilde{\xi}^c + \tilde{g}_{ac}\tilde{\nabla}_b\tilde{\xi}^c \\
&= \tilde{\nabla}_a\tilde{\xi}_b + \tilde{\nabla}_b\tilde{\xi}_a ,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

így

$$\widehat{\delta\tilde{g}_{ab}} = \delta\tilde{g}_{ab} - \tilde{\nabla}_a\tilde{\xi}_b - \tilde{\nabla}_b\tilde{\xi}_a . \tag{2.52}$$

A (2.52) összefüggés kibontott alakja a

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta\tilde{g}_{ab}} &= \delta\tilde{g}_{ab} - \partial_a\tilde{\xi}_b - \partial_b\tilde{\xi}_a + 2\tilde{\Gamma}_{ab}^i\tilde{\xi}_i, \\
&= \delta\tilde{g}_{ab} - \partial_a\left(\tilde{g}_{bi}\tilde{\xi}^i\right) - \partial_b\left(\tilde{g}_{ai}\tilde{\xi}^i\right) + 2\tilde{g}_{ij}\tilde{\Gamma}_{ab}^i\tilde{\xi}^j ,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

amely elsőrendű perturbáció esetén

$$\widehat{\delta\tilde{g}_{ab}} = \delta\tilde{g}_{ab} - \partial_a\left(\widetilde{g_{bi}}\tilde{\xi}^i\right) - \partial_b\left(\widetilde{g_{ai}}\tilde{\xi}^i\right) + 2\widetilde{g_{ij}}\tilde{\Gamma}_{ab}^i\tilde{\xi}^j . \tag{2.54}$$

Megjegyzendő, hogy ebben az alfejezetben a 4-dimenziós $\bar{\Gamma}_{ab}^c$ háttér Christoffel-szimbólum esetén a hullámvonal jelölést nem alkalmazva, míg a 4-dimenziós háttérmetrikánál a hullámvonal alkalmazása mellett az $a, b, c, \dots$ téridőindexeket és az $\alpha, \beta, \mu, \dots$ a térindexeket használtam az összegzések felbontása során. A 4-dimenziós metrika és inverze a háttéren a

$$\widetilde{g_{ab}} = \text{diag}\left(-\bar{N}^2(r), \bar{M}^2(r), r^2, r^2\sin^2\theta\right) , \tag{2.55}$$

$$\widetilde{g^{ab}} = \text{diag}\left(-\bar{N}^{-2}(r), \bar{M}^{-2}(r), r^{-2}, r^{-2}\sin^{-2}\theta\right) , \tag{2.56}$$

amelyekből a 4-dimenziós háttér Christoffel-szimbólumok a következők:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{ab}^t &= \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}\left(\delta_a^t\partial_b\bar{g}_{tt} + \delta_b^t\partial_a\bar{g}_{tt}\right) \\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}\left(\delta_a^t\delta_b^r\partial_r\bar{g}_{tt} + \delta_b^t\delta_a^r\partial_r\bar{g}_{tt}\right) , \\
\bar{\Gamma}_{rt}^t &= \bar{\Gamma}_{tr}^t = \frac{1}{2}\bar{g}^{tt}\partial_r\bar{g}_{tt} = \frac{\partial_r\bar{N}}{\bar{N}} , \\
\bar{\Gamma}_{ab}^r &= \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}\left(\delta_a^r\partial_b\bar{g}_{rr} + \delta_b^r\partial_a\bar{g}_{rr} - \partial_r\widetilde{g_{ab}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\bar{g}^{rr}\left(\delta_b^r\delta_a^r\partial_r\bar{g}_{rr} - \delta_b^t\delta_a^t\partial_r\bar{g}_{tt} - \delta_b^\theta\delta_a^\theta\partial_r\bar{g}_{\theta\theta} - \delta_b^\varphi\delta_a^\varphi\partial_r\bar{g}_{\varphi\varphi}\right) ,
\end{aligned} \tag{2.57}$$

$$\bar{\Gamma}_{rr}^r = \frac{1}{2} \bar{g}^{rr} \partial_r \bar{g}_{rr} = \frac{\partial_r \bar{M}}{\bar{M}} , \quad (2.58)$$

$$\bar{\Gamma}_{tt}^r = -\frac{1}{2} \bar{g}^{rr} \partial_r \bar{g}_{tt} = \frac{\bar{N} \partial_r \bar{N}}{\bar{M}^2} , \quad (2.59)$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2} \bar{g}^{rr} \partial_r \bar{g}_{\theta\theta} = -\frac{r}{\bar{M}^2} , \quad (2.60)$$

$$\bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2} \bar{g}^{rr} \partial_r \bar{g}_{\varphi\varphi} = -\frac{r \sin^2 \theta}{\bar{M}^2} , \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ab}^\theta &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\theta\theta} (\delta_a^\theta \partial_b \bar{g}_{\theta\theta} + \delta_b^\theta \partial_a \bar{g}_{\theta\theta} - \partial_\theta \bar{g}_{ab}) \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\theta\theta} (\delta_b^r \delta_a^\theta \partial_r \bar{g}_{\theta\theta} + \delta_a^r \delta_b^\theta \partial_r \bar{g}_{\theta\theta} - \delta_b^\varphi \delta_a^\varphi \partial_\theta \bar{g}_{\varphi\varphi}) , \end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta = \bar{\Gamma}_{\theta r}^\theta = \frac{1}{2} \bar{g}^{\theta\theta} \partial_r \bar{g}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} , \quad (2.62)$$

$$\bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{2} \bar{g}^{\theta\theta} \partial_r \bar{g}_{\theta\theta} = -\sin \theta \cos \theta , \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ab}^\varphi &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\varphi\varphi} (\delta_a^\varphi \partial_b \bar{g}_{\varphi\varphi} + \delta_b^\varphi \partial_a \bar{g}_{\varphi\varphi}) \\ &= \frac{1}{2} \bar{g}^{\varphi\varphi} (\delta_a^\varphi \delta_b^r \partial_r \bar{g}_{\varphi\varphi} + \delta_a^\varphi \delta_b^\theta \partial_\theta \bar{g}_{\varphi\varphi} + \delta_a^r \delta_b^\varphi \partial_r \bar{g}_{\varphi\varphi} + \delta_a^\theta \delta_b^\varphi \partial_\theta \bar{g}_{\varphi\varphi}) , \end{aligned}$$

$$\bar{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi = \bar{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{2} \bar{g}^{\varphi\varphi} \partial_r \bar{g}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} , \quad (2.64)$$

$$\bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^\varphi = \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{1}{2} \bar{g}^{\varphi\varphi} \partial_\theta \bar{g}_{\varphi\varphi} = \cot \theta . \quad (2.65)$$

Az (1.59), (1.61), (2.54)-(2.65) részeredmények felhasználásával származtattam a metrikus tenzor komponensek perturbációit a mértéktranszformáció után. A lapse függvényekre a

$$\begin{aligned} \widehat{\delta \tilde{g}_{tt}} &= \delta \tilde{g}_{tt} - \partial_t (\widetilde{g_{it} \tilde{\xi}^i}) - \partial_t (\widetilde{g_{it} \tilde{\xi}^i}) + 2 \widetilde{g_{ij}} \bar{\Gamma}_{tt}^i \tilde{\xi}^j \\ &= \delta \tilde{g}_{tt} - 2 \partial_t (\bar{g}_{tt} \xi^t) + 2 \bar{g}_{rr} \bar{\Gamma}_{tt}^r \xi^r , \\ -2 \bar{N} \widehat{\delta \bar{N}} &= -2 \bar{N} \delta N + 2 \bar{N}^2 \partial_t \xi^t + 2 \bar{M}^2 \frac{\bar{N} \partial_r \bar{N}}{\bar{M}^2} \xi^r \\ \widehat{\delta \bar{N}} &= \delta N - \bar{N} \partial_t \xi^t - \partial_r \bar{N} \xi^r , \end{aligned} \quad (2.66)$$

és a

$$\begin{aligned} \widehat{\delta \tilde{g}_{rr}} &= \delta \tilde{g}_{rr} - 2 \partial_r (\widetilde{g_{ir} \tilde{\xi}^i}) + 2 \widetilde{g_{ij}} \bar{\Gamma}_{rr}^i \tilde{\xi}^j \\ &= \delta \tilde{g}_{rr} - 2 \xi^r \partial_r \bar{g}_{rr} - 2 \bar{g}_{rr} \partial_r \xi^r + 2 \bar{g}_{rr} \bar{\Gamma}_{rr}^r \xi^r , \\ 2 \bar{M} \widehat{\delta \bar{M}} &= 2 \bar{M} \delta M - 4 \bar{M} \xi^r \partial_r \bar{M} - 2 \bar{M}^2 \partial_r \xi^r + 2 \bar{M}^2 \frac{\partial_r \bar{M}}{\bar{M}} \xi^r \\ \widehat{\delta \bar{M}} &= \delta M - \xi^r \partial_r \bar{M} - \bar{M} \partial_r \xi^r \end{aligned} \quad (2.67)$$

eredményeket kaptam. A 3-dimenziós shift vektor komponens esetén a

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta\tilde{g}_{rt}} &= \delta\tilde{g}_{rt} - \partial_r \left(\widetilde{g_{it}}\tilde{\xi}^i \right) - \partial_t \left(\widetilde{g_{ir}}\tilde{\xi}^i \right) + 2\widetilde{g_{ij}}\bar{\Gamma}_{rt}^i\tilde{\xi}^j \\
&= \delta\tilde{g}_{rt} - \xi^t\partial_r\bar{g}_{tt} - \bar{g}_{tt}\partial_r\xi^t - \bar{g}_{rr}\partial_t\xi^r + 2\bar{g}_{tt}\bar{\Gamma}_{rt}^t\xi^t, \\
\bar{M}\widehat{\delta\mathcal{N}} &= \bar{M}\delta\mathcal{N} + 2\bar{N}\xi^t\partial_r\bar{N} + \bar{N}^2\partial_r\xi^t - \bar{M}^2\partial_t\xi^r - 2\bar{N}^2\xi^t\frac{\partial_r\bar{N}}{\bar{N}}, \\
\widehat{\delta\mathcal{N}} &= \delta\mathcal{N} + \frac{\bar{N}^2}{\bar{M}}\partial_r\xi^t - \bar{M}\partial_t\xi^r
\end{aligned} \tag{2.68}$$

összefüggés adódott. A 2-dimenziós perturbált N_a shift vektor a mértéktranszformáció után a

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta\tilde{g}_{t\alpha}} &= \delta\tilde{g}_{t\alpha} - \partial_t \left(\widetilde{g_{i\alpha}}\tilde{\xi}^i \right) - \partial_\alpha \left(\widetilde{g_{it}}\tilde{\xi}^i \right) + 2\widetilde{g_{ij}}\bar{\Gamma}_{t\alpha}^i\tilde{\xi}^j \\
&= \delta\tilde{g}_{t\alpha} - \partial_t \left(\widetilde{g_{i\alpha}}\tilde{\xi}^i \right) - \bar{g}_{tt}\partial_\alpha\xi^t \\
&= \delta\tilde{g}_{t\alpha} - \partial_t \left(\bar{D}_a\xi + E_{.a}^b\bar{D}_b\eta \right) - \bar{g}_{tt}\bar{D}_a\xi^t, \\
\widehat{\delta N_a} &= \delta N_a - \bar{D}_a(\partial_t\xi) - E_{.a}^b\bar{D}_b(\partial_t\eta) + \bar{N}^2\bar{D}_a\xi^t,
\end{aligned}$$

amelynek páratlan részére a

$$\begin{aligned}
\widehat{\bar{D}_a P} &= \bar{D}_a P - \bar{D}_a(\partial_t\xi) + \bar{N}^2\bar{D}_a\xi^t, \\
\widehat{P} &= P - \partial_t\xi + \bar{N}^2\xi^t,
\end{aligned} \tag{2.69}$$

míg páros komponensére a

$$\begin{aligned}
\widehat{E_{.a}^b\bar{D}_b Q} &= E_{.a}^b\bar{D}_b Q - E_{.a}^b\bar{D}_b(\partial_t\eta), \\
\widehat{Q} &= Q - \partial_t\eta
\end{aligned} \tag{2.70}$$

eredményt kaptam. A 2-dimenziós M_a shift-vektor perturbációja a mértéktranszformáció után a

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta\tilde{g}_{r\alpha}} &= \delta\tilde{g}_{r\alpha} - \partial_r\tilde{\xi}_\alpha + \bar{\Gamma}_{r\alpha}^i\tilde{\xi}_i - \partial_\alpha(\bar{g}_{rr}\xi^r) + \bar{\Gamma}_{\alpha r}^i\tilde{\xi}_i \\
&= \delta\tilde{g}_{r\alpha} - \partial_r(\bar{D}_a\xi + E_{.a}^b\bar{D}_b\eta) - \partial_\alpha(\bar{g}_{rr}\xi^r) + \bar{\Gamma}_{r\alpha}^i\tilde{\xi}_i + \bar{\Gamma}_{\alpha r}^i\tilde{\xi}_i \\
&= \delta\tilde{g}_{r\alpha} - \partial_r(\bar{D}_a\xi + E_{.a}^b\bar{D}_b\eta) - \partial_\alpha(\bar{g}_{rr}\xi^r) + 2\widetilde{g_{ij}}\bar{\Gamma}_{r\alpha}^i\tilde{\xi}^j, \\
\widehat{\delta M_a} &= \delta M_a - \bar{D}_a(\partial_r\xi) - E_{.a}^b\bar{D}_b(\partial_r\eta) - \bar{M}^2\bar{D}_a\xi^r \\
&\quad + 2(\bar{g}_{\theta\theta}\delta_\alpha^\theta\bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta\xi^\theta + \bar{g}_{\varphi\varphi}\delta_\alpha^\varphi\bar{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi\xi^\varphi) \\
&= \delta M_a - \bar{D}_a(\partial_r\xi) - E_{.a}^b\bar{D}_b(\partial_r\eta) - \bar{M}^2\bar{D}_a\xi^r \\
&\quad + \frac{2}{r}\bar{g}_{ab}(\bar{D}^b\xi + E^{ib}\bar{D}_i\eta),
\end{aligned}$$

amelynek a páros része a

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{D}_a V} &= \bar{D}_a V - \bar{D}_a (\partial_r \xi) - \bar{M}^2 \bar{D}_a \xi^r + \frac{2}{r} \bar{D}_a \xi \\ \widehat{V} &= V - \partial_r \xi - \bar{M}^2 \xi^r + \frac{2}{r} \xi ,\end{aligned}\quad (2.71)$$

és a páratlan része a

$$\begin{aligned}\widehat{E_{.a}^b \bar{D}_b W} &= E_{.a}^b \bar{D}_b W - E_{.a}^b \bar{D}_b (\partial_r \eta) + \frac{2}{r} E_{.a}^b \bar{D}_b \eta \\ \widehat{W} &= W - \partial_r \eta + \frac{2\eta}{r}\end{aligned}\quad (2.72)$$

módon transzformálódik. A 2-dimenziós inverz metrika perturbációja esetén a

$$\begin{aligned}\widehat{\delta g_{ab}} &= \delta g_{ab} - \partial_\alpha (\widetilde{g_{i\beta}} \tilde{\xi}^i) - \partial_\beta (\widetilde{g_{i\alpha}} \tilde{\xi}^i) + 2 \widetilde{g_{ij}} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^i \tilde{\xi}^j \\ &= \delta g_{ab} - \partial_\alpha (\widetilde{g_{i\beta}} \tilde{\xi}^i) - \partial_\beta (\widetilde{g_{i\alpha}} \tilde{\xi}^i) + 2 \bar{g}_{rr} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r \xi^r + 2 \widetilde{g_{\mu\nu}} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \tilde{\xi}^\nu \\ &= \delta g_{ab} - \partial_\alpha \tilde{\xi}_\beta + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\mu \tilde{\xi}_\mu - \partial_\beta \tilde{\xi}_\alpha + \bar{\Gamma}_{\beta\alpha}^\mu \tilde{\xi}_\mu + 2 \bar{g}_{rr} \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^r \xi^r \\ &= \delta g_{ab} - \bar{D}_a \xi_b - \bar{D}_b \xi_a + 2 \bar{g}_{rr} \delta_\alpha^\theta \delta_\beta^\theta \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r \xi^r + 2 \bar{g}_{rr} \delta_\alpha^\varphi \delta_\beta^\varphi \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r \xi^r , \\ &= \delta g_{ab} - \bar{D}_a (\bar{D}_b \xi + E_{.b}^i \bar{D}_i \eta) - \bar{D}_b (\bar{D}_a \xi + E_{.a}^i \bar{D}_i \eta) \\ &\quad - 2 \bar{M}^2 \xi^r \left(\delta_\alpha^\theta \delta_\beta^\theta \frac{r}{\bar{M}^2} + \delta_\alpha^\varphi \delta_\beta^\varphi \frac{r \sin^2 \theta}{\bar{M}^2} \right) \\ &= \delta g_{ab} - 2 \bar{D}_a \bar{D}_b \xi - (E_{.b}^i \bar{D}_i \bar{D}_a + E_{.a}^i \bar{D}_i \bar{D}_b) \eta - \frac{2 \xi^r}{r} \bar{g}_{ab}\end{aligned}$$

a mértéktranszformáció, ahol felhasználva az (1.59) felbontást a

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{g}_{ab} A} &= \bar{g}_{ab} A - \frac{2 \xi^r}{r} \bar{g}_{ab} , \\ \widehat{A} &= A - \frac{2 \xi^r}{r} ,\end{aligned}\quad (2.73)$$

$$\begin{aligned}\widehat{\bar{D}_a \bar{D}_b B} &= \bar{D}_a \bar{D}_b B - 2 \bar{D}_a \bar{D}_b \xi , \\ \widehat{B} &= B - 2 \xi ,\end{aligned}\quad (2.74)$$

és

$$\begin{aligned}(E_{.a}^c \bar{D}_c \bar{D}_b + E_{.b}^c \bar{D}_c \bar{D}_a) C &= (E_{.a}^c \bar{D}_c \bar{D}_b + E_{.b}^c \bar{D}_c \bar{D}_a) C \\ &\quad - 2 (E_{.b}^i \bar{D}_i \bar{D}_a + E_{.a}^i \bar{D}_i \bar{D}_b) \eta , \\ \widehat{C} &= C - 2 \eta\end{aligned}\quad (2.75)$$

eredményeket kaptam. A [197] cikkel való összehasonlítás érdekében a skalármező perturbációjára vonatkozó mértéktranszformációt is származtattam, amely a

$$\widehat{\delta\phi} = \delta\phi - \tilde{\xi}^\alpha \partial_\alpha \bar{\phi}(r) = \delta\phi - \xi^r \partial_r \bar{\phi} . \quad (2.76)$$

Összefoglalva a páros perturbációs változókra a

$$\begin{aligned} \widehat{\delta N} &= \delta N - \bar{N} \partial_t \xi^t - \partial_r \bar{N} \xi^r , \\ \widehat{\delta \mathcal{N}} &= \delta \mathcal{N} + \frac{\bar{N}^2}{\bar{M}} \partial_r \xi^t - \bar{M} \partial_t \xi^r , \\ \widehat{\delta M} &= \delta M - \xi^r \partial_r \bar{M} - \bar{M} \partial_r \xi^r , \\ \widehat{P} &= P - \partial_t \xi + \bar{N}^2 \xi^t , \\ \widehat{V} &= V - \partial_r \xi - \bar{M}^2 \xi^r + \frac{2}{r} \xi , \\ \widehat{A} &= A - \frac{2\xi^r}{r} , \\ \widehat{B} &= B - 2\xi , \\ \widehat{\delta\phi} &= \delta\phi - \xi^r \partial_r \bar{\phi} \end{aligned} \quad (2.77)$$

mértéktranszformáció vonatkozik, míg a páratlan perturbációs változókra a

$$\begin{aligned} \widehat{Q} &= Q - \partial_t \eta , \\ \widehat{W} &= W - \partial_r \eta + \frac{2\eta}{r} , \\ \widehat{C} &= C - 2\eta . \end{aligned} \quad (2.78)$$

A mérték rögzítése során hasonlóan a [197] hivatkozáshoz a radiális unitér és konformis mértéket választottam, ekkor a $\widehat{\delta\phi} = 0$, míg $\widehat{B} = 0$, $\widehat{C} = 0$, amelyből

$$\xi^r = \frac{\delta\phi}{\partial_r \bar{\phi}} , \quad \xi = \frac{B}{2} , \quad \eta = \frac{C}{2} . \quad (2.79)$$

Mivel a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban nem kell megkövetelni a fóliázás merőlegességét a perturbáció után is, így a következő feltételt választottam

$$\widehat{P} = 0 \rightarrow \xi^t = \frac{P + \partial_t \xi}{\bar{N}^2} , \quad (2.80)$$

amellyel egyértelművé vált a mértékrögzítés [197] hivatkozáshoz képest [348].

2.2. Az általános relativitáselmélet hamiltoni formalizmusa

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus beágyazási változóival az

$$S^{EH} = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} \quad (2.81)$$

Einstein–Hilbert hatásban szereplő 4-dimenziós metrika determinánsa a

$$\sqrt{-\tilde{g}} = NM\sqrt{g} . \quad (2.82)$$

A 4-dimenziós Ricci-skalár felbontására a kétszer kontrahált Gauss-azonosság vonatkozik, ekkor az (n^a, m^a) bázisban az

$$R = g^{ik}g^{jl}\tilde{R}_{ijkl} + (L^*)^2 - K^2 - L_{ab}^*L^{*ab} + K_{ab}K^{ab} \quad (2.83)$$

és a (k^a, l^a) bázisban az

$$R = g^{ik}g^{jl}\tilde{R}_{ijkl} + L^2 - (K^*)^2 - L_{ab}L^{ab} + K_{ab}^*K^{*ab} , \quad (2.84)$$

ahol

$$g^{ik}g^{jl}\tilde{R}_{ijkl} = \tilde{R} + 2(n^jn^l - m^jm^l)\tilde{R}_{jl} + 2m^in^jn^km^l\tilde{R}_{ijkl} , \quad (2.85)$$

$$g^{ik}g^{jl}\tilde{R}_{ijkl} = \tilde{R} + 2(k^jk^l - l^jl^l)\tilde{R}_{jl} + 2l^ik^jk^kl^l\tilde{R}_{ijkl} \quad (2.86)$$

az (n^a, m^a) és a (k^a, l^a) bázisokban. A (2.85) összefüggésben a 4-dimenziós Riemann-tenzor (n^a, m^a) bázisbeli projekciói a

$$\begin{aligned} m^in^jn^km^l\tilde{R}_{ijkl} &= m^in^km^l\left(\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_l - \tilde{\nabla}_l\tilde{\nabla}_k\right)n_i = m^in^km^l\left(\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_ln_i - \tilde{\nabla}_l\tilde{\nabla}_kn_i\right) \\ &= m^in^km^l\tilde{\nabla}_k(K_{li} + m_l\mathcal{K}_i + m_i\mathcal{K}_l + m_lm_i\mathcal{K} - n_l\mathbf{a}_i + n_lm_i\mathcal{L}^*) \\ &\quad - m^in^km^l\tilde{\nabla}_l(K_{ki} + m_k\mathcal{K}_i + m_i\mathcal{K}_k + m_km_i\mathcal{K} - n_k\mathbf{a}_i + n_km_i\mathcal{L}^*) \\ &= m^in^k\tilde{\nabla}_k\mathcal{K}_i + n^km^l\tilde{\nabla}_k\mathcal{K}_l + n^k\tilde{\nabla}_k\mathcal{K} + \mathcal{L}^*n^km^l\tilde{\nabla}_kn_l \\ &\quad - n^km^l\tilde{\nabla}_l(\mathcal{K}_k) - \mathcal{K}n^km^l\tilde{\nabla}_lm_k - m^im^l\tilde{\nabla}_l\mathbf{a}_i + m^l\tilde{\nabla}_l\mathcal{L}^* \\ &= -2\mathcal{K}^in^k\tilde{\nabla}_km_i + \mathcal{K}^km^l\tilde{\nabla}_ln_k - \mathcal{L}^*n^kn^l\tilde{\nabla}_km_l + \mathcal{K}m^km^l\tilde{\nabla}_ln_k \\ &\quad + \mathbf{a}_ag^{ia}m^l\tilde{\nabla}_lm_i + m^l\tilde{\nabla}_l\mathcal{L}^* + n^k\tilde{\nabla}_k\mathcal{K} \\ &= 2\mathcal{K}_a\mathcal{L}^{*a} + \mathcal{K}_a\mathcal{K}^a - \mathcal{L}^*L^* - \mathcal{K}K + \mathbf{a}_a\mathbf{b}^{*a} \\ &\quad + \tilde{\nabla}_a(n^a\mathcal{K} + m^a\mathcal{L}^*) , \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{aligned} n^jn^l\tilde{R}_{jl} &= -K^{ab}K_{ab} - 2\mathcal{K}^a\mathcal{K}_a + K^2 + 2\mathcal{K}K \\ &\quad + \tilde{\nabla}_a[\mathbf{a}^a - m^a\mathcal{L}^* - n^a(K + \mathcal{K})] , \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} m^jm^l\tilde{R}_{jl} &= -L^{*ab}L_{*ab}^* + 2\mathcal{L}_a^*\mathcal{K}^a + (L^*)^2 - 2\mathcal{L}^*L^* \\ &\quad + \tilde{\nabla}_a[\mathbf{b}^{*a} + n^a\mathcal{K} - m^a(L^* - \mathcal{L}^*)] , \end{aligned} \quad (2.89)$$

míg a (2.86) esetén a (k^a, l^a) bázisbeli projekciók az

$$\begin{aligned} l^n k^h k^i l^m \tilde{R}_{nhim} &= \mathcal{L}^a \mathcal{L}_a + 2\mathcal{L}^a \mathcal{K}_a^* - \mathcal{K}^* K^* - L\mathcal{L} + \mathfrak{a}^{*a} \mathfrak{b}_a \\ &\quad + \tilde{\nabla}_a (k^a \mathcal{K}^* + l^a \mathcal{L}) , \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} k^h k^m \tilde{R}_{hm} &= -K^{*ab} K_{ab}^* - 2\mathcal{L}^a \mathcal{K}_a^* + (K^*)^2 + 2\mathcal{K}^* K^* \\ &\quad + \tilde{\nabla}_a [\mathfrak{a}^{*a} - l^a \mathcal{L} - k^a (K^* + \mathcal{K}^*)] , \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} l^h l^m \tilde{R}_{hm} &= -L^{ab} L_{ab} + 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a + L^2 - 2\mathcal{L}L \\ &\quad + \tilde{\nabla}_a [\mathfrak{b}^a + \mathcal{K}^* k^a - l^a (L - \mathcal{L})] . \end{aligned} \quad (2.92)$$

A (2.87)-(2.92) összefüggésben felhasználtam, hogy

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a n^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a n_b = K + \mathcal{K} , \\ \tilde{\nabla}_a m^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a m_b = L^* - \mathcal{L}^* , \\ \tilde{\nabla}_a k^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a k_b = K^* + \mathcal{K}^* , \\ \tilde{\nabla}_a l^a &= \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a l_b = L - \mathcal{L} . \end{aligned} \quad (2.93)$$

A 4-dimenziós Ricci-skalár nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós felbontása az (n^a, m^a) bázisban az

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= R + K_{ab} K^{ab} - L_{ab}^* L^{*ab} + 2\mathcal{K}^a \mathcal{K}_a + (L^*)^2 - K^2 - 2\mathcal{K}K - 2\mathcal{L}^* L^* \\ &\quad - 2\mathfrak{a}_a \mathfrak{b}^{*a} - 2\tilde{\nabla}_a [\mathfrak{a}^a - \mathfrak{b}^{*a} - n^a (K + \mathcal{K}) + m^a (L^* - \mathcal{L}^*)] , \end{aligned} \quad (2.94)$$

míg a (k^a, l^a) bázisban

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= R + K_{ab}^* K^{*ab} - L_{ab} L^{ab} + 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a + L^2 - (K^*)^2 - 2\mathcal{L}L - 2\mathcal{K}^* K^* \\ &\quad - 2\mathfrak{a}_a^* \mathfrak{b}^a - 2\tilde{\nabla}_a [\mathfrak{a}^{*a} - \mathfrak{b}^a + l^a (L - \mathcal{L}) - k^a (K^* + \mathcal{K}^*)] . \end{aligned} \quad (2.95)$$

A hamiltoni formalizmus tárgyalása során az (n^a, m^a) bázisbeli felbontott Einstein–Hilbert hatásból inultam ki, amelynek Lagrange-sűrűsége az

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{EH} &= NM\sqrt{g} \left\{ K_{ab} [K^{ab} - g^{ab} (K + 2\mathcal{K})] + 2\mathcal{K}^a \mathcal{K}_a \right. \\ &\quad + R - L_{ab}^* L^{*ab} + (L^*)^2 - 2\mathcal{L}^* L^* + 2D_a (\ln N) D^a (\ln M) \\ &\quad \left. - 2\tilde{\nabla}_a [D^a (\ln NM) - n^a (K + \mathcal{K}) + m^a (L^* - \mathcal{L}^*)] \right\} \end{aligned} \quad (2.96)$$

ahol, felhasználtam a (2.41), a (2.82) és az (2.94) összefüggéseket. A Lagrange-sűrűség Liouville-formába írásakor a (2.96) első sorában lévő beágyazási változók $(2 - 1)$ szorzatát vettem, míg a többi tagot megtartottam. A K_{ab} , $\mathcal{K}^a$, $\mathcal{K}$ beágyazási változók 2-vel szorzott részébe visszahelyettesítettem a (2.38), (2.40) és (2.42) összefüggéseket.

Kialakítottam a hamiltoni és impulzus kényszereket, amelyeket az N , N^a , $\mathcal{N}$ metrikus változók szoroznak, ekkor az

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{EH} = & M\sqrt{g} [K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K})] \dot{g}_{ab} + 2\sqrt{g}\mathcal{K}_a \dot{M}^a - 2\sqrt{g}K\dot{M} \\ & - N\mathcal{H}_\perp - N^a\mathcal{H}_a - \mathcal{N}\mathcal{H}_\mathcal{N} + \mathfrak{B}^{EH} \end{aligned} \quad (2.97)$$

Lagrange-sűrűséget kaptam. A $\mathfrak{B}^{EH} = \mathfrak{B}_t + \mathfrak{B}_\chi + \mathfrak{B}_D$ határtag, amelyben

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_t &= 2\partial_t [\sqrt{g}M (K + \mathcal{K})] , \\ \mathfrak{B}_\chi &= 2\partial_\chi [\sqrt{g} (N\mathcal{L}^* - N_a\mathcal{K}^a - \mathcal{N}\mathcal{K})] , \\ \mathfrak{B}_D &= -2\sqrt{g}D_a [MD^aN + NM^a\mathcal{L}^* + N^b (MK_b^a - M^a\mathcal{K}_b) \\ &\quad + \mathcal{N} (M\mathcal{K}^a - M^a\mathcal{K})] . \end{aligned} \quad (2.98)$$

A (2.97) származtatásához az alábbi összefüggéseket használtam fel:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^* &= -\frac{1}{M} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) (\ln N) , \\ (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) \sqrt{g} &= \sqrt{g}ML^* , \\ \mathfrak{L}_\mathbf{M} (f\sqrt{g}) &= D_a (f\sqrt{g}M^a) , \\ \delta g^{ab} &= -g^{ac}g^{bd}\delta g_{cd} , \\ \delta\sqrt{g} &= \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ab}\delta g_{ab} , \\ \delta(\sqrt{g}g^{ab}) &= \sqrt{g}\delta g_{cd} \left(\frac{1}{2}g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd} \right) . \end{aligned}$$

A (2.97)-ben szereplő hamiltoni kényszer a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= \sqrt{g} \{ -M (R + 3L^{*ab}L_{ab}^* - L^{*2}) + 2g^{ab}\partial_\chi L_{ab}^* \\ &\quad + M [K_{ab}K^{ab} + 2\mathcal{K}_a\mathcal{K}^a - K^2 - 2K\mathcal{K}] \\ &\quad - 2 (M^c D_c L^* + 2L_{ab}^* D^a M^b) + 2D^a D_a M \} , \end{aligned} \quad (2.99)$$

a 2-dimenziós impulzuskényszer a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_a &= -2\sqrt{g} \{ D_b [K_a^b M - M g_a^b (K + \mathcal{K})] + K D_a M \\ &\quad + \mathcal{K}_a M L^* + \partial_\chi \mathcal{K}_a - M^b D_b \mathcal{K}_a - \mathcal{K}_b D_a M^b \} , \end{aligned} \quad (2.100)$$

valamint a kiválasztott térbeli irányhoz tartozó impulzuskényszer a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mathcal{N} &= -2\sqrt{g} \{ M [L^*\mathcal{K} - L_{ab}^* K^{ab}] + M D_a \mathcal{K}^a + 2\mathcal{K}^a D_a M \\ &\quad - \partial_\chi K + M^a D_a K \} . \end{aligned} \quad (2.101)$$

A (2.98) határtagban a t , χ és D deriváltas tagok kialakításához az

$$\begin{aligned}
n^b \tilde{\nabla}_b &= \frac{1}{N} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\mathcal{N}}{M} \frac{\partial}{\partial \chi} - \left(N^b - \frac{\mathcal{N}}{M} M^b \right) D_b \right] , \\
m^b \tilde{\nabla}_b &= \frac{1}{M} \left[\frac{\partial}{\partial \chi} - M^b D_b \right] , \\
\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial}{\partial t} g_{ab} = \sqrt{g} [NK + \mathcal{N}L^* + D_a N^a] , \\
\frac{\partial}{\partial t} M &= MN\mathcal{K} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \chi} + N^a D_a M - M^a D_a \mathcal{N} , \\
\partial_\chi \sqrt{g} &= \sqrt{g} g^{ab} (ML_{ab}^* + D_{(a} M_{b)}) , \\
\partial_\chi N &= M^a D_a N - NM\mathcal{L}^*
\end{aligned} \tag{2.102}$$

összefüggéseket alkalmaztam.

A [328] és [346] hivatkozásokhoz hasonlóan, a kanonikus sebességek szerepét betöltő K_{ab} , $\mathcal{K}^a$, $\mathcal{K}$ beágyazási változók helyett a

$$\begin{aligned}
\pi^{ab} &= \frac{\partial \mathcal{L}^{EH}}{\partial \dot{g}^{ab}} = \sqrt{g} M [K^{ab} - g^{ab} (K + \mathcal{K})] , \\
p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}^{EH}}{\partial \dot{M}^a} = 2\sqrt{g} \mathcal{K}_a , \\
p &= \frac{\partial \mathcal{L}^{EH}}{\partial \dot{M}} = -2\sqrt{g} K
\end{aligned} \tag{2.103}$$

kanonikus impulzusokat vezettem be, amelyek behelyettesítésével a Lagrange-sűrűség:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{EH} &= \pi^{ab} \dot{g}_{ab} + p_a \dot{M}^a + p \dot{M} - N\mathcal{H}_\perp - N^a \mathcal{H}_a - \mathcal{N} \mathcal{H}_\mathcal{N} \\
&\quad + \mathfrak{B}_t + \mathfrak{B}_\chi + \mathfrak{B}_D .
\end{aligned} \tag{2.104}$$

A (2.104) Lagrange-sűrűségben a hamiltoni és impulzus kényszerek, amennyiben a kanonikus koordinátákkal és impulzusokkal fejezzük ki, a következők:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\perp &= \sqrt{g} [-M (R + 3L^{*ab} L_{ab}^* - L^{*2}) + 2g^{ab} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) L_{ab}^* + 2D^a D_a M] \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{g} M} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{M}{2\sqrt{g}} p_a p^a + \frac{M}{8\sqrt{g}} p^2 - \frac{\pi p}{2\sqrt{g}} ,
\end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\mathcal{H}_a = -2D_b \pi_a^b + p D_a M - (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) p_a , \tag{2.106}$$

$$\mathcal{H}_\mathcal{N} = 2L_{ab}^* \pi^{ab} - 2p^a D_a M - M D_a p^a - (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) p , \tag{2.107}$$

ahol a

$$\begin{aligned} K^{ab} &= \frac{1}{M\sqrt{g}} \left(\pi^{ab} - \frac{\pi}{2} g^{ab} \right) - \frac{p}{4\sqrt{g}} g^{ab} , \\ \mathcal{K}_a &= \frac{1}{2\sqrt{g}} p_a , \\ \mathcal{K} &= \frac{1}{4\sqrt{g}} \left(p - \frac{2\pi}{M} \right) \end{aligned} \quad (2.108)$$

összefüggéseket használtam. A határtagok a kanonikus impulzusokkal pedig az

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_t &= -\partial_t \left(\pi + \frac{Mp}{2} \right) , \\ \mathfrak{B}_\chi &= \partial_\chi \left[2\sqrt{g} N \mathcal{L}^* - N_a p^a + \mathcal{N} \left(\frac{\pi}{M} - \frac{p}{2} \right) \right] , \\ \mathfrak{B}_D &= -D_a \left[2\sqrt{g} (MD^a N + NM^a \mathcal{L}^*) + 2N^b \pi_b^a - \left(\pi + \frac{Mp}{2} \right) N^a \right. \\ &\quad \left. - M^a N^b p_b + \mathcal{N} \left[Mp^a + M^a \left(\frac{\pi}{M} - \frac{p}{2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (2.109)$$

alakúak.

A (2.38), (2.40) és (2.42) összefüggések invertálásával a kanonikus koordinátákra vonatkozó dinamikai egyenletek, azaz a hamiltoni mozgásegyenletek egyik része egyszerűen származtatható, ezek a

$$\begin{aligned} \dot{g}_{ab} &= \frac{N}{M\sqrt{g}} \left[2\pi_{ab} - \left(\pi + \frac{Mp}{2} \right) g_{ab} \right] + \mathfrak{L}_N g_{ab} + \frac{\mathcal{N}}{M} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) g_{ab} , \\ \dot{M}^a &= \frac{MN}{\sqrt{g}} p^a + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) N^a + MD^a \mathcal{N} - \mathcal{N} D^a M , \\ \dot{M} &= \frac{MN}{4\sqrt{g}} \left(p - \frac{2\pi}{M} \right) + \mathfrak{L}_N M + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_M) \mathcal{N} . \end{aligned} \quad (2.110)$$

A hamiltoni mozgásegyenletek levezetéséhez szükséges bevezetni a $g^A \equiv \{g_{ab}, M^a, M\}$ és $\pi_A \equiv \{\pi^{ab}, p_a, p\}$ kanonikus változókra vonatkozó Poisson-zárójelet. Két tetszőleges $f(\chi, y) \equiv f(\chi, y; g^A(\chi, y), \pi_B(\chi, y))$ és $h(\chi, y) \equiv h(\chi, y; g^A(\chi, y), \pi_B(\chi, y))$ függvény Poisson-zárójele az

$$\{f(\chi, y), h(\chi', y')\} = \int d\chi'' \int dy'' \left(\frac{\delta f(\chi, y)}{\delta g^C(\chi'', y'')} \frac{\delta h(\chi', y')}{\delta \pi_C(\chi'', y'')} - \frac{\delta f(\chi, y)}{\delta \pi_C(\chi'', y'')} \frac{\delta h(\chi', y')}{\delta g^C(\chi'', y'')} \right)$$

módon adható meg. Az $y = \{y^1, y^2\}$ a $\Sigma_{t\chi}$ -n értelmezett koordináták, valamint az integrálást az adott változó teljes tartományára kell elvégezni. A kanonikus párokra a

$$\begin{aligned} \{g^A(\chi, y), g^B(\chi', y')\} &= 0 , \\ \{\pi_A(\chi, y), \pi_B(\chi', y')\} &= 0 , \\ \{g^A(\chi, y), \pi_B(\chi', y')\} &= \delta_B^A \delta(\chi - \chi') \delta(y - y') \end{aligned}$$

összefüggések teljesülnek. A [346] folyóiratcikkhez hasonlóan bevezettem a simított Hamilton-sűrűséget, amely a

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{EH}[N] &= \mathcal{H}_\perp[N] + \mathcal{H}_a[N^a] + \mathcal{H}_\mathcal{N}[\mathcal{N}] , \\ \mathcal{H}_\perp[N] &= \int d\chi \int dy N(\chi, y) \mathcal{H}_\perp(\chi, y) , \\ \mathcal{H}_a[N^a] &= \int d\chi \int dy N^a(\chi, y) \mathcal{H}_a(\chi, y) , \\ \mathcal{H}_\mathcal{N}[\mathcal{N}] &= \int d\chi \int dy \mathcal{N}(\chi, y) \mathcal{H}_\mathcal{N}(\chi, y) .\end{aligned}$$

A simított Hamilton-sűrűséggel a kanonikus egyenletek a

$$\begin{aligned}\dot{g}^A &\equiv \{g^A(\chi, y), \mathcal{H}^{EH}[N]\} = \frac{\delta \mathcal{H}^{EH}[N]}{\delta \pi_A(\chi, y)} , \\ \dot{\pi}_A &\equiv \{\pi_A(\chi, y), \mathcal{H}^{EH}[N]\} = -\frac{\delta \mathcal{H}^{EH}[N]}{\delta g^A(\chi, y)}\end{aligned}$$

módon származtathatók. A Poisson-zárójelek számolása során megkaptam, hogy a kanonikus koordináták időfejlődésére vonatkozó

$$\begin{aligned}\dot{g}_{cd} &= \frac{\delta \mathcal{H}^{EH}[N]}{\delta \pi^{cd}(\chi, y)} \\ &= \frac{N}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{M} (2\pi_{cd} - g_{cd}\pi) - \frac{1}{2} g_{cd} p \right] + 2D_{(c} N_{d)} + 2\mathcal{N} L_{cd}^* , \\ \dot{M}^c &= \frac{\delta \mathcal{H}^{EH}[N]}{\delta p_c(\chi, y)} = N \frac{M}{\sqrt{g}} p^c + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) N^c - \mathcal{N} D^c M + M D^c \mathcal{N} , \\ \dot{M} &= \frac{\delta \mathcal{H}^{EH}[N]}{\delta p(\chi, y)} = \frac{N}{2\sqrt{g}} \left(\frac{1}{2} M p - \pi \right) + \mathfrak{L}_\mathbf{N} M + (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) \mathcal{N} \quad (2.111)\end{aligned}$$

egyenletek azonosak a (2.110) egyenletekkel.

A kanonikus impulzusokra vonatkozó Poisson-zárójelek esetén, az impulzus tenzorra a

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^{cd} &= -\frac{\delta \mathcal{H}^{EH}[N]}{\delta g_{cd}(\chi, y)} \\ &= N \mathcal{S}^{cd} + N \mathcal{V}^{cd} + \mathfrak{L}_\mathbf{N} \pi^{cd} - NM \sqrt{g} \mathcal{L}^* (L^{*cd} - g^{cd} L^*) \\ &\quad + \sqrt{g} g^{cd} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) (N \mathcal{L}^*) + \frac{\mathcal{N}}{M} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) \pi^{cd} \\ &\quad + \sqrt{g} [M D^d D^c N - g^{cd} (D_a M) (D^a N) - g^{cd} M D_a D^a N] \\ &\quad - \left[\frac{\mathcal{N} \pi^{cd}}{M^2} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) + \mathcal{N} p^{(c} D^{d)} \right] M \\ &\quad + \left[\frac{\pi^{cd}}{M} (\partial_\chi - \mathfrak{L}_\mathbf{M}) + M p^{(c} D^{d)} \right] \mathcal{N} \quad (2.112)\end{aligned}$$

dinamikai egyenlet adódott, ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{cd} = & -\frac{2}{\sqrt{g}M} \left(\pi_b^c \pi^{db} - \frac{\pi}{2} \pi^{cd} \right) + \frac{p}{2\sqrt{g}} \pi^{cd} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{g}M} g^{cd} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) + \frac{M}{2\sqrt{g}} p^c p^d \\ & + \frac{M}{2\sqrt{g}} g^{cd} \left[\frac{1}{2} p_a p^a + \frac{1}{8} p^2 - \frac{\pi p}{2M} \right] , \end{aligned} \quad (2.113)$$

míg

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{cd} = & -\sqrt{g}M \left(G^{cd} + 2L^{*db} L_b^{*c} - L^* L^{*cd} \right) + \sqrt{g} D^c D^d M \\ & + \frac{M}{2} \sqrt{g} g^{cd} \left(3L^{*ab} L_{ab}^* - L^{*2} \right) - \sqrt{g} g^{cd} D_a D^a M \\ & + \sqrt{g} \left(g^{ac} g^{bd} - g^{cd} g^{ab} \right) \left(\partial_\chi - \mathfrak{L}_M \right) L_{ab}^* , \end{aligned} \quad (2.114)$$

valamint G_{ab} a 2-dimenziós Einstein-tenzor. A kanonikus mozgásegyenlet az impulzus vektor esetén a

$$\begin{aligned} \dot{p}_c = & -\frac{\delta \mathcal{H}^{EH} [N]}{\delta M^c (\chi, y)} \\ = & N \mathcal{V}_a - 2\sqrt{g} [L_{ac}^* D^a N + D_c (N \mathcal{L}^*)] - \frac{2\mathcal{N}}{M} D^a \pi_{ac} \\ & + \frac{2\mathcal{N}}{M^2} \pi_{ac} D^a M + \mathfrak{L}_M p_c + \left(p g_{ac} - \frac{2}{M} \pi_{ac} \right) D^a \mathcal{N} , \end{aligned} \quad (2.115)$$

ahol

$$\mathcal{V}_a = -2\sqrt{g} (D^a L_{ac}^* - D_c L^*) . \quad (2.116)$$

Az impulzus skalárra pedig a

$$\begin{aligned} \dot{p} = & -\frac{\delta \mathcal{H}^{EH} [N]}{\delta M (\chi, y)} \\ = & N \mathcal{V} + N \mathcal{S} + \mathfrak{L}_M p + 2\sqrt{g} (N L^* \mathcal{L}^* - D_a D^a N) \\ & + \mathcal{N} \left(\frac{2}{M} \pi^{ab} L_{ab}^* - D_a p^a \right) - 2p^a D_a \mathcal{N} , \end{aligned} \quad (2.117)$$

mozgásegyenletet kaptam, ahol

$$\mathcal{V} = \sqrt{g} (R + L^{*ab} L_{ab}^* - L^{*2}) ,$$

míg

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{1}{M^2} \left(\pi_{ab} \pi^{ab} - \frac{\pi^2}{2} \right) - \frac{1}{2} p_a p^a - \frac{1}{8} p^2 \right] .$$

2.3. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ téridőfelbontás és az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus

A [322] folyóiratcikkben bevezetett $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus kinematikai mennyiségei kapcsolatba hozhatók a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban bevezetett beágyazást jellemző geometriai mennyiségekkel.

Az (1.51) és (1.53) eredmények a térszerű n^a vektor és a rá merőleges időszerű u^a vektor 4-es kovariáns deriváltjainak $1 + 1 + 2$ kovariáns felbontásai. A két formalizmus összehasonlításához az (1.51) és (1.53) összefüggésekben szereplő kinematikai mennyiségek átírásával foglalkoztam. A 2-dimenziós időszerű felület expaziójának mértékét az (1.39) definíció adja meg, amely a

$$\begin{aligned}\phi^{(1+1+2)} &= \delta_a n^a = N_a^b N_c^a \mathcal{D}_b n^c = N^{ab} \mathcal{D}_b n_a \\ &= N_a^b \mathcal{D}_b n^a = N_a^b h_j^a h_b^i \nabla_i n^j \\ &= N_a^b (N_j^a + n_j n^a) (N_b^i + n_b n^i) \nabla_i n^j .\end{aligned}\tag{2.118}$$

Amennyiben a $N_{ab} \rightarrow g_{ab}$, $n_a \rightarrow m_a$ és $\nabla \rightarrow \tilde{\nabla}$ megfeleltetéseket vesszük, akkor a

$$\begin{aligned}\phi^{(2+1+1)} &= g_a^b g_b^i (g_j^a + m_j m^a) \tilde{\nabla}_i m^j = g_a^b g_b^i g_j^a \tilde{\nabla}_i m^j \\ &= g_a^b g_b^i g^{aj} (L_{ij}^* + n_i \mathcal{L}_j^* + n_j \mathcal{K}_i + n_i n_j \mathcal{L}^* + m_i (\mathbf{b}_j^* + n_j \mathcal{K})) \\ &= L_a^{*a} = L^*\end{aligned}\tag{2.119}$$

az expanzió a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban, felhasználva a (2.21) felbontást. Az (1.40) 2-dimenziós nyírás részletezett alakja a

$$\begin{aligned}\zeta_{ab}^{(1+1+2)} &= \delta_{\{a} n_{b\}} = \left[N_{(a}^c N_{b)}^d - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \right] \mathcal{D}_c n_d \\ &= \left[N_{(a}^c N_{b)}^d - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \right] h_c^j h_d^i \nabla_j n_i \\ &= \left[N_{(a}^c N_{b)}^d - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \right] (N_c^j + n_c n^j) (N_d^i + n_d n^i) \nabla_j n_i \\ &= \frac{1}{2} [N_a^c N_b^d + N_b^c N_a^d - N_{ab} N^{cd}] (N_c^j + n_c n^j) N_d^i \nabla_j n_i ,\end{aligned}\tag{2.120}$$

amely a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a

$$\begin{aligned}\zeta_{ab}^{(2+1+1)} &= \frac{1}{2} [g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}] (g_c^j + m_c m^j) g_d^i \tilde{\nabla}_j m_i \\ &= \frac{1}{2} [g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}] g_c^j g_d^i \tilde{\nabla}_j m_i \\ &\quad + \frac{1}{2} [g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}] m_c g_d^i m^j \tilde{\nabla}_j m_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}] L_{cd}^* \\
 &\quad + \frac{1}{2} [g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}] m_c \mathfrak{b}_d^* \\
 &= \frac{1}{2} [L_{ab}^* + L_{ba}^* - g_{ab} L^*] \\
 &= L_{ab}^* - \frac{1}{2} g_{ab} L^*
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

felhasználva a (2.17) és (2.22) definíciókat. Az (1.41) n^a vektorral párhuzamos 2-dimenziós gyorsulás komponens az

$$\begin{aligned}
 a_a^{(1+1+2)} &= \hat{n}_a = n^b \mathcal{D}_b n_a = n^b h_b^i h_a^j \nabla_i n_j \\
 &= n^b (N_b^i + n_b n^i) (N_a^j + n_a n^j) \nabla_i n_j,
 \end{aligned} \tag{2.122}$$

amely az

$$\begin{aligned}
 a_a^{(2+1+1)} &= m^b (g_b^i + m_b m^i) (g_a^j + m_a m^j) \tilde{\nabla}_i m_j \\
 &= m^b m_b m^i g_a^j \tilde{\nabla}_i m_j = g_a^j m^i \tilde{\nabla}_i m_j = \mathfrak{b}_a^*
 \end{aligned} \tag{2.123}$$

módon fejezhető ki, felhasználva a (2.24) összefüggést. Az (1.42)-ben bevezetett 2-dimenziós örvény kifejtve a

$$\begin{aligned}
 \xi^{(1+1+2)} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \delta_a n_b = \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} N_a^i N_b^j \mathcal{D}_i n_j \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} N_a^i N_b^j h_i^c h_j^d \nabla_c n_d \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} N_a^i N_b^j (N_i^c + n_i n^c) (N_j^d + n_j n^d) \nabla_c n_d,
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

amely a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a

$$\begin{aligned}
 \xi^{(2+1+1)} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} g_a^i g_b^j (g_i^c + m_i m^c) (g_j^d + m_j m^d) \tilde{\nabla}_c m_d \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} g_a^i g_b^j (g_i^c + m_i m^c) g_j^d \tilde{\nabla}_c m_d \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} g_a^i g_b^j (g_i^c g_j^d \tilde{\nabla}_c m_d + m_i g_j^d m^c \tilde{\nabla}_c m_d) \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} g_a^i g_b^j (L_{ij}^* + m_i \mathfrak{b}_j^*) \\
 &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} L_{ab}^* = 0.
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

Ez utóbbi eredmény várható volt, mivel az m^a vektor 2-dimenziós örvénye zérus a (2.25) alapján. Ezt ellenőrizve az (1.51) felbontásban a

$$\begin{aligned}
 \xi \varepsilon_{km}^{(1+1+2)} &= \frac{1}{2} (N_k^i N_m^j - N_m^i N_k^j) h_i^a h_j^b \nabla_a n_b \\
 &= \frac{1}{2} (N_k^i N_m^j - N_m^i N_k^j) (N_i^a + n_i n^a) (N_j^b + n_j n^b) \nabla_a n_b,
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

míg a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban

$$\begin{aligned}
 \xi \varepsilon_{km}^{(2+1+1)} &= \frac{1}{2} (g_k^i g_m^j - g_m^i g_k^j) (g_i^a + m_i m^a) (g_j^b + m_j m^b) \tilde{\nabla}_a m_b \\
 &= \frac{1}{2} (g_k^i g_m^j - g_m^i g_k^j) \left(g_i^a g_j^b \tilde{\nabla}_a m_b + m_i m^a g_j^b \tilde{\nabla}_a m_b \right) \\
 &= \frac{1}{2} (g_k^i g_m^j - g_m^i g_k^j) (L_{ij}^* + m_i \mathfrak{b}_j^*) = 0 .
 \end{aligned} \tag{2.127}$$

Az (1.44) mennyiségek átírására az

$$\begin{aligned}
 \alpha_a^{(1+1+2)} &= N_{ac} u^b \nabla_b n^c \rightarrow \alpha_a^{(2+1+1)} = g_a^c n^b \tilde{\nabla}_b m_c = -\mathcal{L}_a^* , \\
 \mathcal{A}^{(1+1+2)} &= n_c u^b \nabla_b u^c \rightarrow \mathcal{A}^{(2+1+1)} = m_c n^b \tilde{\nabla}_b n^c = -n^c n^b \tilde{\nabla}_b m_c = -\mathcal{L}^*
 \end{aligned} \tag{2.128}$$

összefüggések adódtak, ahol az $u_a \rightarrow n_a$ megfeleltetést tettem. Az $\omega_{ab}^{(1+1+2)}$, $\omega^{a(1+1+2)}$ örvények kivételével az u^a vektor 4-es kovariáns deriváltjának $1 + 1 + 2$ kovariáns felbontásából származó (1.27)-(1.29) és (1.48) kinematikai mennyiségek kifejtve a következők:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{a(1+1+2)} &= N_b^a A^b = N_b^a u^i \nabla_i u^b = N_b^a u^i \nabla_i u^b , \\
 \theta^{(1+1+2)} &= \mathcal{D}_a u^a = h^{ab} \nabla_a u_b = (N^{ab} + n^a n^b) \nabla_a u_b , \\
 \sigma_{ab}^{(1+1+2)} &= \mathcal{D}_{\langle a} u_{b \rangle} = \frac{1}{2} h_a^i h_b^j \nabla_i u_j + \frac{1}{2} h_a^j h_b^i \nabla_i u_j - \frac{1}{3} h_{ab} h^{ij} \nabla_i u_j \\
 &= \frac{1}{2} (N_a^i + n_a n^i) (N_b^j + n_b n^j) \nabla_i u_j + \frac{1}{2} (N_a^j + n_a n^j) (N_b^i + n_b n^i) \nabla_i u_j \\
 &\quad - \frac{1}{3} (N_{ab} + n_a n_b) (N^{ij} + n^i n^j) \nabla_i u_j , \\
 \Sigma_{ab}^{(1+1+2)} &= \left(N_{(a}^c N_{b)}^d - \frac{1}{2} N_{ab} N^{cd} \right) \sigma_{cd} , \\
 \Sigma_a^{(1+1+2)} &= N_a^c n^d \sigma_{cd} , \\
 \Sigma^{(1+1+2)} &= n^a n^b \sigma_{ab} = -N^{ab} \sigma_{ab} .
 \end{aligned} \tag{2.129}$$

Ezeknek a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusbeli megfelelői az

$$\mathcal{A}^{a(2+1+1)} = g_b^a n^i \tilde{\nabla}_i n^b = \mathfrak{a}^a , \tag{2.130}$$

$$\theta^{(2+1+1)} = (g^{ab} + m^a m^b) \tilde{\nabla}_a n_b = K + \mathcal{K} , \tag{2.131}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ab}^{(2+1+1)} &= \frac{1}{2} (g_a^i + m_a m^i) (g_b^j + m_b m^j) \tilde{\nabla}_i n_j \\
 &\quad + \frac{1}{2} (g_a^j + m_a m^j) (g_b^i + m_b m^i) \tilde{\nabla}_i n_j \\
 &\quad - \frac{1}{3} (g_{ab} + m_a m_b) (g^{ij} + m^i m^j) \tilde{\nabla}_i n_j
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(g_a^i g_b^j \tilde{\nabla}_i n_j + g_a^i m_b m^j \tilde{\nabla}_i n_j + g_b^j m_a m^i \tilde{\nabla}_i n_j + m_a m^i m_b m^j \tilde{\nabla}_i n_j \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(g_a^j g_b^i \tilde{\nabla}_i n_j + g_a^j m_b m^i \tilde{\nabla}_i n_j + g_b^i m_a m^j \tilde{\nabla}_i n_j + m_a m^j m_b m^i \tilde{\nabla}_i n_j \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} \left(g_{ab} g^{ij} \tilde{\nabla}_i n_j + g_{ab} m^i m^j \tilde{\nabla}_i n_j + m_a m_b g^{ij} \tilde{\nabla}_i n_j + m_a m_b m^i m^j \tilde{\nabla}_i n_j \right) \\
&= \frac{1}{2} (K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K}) + \frac{1}{2} (K_{ba} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K}) \\
&\quad - \frac{1}{3} (g_{ab} K + g_{ab} \mathcal{K} + m_a m_b K + m_a m_b \mathcal{K}) \\
&= K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} \\
&\quad - \frac{1}{3} (g_{ab} K + g_{ab} \mathcal{K} + m_a m_b K + m_a m_b \mathcal{K}) , \tag{2.132}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_{ab}^{(2+1+1)} &= \frac{1}{2} (g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}) \sigma_{cd} \\
&= \frac{1}{2} (g_a^c g_b^d + g_b^c g_a^d - g_{ab} g^{cd}) [K_{cd} + 2m_{(c} \mathcal{K}_{d)} + m_c m_d \mathcal{K} \\
&\quad - \frac{1}{3} (g_{cd} K + g_{cd} \mathcal{K} + m_c m_d K + m_c m_d \mathcal{K})] \\
&= K_{ab} - \frac{1}{3} g_{ab} (K + \mathcal{K}) - \frac{1}{2} g_{ab} K + \frac{1}{3} g_{ab} (K + \mathcal{K}) \\
&= K_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} K , \tag{2.133}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma_a^{(2+1+1)} &= g_a^c m^d [K_{cd} + 2m_{(c} \mathcal{K}_{d)} + m_c m_d \mathcal{K} \\
&\quad - \frac{1}{3} (g_{cd} K + g_{cd} \mathcal{K} + m_c m_d K + m_c m_d \mathcal{K})] \\
&= \mathcal{K}_a , \tag{2.134}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{(2+1+1)} &= m^a m^b [K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} \\
&\quad - \frac{1}{3} (g_{ab} K + g_{ab} \mathcal{K} + m_a m_b K + m_a m_b \mathcal{K})] \\
&= \mathcal{K} - \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) , \tag{2.135}
\end{aligned}$$

A 3-dimenziós (1.30) örvény az

$$\begin{aligned}
\omega_{ab}^{(1+1+2)} &= \mathcal{D}_{[a} u_{b]} = \frac{1}{2} (h_a^i h_b^j - h_b^i h_a^j) \nabla_i u_j \\
&= \frac{1}{2} [(N_a^i + n_a n^i) (N_b^j + n_b n^j) \\
&\quad - (N_b^i + n_b n^i) (N_a^j + n_a n^j)] \nabla_i u_j \tag{2.136}
\end{aligned}$$

amelynek a további $1 + 2$ dimenziós felbontásával az (1.48) kinematikai mennyiségeket vezették be. A (2.136) kifejtést, ha átírjuk a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusba,

akkor

$$\begin{aligned}\omega_{ab}^{(2+1+1)} &= \frac{1}{2} [(g_a^i + m_a m^i) (g_b^j + m_b m^j) - (g_b^i + m_b m^i) (g_a^j + m_a m^j)] \tilde{\nabla}_i n_j \\ &= \frac{1}{2} [\hat{g}_a^i \hat{g}_b^j - \hat{g}_b^i \hat{g}_a^j] \tilde{\nabla}_i n_j = \hat{g}_{[a}^i \hat{g}_{b]}^j \tilde{\nabla}_i n_j = 0 ,\end{aligned}\tag{2.137}$$

Az $\omega_{ab}^{(2+1+1)} = 0$ eredmény azért adódott, mert a dupla fóliázáshoz meg kellett követelni, hogy a hiperfelület normálisok 3- és 2-dimenziós örvényei eltűnjenek tekintve a (2.25), (2.26)-(2.29), (2.32), (2.34) és (2.35) összefüggéseket. Emiatt az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus Ω , Ω^a kinematikai mennyiségei nem jelennek meg a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban. A $\xi^{(2+1+1)} = 0$ az m^a 2-dimenziós örvényével arányos, amelynek ugyancsak zérusnak kell lennie a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontásban az (2.25) összefüggés szerint. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban az m^a bázisvektor n^a normálissal párhuzamosan projektált 3-dimenziós örvénye azonban az

$$\begin{aligned}(\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b)^{(2+1+1)} &= \bar{h}_{[a}^c \bar{h}_{b]}^d n^b \tilde{\nabla}_c m_d = \frac{1}{2} (\bar{h}_a^c \bar{h}_b^d n^b \tilde{\nabla}_c m_d - \bar{h}_b^c \bar{h}_a^d n^a \tilde{\nabla}_c m_d) \\ &= \frac{1}{2} [(g_a^c - n_a n^c) n^d \tilde{\nabla}_c m_d - (g_a^d - n_a n^d) n^c \tilde{\nabla}_c m_d] \\ &= \frac{1}{2} (g_a^c n^d \tilde{\nabla}_c m_d - g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d) \\ &= \frac{1}{2} (-g_a^c m^d \tilde{\nabla}_c n_d - g_a^d n^c \tilde{\nabla}_c m_d) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{L}_a^* - \mathcal{K}_a) .\end{aligned}\tag{2.138}$$

Ebből kaptam, hogy $\mathcal{L}_a^*$ nem rendelkezik a (2.15) normális fundamentális formákra jellemző szimmetria tulajdonságokkal. A (2.128) és (2.134) alapján az m^a 3-dimenziós örvényének n^a normálissal párhuzamos komponense az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmusban a következő kinematikai mennyiségekkel azonos:

$$(\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b)^{(2+1+1)} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_a^* - \mathcal{K}_a) \rightarrow (\bar{\omega}_{ab}^{(\mathbf{m})} n^b)^{(1+1+2)} = -\frac{1}{2} (\alpha_a + \Sigma_a) .$$

Az $1 + 1 + 2$ dimenziós kovariáns formalizmusban, tekintve az (1.51) összefüggést, az n^a térszerű vektor 4-dimenziós kovariáns deriváltjának a felbontása

$$\begin{aligned}(\nabla_a n_b)^{(1+1+2)} &= -u_a \alpha_b - u_a u_b \mathcal{A} + \zeta_{ab} + \frac{1}{2} N_{ab} \phi + \xi \varepsilon_{ab} \\ &\quad + n_a a_b + \left(\Sigma + \frac{1}{3} \theta \right) n_a u_b + \Sigma_a u_b - u_b \varepsilon_{ac} \Omega^c ,\end{aligned}$$

amely a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontásban bevezetett mennyiségekkel

a

$$\begin{aligned}
 (\nabla_a n_b)^{(2+1+1)} &= n_a \mathcal{L}_b^* + n_a n_b \mathcal{L}^* + L_{ab}^* - \frac{1}{2} g_{ab} L^* + \frac{1}{2} g_{ab} L^* + m_a \mathfrak{b}_a^* + n_b \mathcal{K}_a \\
 &\quad + \left(\mathcal{K} - \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) + \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) \right) m_a n_b + (\xi \varepsilon_{ab} - n_b \varepsilon_{ac} \Omega^c)^{1+1+2} \\
 &= L_{ab}^* + n_a \mathcal{L}_b^* + n_b \mathcal{K}_a + n_a n_b \mathcal{L}^* + m_a (\mathfrak{b}_a^* + n_b \mathcal{K}) \\
 &\quad + (\xi \varepsilon_{ab} - n_b \varepsilon_{ac} \Omega^c)^{(1+1+2)}
 \end{aligned} \tag{2.139}$$

alakú. A (2.21) és (2.139) felbontások szerint a $(\nabla_a n_b)^{(2+1+1)} = \tilde{\nabla}_a m_b$, ha ξ és Ω^c mennyiségek zérusak az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmusban.

Az $1 + 1 + 2$ dimenziós kovariáns formalizmusban, tekintve a (1.53) összefüggést, az u^a időszerű vektor 4-dimenziós kovariáns deriváltjának felbontása

$$\begin{aligned}
 (\nabla_a u_b)^{(1+1+2)} &= -u_a (\mathcal{A} n_b + \mathcal{A}_b) + \frac{1}{3} \theta (N_{ab} + n_a n_b) + \Sigma_{ab} + n_a \Sigma_b + n_b \Sigma_a \\
 &\quad + \left(n_a n_b - \frac{1}{2} N_{ab} \right) \Sigma + \varepsilon_{ab} \Omega + n_a \varepsilon_{bi} \Omega^i - n_b \varepsilon_{ai} \Omega^i,
 \end{aligned}$$

amely a nemmerőleges $2+1+1$ dimenziós téridőfelbontásban bevezetett mennyiségekkel

$$\begin{aligned}
 (\nabla_a u_b)^{(2+1+1)} &= n_a m_b \mathcal{L}^* - n_a \mathfrak{a}_b + \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) (g_{ab} + m_a m_b) + K_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} K \\
 &\quad + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + \left(m_a m_b - \frac{1}{2} g_{ab} \right) \left(\mathcal{K} - \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) \right) \\
 &\quad + (\varepsilon_{ab} \Omega + n_a \varepsilon_{bi} \Omega^i - n_b \varepsilon_{ai} \Omega^i)^{1+1+2} \\
 &= K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} - n_a (\mathfrak{a}_b - m_b \mathcal{L}^*) \\
 &\quad + (\varepsilon_{ab} \Omega + n_a \varepsilon_{bi} \Omega^i - n_b \varepsilon_{ai} \Omega^i)^{1+1+2}.
 \end{aligned} \tag{2.140}$$

alakú. A (2.10) és (2.140) eredményeket összehasonlítva a $(\nabla_a u_b)^{(2+1+1)} = \tilde{\nabla}_a n_b$, ha az Ω és Ω^c mennyiségek zérusak az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmusban.

A [322] folyóiratcikkben bemutatott $1 + 1 + 2$ formalizmust alkalmazták a Schwarzschild téridőre vonatkozó dinamikai egyenletek levezetésére. C. Clarkson általános forgási szimmetriával rendelkező téridők esetén ugyancsak megadta a háttérre vonatkozó dinamikai egyenleteket [323]. Az általános relativitáselmélet 2.2. alfejezetben bemutatott hamiltoni tárgyalása szintén általános forgás szimmetriával rendelkező téridőkre vonatkozik, mivel a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a χ kiválasztott térbeli koordinátát nem specializáltam. Éppen ezért az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus és a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus összehasonlítására lehetőséget ad a [323]-ben bemutatott a evolúciós, propagációs és kényszeregyenletek átírása a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban megadott mennyiségekben. A [323] folyóiratcikk (71)

propagációs egyenlete a

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} - \frac{2}{3}\hat{\theta} &= -\frac{3}{2}\phi\Sigma - 2\xi\Omega - \delta_a\Sigma^a - \varepsilon_{ab}\delta^a\Omega^b \\ &\quad + 2\Sigma_a a^a - 2\varepsilon_{ab}\mathcal{A}^a\Omega^b + \Sigma_{ab}\zeta^{ab} - Q \end{aligned} \quad (2.141)$$

amely a kinematikai mennyiségeknek csak a kiválasztott térszerű irány menti deriváltjait, valamint a térszerű n^a és az időszerű u^a vektorokra teljesen merőleges kovariáns deriváltjait tartalmazza. Ez az egyenlet megfeleltethető a (2.101) impulzus kényszernek.

Mivel a 2.2. alfejezetben anyagi hatás bevezetése nélkül származtattam a dinamikai és kényszeregyenleteket, ezért a $q_a^{(1+1+2)}$ energiaáram sűrűség $1 + 2$ felbontásából származó Q skalár vehető zérusnak. A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontásban a ξ , Ω , Ω^a mennyiségek nem jelennek meg, így ezeket a

$$\Pi^{(1+1+2)} = 2\xi\Omega + \varepsilon_{ab}\delta^a\Omega^b + 2\varepsilon_{ab}\mathcal{A}^a\Omega^b$$

jelöléssel csoportosítottam a (2.141) egyenletben. Ezek alapján a

$$\hat{\Sigma} - \frac{2}{3}\hat{\theta} = -\frac{3}{2}\phi\Sigma - \delta_a\Sigma^a + 2\Sigma_a a^a + \Sigma_{ab}\zeta^{ab} - \Pi^{(1+1+2)} \quad (2.142)$$

átírásával foglalkozom a továbbiakban. Legyen a (2.142) egyenlet bal oldala

$$\begin{aligned} B^{(1+1+2)} &= \hat{\Sigma} - \frac{2}{3}\hat{\theta} = n^i\mathcal{D}_i\Sigma - \frac{2}{3}n^i\mathcal{D}_i\theta \\ &= n^i h_i^a \nabla_a \Sigma - \frac{2}{3}n^i h_i^a \nabla_a \theta \\ &= n^i (N_i^a + n_i n^a) \nabla_a \Sigma - \frac{2}{3}n^i (N_i^a + n_i n^a) \nabla_a \theta, \end{aligned} \quad (2.143)$$

míg jobb oldala

$$\begin{aligned} J^{(1+1+2)} &= -\frac{3}{2}\phi\Sigma - \delta_a\Sigma^a + 2\Sigma_a a^a + \Sigma_{ab}\zeta^{ab} - (\Pi)^{1+1+2} \\ &= -\frac{3}{2}\phi\Sigma - N_a^i N_j^a \mathcal{D}_i \Sigma^j + 2\Sigma_a a^a + \Sigma_{ab}\zeta^{ab} - (\Pi)^{1+1+2} \\ &= -\frac{3}{2}\phi\Sigma - N_a^i N_j^a h_i^c h_d^j \nabla_c \Sigma^d + 2\Sigma_a a^a + \Sigma_{ab}\zeta^{ab} - (\Pi)^{1+1+2} \\ &= -\frac{3}{2}\phi\Sigma - N_a^i N_j^a (N_i^c + n_i n^c) (N_d^j + n_d n^j) \nabla_c \Sigma^d \\ &\quad + 2\Sigma_a a^a + \Sigma_{ab}\zeta^{ab} - (\Pi)^{1+1+2}. \end{aligned} \quad (2.144)$$

A (2.143) bal oldal a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a

$$\begin{aligned}
 B^{(2+1+1)} &= \left(\hat{\Sigma} - \frac{2}{3} \hat{\theta} \right)^{(2+1+1)} \\
 &= m^i (g_i^a + m_i m^a) \tilde{\nabla}_a \Sigma^{(1+1+2)} - \frac{2}{3} m^i (g_i^a + m_i m^a) \tilde{\nabla}_a \theta^{(1+1+2)} \\
 &= m^a \tilde{\nabla}_a \Sigma^{(1+1+2)} - \frac{2}{3} m^a \tilde{\nabla}_a \theta^{(1+1+2)} \\
 &= m^a \tilde{\nabla}_a \left(\mathcal{K} - \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) \right) - \frac{2}{3} m^a \tilde{\nabla}_a (K + \mathcal{K}) \\
 &= -m^a \tilde{\nabla}_a K \\
 &= -\frac{1}{M} [\partial_\chi K - M^b D_b K] , \tag{2.145}
 \end{aligned}$$

felhasználva a (2.102), (2.131) és (2.135) összefüggéseket. A (2.144) jobb oldal a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a

$$\begin{aligned}
 J^{(2+1+1)} &= -\frac{3}{2} (\phi \Sigma)^{(1+1+2)} - g_a^i g_j^a (g_i^c + m_i m^c) (g_d^j + m_d m^j) \tilde{\nabla}_c \Sigma^{d(1+1+2)} \\
 &\quad + 2 (\Sigma_a a^a)^{(1+1+2)} + (\Sigma_{ab} \zeta^{ab})^{(1+1+2)} - (\Pi)^{(1+1+2)} \\
 &= -\frac{3}{2} (\phi \Sigma)^{(1+1+2)} - g_j^c g_d^j \tilde{\nabla}_c \Sigma^{d(1+1+2)} + 2 (\Sigma_a a^a)^{(1+1+2)} \\
 &\quad + (\Sigma_{ab} \zeta^{ab})^{(1+1+2)} - \Pi^{(1+1+2)} \\
 &= -\frac{3}{2} L^* \left(\mathcal{K} - \frac{1}{3} (K + \mathcal{K}) \right) - g_j^c g_d^j \tilde{\nabla}_c \mathcal{K}^d + 2 \mathcal{K}_a \mathfrak{b}^{*a} \\
 &\quad + \left(K_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} K \right) \left(L_{ab}^* - \frac{1}{2} g_{ab} L^* \right) - \Pi^{(1+1+2)} \\
 &= -L^* \mathcal{K} + \frac{1}{2} L^* K - g_j^c g_d^j \tilde{\nabla}_c (\mathcal{K}^d) + 2 \mathcal{K}_a \mathfrak{b}^{*a} \\
 &\quad + \left(K_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} K \right) \left(L^{*ab} - \frac{1}{2} g^{ab} L^* \right) - \Pi^{(1+1+2)} \\
 &= -L^* \mathcal{K} + \frac{1}{2} L^* K - D_a \mathcal{K}^a - \frac{2}{M} \mathcal{K}^a D_a M \\
 &\quad + \left(K^{ab} L_{ab}^* - \frac{1}{2} K L^* - \frac{1}{2} K L^* + \frac{1}{2} K L^* \right) - \Pi^{(1+1+2)} \\
 &= -D_a \mathcal{K}^a - \frac{2}{M} \mathcal{K}^a D_a M + K^{ab} L_{ab}^* - L^* \mathcal{K} - \Pi^{(1+1+2)} , \tag{2.146}
 \end{aligned}$$

felhasználva a (2.41), (2.119), (2.121), (2.123), (2.133) és (2.134) összefüggéseket. A

(2.145) és (2.146) eredményekből a (2.101) impulzuskényszer kialakítása során a

$$\begin{aligned}
 J^{(2+1+1)} - B^{(2+1+1)} &= -D_a \mathcal{K}^a - \frac{2}{M} \mathcal{K}^a D_a M + K^{ab} L_{ab}^* \\
 &\quad - L^* \mathcal{K} + \frac{1}{M} [\partial_\chi K - M^b D_b K] + (\Pi)^{1+1+2} \\
 &= -\frac{1}{M} \{ M [L^* \mathcal{K} - K^{ab} L_{ab}^*] + M D_a \mathcal{K}^a + 2 \mathcal{K}^a D_a M \\
 &\quad - \partial_\chi K + M^b D_b K \} + \Pi^{(1+1+2)} ,
 \end{aligned}$$

amelyből

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_\mathcal{N} + 2\sqrt{g} M \Pi^{(1+1+2)} &= 2\sqrt{g} M (J^{(2+1+1)} - B^{(2+1+1)}) \\
 &= -2\sqrt{g} \{ M [L^* \mathcal{K} - K^{ab} L_{ab}^*] + M D_a \mathcal{K}^a + 2 \mathcal{K}^a D_a M \\
 &\quad - \partial_\chi K + M^b D_b K \} .
 \end{aligned} \tag{2.147}$$

A (2.147) alapján a (2.141) egyenlet akkor azonos a kiválasztott térszerű irány menti $\mathcal{H}_\mathcal{N}$ impulzus kényszerrel, ha $\Pi^{(1+1+2)} = 0$, ami teljesül $\Omega = 0 = \Omega^a$ esetén. Más megfeleltetések is tehetők, amelyeket nem részletezek, mert nem tartozik a dolgozat céljai közé.

2.4. Összefoglalás

A 2. fejezetben bemutattam a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontást. Ennek alapja a merőleges $s + 1 + 1$ dimenziós formalizmus, amely az ADM formalizmusban először bevezetett metrikus változók szerinti téridőfelbontást általánosítja [345], [346]. A merőleges $s + 1 + 1$ formalizmust az $s = 2$ választással alkalmazták gömbszimmetrikus, sztatikus téridő perturbációs egyenleteinek levezetéséhez [197]. A [197] folyóiratcikkben a gömbszimmetria miatt a vektorokat és a szimmetrikus tenzorokat egy Helmholtz-szerű felbontással rotációmentes (páros) és divergenciamentes (páratlan) részekre szeparálták. A perturbációs egyenletek ekkor szétcsatolódnak páros és páratlan szektorokra, ahol a páros szektor perturbációs egyenletei 8 darab változót tartalmaznak, míg a páratlan szektor perturbációs egyenletei 3 darabot. A perturbációs változók számának csökkentése érdekében mértékrögzítést hajtottak végre. A mértékrögzítés során 3 darab szabadsági fokot elhasználtak a radiális unitér mérték és a konformis mérték rögzítése érdekében. Az utolsó szabadsági fokot a fóliázó hiperfelületek merőlegességének megkövetelésére használták el, azonban ezzel a mértékrögzítés nem lett egyértelmű. Amennyiben a [197] folyóiratcikkben a fóliázás merőlegességét nem kell kiszabniuk a perturbáció után, akkor egyértelmű mértékrögzítést tudtak volna elérni.

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a 4-dimenziós $\mathcal{B}$ téridőt 3-dimenziós térszerű hiperfelületekkel (S_t) és 3-dimenziós időszerű hiprefelületekkel ($\mathfrak{M}_\chi$) bontottam fel, amelyek nem merőlegesek egymásra és metszetük a 2-dimenziós $\Sigma_{t\chi}$ felület. Az S_t hiperfelületeket a $t = \text{konst.}$, míg az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületeket a $\chi = \text{konst.}$ koordináták határozzák meg. Az S_t hiperfelületeken bevezettem az (n^a, m^a) módon elnevezett ortonormált bázist, majd az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületeken a (k^a, l^a) ortonormált bázist. Az (n^a, m^a) bázisban n^a az időszerű hiperfelület normális, m^a az arra merőleges térszerű bázisvektor. A (k^a, l^a) bázisban l^a a térszerű hiperfelület normális, és a k^a az arra merőleges időszerű bázisvektor. Dualitási relációkból kiderült, hogy az n^a , m^a és k^a , l^a vektorok közötti transzformáció egy Lorenz-forgatás, amelynek szöge arányos az $\mathcal{N}$ metrikus komponenssel. Az $\mathcal{N}$ egy 3-dimenziós shift vektor $2+1$ felbontásából származó függvény. A merőleges $s + 1 + 1$ formalizmusban a fóliázás merőlegességének megkövetelésekor az $\mathcal{N} = 0$ feltételt kellett választaniuk [345]. Az n^a , m^a , k^a , l^a vektorok kovariáns deriváltjainak felbontásaiból származtattam a $\Sigma_{t\chi}$ felület beágyazását jellemző külső görbületeket, normális fundamentális formákat és azokhoz hasonló mennyiségeket, továbbá a normális fundamentális skalárokat és a gyorsulásokat. Megállapítottam a hiperfelület-bázisok Lie-zárójeleinek számolásából, hogy az n^a és l^a normálisok 2-

és 3-dimenziós örvényei is eltűnnek. Az m^a és k^a bázisvektoroknak 2-dimenziós örvénye nincs, azonban van nem eltűnő 3-dimenziós örvény komponensük, emiatt nem hiperfelület merőlegesek. Az m^a és k^a vektorok normálisokkal párhuzamos örvényei miatt az $\mathcal{L}_a^*$ és $\mathcal{K}_a^*$ formák nem rendelkeznek a normális fundamentális formákra jellemző szimmetriával. A beágyazási változók és a metrikus változók közötti kapcsolatokat levezettem, és kialakítottam a 3. fejezetben használt beágyazási változókból képezett skalárokat.

A 2.1. alfejezetben a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontásban levezettem egy egyértelmű mértékrögzítést. A [197] folyóiratcikkhez hasonlóan radiális unitér és konformis mértéket választottam, azonban az utolsó szabadsági fok rögzítésekor a merőlegesség megtartása helyett a $\hat{P} = 0$ feltételt választottam.

A 2.2. alfejezetben a nemmerőleges $2+1+1$ formalizmus (n^a, m^a) bázisában tárgyaltam az általános relativitáselmélet hamiltoni formalizmusát. Származtattam a kétszer kontrahált Gauss-azonosságból a 4-dimenziós $\tilde{R}$ Ricci-skalár felbontását, majd megadtam az Einstein–Hilbert hatás nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontott alakját. Átírtam a Lagrange-sűrűséget Liouville-formába, amelyben azonosítottam a hamiltoni és impulzus kényszereket. A K_{ab} , $\mathcal{K}^a$, K beágyazási változók helyett bevezettem a π_{ab} , p^a , p kanonikus impulzusokat. A Poisson-zárójel és a simított Hamilton-sűrűség segítségével levezettem a kanonikus mozgásegyenleteket.

A 2.3. alfejezetben összehasonlítottam az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus kinematikai mennyiségeit a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ téridőfelbontásban definiált beágyazási változókkal. A mennyiségek kapcsolatainak származtatása után a [323] hivatkozásban bemutatott egyik propagációs egyenletet azonosítottam a 2.2. alfejezetben levezetett impulzus kényszerrel.

3. Gömbszimmetrikus, sztatikus megoldások nem minimálisan csatolt k -eszencia elméletben

Az 1.3. fejezetben bevezetett módosított gravitációelméletek közül, a továbbiakban a Horndeski-elméleten belüli gömbszimmetrikus és sztatikus megoldásokat fogom megvizsgálni EFT közelítésben. Ehhez a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmust fogom alkalmazni. A felbontást az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisban is be fogom mutatni, azonban a téridő megoldások levezetéséhez a (k^a, l^a) bázist fogom használni. A két bázisban habár az egyenletek eltérőek, viszont azonos információval rendelkeznek. A következő alfejezet számolásai az [353] folyóiratcikken alapulnak.

3.1. A Horndeski hatás nemmerőleges $2+1+1$ felbontása a (k^a, l^a) bázisban

A $\tilde{\nabla}_a \phi$ skalármező gradiens a továbbiakban a χ koordinátától függ. Ekkor a térszerű fóliázást a $\chi = \text{konst.}$ helyett $\phi = \text{konst.}$ határozza meg, így az $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelületre merőleges normálvektor az

$$l_a = \frac{\tilde{\nabla}_a \phi}{\sqrt{X}}, \quad (3.1)$$

ahol $X = \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi$ a kinetikus tag. A skalármező második kovariáns deriváltjának felbontása a (k^a, l^a) bázisban a

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi &= \tilde{\nabla}_a (l_b \sqrt{X}) = l_b \tilde{\nabla}_a (\sqrt{X}) + \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l_b \\ &= \frac{l_b}{2\sqrt{X}} \tilde{\nabla}_a (\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi) + \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l_b \\ &= \frac{l_b}{\sqrt{X}} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_c \phi + \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l_b = \frac{l_b}{\sqrt{X}} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c (\sqrt{X} l_a) + \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X}{2X} l_b l_a + \frac{l_b}{\sqrt{X}} \left(X \frac{\tilde{\nabla}^c \phi}{\sqrt{X}} \tilde{\nabla}_c l_a \right) + \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l_b \\
 &= \frac{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X}{2X} l_b l_a + \sqrt{X} l_b l^c \tilde{\nabla}_c l_a + \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l_b \\
 &= \frac{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X}{2X} l_a l_b + \sqrt{X} [L_{ab} + \mathcal{L} k_a k_b + 2\mathcal{K}^* l_{(a} k_{b)} \\
 &\quad + 2k_{(a} \mathcal{L}_{b)} - 2l_{(a} D_{b)} \ln(\mathfrak{c}M)] .
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

A (1.6)-(1.10) Horndeski Lagrange-sűrűségeket tekintve, az

$$L_3^H = G_3(\phi, X) \tilde{\square} \phi , \tag{3.3}$$

ahol

$$\tilde{\square} \phi = \frac{\tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a X}{2X} + \sqrt{X} (L - \mathcal{L}) \tag{3.4}$$

felhasználva a (3.2) egyenlet $\tilde{g}^{ab}$ inverz metrikával képezett spúrját. A [149] hivatkozás alapján G_3 függvény a

$$G_3(\phi, X) = F_3(\phi, X) + 2X F_{3X}(\phi, X) \tag{3.5}$$

alakját használtam. A (3.3) Lagrange-sűrűség az

$$\begin{aligned}
 L_3^H &= (F_3 + 2X F_{3X}) \tilde{\nabla}_a (l^a \sqrt{X}) \\
 &= 2X F_{3X} \sqrt{X} \tilde{\nabla}_a l^a + F_3 \tilde{\nabla}_a (l^a \sqrt{X}) + 2X F_{3X} l^a \tilde{\nabla}_a \sqrt{X} \\
 &= 2X^{3/2} F_{3X} (L - \mathcal{L}) + F_3 \tilde{\nabla}_a (l^a \sqrt{X}) + l^a \sqrt{X} (\tilde{\nabla}_a F_3 - \tilde{\nabla}_a \phi F_{3\phi}) \\
 &= 2X^{3/2} F_{3X} (L - \mathcal{L}) - X F_{3\phi} + \tilde{\nabla}_a (l^a \sqrt{X} F_3) ,
 \end{aligned}$$

amelyből az

$$L_3^{H+} = 2X^{3/2} F_{3X} (L - \mathcal{L}) - F_{3\phi} X , \tag{3.6}$$

ahol felhasználtam a (2.93), (3.1) és (3.4) összefüggéseket és elhagytam a teljes 4-es kovariáns deriváltat tartalmazó határtagot.

Az (1.10) L_4^H Lagrange-sűrűségben a 4-dimenziós $\tilde{R}$ Ricci-skalár található. A Ricci-skalár (k^a, l^a) bázisbeli felbontott alakja a (2.95), amelybe behelyettesítve a (2.41) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \tilde{R} &= R + K^{*ab} K_{ab}^* - L^{ab} L_{ab} + 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a - K^* (K^* + 2\mathcal{K}^*) \\
 &\quad + L (L - 2\mathcal{L}) + 2D^a \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M) \\
 &\quad - 2\tilde{\nabla}_a [D^a (\ln NM) - (K^* + \mathcal{K}^*) k^a + (L - \mathcal{L}) l^a] .
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Az (1.10) L_4^H Lagrange-sűrűség nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontásához az

$$\tilde{\nabla}_a X = \frac{l_a \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X}{\sqrt{X}} + 2X [D_a \ln(\mathfrak{c}M) + k_a \mathcal{K}^*] , \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\square}\phi)^2 &= \frac{1}{4X^2} \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a X \tilde{\nabla}^b \phi \tilde{\nabla}_b X + \frac{1}{\sqrt{X}} (L - \mathcal{L}) \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a X \\ &\quad + X (L - \mathcal{L})^2 , \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b \phi &= XL_{ab} L^{ab} - 2X \mathcal{L}_b \mathcal{L}^b + X \mathcal{L}^2 - 2X (\mathcal{K}^*)^2 \\ &\quad + 2X D^a \ln(\mathfrak{c}M) D_a \ln(\mathfrak{c}M) + \frac{(\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X)^2}{4X^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

összefüggéseket használtam fel, ekkor

$$\begin{aligned} L_4^H &= G_4(\phi, X) [R + K^{*ab} K_{ab}^* - L^{ab} L_{ab} + 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a - K^* (K^* + 2\mathcal{K}^*)] \\ &\quad + G_4(\phi, X) \left[L (L - 2\mathcal{L}) + 2D^a \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M) \right] \\ &\quad + G_4(\phi, X) \left[-2\tilde{\nabla}_a [D^a (\ln NM) - (K^* + \mathcal{K}^*) k^a + (L - \mathcal{L}) l^a] \right] \\ &\quad - 2G_{4X}(\phi, X) \left[\frac{1}{4X^2} \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a X \tilde{\nabla}^b \phi \tilde{\nabla}_b X + \frac{1}{\sqrt{X}} (L - \mathcal{L}) \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a X \right] \\ &\quad + 2G_{4X}(\phi, X) [XL_{ab} L^{ab} - 2X \mathcal{L}_b \mathcal{L}^b + X \mathcal{L}^2 - 2X (\mathcal{K}^*)^2 - X (L - \mathcal{L})^2] \\ &\quad + 2G_{4X}(\phi, X) \left[+2X D^a \ln(\mathfrak{c}M) D_a \ln(\mathfrak{c}M) + \frac{(\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X)^2}{4X^2} \right] \\ &= G_4(\phi, X) [R + K^{*ab} K_{ab}^* - L^{ab} L_{ab} + 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a - (K^*)^2 - 2K^* \mathcal{K}^* + L^2 \\ &\quad - 2L\mathcal{L} + 2D^a \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M)] + 2X G_{4X}(\phi, X) [L_{ab} L^{ab} - 2\mathcal{L}_a \mathcal{L}^a \\ &\quad + \mathcal{L}^2 - 2(\mathcal{K}^*)^2 - L^2 + 2L\mathcal{L} - \mathcal{L}^2 + 2D^a \ln(\mathfrak{c}M) D_a \ln(\mathfrak{c}M)] \\ &\quad - 2\tilde{\nabla}_a \{G_4(\phi, X) [D^a (\ln NM) - (K^* + \mathcal{K}^*) k^a + (L - \mathcal{L}) l^a]\} \\ &\quad - 2G_{4X}(\phi, X) \left[(L - \mathcal{L}) \frac{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X}{\sqrt{X}} \right] + 2\sqrt{X} G_{4\phi}(\phi, X) (L - \mathcal{L}) \\ &\quad + 2X G_{4X}(\phi, X) [2D^a (\ln NM) D_a \ln(\mathfrak{c}M) + 2K^* \mathcal{K}^* + 2(\mathcal{K}^*)^2] \\ &\quad + 2G_{4X}(\phi, X) (L - \mathcal{L}) \left(\frac{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X}{\sqrt{X}} \right) . \end{aligned}$$

Egyszerűsítések alkalmazásával

$$\begin{aligned}
 L_4^H = & G_4 (R + K^{*ab} K_{ab}^* - K^{*2}) + 2\sqrt{X} G_{4\phi}(\phi, X) [(L - \mathcal{L})] \\
 & - G_4 \left[L^{ab} L_{ab} - 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a - L^2 + 2L\mathcal{L} + 2K^* K^* - 2D^a \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M) \right] \\
 & + 2X G_{4X} [L_{ab} L^{ab} - 2\mathcal{L}^a \mathcal{L}_a - L^2 + 2\mathcal{L}L + 2K^* K^*] \\
 & + 2X G_{4X} \left[-2D^a \ln \left(\frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M) \right] \\
 & - 2\tilde{\nabla}_a \{ G_4 [D^a (\ln NM) - (K^* + K^*) k^a + (L - \mathcal{L}) l^a] \} .
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

A beágyazási változókból képezett (2.43) és (2.44) skalárok behelyettesítése után a (3.11) kifejezés az

$$\begin{aligned}
 L_4^{H+} = & G_4 (R + \varkappa^* - K^{*2}) + 2\sqrt{X} G_{4\phi} (L - \mathcal{L}) \\
 & - (G_4 - 2X G_{4X}) [\lambda - 2\mathfrak{k} + 2K^* K^* - L^2 + 2L\mathcal{L}] \\
 & + 2(G_4 - 2X G_{4X}) \left[\left(D^a \ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M) \right]
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

alakra egyszerűsödik, ahol a (3.11) utolsó sorában lévő határtagot elhagytam.

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban a Horndeski Lagrange-sűrűség ($G_5 = 0$) függ az $\mathcal{N}$, N , M metrikus változóktól, a

$$K^*, \mathfrak{k}, K^*, \varkappa^*, \mathcal{L}, L, \lambda \tag{3.13}$$

beágyazási változókból képezett skalároktól, továbbá nem explicit módon a $G_2(\phi, X)$, $F_3(\phi, X)$, $G_4(\phi, X)$ tetszőleges függvényeken és az X kinetikus tagon keresztül a ϕ skalármezőtől is.

Az X kinetikus tag függése megadható a [345] hivatkozásban bemutatott (B3) inverz metrika koordináta bázisbeli alakjával. Radiális unitér mértékben a $\phi = \phi(\chi)$, ezért csak a $\tilde{g}^{\chi\chi} = (N^2 - \mathcal{N}^2) / N^2 M^2 = (\mathfrak{c}M)^{-2}$ inverz metrika komponens ad nem nulla eredményt, amely szerint az

$$X = \tilde{g}^{\chi\chi} (\partial_\chi \phi)^2 = \left(\frac{\partial_\chi \phi}{\mathfrak{c}M} \right)^2 . \tag{3.14}$$

A 2-dimenziós g_{ab} indukált metrikával definiált 2-dimenziós Ricci-skalár, mint változó, szintén megjelenik a Horndeski Lagrange-sűrűségben. Konformis mértékben az R az (1.22), (1.65)-(1.67) összefüggésekben bevezetett ζ konformis faktortól függ [233]. Két 2-dimenziós inverz metrika között a konformis transzformáció a

$$g^{ab} = e^{-2\zeta} \bar{g}^{ab} ,$$

ekkor a 2-dimenziós Ricci skalár transzformációja az

$$R = e^{-2\zeta} \{ \bar{R} - 2\bar{g}^{ab} \bar{D}_a \bar{D}_b (\ln e^\zeta) \} . \quad (3.15)$$

A (3.15) alapján az R a ζ -t tartalmazza, mint független változót.

Ezek alapján a Horndeski Lagrange-sűrűség a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontás (k^a, l^a) bázisában az

$$\mathcal{N}, N, M, \mathcal{K}^*, \mathfrak{k}, K^*, \mathfrak{x}^*, \mathcal{L}, L, \lambda, \zeta, \phi \quad (3.16)$$

változóktól függ radiális unitér és konformis mértékben.

3.2. A Horndeski hatás nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontása az (n^a, m^a) bázisban

Az (1.10) Lagrange sűrűség (n^a, m^a) bázisbeli nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontásához felhasználtam a (3.1), (3.2), (3.4), (3.7)-(3.10) összefüggések (n^a, m^a) bázisbeli alakjait, amelyek a következők:

$$\frac{\tilde{\nabla}_a \phi}{\sqrt{X}} = (\mathfrak{s} n_a + \mathfrak{c} m_a) , \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi = & \mathfrak{s} \sqrt{X} (K_{ab} + 2m_{(a} \mathcal{K}_{b)} + m_a m_b \mathcal{K} - n_a \mathfrak{a}_b + n_a m_b \mathcal{L}^*) \\ & + \mathfrak{c} \sqrt{X} (L_{ab}^* + n_a \mathcal{L}_b^* + n_b \mathcal{K}_a + n_a n_b \mathcal{L}^* + m_a \mathfrak{b}_b^* + m_a n_b \mathcal{K}) \\ & + \sqrt{X} n_b \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + \sqrt{X} m_b \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} + \frac{1}{2X} (\mathfrak{s} n_a + \mathfrak{c} m_a) (\mathfrak{s} n_b + \mathfrak{c} m_b) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \\ & + \sqrt{X} (\mathfrak{s} n_b + \mathfrak{c} m_b) [\mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{s}^2 D_a (\ln N) - \mathfrak{c}^2 D_a (\ln M)] \\ & + \sqrt{X} n_a (\mathfrak{s} n_b + \mathfrak{c} m_b) (\mathfrak{s} n^c + \mathfrak{c} m^c) \tilde{\nabla}_c \mathfrak{s} \\ & + \sqrt{X} m_a (\mathfrak{s} n_b + \mathfrak{c} m_b) (\mathfrak{s} n^c + \mathfrak{c} m^c) \tilde{\nabla}_c \mathfrak{c} \\ & + \sqrt{X} (\mathfrak{c} n_a + \mathfrak{s} m_a) (\mathfrak{s} n_b + \mathfrak{c} m_b) (\mathfrak{c} \mathcal{K} - \mathfrak{s} \mathcal{L}^*) , \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\square} \phi = & \frac{1}{2X} \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a X + \sqrt{X} [\mathfrak{s} (K + \mathcal{K}) + \mathfrak{c} (L^* - \mathcal{L}^*) \\ & + \mathfrak{c}^2 (\mathfrak{c} n^a + \mathfrak{s} m^a) \tilde{\nabla}_a \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}}] , \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_a X &= \left[\mathfrak{s} \left(\sqrt{X} \right)^{-1} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X + 2X \mathfrak{c} (-\mathfrak{s} \mathcal{L}^* + \mathfrak{c} \mathcal{K}) \right] n_a \\ &+ \left[2X \mathfrak{s} \mathfrak{c}^2 (\mathfrak{s} n^c + \mathfrak{c} m^c) \left(\tilde{\nabla}_c \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_c \ln N \right) \right] n_a \\ &+ \left[\mathfrak{c} \left(\sqrt{X} \right)^{-1} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X + 2X \mathfrak{s} (\mathfrak{c} \mathcal{K} - \mathfrak{s} \mathcal{L}^*) \right] m_a \\ &+ \left[2X \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c} (\mathfrak{s} n^c + \mathfrak{c} m^c) \left(\tilde{\nabla}_c \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_c \ln N \right) \right] m_a \\ &+ 2X \left[\mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + \mathfrak{s}^2 D_a (\ln N) - \mathfrak{c}^2 D_a (\ln M) \right] ,\end{aligned}\quad (3.21)$$

$$(\square \phi)^2 = \mathfrak{s}^2 X (K + \mathcal{K})^2 + 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} X (L^* - \mathcal{L}^*) (K + \mathcal{K}) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}&+ \mathfrak{c}^2 X (L^* - \mathcal{L}^*)^2 + 2\mathfrak{s} X (K + \mathcal{K}) \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right) \\ &+ 2\mathfrak{c} X (L^* - \mathcal{L}^*) \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right) + \frac{1}{4X^2} \left(\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \right)^2 \\ &+ \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{X}} (K + \mathcal{K}) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X + \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{X}} (L^* - \mathcal{L}^*) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \\ &+ \left(\sqrt{X} \right)^{-1} \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \\ &+ X \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right)^2 ,\end{aligned}\quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi \tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b \phi &= \mathfrak{s}^2 X K_{ab} K^{ab} + 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} X L_{ab}^* K^{ab} + \mathfrak{c}^2 X L_{ab}^* L^{*ab} - \mathfrak{s}^2 X \mathfrak{a}_a \mathfrak{a}^a \\ &+ \mathfrak{c}^2 X \mathfrak{b}_a^* \mathfrak{b}^{*a} - \mathfrak{c}^2 X \mathcal{L}_a^* \mathcal{L}^{*a} - (1 - \mathfrak{s}^2) X \mathcal{K}_a \mathcal{K}^a + 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} X \mathfrak{b}_a^* \mathcal{K}^a \\ &+ 2\mathfrak{c} \mathfrak{s} X \mathcal{L}_a^* \mathfrak{a}^a + X \left[\mathfrak{s} \mathfrak{c} (\mathcal{K}^a - \mathcal{L}^{*a}) + \mathfrak{s}^2 D^a (\ln N) - \mathfrak{c}^2 D^a (\ln M) \right]^2 \\ &- 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} X \mathcal{K}^a (D_a \ln \mathcal{N} - D_a \ln N) - (1 + \mathfrak{c}^2) X \mathcal{K}^2 + (1 - \mathfrak{s}^2) X (\mathcal{L}^*)^2 \\ &+ 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} X \mathcal{K} \mathcal{L}^* - 2\mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 X \mathcal{K} n^a \left(\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N \right) + \frac{1}{4X^2} \left(\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \right)^2 \\ &- \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 X \left[(\mathfrak{s} n^a + \mathfrak{c} m^a) \left(\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N \right) \right]^2 \\ &- 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} (1 + \mathfrak{c}^2) X \mathcal{K} m^a \left(\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N \right) \\ &- 2\mathfrak{s} \mathfrak{c} (1 - \mathfrak{s}^2) X \mathcal{L}^* n^a \left(\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N \right) \\ &+ 2\mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 X \mathcal{L}^* m^a \left(\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N \right) \\ &- \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 X \left(\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N \right)^2 .\end{aligned}\quad (3.24)$$

Az (1.10) Lagrange-sűrűség felbontásához a 4-dimenziós Ricci skalár (2.94) (n^a, m^a) bázisbeli alakját használtam fel. Az (1.10) Lagrange-sűrűség következő részeit a kezelhetőség kedvéért külön számoltam a felbontás elvégzése során, ezek a

$$E = -2G_4(\phi, X) \left\{ \tilde{\nabla}_a [\mathfrak{a}^a - \mathfrak{b}^{*a} - n^a (K + \mathcal{K}) + m^a (L^* - \mathcal{L}^*)] \right\} , \quad (3.25)$$

$$U = (\square \phi)^2 - \left[\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \phi \right] \left[\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b \phi \right] . \quad (3.26)$$

A (3.25) (n^a, m^a) bázisbeli felbontása a

$$\begin{aligned}
 E = & -2\tilde{\nabla}_a \{G_4(\phi, X) [\mathfrak{a}^a - \mathfrak{b}^{*a} - n^a (K + \mathcal{K}) + m^a (L^* - \mathcal{L}^*)]\} \\
 & + 2\mathfrak{s}\sqrt{X}G_{4\phi}(\mathcal{K} + K) + 2\mathfrak{c}\sqrt{X}G_{4\phi}(L^* - \mathcal{L}^*) \\
 & + 2G_{4X} \left\{ \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{X}} (\mathcal{K} + K) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X + \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{X}} (L^* - \mathcal{L}^*) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \right. \\
 & + 2X\mathfrak{c} (\mathfrak{c}\mathcal{K}^2 - \mathfrak{s}\mathcal{K}\mathcal{L}^* + \mathfrak{c}K\mathcal{K} - \mathfrak{s}K\mathcal{L}^*) + 2X\mathfrak{s} (L^* - \mathcal{L}^*) (\mathfrak{c}\mathcal{K} - \mathfrak{s}\mathcal{L}^*) \\
 & + 2X\mathfrak{s}\mathfrak{c} (\mathfrak{a}^a - \mathfrak{b}^{*a}) (\mathcal{K}_a - \mathcal{L}_a^*) + 2X\mathfrak{s}^2 (\mathfrak{a}^a - \mathfrak{b}^{*a}) D_a (\ln N) \\
 & + 2X\mathfrak{s}\mathfrak{c}^2 (\mathcal{K} + K) (\mathfrak{s}n^c + \mathfrak{c}m^c) (\tilde{\nabla}_c \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_c \ln N) \\
 & + 2X\mathfrak{s}^2\mathfrak{c} (L^* - \mathcal{L}^*) (\mathfrak{s}n^c + \mathfrak{c}m^c) (\tilde{\nabla}_c \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_c \ln N) \\
 & \left. - 2X\mathfrak{c}^2 (\mathfrak{a}^a - \mathfrak{b}^{*a}) D_a (\ln M) \right\} .
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

A (3.26) felbontása az (n^a, m^a) bázisban az

$$\begin{aligned}
 U = & \mathfrak{s}^2 X (K + \mathcal{K})^2 + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X (L^* - \mathcal{L}^*) (K + \mathcal{K}) + \mathfrak{c}^2 X (L^* - \mathcal{L}^*)^2 \\
 & + 2\mathfrak{s} X (K + \mathcal{K}) \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right) + 2\mathfrak{c} X (L^* - \mathcal{L}^*) \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right) \\
 & + \frac{1}{\sqrt{X}} \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X + \frac{\mathfrak{s}}{\sqrt{X}} (K + \mathcal{K}) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X \\
 & + \frac{\mathfrak{c}}{\sqrt{X}} (L^* - \mathcal{L}^*) \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c X - \mathfrak{s}^2 X K_{ab} K^{ab} - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X L_{ab}^* K^{ab} - \mathfrak{c}^2 X L_{ab}^* L^{*ab} \\
 & + \mathfrak{s}^2 X \mathfrak{a}_a \mathfrak{a}^a - \mathfrak{c}^2 X \mathfrak{b}_a^* \mathfrak{b}^{*a} + \mathfrak{c}^2 X \mathcal{L}_a^* \mathcal{L}^{*a} + (1 - \mathfrak{s}^2) X \mathcal{K}_a \mathcal{K}^a - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X \mathfrak{b}_a^* \mathcal{K}^a \\
 & - 2\mathfrak{c}\mathfrak{s} X \mathcal{L}_a^* \mathfrak{a}^a + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X \mathcal{K}^a (D_a \ln \mathcal{N} - D_a \ln N) + X \left(n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} + m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \right)^2 \\
 & - X [\mathfrak{s}\mathfrak{c} (\mathcal{K}^a - \mathcal{L}^{*a}) + \mathfrak{s}^2 D^a (\ln N) - \mathfrak{c}^2 D^a (\ln M)]^2 - 2\mathfrak{c} X \mathcal{L}^* m^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} \\
 & + (1 + \mathfrak{c}^2) X \mathcal{K}^2 - (1 - \mathfrak{s}^2) X (\mathcal{L}^*)^2 - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X \mathcal{K} \mathcal{L}^* + 2\mathfrak{s} X \mathcal{K} n^a \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} \\
 & + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X \mathcal{K} m^a (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N) + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c} X \mathcal{L}^* n^a (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N) \\
 & + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}^3 X \mathcal{K} m^a (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N) - 2\mathfrak{s}^3 \mathfrak{c} X \mathcal{L}^* n^a (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N) \\
 & + \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 X \left[(\mathfrak{s}n^a + \mathfrak{c}m^a) (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N) \right]^2 \\
 & + \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 X (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N)^2 .
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

A (3.27) és (3.28) részek számolása során a teljes 4-es kovariáns deriváltakat elhagytam, továbbá a (2.41), (2.43), (2.44) összefüggéseket és az

$$\begin{aligned}
 1 &= (\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{s}^2)^2 = \mathfrak{c}^4 - 2\mathfrak{s}^2 \mathfrak{c}^2 + \mathfrak{s}^4 , \\
 \tilde{\nabla}_a \mathfrak{s} &= \mathfrak{c}^3 \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \right) = \mathfrak{s}\mathfrak{c}^2 (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N) , \\
 \tilde{\nabla}_a \mathfrak{c} &= \mathfrak{s}\mathfrak{c}^2 \tilde{\nabla}_a \left(\frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \right) = \mathfrak{s}^2 \mathfrak{c} (\tilde{\nabla}_a \ln \mathcal{N} - \tilde{\nabla}_a \ln N)
 \end{aligned}$$

kifejezéseket használtam. A (3.27) és (3.28) részekkel az (1.10) Horndeski Lagrange-sűrűség nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontására az

$$\begin{aligned}
 L_4^{\text{H}^+}(n^a, m^a) = & G_4 [R + K_{ab}K^{ab} - L_{ab}^*L^{*ab} - K^2 + (L^*)^2] \\
 & + 2\sqrt{X}G_{4\phi} \left[\mathfrak{s}(K + \mathcal{K}) + \mathfrak{c}(L^* - \mathcal{L}^*) + \mathfrak{c}^2(\mathfrak{c}n^a + \mathfrak{s}m^a) \tilde{\nabla}_a \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \right] \\
 & - (G_4 - 2XG_{4X}) \left\{ 2K\mathcal{K} + 2L^*\mathcal{L}^* - 2 \left(\mathcal{K}^a + \mathfrak{c}^2 D_a \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \right) \left(\mathcal{K}_a + \mathfrak{c}^2 D_a \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \right) \right. \\
 & + 2\mathfrak{c}^2 \left[(\mathfrak{c}K + \mathfrak{s}L^*)(\mathfrak{s}n^a + \mathfrak{c}m^a) \tilde{\nabla}_a \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} - (\mathfrak{c}L^* + \mathfrak{s}K)(\mathfrak{c}n^a + \mathfrak{s}m^a) \right] \tilde{\nabla}_a \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{c}} \\
 & \left. - D^a \left(\ln \frac{N}{\mathfrak{c}} \right) D_a \ln(\mathfrak{c}M) \right\} + 2XG_{4X} [\mathfrak{s}^2 K_{ab}K^{ab} + \mathfrak{c}^2 L_{ab}^*L^{*ab} \\
 & - \mathfrak{s}^2 K^2 - \mathfrak{c}^2 (L^*)^2 + 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}L_{ab}^*K^{ab} - 2\mathfrak{s}\mathfrak{c}L^*K]
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

eredményt kaptam az (n^a, m^a) bázisban.

Az (n^a, m^a) bázisban felírt Lagrange-sűrűség a (3.29) egyenlet szerinti alakja alapján az M , K , $\mathcal{K}$, L^* , $\mathcal{L}^*$ változóktól, az $\mathfrak{s}$ és $\mathfrak{c}$ függvényeken keresztül az N , $\mathcal{N}$ metrikus változóktól, az R Ricci-skaláron keresztül a ζ konformis faktortól függ, továbbá a K_{ab} , L_{ab}^* , $\mathcal{K}_a$ beágyazási változókból képezett $\mathfrak{K}$, λ^* , $\mathfrak{K}$ skalároktól. A (2.42) összefüggésekből az

$$\mathcal{L}_a^* = \mathcal{K}_a + \frac{M}{N} D_a \left(\frac{\mathcal{N}}{M} \right),$$

tehát az $\mathcal{L}_a^*$ formából képezett $\mathcal{L}_a^* \mathcal{L}^{*a}$ skalár nem független változó a (3.29) felbontott Lagrange-sűrűségben, ezért bevezetése nem szükséges.

3.3. Az EFT hatás első rendű variációja, a mezőegyenletek

Az (1.8), (3.6) és (3.12) Horndeski Lagrange-sűrűségek nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontott alakjai a (3.16)-ban felsorolt változóktól függnnek. Emiatt a mezőegyenletek származtatása során a (3.16) változóktól funkcionálisan függő EFT hatásból indultam ki. A továbbiakban a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus (k^a, l^a) bázisában vezetem le az EFT hatás variációját, azonban a 3.3.3. alfejezet után bemutatom a kapott mezőegyenleteket az (n^a, m^a) bázisban is.

3.3.1. Az EFT hatás változói a gömbszimmetrikus és sztatikus háttéren

Az ívelemnégyszet alakja a t, r, θ, φ Schwarzschild koordinátákban a

$$ds^2 = -\bar{N}^2 dt^2 + \bar{M}^2 dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (3.30)$$

ahol $-\infty < t < \infty$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A felülvonás jelöli a változók háttértéridőn vett értékét. A háttéren

$$\bar{N}^a = \bar{M}^a = \bar{\mathcal{N}} = \bar{\mathfrak{s}} = 0 , \quad \bar{\mathfrak{c}} = 1 , \quad (3.31)$$

valamint

$$\begin{aligned} \bar{n}_a &= \bar{k}_a = (-\bar{N}, 0, 0, 0) , \\ \bar{m}_a &= \bar{l}_a = (0, \bar{M}, 0, 0) . \end{aligned} \quad (3.32)$$

A kialakított (3.13) skalárok egy része a háttéren eltűnik a definíciójukból következően, így

$$\bar{\mathcal{K}}^* = \bar{\mathfrak{k}} = \bar{K}^* = \bar{\mathfrak{x}}^* = 0 . \quad (3.33)$$

Nem eltűnő skalárok az

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{L}} &= -\frac{\partial_r \bar{N}}{\bar{M}\bar{N}} , \\ \bar{L} &= \frac{1}{2\bar{M}} \bar{g}^{ab} \partial_r \bar{g}_{ab} = \frac{2}{\bar{M}r} , \\ \bar{\lambda} &= \frac{2}{\bar{M}^2 r^2} , \end{aligned} \quad (3.34)$$

továbbá az

$$\bar{L}_{ab} = \frac{1}{2\bar{M}} \partial_r \bar{g}_{ab} = \frac{1}{2} \bar{L} \bar{g}_{ab} . \quad (3.35)$$

A 2-dimenziós indukált metrika gömbszimmetria és sztatikusság esetén

$$\bar{g}_{ab} = r^2 \text{diag} (1, \sin^2 \theta) . \quad (3.36)$$

Az egység gömbön vett konformis faktor $\bar{\zeta} = \ln r$. A 2-dimenziós Ricci-skalár az

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \bar{g}^{ab} \bar{R}_{ab} = \bar{g}^{\theta\theta} \bar{R}_{\theta\theta} + \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{R}_{\varphi\varphi} + \bar{g}^{\theta\varphi} \bar{R}_{\theta\varphi} \\ &= \bar{g}^{\theta\theta} \bar{R}_{\theta\theta} + \bar{g}^{\varphi\varphi} \bar{R}_{\varphi\varphi} \\ &= \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \frac{2}{r^2} , \end{aligned} \quad (3.37)$$

amely az alábbiakból következik:

$$\begin{aligned} R_{bd} &= R_{bad} = \partial_a \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{ab}^a + \Gamma_{ia}^a \Gamma_{bd}^i - \Gamma_{id}^a \Gamma_{ba}^i , \\ \bar{R}_{\theta\theta} &= \partial_a \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^a - \partial_\theta \bar{\Gamma}_{a\theta}^a + \bar{\Gamma}_{ia}^a \bar{\Gamma}_{\theta\theta}^i - \bar{\Gamma}_{i\theta}^a \bar{\Gamma}_{\theta a}^i \\ &= -\partial_\theta \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^\varphi - \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^\varphi \bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^\varphi = -\partial_\theta \cot \theta - \cot^2 \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 1 , \\ \bar{R}_{\varphi\varphi} &= \partial_\theta \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\theta - \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^\varphi \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\theta = -\partial_\theta (\sin \theta \cos \theta) + \cot \theta \sin \theta \cos \theta \\ &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (3.38)$$

és

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\theta &= -\frac{1}{2} \bar{g}^{\theta\theta} \partial_r \bar{g}_{\theta\theta} = -\sin \theta \cos \theta , \\ \bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^\varphi &= \bar{\Gamma}_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{1}{2} \bar{g}^{\varphi\varphi} \partial_\theta \bar{g}_{\varphi\varphi} = \cot \theta . \end{aligned} \quad (3.39)$$

3.3.2. Az EFT hatás elsőrendű variációja

Formálisan a hatás első rendű variációja a

$$\delta S = \int d^4 x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{\overline{\delta S}}{\delta G_A} \delta G_A , \quad (3.40)$$

ahol G_A egy tetszőleges függvény, $\overline{\delta S / \delta G_A}$ a hatás G_A szerinti funkcionális deriváltja a háttéren kiértékelve. A (3.40)-ből és az extrémális hatás elvéből következik az

$$\sqrt{-\tilde{g}} \frac{\overline{\delta S}}{\delta G_A} = \frac{\partial (\sqrt{-\tilde{g}} L)}{\partial G_A} - \partial_a \frac{\partial (\sqrt{-\tilde{g}} L)}{\partial (\partial_a G_A)} \quad (3.41)$$

Euler–Lagrange egyenlet. Amennyiben $\overline{\sqrt{-\tilde{g}}}$ nem függ egyetlen változó deriváltjaitól sem, akkor

$$\frac{1}{\overline{\sqrt{-\tilde{g}}}} \partial_a \overline{\frac{\partial(\sqrt{-\tilde{g}}L)}{\partial(\partial_a G_A)}} = \frac{1}{\overline{\sqrt{-\tilde{g}}}} \partial_a \left(\overline{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\partial L}{\partial(\partial_a G_A)} \right) = \overline{\tilde{\nabla}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_a G_A)}} . \quad (3.42)$$

Ezt felhasználva a (3.41) egyenlet az alábbivá válik:

$$\frac{\overline{\delta S}}{\delta G_A} = \frac{\overline{\partial L}}{\partial G_A} - \overline{\tilde{\nabla}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_a G_A)}} + \overline{\tilde{L} \frac{\partial \ln \sqrt{-\tilde{g}}}{\partial G_A}} . \quad (3.43)$$

A (3.40) hatás elsőrendű variációja

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(\delta L + L \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \quad (3.44)$$

alakú lesz, ahol egy teljes divergencia elhagyásával

$$\delta L = \left(\frac{\overline{\partial L}}{\partial G_A} - \overline{\tilde{\nabla}_a \frac{\partial L}{\partial(\partial_a G_A)}} \right) \delta G_A \quad (3.45)$$

és

$$\delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} = \frac{\overline{\partial(\ln \sqrt{-\tilde{g}})}}{\partial G_A} \delta G_A . \quad (3.46)$$

Mivel a háttér mennyiségek csak az r radiális koordinátától függnnek, a (3.45) egyenlet egyszerűsíthető a

$$\delta L = \left(\frac{\overline{\partial L}}{\partial G_A} - \overline{\tilde{\nabla}_r \frac{\partial L}{\partial(\partial_r G_A)}} \right) \delta G_A \quad (3.47)$$

alakra.

3.3.3. Az EFT mezőegyenletek

Konformis mértéket választottam, ekkor

$$g_{ab} = e^{2\zeta} \bar{g}_{ab} , \quad (3.48)$$

azaz a 2-dimenziós indukált metrika perturbációja a

$$\begin{aligned} \delta g_{ab} &= g_{ab} - \bar{g}_{ab} = (e^{2\zeta} - 1) \bar{g}_{ab} \\ &= (1 + 2\zeta - 1) \bar{g}_{ab} \\ &= 2\zeta \bar{g}_{ab} . \end{aligned}$$

Konformis mértékben a 4-dimenziós metrika determinánsának az elsőrendű variációja a

$$\delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} = 2\delta\zeta + \delta \ln N + \delta \ln M , \quad (3.49)$$

míg a 2-dimenziós Ricci-skalárnak a

$$\delta R = R - \bar{R} = -2\bar{R}\delta\zeta - 2\bar{g}^{ab}\bar{D}_a\bar{D}_b\delta\zeta , \quad (3.50)$$

ahol felhasználtam a (3.15) összefüggést [233].

Az (1.8), (3.6), (3.12), (3.49) és (3.50) egyenletek alapján, valamint a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontott Horndeski Lagrange-sűrűség (3.16) változók szerinti függését tekintve, az EFT hatás funkcionális függése:

$$S^{EFT}[\mathcal{N}, N, M, \mathcal{K}^*, \mathfrak{k}, K^*, \mathfrak{x}^*, \mathcal{L}, L, \lambda, \zeta, \phi] . \quad (3.51)$$

A [197] hivatkozás (3.1) egyenletével összehasonlítva a (3.51) EFT hatást, az $\mathfrak{M} = M^a M_a$ skalár függése hiányzik. A (3.51) hatásban ez a változó nincs külön bevezetve, mivel az (1.8), (3.6), (3.12) Horndeski Lagrange-sűrűségekben az $\mathfrak{k}$ skalár tartalmazza az $\mathfrak{M}$ -et. A [197] folyóiratcikk (3.1) egyenletében nem szerepel az $\mathcal{N}$, mivel a merőleges $2+1+1$ formalizmusban az $\mathcal{N} = 0$ feltételt szükséges volt megválasztaniuk. A merőleges $2 + 1 + 1$ dimenziós téridőfelbontásban az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisok egybeesnek, ezért nem használnak „*” jelölést a mennyiségek megnevezésében.

Az $\mathfrak{k}$ és $\mathfrak{x}^*$ skalárok a (2.43) és (2.44) definíciók alapján másodrendűek. A (3.14) kinetikus tag miatt az (1.8), (3.6) és (3.12) Horndeski Lagrange-sűrűségekben $\phi' = \partial_r \phi$, M - illetve $\mathcal{N}$ -függő tagok fognak megjelenni a variációszámításkor. A (3.12) Lagrange-sűrűségnek csak a $-2(D^a \ln \frac{N}{c}) D_a \ln(cM)$ tagja tartalmazza explicite a változók deriváltjait, azonban ez a tag másodrendű. Ezeket figyelembe véve az EFT Lagrange-sűrűség függése az

$$L^{EFT}(\mathcal{N}, N, M, \mathcal{K}^*, K^*, \mathcal{L}, L, \lambda, R, \phi, \phi') \quad (3.52)$$

alakra egyszerűsödik, ahol a (3.50) összefüggésből származó ζ függés később lesz figyelembe véve.

Az EFT Lagrange-sűrűség variációja a

$$\begin{aligned} \delta L^{EFT} = & L_{\mathcal{N}}^{EFT} \delta \mathcal{N} + L_N^{EFT} \delta N + L_M^{EFT} \delta M \\ & + L_{\mathcal{K}^*}^{EFT} \delta \mathcal{K}^* + L_{K^*}^{EFT} \delta K^* + L_{\mathcal{L}}^{EFT} \delta \mathcal{L} \\ & + L_L^{EFT} \delta L + L_{\lambda}^{EFT} \delta \lambda + L_R^{EFT} \delta R + L_{\phi}^{EFT} \delta \phi . \end{aligned} \quad (3.53)$$

Itt a $G_A = \{\mathcal{N}, N, M, \mathcal{K}^*, K^*, \mathcal{L}, L, \lambda, R\}$ változó esetén

$$L_{G_A}^{EFT} = \frac{\partial(L^{EFT})}{\partial G_A} , \quad (3.54)$$

valamint

$$L_\phi^{EFT} = \frac{\overline{\partial(L^{EFT})}}{\partial\phi} - \frac{1}{\sqrt{-\tilde{g}}} \partial_r \left(\sqrt{-\tilde{g}} \frac{\partial(L^{EFT})}{\partial\phi'} \right) , \quad (3.55)$$

figyelembe véve a (3.47), (3.52) egyenleteket.

A (2.43), (3.34) és (3.35) egyenletekből a

$$\delta\lambda = \frac{2}{\overline{M}r} \delta L , \quad (3.56)$$

így

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} (L_L^{EFT} \delta L + L_\lambda^{EFT} \delta\lambda) &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(L_L^{EFT} + \frac{2}{\overline{M}r} L_\lambda^{EFT} \right) \delta L \\ &= \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \bar{N} \mathcal{F} \delta L , \end{aligned} \quad (3.57)$$

ahol

$$\mathcal{F} = L_L^{EFT} + \frac{2}{\overline{M}r} L_\lambda^{EFT} . \quad (3.58)$$

A (2.11) és (3.34) egyenletekből a δL -re következik, hogy

$$\begin{aligned} L - \mathcal{L} &= \tilde{\nabla}_a l^a , \\ \delta L + \bar{L} - \bar{\mathcal{L}} - \delta\mathcal{L} &= \tilde{\nabla}_a l^a , \\ \delta L &= \tilde{\nabla}_a l^a - \bar{L} + \bar{\mathcal{L}} + \delta\mathcal{L} , \\ \delta L &= \left[\tilde{\nabla}_a l^a - \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} - \frac{2}{\overline{M}r} \right] + \delta\mathcal{L} . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Bármely G_A skalár esetén és felhasználva a (2.5)-(2.6) egyenleteket kapjuk, hogy

$$l^a \tilde{\nabla}_a G_A = \left[\frac{\mathfrak{s}}{\bar{N}} \partial_t + \frac{1}{\mathfrak{c}\bar{M}} \partial_r - \left(\frac{1}{\mathfrak{c}\bar{M}} M^a + \frac{\mathfrak{s}}{\bar{N}} N^a \right) D_a \right] G_A , \quad (3.60)$$

amelyből

$$l^a \tilde{\nabla}_a \mathcal{F}(r) = \frac{1}{\mathfrak{c}\bar{M}} \partial_r \mathcal{F} . \quad (3.61)$$

A $\mathfrak{c}$ Taylor-sorából kapjuk, hogy

$$\mathfrak{c} = \cosh \psi = 1 + \frac{\psi^2}{2} + O(\psi^4) ,$$

azaz $\mathfrak{c}$ csak másodrendű járulékot ad. A (3.59) és (3.61) összefüggéseket, továbbá felhasználva az

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{M} + \delta\bar{M}} &= \frac{1}{\bar{M}} \left(1 - \frac{\delta\bar{M}}{\bar{M}} \right) , \\ \sqrt{\tilde{g}} &= r^2 \sin \theta \end{aligned} \quad (3.62)$$

kifejezéseket, a (3.57) egyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{F} \delta L &= \int d^4x \left[\sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \bar{N} \tilde{\nabla}_a (\mathcal{F} l^a) - \partial_r (\sqrt{\tilde{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \right] \\ &+ \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \bar{N} \left(\frac{\partial_r \mathcal{F}}{\bar{M}^2} \delta M + \mathcal{F} \delta \mathcal{L} \right). \end{aligned} \quad (3.63)$$

A (3.32) összefüggések és a

$$\begin{aligned} \sqrt{-\tilde{g}} &= \sqrt{-\tilde{g}} \left(1 - \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right), \\ \tilde{\nabla}_a \bar{l}^a &= \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) \end{aligned}$$

miatt a (3.63) tag átírható egy teljes 4-es kovariáns derivált, továbbá a δM , $\delta \mathcal{L}$, $\delta \ln \sqrt{-\tilde{g}}$ variációkat tartalmazó tagok összegévé:

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \mathcal{F} \delta L &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left(\mathcal{F} \bar{l}^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right) \\ &+ \int d^4x \sqrt{\tilde{g}} \bar{M} \bar{N} \left(\frac{\partial_r \mathcal{F}}{\bar{M}^2} \delta M + \mathcal{F} \delta \mathcal{L} \right) \\ &- \int d^4x \partial_r (\sqrt{\tilde{g}} \bar{N} \mathcal{F}) \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

A (2.40)-ben felsorolt összefüggések alapján a

$$\delta \mathcal{L} = -\frac{\partial_t \delta \mathcal{N}}{\bar{N}^2} - \frac{\partial_r \delta N}{\bar{M} \bar{N}} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M} \bar{N}} \left(\frac{\delta N}{\bar{N}} + \frac{\delta M}{\bar{M}} \right). \quad (3.65)$$

A δK^* és $\delta \mathcal{K}^*$ variációi kapcsolatba hozhatók egymással úgy, hogy

$$\int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L_{K^*}^{EFT} \delta K^* = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a (L_{K^*}^{EFT} k^a) - \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L_{K^*}^{EFT} \delta \mathcal{K}^*, \quad (3.66)$$

ahol felhasználtam, hogy

$$\tilde{\nabla}_a k^a = K^* + \mathcal{K}^*. \quad (3.67)$$

A (2.40) alapján

$$\begin{aligned} \delta_{K^*} S^{EFT} + \delta_{\mathcal{K}^*} S^{EFT} &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L_{K^*}^{EFT} \delta K^* + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L_{\mathcal{K}^*}^{EFT} \delta \mathcal{K}^* \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a (L_{K^*}^{EFT} k^a) \\ &+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \partial_t \left[(L_{\mathcal{K}^*}^{EFT} - L_{K^*}^{EFT}) \frac{\delta M}{\bar{M} \bar{N}} \right] \\ &- \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{\delta M}{\bar{M} \bar{N}} \partial_t (L_{\mathcal{K}^*}^{EFT} - L_{K^*}^{EFT}). \end{aligned} \quad (3.68)$$

A (3.68) egyenlet utolsó sorában a

$$\partial_t (L_{K^*}^{EFT} - L_{K^*}^{EFT}) = 0$$

a sztatikus háttér miatt, a maradék határtagok pedig elhagyhatók.

A kiegészítő számolások alapján az EFT hatás első rendű variációja

$$\begin{aligned} \delta_{G_A} S^{EFT} &= \delta_{G_A} S_{(\mathfrak{B})}^{EFT} + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \{ L_{\mathcal{N}}^{EFT} \delta \mathcal{N} \\ &+ \left[\bar{L}^{EFT} + \bar{N} L_N^{EFT} + \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) L_{\mathcal{L}}^{EFT} \right] \frac{\delta N}{\bar{N}} \\ &+ \left[\bar{L}^{EFT} + \bar{M} L_M^{EFT} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} L_{\mathcal{L}}^{EFT} - \frac{2\mathcal{F}}{\bar{M}r} \right] \frac{\delta M}{\bar{M}} \\ &+ 2 \left[L^{EFT} - \frac{2}{r^2} L_R^{EFT} - \frac{1}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \partial_r \right) \mathcal{F} \right] \delta \zeta \} , \end{aligned} \quad (3.69)$$

ahol a határtag

$$\begin{aligned} \delta_{G_A} S_{(\mathfrak{B})}^{EFT} &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}_a \left[\mathcal{F} \bar{l}^a \delta \ln \sqrt{-\tilde{g}} \right. \\ &+ L_{K^*}^{EFT} k^a + (L_{K^*}^{EFT} - L_{K^*}^{EFT}) k^a \frac{\delta M}{\bar{M}} \\ &\left. - (\mathcal{F} + L_{\mathcal{L}}^{EFT}) \left(k^a \frac{\delta \mathcal{N}}{\bar{N}} + l^a \frac{\delta N}{\bar{N}} \right) \right] . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Itt felhasználtam az

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\bar{g}} \bar{D}_a (\bar{g}^{ab} \bar{D}_b \delta \zeta) = 0 \quad (3.71)$$

összefüggést, ahol az integrálban szereplő 2-dimenziós kovariáns deriváltból készíthető egy egységgömb határán történő integrál, amely értéke nulla.

A mezőegyenletek a (3.69) alapján az

$$L_{\mathcal{N}}^{EFT} = 0 , \quad (3.72)$$

$$\bar{L}^{EFT} + \bar{N} L_N^{EFT} + \frac{1}{\bar{M}} \mathbf{D}_r L_{\mathcal{L}}^{EFT} = 0 , \quad (3.73)$$

$$\bar{L}^{EFT} + \bar{M} L_M^{EFT} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M}\bar{N}} L_{\mathcal{L}}^{EFT} - \frac{2\mathcal{F}}{\bar{M}r} = 0 , \quad (3.74)$$

$$\bar{L}^{EFT} - \frac{2}{r^2} L_R^{EFT} - \frac{1}{\bar{M}} \mathbf{D}_r \mathcal{F} = 0 , \quad (3.75)$$

ahol

$$\mathbf{D}_r = \left(\frac{\bar{N}'}{\bar{N}} + \frac{2}{r} + \partial_r \right) . \quad (3.76)$$

A ϕ skalármező szerinti variációból a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\delta S[\phi, \phi'] &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \delta L^{EFT}(\phi) \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left(L_\phi^{EFT} - \tilde{\nabla}_r L_{\phi'}^{EFT} \right) \delta\phi \\
&= \int d^4x \sin\theta \left[r^2 \bar{N} \bar{M} L_\phi^{EFT} + (r^2 \bar{N} \bar{M} L_{\phi'}^{EFT})' \right] \delta\phi \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L_{\phi'}^{EFT} \delta\phi' - \int d^4x \tilde{\nabla}_r \left(\sqrt{-\tilde{g}} L_{\phi'}^{EFT} \delta\phi \right), \quad (3.77)
\end{aligned}$$

amely szerint

$$(r^2 \bar{N} \bar{M} L_{\phi'}^{EFT})' = r^2 \bar{N} \bar{M} L_\phi^{EFT}. \quad (3.78)$$

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus (k^a, l^a) bázisban a Horndeski-elméletbeli gömbszimmetrikus, sztatikus téridőkre vonatkozó mezőegyenletek a (3.72)-(3.75) és a (3.78). Ezek a mezőegyenletek azonosak a [197] hivatkozás merőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban kapott (3.29)-(3.31) mezőegyenletekkel, mivel mindkét formalizmusban a háttér fóliázása merőleges. Emiatt a (3.72) mezőegyenlet triviálisan teljesül.

3.3.4. Az EFT mezőegyenletek az (n^a, m^a) bázisban

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus (n^a, m^a) bázisában az EFT hatás az

$$S^{EFT(nm)}[\mathcal{N}, N, M, \mathcal{K}, \mathfrak{K}, K, \varkappa, \mathcal{L}^*, L^*, \lambda^*, R, \phi] \quad (3.79)$$

funkcionális függéssel rendelkezik. Itt R a 2-dimenziós Ricci-skalár, $\mathcal{K}$, K , $\mathcal{L}^*$, L^* beágyazási skalárok és $\mathfrak{K}$, $\varkappa$, λ^* beágyazási változókból képezett skalárok, amelyeket a (2.43) és (2.44) egyenletek foglalják össze. A (k^a, l^a) bázisból (n^a, m^a) bázisba történő transzformáció nem azonos a csillagos és csillagtalan mennyiségek cseréjével. Az (n^a, m^a) bázisban megjelennek például a $K_{ab} L^{ab}$ és $\mathcal{L}^a D_a \left(\frac{N}{N} \right)$ skalárok a (2.45) és (2.49) összefüggések alapján. Az $\mathfrak{K}^*$ és $\mathfrak{K}^*$ skalárok nem normális fundamentális formákból állnak, ezért az $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}^*$ közötti átjárás is új tagokat hoz be az egyenletekbe.

A 3.3.1.–3.3.3. alfejezetekben szereplő lépések elvégzése után a nemmerőleges $2+1+1$ formalizmus (n^a, m^a) bázisában a gömbszimmetrikus és sztatikus téridőre vonatkozó

mezőegyenletek:

$$L_{\mathcal{N}}^{EFT(nm)} + \frac{\partial_r \left(r^2 L_{\mathcal{K}}^{EFT(nm)} \right)}{r^2 \bar{N} \bar{M}} - \frac{2 L_K^{EFT(nm)}}{r \bar{N} \bar{M}} = 0, \quad (3.80)$$

$$\bar{L}^{EFT(nm)} + \bar{N} L_N^{EFT(nm)} + \frac{1}{\bar{M}} \mathbf{D}_r L_{\mathcal{L}^*}^{EFT(nm)} = 0, \quad (3.81)$$

$$\bar{L}^{EFT(nm)} + \bar{M} L_M^{EFT(nm)} + \frac{\bar{N}'}{\bar{M} \bar{N}} L_{\mathcal{L}^*}^{EFT(nm)} - \frac{2 \mathcal{F}^{(nm)}}{r \bar{M}} = 0, \quad (3.82)$$

$$\bar{L}^{EFT(nm)} - \frac{2 L_R^{EFT(nm)}}{r^2} - \frac{1}{\bar{M}} \mathbf{D}_r \mathcal{F}^{(nm)} = 0, \quad (3.83)$$

ahol

$$\mathcal{F}^{(nm)} = L_{L^*}^{EFT(nm)} + \frac{2}{\bar{M} r} L_{\lambda^*}^{EFT(nm)}. \quad (3.84)$$

A (3.73)-(3.75) és (3.81)-(3.83) egyenletek közötti ekvivalencia azonnal, jelölés szintjén láthatók. Egy adott EFT Lagrange-sűrűség esetén annak parciális deriváltjai azonban eltérhetnek a (k^a, l^a) és (n^a, m^a) bázisokban, de ugyanazt a fizikai információt hordozzák. A (3.80) egyenlet esetén belátható, hogy a (3.72)-hez hasonló triviális eredményt ad.

3.4. Fekete lyukak és csupasz szingularitások

A (3.73)-(3.75) és (3.78) mezőegyenletekből speciális gömbszimmetrikus és sztatikus megoldásokat vezettem le a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus (k^a, l^a) bázisában. A téridő megoldások a k -eszencia elméletcsaládra vonatkoznak.

3.4.1. A Schwarzschild határeset

Ebben az alfejezetben a (3.73)-(3.75) és (3.78) egy egyszerű alkalmazását mutatom be. Amennyiben az EFT hatás az Einstein–Hilbert hatás, akkor a (3.73)-(3.75) és (3.78) mezőegyenletekből a Schwarzschild megoldás következik.

Felhasználva a (3.7) Ricci-skalár felbontását a (k^a, l^a) bázisban, akkor az EFT Lagrange-sűrűség az

$$L^{EFT} = L^{EH} = R - \lambda + L(L - 2\mathcal{L}) , \quad (3.85)$$

alakra egyszerűsödik, amennyiben a másodrendű tagokat elhagyjuk. A (3.85) Lagrange-sűrűség a gömbszimmetrikus, sztatikus háttéren kiértékelve az

$$\bar{L}^{EH} = \frac{2}{r^2} + \frac{2}{\bar{M}^2 r^2} + \frac{4\bar{N}'}{\bar{M}^2 \bar{N} r} . \quad (3.86)$$

A (3.85) Lagrange-sűrűség $G_A = \{N, M, R, \lambda, L, \mathcal{L}\}$ változók szerinti funkcionális deriváltjai (ezek jelen esetben megegyeznek a parciális deriváltakkal):

$$\begin{aligned} L_N^{EH} &= 0 , \\ L_M^{EH} &= 0 , \\ L_R^{EH} &= 1 , \\ L_\lambda^{EH} &= -1 , \\ L_L^{EH} &= 2\bar{L} = \frac{4}{\bar{M}r} , \\ L_{\mathcal{L}}^{EH} &= -2\bar{L} = -\frac{4}{\bar{M}r} , \end{aligned} \quad (3.87)$$

valamint

$$\mathcal{F} = \frac{4}{\bar{M}r} - \frac{2}{\bar{M}r} = \frac{2}{\bar{M}r} . \quad (3.88)$$

Felhasználva a (3.34)-(3.37) és (3.58) összefüggéseket a (3.73)-(3.75) mezőegyenletek:

$$\bar{M}^2 - 1 + 2r \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} = 0, \quad (3.89)$$

$$\bar{M}^2 - 1 - 2r \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} = 0, \quad (3.90)$$

$$\frac{r}{\bar{N}} (r\bar{N}')' - r^2 \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) = 0. \quad (3.91)$$

A (3.89) és (3.90) egyenletből az

$$\bar{N} \propto \bar{M}^{-1} \quad (3.92)$$

összefüggés következik, amely az r koordináta átdefiniálásával [233] megválasztható úgy, hogy

$$\bar{N} = \bar{M}^{-1}. \quad (3.93)$$

A (3.91) egyenlet bal oldala átalakítás után az alábbivá válik:

$$\frac{r}{\bar{N}} (r\bar{N}')' + r^2 \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) = \frac{\left[r^2 (\bar{N}^2)' \right]'}{2\bar{N}^2}, \quad (3.94)$$

amelyből

$$\bar{N}^2 = C_2 \left(1 - \frac{C_1}{r} \right). \quad (3.95)$$

A t koordináta átdefiniálásával pedig $C_2 = 1$ választható, amelyből gyenge tér közelítés esetén $C_1 = 2m$ [233]. Érdemes megjegyezni, hogy $\bar{N}^2 < 0$ -át megengedve kapható meg (3.95)-ből a Schwarzschild téridő eseményhorizont alatti része Schwarzschild koordinátákban. Tulajdonképpen $\bar{N}^2 \leq 0$ -át megengedve nem szükséges külön tárgyalni a téridő horizont feletti, illetve horizont alatti részének felbontását.

3.4.2. A mezőegyenletek nem minimálisan csatolt k -esszencia elméletben

A (3.73)-(3.75) és (3.78) mezőegyenletek következő alkalmazása során az L^{EFT} Lagrange-sűrűség legyen a Horndeski-elmélet k -esszencia alosztályának Lagrange-sűrűsége. Ekkor az (1.8), (3.6) és (3.12) Horndeski Lagrange-sűrűségek szabad függvényei a $G_2(\phi, X)$ és a $G_4(\phi, X) = G_4(\phi)$, míg $G_3 = G_5 = 0$.

Az L^{EFT} Lagrange-sűrűség a k -essence elméletben, a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ felbontás (k^a, l^a) bázisában az

$$L^{EFT} = G_2(\phi, X) + G_4(\phi) (R - \lambda + L^2 - 2L\mathcal{L}) + 2\sqrt{X}G_{4\phi}(\phi) (L - \mathcal{L}) \quad (3.96)$$

alakú. A (3.96) Lagrange-sűrűség a gömbszimmetrikus és sztatikus háttéren:

$$\bar{L}^{EFT} = \bar{G}_2 + 2\bar{G}_4 \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\bar{M}^2 r^2} + \frac{2\bar{N}'}{\bar{M}^2 \bar{N} r} \right) + \frac{2\phi'}{\bar{M}^2} \bar{G}_{4\phi} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right). \quad (3.97)$$

A (3.73)-(3.75) és a (3.78) mezőegyenletek a következő alakot öltik:

$$\bar{M}^2 - 1 + \frac{2r\bar{M}'}{\bar{M}} = \frac{r^2}{\bar{G}_4} \left[\left(\frac{2}{r} - \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} + \partial_r \right) (\bar{G}_{4\phi}\phi') - \frac{\bar{M}^2}{2} \bar{G}_2 \right], \quad (3.98)$$

$$\bar{M}^2 - 1 - \frac{2r\bar{N}'}{\bar{N}} = \frac{r^2}{\bar{G}_4} \left[\left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) \bar{G}_{4\phi}\phi' - \frac{\bar{M}^2}{2} \bar{G}_2 + \phi'^2 \bar{G}_{2X} \right], \quad (3.99)$$

$$\frac{r(r\bar{N}')'}{\bar{N}} - \frac{r^2\bar{M}'}{\bar{M}} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) = \frac{r^2}{\bar{G}_4} \left[- \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} - \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} \right) (\bar{G}_{4\phi}\phi') - \frac{\bar{M}^2}{2} \bar{G}_2 - \partial_r (\bar{G}_{4\phi}\phi') \right], \quad (3.100)$$

$$\left(\frac{r^2\bar{N}}{\bar{M}} \phi' \bar{G}_{2X} \right)' - \frac{r^2}{2} \bar{M} \bar{N} \bar{G}_{2\phi} = \frac{\bar{N}}{\bar{M}} \left[\bar{M}^2 - 1 + r^2 \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) - \frac{2r\bar{N}'}{\bar{N}} - r^2 \frac{\bar{N}''}{\bar{N}} \right] \bar{G}_{4\phi}. \quad (3.101)$$

A [258] hivatkozásban Sotiriou és Faraoni rámutatnak arra, hogy az Einstein-rendszerben aszimptotikusan sík megoldásokat csak akkor kaphatunk, ha: i) a skálármező konstans; ii) a $V(\phi) = 0$. Az i) és ii) teljesülése esetén a $G_2 = 0$, így a hatás az Einstein–Hilbert hatás lesz.

Az i) és ii) pontok figyelembe vételével a (3.98)-(3.100) mezőegyenletek jobb oldala zérus, míg bal oldala azonos lesz a (3.89)-(3.91) egyenletekkel, amelyből következik, hogy $\bar{N} \propto \bar{M}^{-1}$. Az (3.101) egyenlet bal oldala ugyancsak zérus, míg jobb oldalára kapjuk, hogy

$$\frac{\bar{N}}{\bar{M}} \left\{ \left(\bar{M}^2 - 1 - \frac{2r\bar{N}'}{\bar{N}} \right) - \left[r^2 \frac{\bar{N}''}{\bar{N}} - r^2 \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) \right] + \frac{r\bar{M}'}{\bar{M}} \right\} \bar{G}_{4\phi} = 0. \quad (3.102)$$

A (3.90) és a (3.91) egyenletekből kapjuk, hogy

$$\frac{r^2\bar{N}''}{\bar{N}} - r^2 \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} \right) = -\frac{r\bar{N}'}{\bar{N}}. \quad (3.103)$$

A (3.103) összefüggéssel a (3.102) egyenlet az alábbi alakú lesz:

$$\frac{\bar{N}}{\bar{M}} \left[\frac{r\bar{N}'}{\bar{N}} + \frac{r\bar{M}'}{\bar{M}} \right] \bar{G} = 0. \quad (3.104)$$

Az $\bar{N} = \bar{M}^{-1}$ összefüggést alkalmazva a Schwarzschild megoldás adódik.

Másfelől a (3.98)-(3.100) mezőegyenletek megegyeznek az Einstein–Hilbert hatásból előálló (3.89)-(3.91) egyenletekkel, amennyiben

$$\frac{\bar{M}^2}{2}\bar{G}_2 = \left(\frac{2}{r} - \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} + \partial_r\right)(\bar{G}_{4\phi}\phi') , \quad (3.105)$$

$$\frac{\bar{M}^2}{2}\bar{G}_2 = \left(\frac{2}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}}\right)\bar{G}_{4\phi}\phi' + \phi'^2\bar{G}_{2X} , \quad (3.106)$$

$$\frac{\bar{M}^2}{2}\bar{G}_2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{\bar{N}'}{\bar{N}} - \frac{\bar{M}'}{\bar{M}} + \partial_r\right)(\bar{G}_{4\phi}\phi') . \quad (3.107)$$

A (3.107) és (3.105) egyenletek különbségét véve az

$$\left(\frac{\bar{N}'}{\bar{N}} - \frac{1}{r}\right)\bar{G}_{4\phi}\phi' = 0 . \quad (3.108)$$

Mivel az $(\bar{N}'/\bar{N} - r^{-1})$ tag nem zérus, ezért a $\bar{G}_{4\phi}\phi' = \bar{G}'_4 = 0 \rightarrow \bar{G}_4 = \text{konst.}$ eredmény adódik. Ezt a (3.107) egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $\bar{G}_2 = 0$, azaz $L^{EFT} = L^{EH}$. Ez az eredmény azt mutatja, hogy ebben az osztályban a Schwarzschild megoldás csak az általános relativitáselméleti határesetből áll elő.

3.4.3. Egzakt megoldások nem minimálisan csatolt k -eszencia elméletben

A k -eszencia megoldások származtatása során legyen az

$$\bar{N} = \bar{M}^{-1} . \quad (3.109)$$

Az 1.3.1. fejezetben bemutatott módon az ívelemnégyszet az Eddington–Finkelstein koordinátákban:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\bar{N}^2 du^2 - 2dudr + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ &= -\bar{N}^2 dv^2 + 2drdv + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) , \end{aligned} \quad (3.110)$$

ahol

$$r^* = \int dr \frac{1}{\bar{N}^2(r)} , \quad (3.111)$$

az $u = t - r^*$ retardált (kimenő) és a $v = t + r^*$ avanzsált (bemenő) koordináták. Bemenő Eddington–Finkelstein koordinátákban kifejezve a kimenő radiális fényjelre igaz, hogy

$$\frac{dr}{dv} = \frac{\bar{N}^2(r)}{2} , \quad (3.112)$$

azaz az $\bar{N}(r) = 0$ eseményhorizontot határoz meg.

A (3.109) választással a (3.98)-(3.101) mezőegyenletek a

$$1 - \bar{N}^2 - r(\bar{N}^2)' = \frac{r^2}{\bar{G}_4} \left[\left(\frac{2\bar{N}^2}{r} + \frac{(\bar{N}^2)'}{2} + \bar{N}^2 \partial_r \right) (\bar{G}_{4\phi} \phi') - \frac{1}{2} \bar{G}_2 \right], \quad (3.113)$$

$$1 - \bar{N}^2 - r(\bar{N}^2)' = \frac{r^2}{\bar{G}_4} \left[\bar{N}^2 \phi'^2 \bar{G}_{2X} - \frac{1}{2} \bar{G}_2 + \left(\frac{2\bar{N}^2}{r} + \frac{(\bar{N}^2)'}{2} \right) \bar{G}_{4\phi} \phi' \right], \quad (3.114)$$

$$\frac{1}{2} [r^2 (\bar{N}^2)']' = \frac{r^2}{\bar{G}_4} \left[\frac{1}{2} \bar{G}_2 - \left(\frac{1}{r} \bar{N}^2 + (\bar{N}^2)' + \bar{N}^2 \partial_r \right) (\bar{G}_{4\phi} \phi') \right], \quad (3.115)$$

$$(r^2 \bar{N}^2 \phi' \bar{G}_{2X})' - \frac{r^2}{2} \bar{G}_{2\phi} = \left(1 - \bar{N}^2 - r(\bar{N}^2)' - \frac{[r^2 (\bar{N}^2)']'}{2} \right) \bar{G}_{4\phi} \quad (3.116)$$

alakúak lesznek.

A (3.115) egyenlet bal oldala és a (3.116) egyenlet jobb oldala tartalmazza a Schwarzschild határesetnél bemutatott (3.94) összefüggést. Amennyiben a (3.113) egyenletet kivonjuk a (3.114) egyenletből kapjuk, hogy

$$(\bar{G}_{4\phi} \phi')' = \phi'^2 \bar{G}_{2X}. \quad (3.117)$$

A (3.113) és (3.115) egyenletek összegéből és átalakítások után kapjuk, hogy

$$\left[1 - \bar{N}^2 - r(\bar{N}^2)' \right] \bar{G}_4 + \left(\frac{r^2 (\bar{N}^2)'}{2} \bar{G}_4 \right)' = r \bar{N}^2 \bar{G}_4' \quad (3.118)$$

amelyből

$$\bar{G}_4 = - \left[\left(\frac{\bar{N}^2}{r^2} \right)' \frac{r^4 \bar{G}_4}{2} \right]'. \quad (3.119)$$

A (3.119) egyenletből pedig

$$\bar{N}^2 = -2r^2 \int^r \frac{d\sigma}{\sigma^4 \bar{G}_4(\phi(\sigma))} \int^\sigma d\rho \bar{G}_4(\phi(\rho)) \quad (3.120)$$

következik. A (3.120) egyenlet segítségével az $\bar{N}$ metrikus függvény megkapható. Ennek ismeretében a (3.117) és (3.116) egyenletekből a $\bar{G}_{2X}$ és $\bar{G}_{2\phi}$ függvények vezethetők le, míg a $\bar{G}_2$ függvényt a (3.114) egyenlet határozza meg.

3.4.4. Gömbszimmetrikus, sztatikus fekete lyukak, csupasz szingularitások és homogén megoldások $\bar{G}_4(\phi)$ különböző megválasztásaival

A következőkben speciális $\bar{G}_4(\phi)$ függvények esetén vezettem le a k -eszencia elmélet gömbszimmetrikus és sztatikus megoldásait, amelyhez a (3.114), (3.117), (3.116), (3.120) egyenleteket használtam.

3.4.4.1. $\bar{G}_4 = \text{konstans}$

Legyen $\bar{G}_4 = (16\pi G)^{-1}$, azaz a skalármezőt minimálisan csatoljuk a metrikához. A (3.120) alapján az $\bar{N}^2$ metrikus függvény:

$$\begin{aligned}\bar{N}^2 &= -2r^2 \left\{ \int^r d\sigma \frac{1}{\sigma^4} \left[\int^\sigma d\rho \right] \right\} \\ &= -2r^2 \int^r d\sigma [\sigma^{-3} + \sigma^{-4} C_1] \\ &= 1 + \frac{2C_1}{3r} - 2r^2 C_2 ,\end{aligned}$$

ahol C_1 és C_2 integrációs konstansok. Bevezetve az $m = \frac{C_1}{3}$ és a $\Lambda = 2C_2$ jelöléseket kapjuk, hogy

$$\bar{N}^2 = 1 - \frac{2m}{r} - \Lambda r^2 . \quad (3.121)$$

A (3.121) esetén a téridő Schwarzschild–de Sitter, ha $\Lambda > 0$, Schwarzschild–anti de Sitter, ha $\Lambda < 0$, és Schwarzschild, ha $\Lambda = 0$.

Ekkor (3.117) egyenlet az alábbira vezet:

$$\phi' \bar{G}_{2X} = 0 .$$

Amennyiben $\phi' = 0$, akkor $X = 0$, ezért $\bar{G}_{2X} = 0$. A (3.116) egyenletből a $\bar{G}_{2\phi} = 0$, tehát a $\bar{G}_2 = \text{konst.}$ Végül a (3.114) egyenlet azt eredményezi, hogy

$$\bar{G}_2 = -6\Lambda / (16\pi G) .$$

Azaz a $\bar{G}_2$ függvény arányos a Λ kozmológiai konstanssal.

3.4.4.2 $\bar{G}_4 = \phi = r$

A [258] alapján, ha $\bar{G}_4$ inverze reguláris, akkor $\bar{G}_4$ azonosítható a skalármezővel. Ha a skalármező monoton függvénye az r radiális koordinátának és deriváltja sehol sem zérus, akkor $\phi = r$ választható. Amennyiben $\bar{G}_4 = \phi = r$, akkor a (3.120) szerint

$$\begin{aligned}\bar{N}^2 &= -2r^2 \left\{ \int^r d\sigma \frac{1}{\sigma^4 \phi(\rho)} \left[\int^\sigma \phi(\rho) d\rho \right] \right\} \\ &= -2r^2 \int^r d\sigma \left[\frac{\sigma^{-3}}{2} + \sigma^{-5} C_1 \right] \\ &= -2r^2 \left[-\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{4r^4} C_1 + C_2 \right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{C_1}{2r^2} - 2r^2 C_2 .\end{aligned}\tag{3.122}$$

Ha a C_1 és C_2 integrációs konstansok helyett bevezetjük a $Q = \frac{C_1}{2}$ és a $\Lambda = 2C_2$ jelöléseket, akkor

$$\bar{N}^2 = \frac{1}{2} + \frac{Q}{r^2} - \Lambda r^2 .\tag{3.123}$$

A metrika görbületi szingularitással rendelkezik. Mivel

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \Lambda = 0}} R_{\theta\varphi\theta}^{\varphi} = \frac{1}{2} , \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \Lambda = 0}} R_{\theta\varphi\varphi}^{\theta} = -\frac{\sin^2 \theta}{2}\tag{3.124}$$

a kapott megoldás az $r \rightarrow \infty$ -ben $\Lambda = 0$ -ra sem válik síkká, tehát aszimptotikusan nem sík. A Schwarzschild téridő esetének kivételével a származtatott megoldások nem aszimptotikusan síkok a továbbiakban.

A (3.117) egyenletből a $\bar{G}_{2X} = 0$, és a (3.116) egyenletből a $\bar{G}_{2\phi} = -12\Lambda - 1/r^2$, amelyből

$$\bar{G}_2(\phi) = -12\Lambda\phi + \frac{1}{\phi} .\tag{3.125}$$

Horizontok

Az $\bar{N}^2$ metrikus függvény zérus az

$$r_{1,2}^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16Q\Lambda}}{4\Lambda}\tag{3.126}$$

egyenletet teljesítő $r > 0$ radiális koordináta helyeken, ha $16Q\Lambda \geq -1$. A (3.126) alapján ekkor négy eset különböztethető meg, egy csupasz szingularitás, egy két horizonttal rendelkező és két egy horizonttal rendelkező fekete lyuk, amelyek a következők:

(1) Ha a $\Lambda > 0$ és $Q < 0$, akkor a (3.126) szerinti két pozitív gyök van, azaz két horizontja van a fekete lyuknak. A két horizont között $\bar{N}^2$ pozitív, különben negatív.

A belső horizontot az r_2 határozza meg, míg a külső horizontot az r_1 . A belső horizont alatt a metrika homogén, nem sztatikus, Kantowski-Sachs téridő szerű. A két horizont között a téridő gömbszimmetrikus, sztatikus, Schwarzschild téridő szerű. A külső horizonton kívül homogén, nem sztatikus, aszimptotikusan anti de Sitter a téridő.

(2) Ha a $\Lambda < 0$ és $Q > 0$, akkor nincs horizont. A csupasz szingularitással rendelkező téridő gömbszimmetrikus, sztatikus, aszimptotikusan de Sitter.

(3) Ha a $\Lambda < 0$ és $Q < 0$, akkor a téridő egy horizonttal rendelkező fekete lyukat tartalmaz, ahol a horizont helyzete az

$$r_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + 16Q\Lambda}}{\Lambda}}. \quad (3.127)$$

A horizonton kívül $\bar{N}^2$ pozitív, a téridő gömbszimmetrikus, sztatikus, aszimptotikusan de Sitter. A horizont alatt $\bar{N}^2$ negatív, a téridő homogén, nem sztatikus.

(4) A $\Lambda > 0$ és $Q > 0$ esetén is egy eseményhorizontú fekete lyuk található a téridőben, amelynek horizontja az

$$r_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 16Q\Lambda}}{\Lambda}} \quad (3.128)$$

koordináta értéknél található. Az r_2 által meghatározott horizonton kívül $\bar{N}^2$ negatív, azaz a téridő homogén, nem sztatikus és aszimptotikusan anti de Sitter. A horizont alatt $\bar{N}^2$ pozitív, a téridő pedig gömbszimmetrikus és sztatikus.

3.4.4.3 $\bar{G}_4 = \phi = r^\alpha$

Ebben az esetben a (3.120) összefüggés alapján

$$\begin{aligned} \bar{N}^2 &= -2r^2 \left\{ \int^r d\sigma \frac{1}{\sigma^{\alpha+4}} \left[\int^\sigma d\rho \rho^\alpha \right] \right\} \\ &= -2r^2 \int^r d\sigma \left[\frac{\sigma^{-3}}{\alpha+1} + \sigma^{-\alpha-4} C_1 \right] \\ &= \frac{1}{(\alpha+1)} + \frac{2C_1}{(\alpha+3)r^{\alpha+1}} - 2r^2 C_2, \end{aligned} \quad (3.129)$$

ahol C_1 és C_2 integrációs konstansok. Bevezetve a $C = \frac{2C_1}{(\alpha+3)}$ és $\Lambda = 2C_2$ jelöléseket kapjuk, hogy

$$\bar{N}^2 = \frac{1}{1+\alpha} + \frac{C}{r^{1+\alpha}} - \Lambda r^2. \quad (3.130)$$

Amennyiben $\alpha = 0$ és $C = -2m$, illetve $\alpha = 1$ és $C = Q$ akkor az előző két alfejezet megoldásai adódnak. Legyen az $\alpha \geq 0$, ekkor a metrika az origóban szinguláris.

Továbbá, ha $r \rightarrow \infty$ és $\Lambda = 0$, akkor

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \Lambda = 0}} R_{\theta\varphi\theta}^{\dots\varphi} = \frac{\alpha}{1 + \alpha} , \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \Lambda = 0}} R_{\theta\varphi\varphi}^{\dots\theta} = -\frac{\alpha \sin^2 \theta}{1 + \alpha} . \quad (3.131)$$

Ez azt jelenti, hogy a téridő nem aszimptotikusan sík. A (3.117) egyenletből

$$\bar{G}_{2X} = \frac{\alpha - 1}{\alpha r^\alpha} \quad (3.132)$$

és (3.114) alapján

$$\bar{G}_2 = \frac{2\alpha^2 r^{\alpha-2}}{1 + \alpha} + \frac{\alpha(\alpha - 1)C}{r^3} - 2(3 + 2\alpha + \alpha^2)\Lambda r^\alpha . \quad (3.133)$$

A (3.116) egyenletből pedig azt kapjuk, hogy

$$\bar{G}_{2\phi} = -\frac{2}{(1 + \alpha)r^2} - \frac{\alpha(\alpha - 1)C}{r^{\alpha+3}} - 6(\alpha + 1)\Lambda . \quad (3.134)$$

A (3.14) és (3.109) összefüggéseket felhasználva:

$$X = \bar{N}^2 \phi'^2 = \alpha^2 \left(\frac{r^{2\alpha-2}}{1 + \alpha} + Cr^{\alpha-3} - \Lambda r^{2\alpha} \right) . \quad (3.135)$$

A (3.133) egyenlet átalakítható a skalármező és a kinetikus tag bevezetésével a

$$\bar{G}_2 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{X}{\phi} + \alpha \phi^{\frac{\alpha-2}{\alpha}} - (6 + 5\alpha + \alpha^2)\Lambda \phi \quad (3.136)$$

alakra. A (3.136) alak adja meg a $\bar{G}_2$ függvény X és ϕ függését a háttértéridőn.

Horizontok

A horizontok a

$$-\Lambda r^{3+\alpha} + \frac{1}{(1 + \alpha)} r^{1+\alpha} + C = 0 \quad (3.137)$$

egyenlet megoldásaival adhatók meg. Ebből hat eset származtatható, amelyek a következők:

(1) Ha $\Lambda = 0$ és $C < 0$, akkor a (3.137) alapján

$$r = {}^{1+\alpha}\sqrt{-(1 + \alpha)C} . \quad (3.138)$$

A téridő ebben az esetben egy horizonttal rendelkező fekete lyukat tartalmaz.

(2) Hasonlóan egy horizont van amennyiben $\Lambda > 0$ és $C = 0$, ekkor

$$r = \sqrt{\frac{1}{(1 + \alpha)\Lambda}} . \quad (3.139)$$

A horizonton kívül a téridő aszimptotikusan anti de Sitter, a horizont alatt gömbszimmetrikus, sztatikus Schwarzschild szerű.

Amennyiben $\Lambda \neq 0$ és $C \neq 0$, akkor a (3.137) egyenletnek valós pozitív gyökeinek számát a Descartes-féle előjelszabállyal adhatjuk meg. Legyen

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad (3.140)$$

egy tetszőleges n -ed fokú polinom, amelynek az $a_0, a_1 \dots a_n$ együtthatói valósak és $a_n \neq 0$. Az $f(x)$ polinomnak legfeljebb n darab valós zérushelye van, valamint legalább egy valós zérushelye van, ha n páratlan. A z valós szám az $f(x)$ polinom zérushelye, ha $f(z) = 0$. Az $f(x)$ polinom az

$$f(x) = (z - x)g(x) \quad (3.141)$$

alakba írható, ha $n \geq 1$. A (3.141) összefüggésben a

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_{n-1}x^{n-1}, \quad (3.142)$$

ahol $b_0, b_1 \dots b_n$ valós együtthatók és $b_{n-1} \neq 0$. A (3.140)-(3.142) tanulmányozása során R. Descartes előjelszabályokat fogalmazott meg az $f(x)$ polinom zérushely-számának megállapítására. Az $f(x)$ polinom pozitív zérushelyeinek száma annyi, vagy egy pozitív páros számmal kevesebb, mint ahányszor az együtthatókon sorban lépkedve előjelváltást tapasztalunk [358].

(3) Ha $\Lambda < 0$ és $C > 0$, akkor a (3.137) együtthatóiban nincs előjel váltás, ezért nincs gyök, azaz nincs horizont. A téridő egy csupasz szingularitást tartalmaz, valamint gömbszimmetrikus, sztatikus és aszimptotikusan de Sitter jellegű.

(4) Ha $\Lambda > 0$ és $C < 0$ esetén az előjel kétszer változik ezért a (3.137) polinomnak vagy nincs, vagy két gyöke van. Amennyiben nincs gyök, akkor a téridő csupasz szingularitást tartalmaz. A téridő ekkor homogén, nem sztatikus és aszimptotikusan anti de Sitter. Két horizont esetén a belső horizont alatt homogén és nem sztatikus a téridő, a két horizont között gömbszimmetrikus és sztatikus, míg a külső horizonton kívül homogén, nem sztatikus és aszimptotikusan anti de Sitter.

(5) Ha $\Lambda < 0$ és $C < 0$, akkor a (3.137) polinom együtthatóinak előjele egyszer változik. Ebben az esetben a központi szingularitást egy horizont fedi el. A horizont alatt a téridő homogén és nem sztatikus, míg azon kívül gömbszimmetrikus, sztatikus és aszimptotikusan de Sitter.

(6) Ha $\Lambda > 0$ és $C > 0$, akkor ismét egyszer történik előjelváltás, ezért egy horizont van. A horizont alatt gömbszimmetrikus és sztatikus, míg azon kívül homogén, nem sztatikus és aszimptotikusan anti de Sitter a téridő.

3.4.4.4 $\bar{G}_4 = \phi = A(1 + Br)$

A $\bar{G}_4 = \phi = A(1 + Br)$ választás esetén (3.120)-ból

$$\begin{aligned}\bar{N}^2 &= -2r^2 \left\{ \int^r \frac{d\sigma}{\sigma^4(1+B\sigma)} \left[\int^\sigma d\rho(1+B\rho) \right] \right\} \\ &= -2r^2 \left\{ \int^r d\sigma \frac{1}{\sigma^4(1+B\sigma)} \left(\sigma + \frac{B\sigma^2}{2} + C_1 \right) \right\},\end{aligned}$$

ahol C_1 egy integrációs konstans. Itt az egyes tagok az

$$\begin{aligned}\int^r \frac{d\sigma}{\sigma^4(1+B\sigma)} &= -\int^r du \frac{u^3}{(u+B)} \\ &= -\frac{1}{6} (2r^{-3} - 3Br^{-2} + 6B^2r^{-1} + 11B^3) \\ &\quad + B^3 \ln|r^{-1} + B|,\end{aligned}\tag{3.143}$$

$$\begin{aligned}\int^r d\sigma \frac{1}{\sigma^3(1+B\sigma)} &= -\int^r du \frac{u^2}{(u+B)} \\ &= -\frac{1}{2} (r^{-2} - 2Br^{-1} - 3B^2) \\ &\quad - B^2 \ln|r^{-1} + B| + C_2,\end{aligned}\tag{3.144}$$

$$\begin{aligned}\int^r d\sigma \frac{1}{\sigma^2(1+B\sigma)} &= -\int^r du \frac{u}{(u+B)} \\ &= -r^{-1} + B \ln|r^{-1} + B|,\end{aligned}\tag{3.145}$$

ahol C_2 egy integrációs konstans. A (3.143)-(3.145) összefüggések felhasználásával, valamint bevezetve az $m = \frac{C_1}{3}$ és $\Lambda = 2C_2$ jelöléseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\bar{N}^2 &= 1 + 3Bm - \frac{2m}{r} - B(1 + 6Bm)r - \Lambda r^2 \\ &\quad - B^2(1 + 6Bm)r^2 \ln \left| \frac{Br}{1 + Br} \right|.\end{aligned}\tag{3.146}$$

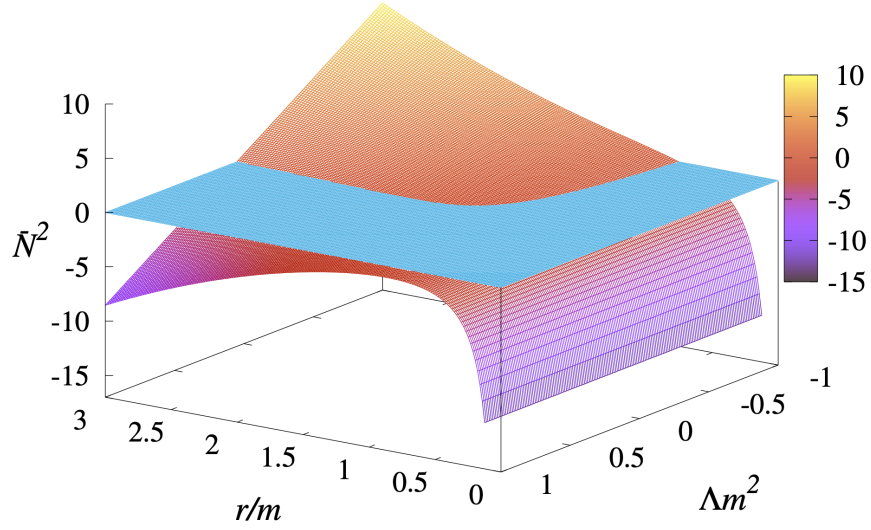
A $\Lambda = 0$ és $r \rightarrow \infty$ esetén a nem eltűnő független Riemann-tenzor komponensek:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \Lambda = 0}} R_{\theta\varphi\theta}^{\varphi} = -3Bm, \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \Lambda = 0}} R_{\theta\varphi\varphi}^{\theta} = 3Bm \sin^2 \theta.\tag{3.147}$$

Tehát a B paraméter miatt a téridő aszimptotikusan nem sík.

A (3.117) alapján $\bar{G}_{2X} = 0$. A (3.114) egyenletből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{\bar{G}_2}{2A} &= -\frac{3mB^2}{r(1+Br)} - 3(1+2Br)\Lambda \\ &\quad - \frac{B^2[11 + 72mB + 12(1+6mB)Br]}{2(1+Br)} \\ &\quad - 3B^2(1+6mB)(1+2Br) \ln \left| \frac{Br}{1+Br} \right|.\end{aligned}\tag{3.148}$$

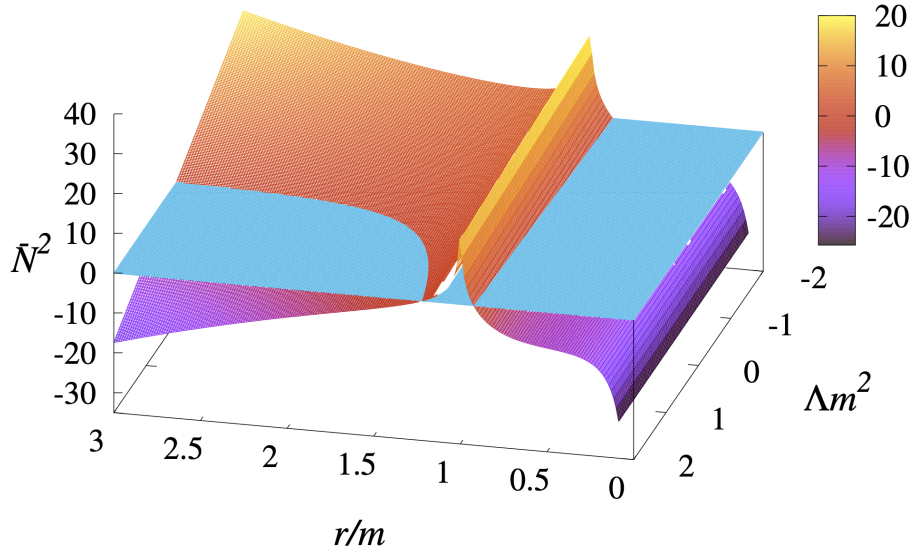


13. ábra. Az $\bar{N}^2$ metrikus függvény ábrázolása látható az r/m skálázott radiális koordináta, továbbá a Λm^2 paraméter függvényében, amenyiben $Bm = 1$. Az $\bar{N}^2$ függvény metszete a kék síkkal mutatja, hogy mely Λm^2 értékek esetén fedt horizont a központi szingularitást [353].

Ez a feltett $\phi = A(1 + B)$ skálármezővel a

$$\begin{aligned} \bar{G}_2 = & -\frac{6mA^2B^3}{\phi - A} - 6(2\phi - A)\Lambda + AB^2\left(\frac{A}{\phi} - 12\right)(1 + 6mB) \\ & - 6B^2(1 + 6mB)(2\phi - A)\ln\left|\frac{\phi - A}{\phi}\right| \end{aligned} \quad (3.149)$$

alakot eredményezi. Egyszerű behelyettesítéssel belátható, hogy a (3.116) egyenlet teljesül.



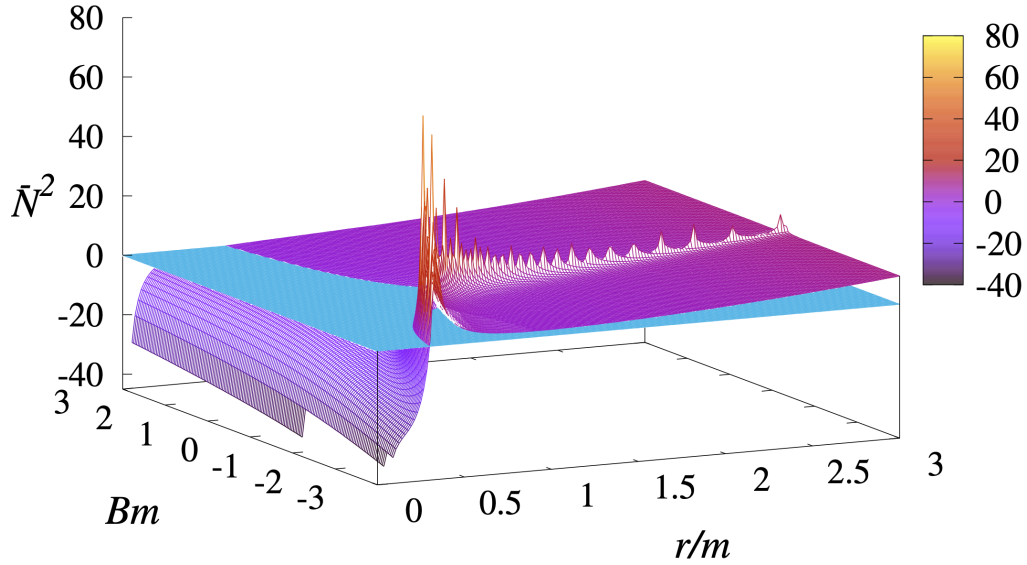
14. ábra. Az $\bar{N}^2$ metrikus függvény ábrázolása látható az r/m skálázott radiális koordináta és a Λm^2 paraméter függvényében, amennyiben $Bm = -1$. Az $\bar{N}^2$ függvény metszete a kék síkkal mutatja, hogy minden Λm^2 érték esetén fedi horizont a központi szingularitást. Amikor az $\bar{N}^2 \rightarrow \infty$, akkor a téridő tartalmaz egy további szingularitást [353].

Horizontok

A (3.146) egyenlet alapján a téridő az $r = 0$ -ban központi szingularitást tartalmaz. Az $\bar{N}^2$ függvény összetett alakja miatt a következő esetekben vizsgáltam meg a téridőt.

(1) Legyen a (3.146)-ban a $Bm = 1$. A téridő $\bar{N}^2$ metrikus függvényét a 13. ábra mutatja. A 13. ábrán az $r/m = 0$ -ban az $\bar{N}^2$ függvény a negatív végtelenbe tart, amely a központi szingularitást jelöli ki a téridőben. A központi szingularitásnak eseményhorizontja van, ha az $\bar{N}^2$ függvény metszi a kék síkot, ekkor $\bar{N}^2 = 0$. A kék sík alatt az $\bar{N}^2$ negatív, ekkor a téridő homogén és nem sztatikus. Pozitív $\bar{N}^2$ esetén, azaz a kék sík fölött, a téridő gömbszimmetrikus és sztatikus. Ezek alapján a $\Lambda m^2 < 0$ tartományban a téridő egy horizonttal rendelkező fekete lyukat tartalmaz, ahol a horizonton kívül a téridő gömbszimmetrikus és sztatikus. A horizont alatt a téridő homogén, nem sztatikus és szingularitása van $r = 0$ -ban. A $\Lambda m^2 > 0$ tartományban a téridő homogén, nem sztatikus (Kantowski-Sachs típusú) és csupasz szingularitással rendelkezik az origóban, mivel az $\bar{N}^2$ minden esetben negatív.

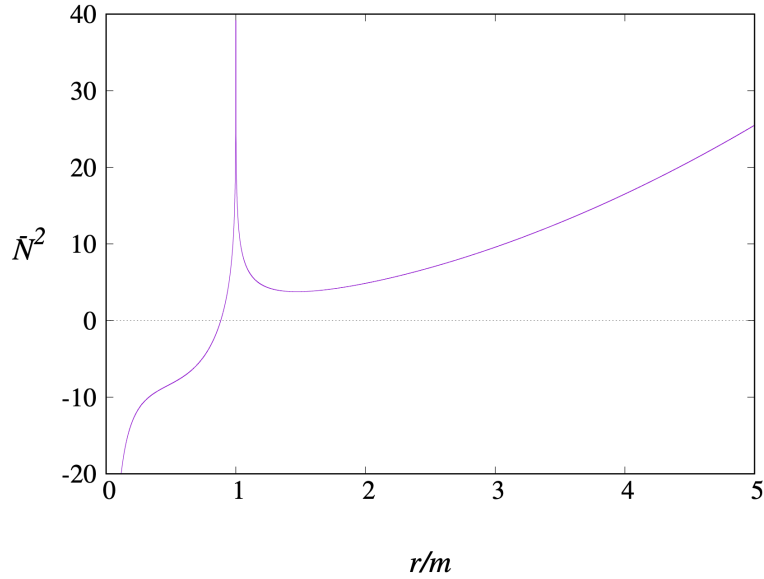
(2) Legyen a $Bm = -1$. Az $\bar{N}^2$ függvényt a 14. ábra mutatja. A 14. ábra



15. ábra. Az $\bar{N}^2$ metrikus függvény ábrázolása látható az r/m skálázott radiális koordináta és a Bm paraméter függvényében, amenyiben $\Lambda m^2 = -1$. Az $\bar{N}^2$ függvény és a kék sík metszete határozza meg az eseményhorizontot. Negatív B értékek esetén külső szingularitást tartalmaz a téridő a $Br = -1$ hiperbola mentén [353].

alapján a téridőben a Λm^2 minden értékére található egy fekete lyuk, mivel az $\bar{N}^2$ függvény metszi a kék síkot. A $\Lambda m^2 < 0$ tartományban a fekete lyuknak egy horizontja van, amelyen kívül a gömbszimmetrikus, sztatikus téridőben található egy további horizont nélküli szingularitás, mivel az $\bar{N}^2$ tart a pozitív végtelenbe. A horizont alatt a téridő homogén, nem sztatikus és szingularitása van az $r/m = 0$ -ban. A $\Lambda m^2 > 0$ értékeknél a fekete lyuk két horizonttal rendelkezik. A külső horizonton kívül a téridő homogén, nem sztatikus, mivel az $\bar{N}^2$ függvény negatív. A két horizont között a téridő gömbszimmetrikus, sztatikus és az $\bar{N}^2 \rightarrow \infty$ esetén egy további szingularitással rendelkezik. A belső horizont alatt a téridő ismét homogén, nem sztatikus és tartalmaz egy központi szingularitást.

(3) Legyen $\Lambda m^2 = -1$. Az $\bar{N}^2$ metrika függvényt a 15. ábra mutatja. Az $r/m = 0$ origóban van központi szingularitás és minden Bm esetén azt egy horizont fedi el. A $Bm > 0$ értékeknél a horizonton kívül a téridő gömbszimmetrikus, sztatikus, míg a horizont alatt homogén és nem sztatikus. A $Bm < 0$ tartományban a horizonton kívül a téridő gömbszimmetrikus, sztatikus, és tartalmaz egy logaritmikus szingularitást. A



16. ábra. Az $\bar{N}^2$ metrikus függvény ábrázolása látható az r/m skálázott radiális koordináta függvényében. Itt a $Bm = -1$ és a $\Lambda m^2 = -1$ [353].

horizont alatt a téridő homogén, nem sztatikus.

A 16. ábra mutatja be a 15. ábra $Bm = -1$ értéknél vett metszetét. A Ricci-skalár és a Kretschmann skalár is divergál a logaritmikus szingularitás helyén, tehát ez is egy valódi, görbületi szingularitás.

3.4.5. Megoldások az Einstein-rendszerben

A 3.4.4. fejezetben bemutatott k -eszencia téridő megoldásokat a Hordenski-elméletre jellemzően, a Jordan-rendszerben vezettem le. Legyen a Jordan- és Einstein-rendszer közötti transzformáció a

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 \tilde{g}_{ab} .$$

A $\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}$ tag konformis transzformációja ekkor $\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R} \rightarrow \Omega^{-2}\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}$ [233]. Az Einstein-rendszerben a skalármező és a metrika csatolása minimális. A Jordan-rendszerben megadott k -eszencia hatás egy részéből az Einstein-rendszerben egy Einstein–Hilbert hatást kell kialakítani, ezért a konformis faktorra teljesülnie kell, hogy $\Omega^2 = \tilde{G}_4(\phi) > 0$. A (3.30) ívelemnégyszet az Einstein-rendszerben a

$$d\tilde{s}^2 = -\tilde{N}^2 dt^2 + \tilde{M}^2 d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (3.150)$$

$\Omega^2 = \bar{G}_4 = \phi$	Egyenlet $\bar{N}^2$ -re	$\bar{\check{N}}^2$	$\bar{\check{M}}^2$
$(16\pi G)^{-1}$	(3.121)	$\frac{1}{16\pi G} \bar{N}^2$	$\bar{N}^{-2}$
$r^\alpha, \alpha > 0$	(3.130)	$r^\alpha \bar{N}^2$	$\frac{4}{(2+\alpha)^2} \bar{N}^{-2}$
$A(1 + Br)$	(3.146)	$A(1 + Br) \bar{N}^2$	$\frac{4(1+Br)^2}{(2+3Br)^2} \bar{N}^{-2}$

3. táblázat. A metrika az Einstein-rendszerben amennyiben a radiális koordináták között a transzformáció $\check{r} = rG_4^{1/2}$.

ahol az új radiális koordináta

$$\check{r} = \bar{G}_4^{1/2} r .$$

A transzformáció után a metrikus függvények:

$$\bar{\check{N}}^2 = \bar{G}_4 \bar{N}^2, \quad \bar{\check{M}}^2 = \frac{\bar{M}^2}{\left[1 + \frac{r}{2} (\ln \bar{G}_4)'\right]^2} . \quad (3.151)$$

Ezekből az

$$\frac{1}{1 + \frac{r}{2} (\ln \bar{G}_4)'} = 1 - \frac{\check{r}}{2} \frac{d \ln \bar{G}_4}{d \check{r}} \quad (3.152)$$

összefüggés adódik. A 3.4.4. fejezetben vizsgált speciális megoldásokban a metrikus függvények Einstein-rendszerbeli megfelelőjét a 3. táblázat foglalja össze.

3.5. Összefoglalás

Az L_2 , L_3 és L_4 Lagrange-sűrűségeket átírtam a nemmerőleges $2+1+1$ felbontás (k^a, l^a) és (n^a, m^a) bázisaiban megjelenő mennyiségekkel radiális unitér és konformis mértékben. Megállapítottam, hogy a Lagrange-sűrűségek a (k^a, l^a) bázisban egyszerűbbek. Az EFT hatás funkcionális függését a nemmerőleges $2+1+1$ alakba írt L_2 , L_3 és L_4 Lagrange-sűrűségekben megjelenő változók alapján választottam meg. Ennek az EFT hatásnak az elsőrendű variációjából származtattam a gömbszimmetrikus, sztatikus háttérre vonatkozó mezőegyenleteket úgy, hogy a háttéren a fóliázást merőlegesnek választottam ($\bar{\mathcal{N}} = 0$) a [197] folyóiratcikkhez hasonlóan. A mezőegyenleteket alkalmaztam az Einstein–Hilbert hatás esetén, amelyből a Schwarzschild megoldást kaptam. A mezőegyenleteket megadtam k -eszencia elméletre vonatkoztatva a $G_2(\phi, X)$, $G_4(\phi, X) = G_4(\phi)$, $G_3(\phi, X) = 0$, $G_5(\phi, X) = 0$ és $\bar{N} = \bar{M}^{-1}$ választásokkal. Levezettem a $\bar{G}_2$, $\bar{G}_{2X}$, $\bar{G}_{2\phi}$ és $\bar{N}^2$ függvények származtatásához szükséges összefüggéseket. A mezőegyenletekben ekkor egyetlen szabad függvény maradt a $\bar{G}_4(\phi)$. A $\bar{G}_4$ speciális megválasztásával származtattam a téridő megoldásokat a k -eszencia elméletben. A kapott téridő megoldások tartalmazznak csupasz szingularitást, egy horizonttal vagy két horizonttal rendelkező fekete lyukakat. A $\bar{G}_4(\phi) = A(1+B)$ esetben találtam olyan téridő megoldást, amely tartalmaz az egyetlen horizonton kívüli görbületi szingularitást. Kaptam továbbá olyan megoldást is, amikor a fekete lyuk két horizontja között szintén egy további szingularitást tartalmaz a téridő.

Ha elfogadjuk a kozmikus cenzor hipotézist, akkor a kapott csupasz szingularitásokat tartalmazó téridők nem tekinthetők fizikai megoldásoknak [252], [253]. A $\bar{G}_4(\phi) = A(16\pi G)^{-1}$ és $\Lambda = 0$ választáskor kapott fekete lyuk kivételével az összes téridő megoldás aszimptotikusan nem sík, így azok skalár hajjal rendelkeznek.

4. Minimálisan csatolt skalármező, mint nem ideális folyadék

A [293], [294] hivatkozásokban ismertették az időszerű gradienssel rendelkező Klein–Gordon skalármező ideális folyadék leírását, felhasználva az $1+3$ dimenziós felbontást. Ezt az eredményt a [299] folyóiratcikkekben újra megvizsgálták, valamint kibővítették azt a térszerű és nullszerű skalármező gradiens eseteire. A Klein–Gordon skalármező Lagrange-sűrűsége:

$$L_{KG} = -\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_a\phi\tilde{\nabla}^a\phi - V(\phi) , \quad (4.1)$$

amelynek $\tilde{g}^{ab}$ szerinti variációjából kapható:

$$\tilde{T}_{ab} = \tilde{\nabla}_a\phi\tilde{\nabla}_b\phi - \left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi + V(\phi)\right)\tilde{g}_{ab} . \quad (4.2)$$

Az $1+3$ dimenziós felbontással az energia-impulzus tenzor

$$\tilde{T}_{ab} = \rho u_a u_b + p h_{ab} , \quad (4.3)$$

alakú, ahol $h_{ab} = u_a u_b + \tilde{g}_{ab}$. A [299] hivatkozásban a következő összefüggéseket állapították meg az energia-impulzus tenzor energiasűrűségére és nyomására vonatkozóan:

$$\rho = \left(\frac{1}{2}\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi - V(\phi)\right) \text{sign}\left(\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi\right) , \quad (4.4)$$

$$p = \frac{1}{3} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{2} \text{sign}\left(\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi\right) \right] \left(\tilde{\nabla}^d\phi\tilde{\nabla}_d\phi\right) - \left[4 + \text{sign}\left(\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi\right) \right] V(\phi) \right\} . \quad (4.5)$$

A (4.2)-(4.5) egyenletek alapján vizsgálták a skalármező energia-impulzus tenzorát feltéve, hogy a skalármező gradiense időszerű, térszerű vagy null.

Amennyiben a skalármező gradiense időszerű, akkor az u^a időszerű vektor megválasztható a következő módon:

$$u_a = \frac{\tilde{\nabla}_a\phi}{\sqrt{-\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi}} \Rightarrow \tilde{\nabla}_a\phi = u_a \sqrt{-\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi}$$

teljesítve, hogy

$$u_a u^a = \frac{\tilde{\nabla}_a\phi}{\sqrt{-\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi}} \frac{\tilde{\nabla}^a\phi}{\sqrt{-\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi}} = \frac{\tilde{\nabla}_a\phi\tilde{\nabla}^a\phi}{-\tilde{\nabla}^c\phi\tilde{\nabla}_c\phi} = -1 .$$

Ekkor

$$\tilde{T}_{ab} = \left(-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) u_a u_b - \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) h_{ab} . \quad (4.6)$$

Tekintve a (4.3) és (4.6) egyenleteket, vagy a (4.4) és (4.5) összefüggéseket, a kapott ideális folyadék energiasűrűsége, illetve izotróp nyomása:

$$\rho^{PF} = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}^a \phi + V(\phi) , \quad (4.7)$$

$$p^{PF} = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}^a \phi - V(\phi) . \quad (4.8)$$

A (4.1) és a (4.7), (4.8) egyenletekből az

$$L_{KG} = p^{PF} = \rho^{PF} - 2V(\phi) , \quad (4.9)$$

összefüggések adódnak a Lagrange-sűrűsége. A [293] alapján, ha a skalármező tömeg nélküli, szabad mező, amelynek energiasűrűsége tisztán kinetikus, azaz $V(\phi) = 0$, akkor $p^{PF} = \rho^{PF}$. Ebben az esetben az $L_{KG}^1 = p^{PF}$ és az $L_{KG}^2 = \rho^{PF}$ Lagrange-sűrűségek ekvivalensek. Amennyiben a skalármező energiasűrűsége tisztán potenciális eredetű, azaz $\tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}^a \phi = 0$, akkor $p^{PF} = -\rho^{PF}$. Ez utóbbi esetben az $L_{KG}^1 = p^{PF}$ és az $L_{KG}^2 = -\rho^{PF}$ Lagrange-sűrűségek írják le ekvivalensen a Klein–Gordon skalármezőt.

Amikor a skalármező gradiense térszerű, akkor

$$u_a = \frac{\tilde{\nabla}_a \phi}{\sqrt{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi}} , \quad u_a u^a = 1 . \quad (4.10)$$

A (4.4) és (4.5) összefüggésekből a

$$\rho = \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi - V(\phi) , \quad (4.11)$$

energiasűrűséget és a

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{3} \left\{ \left[-1 + \frac{1}{2} \right] \left(\tilde{\nabla}^d \phi \tilde{\nabla}_d \phi \right) - [4 + 1] V(\phi) \right\} \\ &= -\frac{1}{6} \tilde{\nabla}^d \phi \tilde{\nabla}_d \phi - \frac{5}{3} V(\phi) \end{aligned} \quad (4.12)$$

izotróp nyomást kapták. A (4.11) és (4.12) összefüggéseket tekintve a skalármező energia-impulzus tenzora

$$\tilde{T}_{ab}^{F1} = \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi - V(\phi) \right) u_a u_b - \left(\frac{1}{6} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + \frac{5}{3} V(\phi) \right) h_{ab} . \quad (4.13)$$

A (4.13) energia-impulzus tenzor azonban nem egyezik meg azzal, amikor a (4.2) és (4.10) összefüggésekből származtatták:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{ab}^{F2} &= \left(u_a \sqrt{\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi} \right) \left(u_b \sqrt{\tilde{\nabla}^d \phi \tilde{\nabla}_d \phi} \right) - \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) (h_{ab} - u_a u_b) \\
 &= \left(\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi \right) u_a u_b + \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) u_a u_b - \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) h_{ab} \\
 &= \left(\frac{3}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) u_a u_b - \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + V(\phi) \right) h_{ab} .
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

A (4.11) és (4.12) esetén, továbbá az $L_{KG} \neq p$ és $L_{KG} = \pm \rho$.

A [303] cikk ezt javítva, bemutatta a Klein–Gordon skalármező energia-impulzus tenzorát időszerű, térszerű és null skalármező gradiens esetén. A [303] hivatkozásban is azt kapták, hogy az időszerű skalármező gradiens választásával a Klein–Gordon skalármező energia-impulzus tenzora ideális folyadékot ír le. Térszerű és null skalármező gradiens vizsgálata során megállapították, hogy nincs olyan megfigyelő, amelyre igaz, hogy $u^a \sim \tilde{\nabla}^a \phi$ úgy, hogy $u_a u^a = -1$. Ebből következik, hogy az 1+3 felbontás szerinti

$$p = \frac{1}{3} \tilde{T}_{ab} h^{ab}$$

összefüggés csak időszerű skalármező gradiens esetén áll fenn [299], [303]. A [303] hivatkozásban az izotróp nyomásra a

$$p = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi - V(\phi) \tag{4.15}$$

és az energiasűrűségre a

$$\begin{aligned}
 \rho &= \left| \tilde{\nabla}^d \phi \tilde{\nabla}_d \phi \right| - p \\
 &= \left[\text{sign} \left(\tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi \right) + \frac{1}{2} \right] \tilde{\nabla}^d \phi \tilde{\nabla}_d \phi + V(\phi)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

összefüggéseket kapták. Ezeket felhasználva, egy tachionikus megfigyelő esetén, azaz $u^a \sim \tilde{\nabla}^a \phi$ úgy, hogy $u_a u^a = 1$ a (4.15) és (4.16) alapján az izotróp nyomás

$$p_T = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi - V(\phi) , \tag{4.17}$$

illetve az energiasűrűség

$$\rho_T = \frac{3}{2} \tilde{\nabla}^d \phi \tilde{\nabla}_d \phi + V(\phi) , \tag{4.18}$$

amelyből $L_{KG} = p_T$.

Amennyiben az $u^a \sim \tilde{\nabla}^a \phi$ úgy, hogy $u_a u^a = 0$, akkor $p_T = -V(\phi)$ és $p_T + \rho_T = 0$, tekintve az (1.16), (4.2) összefüggéseket. Null skalármező gradiensnél, tehát a minimálisan csatolt skalármező lehet null folyadék, ha $p_T + \rho_T = 0$.

A minimálisan csatolt skalármező energia-impulzus tenzorának vizsgálata szempontjából előnyös lehet az 1+3 helyett a 2+1+1 dimenziós téridőfelbontás alkalmazása. Ennek érdekében a továbbiakban egy minimálisan csatolt Klein–Gordon skalármező, majd egy általános skalármező folyadékleírását fogom megvizsgálni a 2. fejezetben bevezetett nemmerőleges 2 + 1 + 1 formalizmus segítségével.

4.1. Minimálisan csatolt Klein–Gordon skalármező

A Klein–Gordon skalármezőre vonatkozó energia-impulzus tenzor vizsgálatához egy olyan hatásból indultam ki, amely tartalmazza az

$$S^{EH} [\tilde{g}^{ab}] = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{R} \quad (4.19)$$

Einstein–Hilbert hatást, az

$$\begin{aligned} S^\phi [\tilde{g}^{ab}, \phi] &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [-X - V(\phi)] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a \phi - V(\phi) \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Klein–Gordon hatást és egy

$$S^M [\tilde{g}^{ab}, \Psi] = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L^M \quad (4.21)$$

anyagi hatást. Az $X = \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}^a \phi / 2$ a kinetikus tag, $V(\phi)$ egy tetszőleges, a skalármezőtől függő potenciál, és a $16\pi G = 1 = c$ egységet választottam. Ekkor a teljes hatás

$$\begin{aligned} S^{KG} &= S^{EH} [\tilde{g}^{ab}] + S^\phi [\tilde{g}^{ab}, \phi] + S^M [\tilde{g}^{ab}, \Psi] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - V + L^M (\tilde{g}^{ab}, \Psi) \right]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A (4.22) hatás elsőrendű variációja

$$\begin{aligned} \delta S^{KG} &= \int d^4x \left(\delta \sqrt{-\tilde{g}} \right) \left[\tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi - V(\phi) \right] \\ &\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\delta \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab} + \tilde{g}^{ab} \delta \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \delta \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a \delta \phi - \partial_\phi V(\phi) \delta \phi \right] - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_{ab}^M \delta \tilde{g}^{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{R} + \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} V(\phi) \right] \delta \tilde{g}^{ab} \\
&+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\delta \tilde{g}^{ab} \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \delta \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - \partial_\phi V(\phi) \delta \phi \right] \\
&+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{g}^{ab} \delta \tilde{R}_{ab} - \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a \delta \phi \right] - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{T}_{ab}^M \delta \tilde{g}^{ab} \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{G}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi + \frac{\tilde{g}_{ab}}{4} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi + \frac{\tilde{g}_{ab}}{2} V - \frac{1}{2} \tilde{T}_{ab}^M \right] \delta \tilde{g}^{ab} \\
&+ \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\square} \phi - \partial_\phi V \right] \delta \phi + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\tilde{\nabla}^a \left(V_a - \delta \phi \tilde{\nabla}_a \phi \right) \right] ,
\end{aligned} \tag{4.23}$$

ahol felhasználtam a

$$\begin{aligned}
\delta \sqrt{-\tilde{g}} &= -\frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{2} \tilde{g}_{ab} \delta \tilde{g}^{ab} , \\
\tilde{g}^{ab} \delta \tilde{R}_{ab} &= \tilde{\nabla}^a \left(\tilde{\nabla}^b \delta \tilde{g}_{ab} - \tilde{g}^{cd} \tilde{\nabla}_a \delta \tilde{g}_{cd} \right) = \tilde{\nabla}^a V_a , \\
\tilde{T}_{ab}^M &= -\frac{2}{\sqrt{-\tilde{g}}} \frac{\delta \left(\sqrt{-\tilde{g}} L^M \right)}{\delta \tilde{g}^{ab}}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

összefüggéseket. A határtag elhagyásával a mezőegyenletek:

$$\tilde{G}_{ab} = \frac{1}{2} \left(\tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^c \phi \tilde{\nabla}_c \phi - \tilde{g}_{ab} V(\phi) \right) + \frac{1}{2} \tilde{T}_{ab}^M , \tag{4.25}$$

$$\tilde{\square} \phi = \partial_\phi V(\phi) , \tag{4.26}$$

ahol $\partial_\phi = \partial / \partial \phi$.

4.1.1. Időszerű skalármező gradiens

Amikor a skalármező gradiense időszerű, akkor az a téridő minden pontjában kijelöl egy időszerű egységvektort:

$$n_a = \frac{\tilde{\nabla}_a \phi}{\sqrt{-\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi}} , \quad n_a n^a = -1 . \tag{4.27}$$

A [293], [294], [299] és [303] hivatkozásokhoz hasonlóan a skalármező energia-impulzus tenzora ideális folyadék, azaz

$$\tilde{T}_{ab}^{PF} = \rho^{PF} n_a n_b + p^{PF} \tilde{g}_{ab} . \tag{4.28}$$

A 4-dimenziós metrika

$$\tilde{g}_{ab} = -n_a n_b + m_a m_b + g_{ab} \quad (4.29)$$

felbontását felhasználva az energia-impulzus tenzor a

$$\tilde{T}_{ab}^{PF} = \rho^{PF} n_a n_b + p^{PF} (m_a m_b + g_{ab}) \quad (4.30)$$

alakot ölti az (n^a, m^a) bázisban. A (4.25) alapján:

$$\tilde{T}_{ab}^{KG} = \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi - \tilde{g}_{ab} \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right). \quad (4.31)$$

A (4.31) energia-impulzus tenzor azonos a (4.7) energiasűrűséggel és a (4.8) nyomással rendelkező (4.30) ideális folyadék energia-impulzus tenzorával. Ez belátható, ha a (4.27) és a (4.29) összefüggéseket behelyettesítjük a (4.31)-be:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab}^{KG} &= n_a n_b \left(\sqrt{-\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi} \right)^2 - (-n_a n_b + m_a m_b + g_{ab}) \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\ &= n_a n_b \left(-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi + V \right) + (m_a m_b + g_{ab}) \left(-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi - V \right) \\ &= \rho^{PF} n_a n_b + p^{PF} (m_a m_b + g_{ab}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

A (4.31) energia-impulzus tenzor diagonális, így az 1.3.2. fejezetben bevezetett osztályozás alapján I-es típusú. Jelen esetben az energiatételek I-es típus esetén a következők: i) gyenge: $-\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \geq -2V$; ii) domináns: $V \geq 0$; iii) erős: $-\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \geq V$. Az összes energiatétel teljesül, amennyiben $0 \leq V \leq -\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi$.

4.1.2. Térszerű skalármező gradiens

Ha a skalármező gradiense térszerű, akkor az a téridő minden pontjában meghatároz egy térszerű egységvektort:

$$m_a = \frac{\tilde{\nabla}_a \phi}{\sqrt{\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi}}, \quad m_a m^a = 1. \quad (4.33)$$

Ebben az esetben az energia-impulzus tenzor a

$$\tilde{T}_{ab}^{IPF} = \rho n_a n_b + p_r m_a m_b + p_t g_{ab} \quad (4.34)$$

alakot ölti. A p_r a radiális nyomás, míg p_t a tangenciális nyomás. Behelyettesítve a (4.29) és (4.33) összefüggéseket a (4.31)-be, akkor a

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{ab}^{KG} &= m_a m_b \left(\sqrt{\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi} \right)^2 - (-n_a n_b + m_a m_b + g_{ab}) \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\ &= n_a n_b \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi + V \right) + m_a m_b \left(\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi - V \right) \\ &\quad + g_{ab} \left(-\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi - V \right) .\end{aligned}\quad (4.35)$$

A (4.35) alapján az energiasűrűség

$$\rho = \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi + V , \quad (4.36)$$

a radiális nyomás

$$p_r = \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi - V , \quad (4.37)$$

és a tangenciális nyomás

$$p_t = -\rho = -\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi - V . \quad (4.38)$$

Az energia-impulzus tenzor I-es típusú. Az energiafeltételek: i) gyenge: $\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \geq -2V$; ii) domináns: $V \geq 0$; iii) erős: $V \leq 0$. Az összes energiafeltétel teljesülésekor a $V = 0$, amelyből

$$\rho = p_r = -p_t = \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}^a \phi \geq 0 . \quad (4.39)$$

A (4.39) egy olyan nem ideális folyadék, amelynek energiasűrűsége azonos a radiális nyomásával, továbbá a tangenciális nyomásának -1 -szeresével.

A) Ideális folyadék a tachionikus megfigyelő szemszögéből:

A [303] hivatkozást tekintve, a (4.34) energia-impulzus tenzor tekinthető úgy, mint az m^a 4-es sebességű tachionikus ($m_a m^a = 1$) megfigyelő szerint érzékelt ideális folyadék ϕ skalármező energia-impulzus tenzora. Az ideális folyadék ekkor a

$$\tilde{T}_{ab}^T = (p^T + \rho^T) m_a m_b + p^T g_{ab} \quad (4.40)$$

alakba írható. A p^T a (4.17) összefüggés szerinti izotróp nyomás, míg ρ^T a (4.18) alakú energiasűrűség [303]. A (4.29) felbontást behelyettesítve a (4.40) energia-impulzus tenzorba:

$$\tilde{T}_{ab}^T = -p^T n_a n_b + (2p^T + \rho^T) m_a m_b + p^T g_{ab} .$$

Ezt összehasonlítva a (4.34) összefüggéssel kapjuk, hogy

$$p^T = p_t = -\rho, \quad \rho^T = p_r - 2p_t = p_r + 2\rho.$$

Mivel nem létezik olyan valós megfigyelő, amelynek 4-es sebessége térszerű, ezért ez az eset nem tekinthető fizikainak.

B) Ideális folyadékban terjedő radiális sugárzás:

A (4.34) energia-impulzus tenzorba behelyettesítve a (4.38) összefüggést kapjuk, hogy

$$\tilde{T}_{ab}^{IPF} = -p_t n_a n_b + p_r m_a m_b + p_t g_{ab}. \quad (4.41)$$

A (4.41) energia-impulzus tenzor megalkotható a

$$\tilde{T}_{ab}^{PF} = -p_r n_a n_b + p_t (m_a m_b + g_{ab}),$$

ideális folyadék és két

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab}^{R1} &= (p_r - p_t) t_a t_b, \\ \tilde{T}_{ab}^{R2} &= (p_r - p_t) \tau_a \tau_b \end{aligned} \quad (4.42)$$

sugárzás (null por) energia-impulzus tenzorainak összegéből. A két sugárzás iránya egymással párhuzamos, de ellentétesek. Gömbszimmetria vonatkozásában erre példa egy bejövő és egy kimenő radiális irányú sugárzás. A $\tilde{T}_{ab}^{R1}$ és $\tilde{T}_{ab}^{R2}$ esetén a null vektorok a

$$t_a = \frac{n_a + m_a}{\sqrt{2}}, \quad \tau_a = \frac{n_a - m_a}{\sqrt{2}} \quad (4.43)$$

úgy, hogy

$$t_a t^a = 0, \quad \tau_a \tau^a = 0, \quad t_a \tau^a = -1, \quad g_{ab} t^b = 0, \quad g_{ab} \tau^b = 0. \quad (4.44)$$

Ezek alapján a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab}^{IPF} &= \tilde{T}_{ab}^{PF} + \tilde{T}_{ab}^{R1} + \tilde{T}_{ab}^{R2}, \\ &= -p_r n_a n_b + p_t (m_a m_b + g_{ab}) + (p_r - p_t) t_a t_b + (p_r - p_t) \tau_a \tau_b \\ &= -p_r n_a n_b + p_t (m_a m_b + g_{ab}) + \frac{1}{2} (p_r - p_t) (n_a + m_a) (n_b + m_b) \\ &\quad + \frac{1}{2} (p_r - p_t) (n_a - m_a) (n_b - m_b) \\ &= -p_r n_a n_b + p_t (m_a m_b + g_{ab}) + (p_r - p_t) (n_a n_b + m_a m_b) \\ &= -p_t n_a n_b + p_r m_a m_b + p_t g_{ab}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Az összes energiafeltétel teljesülésekor a $\tilde{T}_{ab}^{PF}$ ideális folyadék negatív energiasűrűséggel („ghost folyadék”) és negatív nyomással rendelkezik, amelyek nagysága $-\rho$, míg a $\tilde{T}_{ab}^{R1}$ és $\tilde{T}_{ab}^{R2}$ null porok energiasűrűsége 2ρ .

A (4.42) null por sugárzási terek egy olyan anizotróp folyadékot írnak le, amelynek nincs tangenciális nyomása [292]. Gömbszimmetria esetén egy bejövő és egy kimenő radiális sugárzás szuperpozíciójának elemzése a [359] hivatkozásban található meg. A [360] hivatkozásban vizsgáltak egy Kantowsky–Sachs típusú homogén, zárt univerzumot, amiben két olyan radiális sugárzás van jelen, amelyek a kezdeti szingularitásban keletkeznek, majd kioltódnak egy végső szingularitásban. Negatív energiasűrűséggel rendelkező sugárzás („ghost sugárzás”) vezethet féreglyukakhoz [361], csupasz szingularitásokhoz és nyitott univerzumokhoz [362].

4.1.3. Nullszerű skalármező gradiens

Amennyiben a skalármező gradiense nullvektor, célszerű kiindulni a metrika (4.43) nullvektorok szerinti felbontásából. Ekkor a 4-dimenziós metrika a

$$\tilde{g}_{ab} = -2t_{(a}\tau_{b)} + g_{ab} \quad (4.46)$$

alakú. A skalármező gradiense a téridő minden pontjában meghatároz egy nullvektort:

$$t_a = \frac{\nabla_a \phi}{\sqrt{2}}, \quad t_a t^a = 0, \quad (4.47)$$

amelyből

$$\frac{1}{2} \nabla_a \phi \nabla^a \phi = 0. \quad (4.48)$$

A (4.48) összefüggést a hatásba nem lehet behelyettesíteni, azt csak a hatás variációja után szabad figyelembe venni. A (4.46) és (4.47) összefüggéseket behelyettesítve a (4.31) energia-impulzus tenzorba a

$$\tilde{T}_{ab}^{KG} = 2t_a t_b - \tilde{g}_{ab} V(\phi) \quad (4.49)$$

kifejezés adódik. A (4.49) energia-impulzus tenzort átírva az (n^a, m^a) bázisa a

$$\tilde{T}_{ab}^{KG} = \left(\sqrt{2} t_a \right) \left(\sqrt{2} t_b \right) - \left(-2t_{(a} \tau_{b)} + g_{ab} \right) \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right)$$

$$\begin{aligned}
&= 2t_a t_b - (-t_a \tau_b - t_b \tau_a + g_{ab}) \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\
&= (n_a + m_a)(n_b + m_b) + \left[\frac{1}{2} (n_a + m_a)(n_b - m_b) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (n_b + m_b)(n_a - m_a) - g_{ab} \right] \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\
&= n_a n_b + 2m_{(a} n_{b)} + m_a m_b + (n_a n_b - m_a m_b - g_{ab}) \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\
&= n_a n_b \left(1 + V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) + 2m_{(a} n_{b)} \\
&\quad + m_a m_b \left(1 - V - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) - g_{ab} \left(V + \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\
&= n_a n_b (1 + V) + 2m_{(a} n_{b)} + m_a m_b (1 - V) - g_{ab} V , \tag{4.50}
\end{aligned}$$

eredményt kaptam. Ehhez a (4.43) és (4.47) összefüggéseket használtam fel. A (4.50) mátrix alakja:

$$\tilde{T}_{ab}^{KG} = \begin{pmatrix} 1+V & 1 & 0 \\ 1 & 1-V & 0 \\ 0 & 0 & -g_{ab}V \end{pmatrix} . \tag{4.51}$$

A (4.51) energia-impulzus tenzor II-es típusú. A vonatkozó gyenge energiefeltétel esetén egyszerre kell teljesülnie, hogy $V(\phi) \leq 0$ és $V(\phi) \geq 0$. Ez csak akkor lehetséges, ha $V(\phi) = 0$. Ugyanez vonatkozik a domináns és erős energiefeltételekre. Amennyiben minden energiefeltétel teljesül, a skalármező energia-impulzus tenzora egy null por. A [297] hivatkozásban megmutatták, hogy a null por ugyanúgy viselkedik, mint egy nem ideális folyadék, amelynek energiasűrűsége, radiális nyomása és tangenciális nyomása azonos.

4.2. Minimálisan csatolt általános skalármező

A továbbiakban a ϕ skalármezőtől függő általános Lagrange-sűrűség esetén vizsgálom a skalármező folyadékleírását. A minimálisan csatolt általános skalármező hatása:

$$S^\phi [\tilde{g}^{ab}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} L(X, \phi) . \tag{4.52}$$

Felhasználva a (4.24) összefüggéseket, az $L_G = \partial L(X, \phi) / \partial G$ és $G = \{X, \phi\}$ jelöléseket, a (4.52) hatás variációja:

$$\begin{aligned}
\delta S^\phi &= \int d^4x \delta \left(\sqrt{-\tilde{g}} \right) L(X, \phi) + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \delta L(X, \phi) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{g}_{ab} L(X, \phi)] \delta \tilde{g}^{ab} + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \delta L(X, \phi) \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [L_X(X, \phi) \delta X + L_\phi(X, \phi) \delta \phi] \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} L(X, \phi) + \frac{1}{2} L_X(X, \phi) \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi \right] \delta \tilde{g}^{ab} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} L_X(X, \phi) \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a \delta \phi + L_\phi(X, \phi) \delta \phi \right] \\
&= \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} L + \frac{1}{2} L_X \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi \right] \delta \tilde{g}^{ab} \\
&\quad + \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[-\frac{1}{2} L_X \tilde{\square} \phi - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_a L_X \tilde{\nabla}^a \phi + L_\phi \right] \delta \phi \\
&\quad + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{\nabla}^a \left[L_X \delta \phi \tilde{\nabla}_a \phi \right] .
\end{aligned} \tag{4.53}$$

Az inverz metrika és skalármező szerinti variációból a mezőegyenletek a

$$\tilde{G}_{ab} = \frac{1}{2} \left[\tilde{g}_{ab} L - L_X \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi \right] + \frac{1}{2} \tilde{T}_{ab}^M , \tag{4.54}$$

illetve

$$L_X \tilde{\square} \phi = L_\phi - \tilde{\nabla}^a \phi \tilde{\nabla}_a L_X . \tag{4.55}$$

A (4.54) alapján a skalármező energia-impulzus tenzora:

$$\tilde{T}_{ab}^L = \tilde{g}_{ab} L - L_X \tilde{\nabla}_a \phi \tilde{\nabla}_b \phi . \tag{4.56}$$

4.2.1. Időszerű skalármező gradiens

Időszerű skalármező gradiens a (4.27) alapján egy időszerű n^a egységvektort határoz meg. A 4-dimenziós metrika felbontásához a (4.29) szerinti (n^a, m^a) bázisbeli alakot használtam. Ezeket behelyettesítve a (4.56) energia-impulzus tenzorba a

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{ab}^L &= (-n_a n_b + m_a m_b + g_{ab}) L - L_X n_a n_b \left(-\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\
&= (2X L_X - L) n_a n_b + L (m_a m_b + g_{ab})
\end{aligned} \tag{4.57}$$

eredményt kaptam. A (4.57) egy I-es típusú ideális folyadék, amelynek a

$$\rho = 2XL_X - L \quad (4.58)$$

az energiasűrűsége és

$$p = L \quad (4.59)$$

az izotróp nyomása.

4.2.2. Térszerű skalármező gradiens

Térszerű skalármező gradiens a (4.33) alapján egy térszerű m^a egységvektort jelöl ki. A (4.29) és (4.33) behelyettesítésével a (4.56) energia-impulzus tenzor a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{ab}^L &= (-n_a n_b + m_a m_b + g_{ab}) L - L_X m_a m_b \left(\tilde{\nabla}_c \phi \tilde{\nabla}^c \phi \right) \\ &= -L n_a n_b + (L - 2XL_X) m_a m_b + L g_{ab} \end{aligned} \quad (4.60)$$

alakú lesz. A (4.60) egy I-es típusú nem ideális folyadék. A (4.60)-ból kiolvasható, hogy a nem ideális folyadék energiasűrűsége a

$$\rho = -L, \quad (4.61)$$

a radiális nyomása a

$$p_r = L - 2XL_X, \quad (4.62)$$

míg a tangenciális nyomása a

$$p_t = L = -\rho. \quad (4.63)$$

A minimálisan csatolt skalármező tangenciális nyomása és energiasűrűsége között ugyanolyan kapcsolat fedezhető fel, mint Klein–Gordon mezőre a 4.1.2. alfejezet (4.38) összefüggésében.

4.2.3. Nullszerű skalármező gradiens

Nullszerű skalármező gradiens mellett a 4.1.3. alfejezetben használt valós null vektorokkal lehet megadni a (4.56) energia-impulzus tenzort. Ekkor a (4.56) a

$$\tilde{T}_{ab}^L = -2L_X(\phi) t_a t_b + \tilde{g}_{ab} L(\phi) \quad (4.64)$$

alakot ölti. Az $X = t_a t^a = 0$, amelyből $L(\phi, X) = L(\phi)$. Ez utóbbi összefüggések, azonban csak a mezőegyenletek származtatása után alkalmazhatók, tehát a hatásba nem behelyettesíthetők.

Felhasználva a (4.43) és (4.46) összefüggéseket a (4.64) energia-impulzus tenzor (n^a, m^a) bázisbeli alakja:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}_{ab}^L &= -2L_X(\phi) t_a t_b + (-t_a \tau_b - t_b \tau_a + g_{ab}) L(\phi) \\
 &= -L_X(\phi) (n_a + m_a) (n_b + m_b) - \frac{1}{2} (n_a + m_a) (n_b - m_b) L(\phi) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (n_b + m_b) (n_a - m_a) L(\phi) + g_{ab} L(\phi) \\
 &= -L_X(\phi) (n_a n_b + n_a m_b + n_b m_a + m_a m_b) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (n_a n_b - n_a m_b + n_b m_a - m_a m_b) L(\phi) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (n_b n_a - n_b m_a + n_a m_b - m_a m_b) L(\phi) + g_{ab} L(\phi) \\
 &= -[L_X(\phi) + L(\phi)] n_a n_b - 2L_X(\phi) n_{(a} m_{b)} \\
 &\quad - [L_X(\phi) - L(\phi)] m_a m_b + g_{ab} L(\phi) .
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

A (4.65) mátrix alakja a

$$\tilde{T}_{ab}^L = -L_X(\phi) \begin{pmatrix} 1 + \frac{L(\phi)}{L_X(\phi)} & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \frac{L(\phi)}{L_X(\phi)} & 0 \\ 0 & 0 & -g_{ab} \frac{L(\phi)}{L_X(\phi)} \end{pmatrix} . \tag{4.66}$$

A (4.65) energia-impulzus tenzor II-es típusú. Minden energiafeltétel teljesül, ha $L(\phi) = 0$, amely alapján a skalármező null por. A skalármező energia-impulzus tenzorára vonatkozó diffeomorfizmus invariancia miatt tudjuk, hogy

$$\tilde{\nabla}^a \tilde{T}_{ab}^L = 0 . \tag{4.67}$$

Továbbá egyszerűen belátható, hogy

$$\tilde{\nabla}^a L_X(\phi) \propto t^a , \quad \tilde{\nabla}^a L(\phi) = \sqrt{2} L_\phi(\phi) t^a . \tag{4.68}$$

A (4.68) összefüggéseket behelyettesítve a (4.67)-be azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 0 &= \tilde{\nabla}^a [-2L_X(\phi) t_a t_b + \tilde{g}_{ab} L(\phi)] \\
 &= -2\tilde{\nabla}^a L_X(\phi) t_a t_b - 2L_X(\phi) \tilde{\nabla}^a t_a t_b - 2L_X(\phi) t_a \tilde{\nabla}^a t_b + \tilde{g}_{ab} \tilde{\nabla}^a L(\phi) \\
 &= -2L_X(\phi) \tilde{\nabla}^a t_a t_b - 2L_X(\phi) t_a \tilde{\nabla}^a t_b + \sqrt{2} L_\phi(\phi) t_b .
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

A (4.69) átrendezésével a

$$t^a \tilde{\nabla}_a t_b = \left(\frac{L_\phi(\phi)}{\sqrt{2} L_X(\phi)} - \tilde{\nabla}_a t^a \right) t_b \tag{4.70}$$

geodetikus egyenletet kaptam. A (4.55) mezőegyenlet átalakításával a

$$\tilde{\nabla}_a t^a = \frac{L_\phi(\phi)}{\sqrt{2}L_X(\phi)} \quad (4.71)$$

összefüggés adódik. Ezt a (4.70) egyenletben felhasználva kapjuk, hogy

$$t^a \tilde{\nabla}_a t_b = 0 . \quad (4.72)$$

A (4.72) egyenlet szerint a minimálisan csatolt skalármező gradiens pályáját, az affin paraméterezett geodetikus egyenlet írja le, ahogy azt a [298] hivatkozásban is megmutatták.

5. Összefoglalás

Köztudott, hogy az univerzum ismeretlen anyagi összetevőket is tartalmaz, a sötét anyagot és a sötét energiát. Magyarozatuk egyik irányaként születtek meg az általános relativitáselméletet módosító gravitációs elméletek. Ezeknek egyik legegyszerűbb osztálya, az egy skalármezőt tartalmazó, Ostrogradsky-instabilitástól mentes Horndeski elmélet. A gravitációs hullám és a gamma kitörési mérésekkel kompatibilis Horndeski elmélet alosztálya a Kinetic Gravity Braiding. Ezen elméletek közé sorolható a sötét anyagot és a sötét energiát leírni képes k -eszencia elmélet. A megfigyelésekből adódó kényszerek ellenére a k -eszencia család számos elméletet foglal magába. Ezek egyenként ugyancsak számos dinamikai megoldást tartalmaznak egyszerűsítésektől és szimmetria választásoktól függően.

A módosított gravitációelméletekben az egzakt megoldások származtatása komoly matematikai kihívásokat jelent. Tekintsük csupán az általános relativitáselmélet Einstein-egyenletét. Az összegzési konvencióból adódó megtévesztően egyszerű alakja ellenére, az Einstein-egyenlet egy 10 független változót tartalmazó, nemlineáris, csatolt parciális differenciálegyenletrendszer. A bonyolult 4-dimenziós dinamikai egyenletek és a bennük szereplő tenzoriális, vektoriális változók kezelhetősége érdekében dolgoztak ki különböző téridőfelbontási módszereket. Ezek egyik ágát képviselik, a téridőt metrikus változók szerint felbontó matematikai formalizmusok, amelyek közül az első volt az R. Arnowitt, S. Deser és C. W. Misner által bevezetett $3 + 1$ dimenziós téridőfelbontás.

Az időfejlődés vizsgálata mellett egy kijelölt térbeli irány menti terjedés tanulmányozása érdekében vezették be a merőleges $s+1+1$ dimenziós téridőfelbontást [345]. Az $s+1+1$ felbontásban tárgyalták a gravitáció hamiltoni formalizmusát [346], valamint $s=2$ esetben a felbontást gömbszimmetrikus, sztatikus téridő megoldások származtatására használták a GLPV és a Horndeski elméletekben [197]. A [197] folyóiratcikkekben bemutatott megoldások stabilitásvizsgálata során a perturbáció páros szektorában, mértékválasztás után egy tetszőleges függvény maradt a perturbációs egyenletekben. Ennek oka az volt, hogy egy szabadsági fokot el kellett használniuk a fóliázás merőlegességének megtartása érdekében a perturbációszámítás során.

A disszertáció 2. fejezetében az ADM változók alapján bevezetett nemmerőleges $2+1+1$ téridőfelbontás formalizmusát mutattam be. Ennek számolási alapja szorosan kötődik a merőleges $s+1+1$ fóliázás során a [345], [346] hivatkozásokban ismertett matematikai módszerekhez. Ismertettem a $t = \text{konst.}$ és $\chi = \text{konst.}$ választással de-

finiált 3-dimenziós S_t és $\mathfrak{M}_\chi$ hiperfelület seregekhez adaptált $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_i\}$, illetve $g_{\mathbf{A}} = \{k, l, G_i\}$ ortonormált bázisokat és duálisaikat. A 3-dimenziós hiperfelület seregek metszete a 2-dimenziós $\Sigma_{t\chi}$ felületet határozza meg. Tárgyaltam az n^a , m^a , k^a és l^a vektorok kovariáns deriváltjainak felbontását, majd definiáltam a $\Sigma_{t\chi}$ beágyazását jellemző külső görbületeket, normális fundamentális formákat, normális fundamentális skalárokat és gyorsulásokat. Megmutattam, hogy az m^a és k^a örvényes vektormezők, mivel az $[n, F_j]^a$ Lie-zárójel m^a irányú és az $[l, G_j]^a$ Lie zárójel k^a irányú projekciói nem nullák. Az m^a és k^a vektorok 3-dimenziós örvényeinek az n^a és az l^a szerinti kontrakciói az $\mathcal{L}_a^*$ és a $\mathcal{K}_a^*$ formákkal állnak kapcsolatban. A (2.39) összefüggés, és az evolúciós vektorfolyamok menti Lie-deriváltak alapján megadtam a beágyazási változók és a metrikus változók közötti összefüggéseket. Definiáltam a 3. fejezetben felírt EFT hatásban szereplő beágyazási változókból képezett skalárokat mind az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisokban.

A nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus kidolgozása után a 2.1. alfejezetben megadtam egy egyértelmű mértékrögzítést. A mértékrögzítés során három szabadsági fokot használtam a radiális unitér mérték és a konformis mérték rögzítéseéhez, hasonlóan a [197] hivatkozáshoz. Mivel nem szükséges a fóliázás merőlegességének megtartása a perturbációs számítás során, a $\hat{P} = 0$ feltétel megválasztásával egyértelmű mértékrögzítést értem el.

A 2.2. alfejezetben a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban felírtam az Einstein–Hilbert hatást az (n^a, m^a) és (k^a, l^a) bázisok használatában megjelenő mennyiségekkel kifejezve. A formalizmus (n^a, m^a) bázisában számoltam tovább megadva az általános relativitáselméleti Lagrange-sűrűség Liouville-formáját, amelyben szerepelnek a hamiltoni és impulzus kényszerek. A K_{ab} , $\mathcal{K}^a$, K beágyazási változókkal meghatároztam a π_{ab} , p^a , p kanonikus impulzusokat, amelyekkel átírtam a Lagrange-sűrűséget, majd származtattam a kanonikus mozgásegyenleteket.

A 2.3. alfejezetben, az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus és a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ téridőfelbontás összehasonlítását mutattam be. Ehhez meghatároztam az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmus kinematikai mennyiségeit a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus beágyazási változóival. A kovariáns formalizmus ω_{ab} 3-dimenziós örvényének az Ω és az Ω^a komponenseihez, illetve a ξ 2-dimenziós örvényhez hasonló mennyiségek nem jelennek meg a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmusban. Ennek oka, hogy a dupla fóliázáshoz szükséges a 3-dimenziós hiperfelületek megléte. Ekkor, azonban az (n^a, m^a) bázisban egyedül az m^a bázisvektor n^a normálissal párhuzamosan projektált 3-dimenziós örvénye lehet nem zérus, amely az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmusban az α_a és a Σ_a kinematikai mennyiségekkel áll kapcsolatban. A [323] hivatkozás (71) propagációs egyenletét átírtam a nemmerőleges $2 + 1 + 1$ formalizmus beágyazási vál-

tozóival, majd összehasonlítottam a 2.2. alfejezet (2.101) impulzus kényszerével. A két egyenlet akkor azonos, ha az $1 + 1 + 2$ kovariáns formalizmusban $\Omega = 0 = \Omega^a$, ahogy ez az előzőek alapján várható.

A 3. fejezetben a nemmerőleges $2+1+1$ formalizmust alkalmaztam gömbszimmetrikus, sztatikus fekete lyukak, csupasz szingularitással rendelkező, illetve homogén téridő megoldások levezetéséhez a k -eszencia elméletekben, speciális $\bar{G}_4(\phi)$ függvényválasztás mellett. Megadtam $G_5(\phi, X) = 0$ esetén a Horndeski elmélet Lagrange-sűrűségének az (n^a, m^a) , illetve a (k^a, l^a) bázisokban használt mennyiségekben kifejtett alakjait. Feltettem, hogy az EFT hatás a nemmerőleges $2+1+1$ felbontott alakba írt L_2, L_3 , illetve L_4 Lagrange-sűrűségekben megjelenő beágyazási változóktól és belőlük képezett skalároktól függ funkcionálisan. Ennek az EFT hatásnak a variációjából származtattam a gömbszimmetrikus, sztatikus háttérre vonatkozó mezőegyenleteket mindkét bázisban a radiális unitér, illetve a konformis mérték választással. A mezőegyenletek tesztelése érdekében az Einstein–Hilbert hatás kiválasztásával származtattam a Schwarzschild megoldást az EFT mezőegyenletekből. Megmutattam, hogy a Horndeski elmélet $G_2(\phi, X), G_4(\phi, X) = G_4(\phi), G_3(\phi, X) = 0, G_5(\phi, X) = 0$ alosztályának csak az általános relativitáselméleti határeset adja a Schwarzschild megoldást. A (k^a, l^a) bázisban az EFT mezőegyenleteket specializáltam a nem minimálisan csatolt k -eszencia elméletekre, továbbá a metrikus függvényekre kiróttam egy további feltételt ($\bar{N} = \bar{M}^{-1}$). Téridő megoldásokat a $\bar{G}_4(\phi)$ egyetlen szabad függvény különböző megadásaival származtattam. A kapott téridők tartalmaznak egy központi szingularitást az $r = 0$ -ban. Az $\bar{N}^2 = 0$ egyenlet határozza meg az eseményhorizontok helyzetét. Az integrációs konstansok különböző megválasztásaival megadtam az egyes téridők esetén a horizontok számát. A $\bar{G}_4(\phi) = \text{konst.}$ választáskor egy darab horizonttal rendelkező fekete lyuk megoldást találtam. A horizonton kívül a téridő gömbszimmetrikus, sztatikus, és a Λ integrációs konstanstól függően aszimptotikusan (anti) de Sitter, vagy aszimptotikusan sík. A $\bar{G}_4(\phi) = r^\alpha$ ($\alpha > 0$) esetben a megjelenő két integrációs konstans jelenlététől és előjelétől függően csupasz szingularitást, valamint egy, vagy két horizonttal rendelkező fekete lyukat tartalmazó téridőket találtam. A $\bar{G}_4(\phi) = A(1 + B)$ választás során adódó $\bar{N}^2$ függvényt ábrázoltam a $Bm = 1$, a $Bm = -1$, és a $\Lambda m^2 = -1$ paraméter választásoknak megfelelően. A megoldások ekkor csupasz szingularitásokat, illetve egy eseményhorizonttal rendelkező hajas fekete lyukakat tartalmaztak. Találtam olyan fekete lyuk megoldásokat is, amelyekben egy további szingularitás jelent meg a horizonton kívül, vagy a két horizont között.

A 4. fejezetben minimálisan csatolt skalármezőre vonatkozó energia-impulzus tenzorokat vizsgáltam, amelyhez felhasználtam a nemmerőleges $2+1+1$ felbontást. Először a minimálisan csatolt Klein–Gordon skalármezőt választottam és határoztam meg a ska-

lármező energia-impulzus tenzorát időszerű, térszerű, illetve null skalármező gradiens esetén. Ezután az $L(X, \phi)$ Lagrange-sűrűség esetén vezettem le a minimálisan csatolt általános skalármező energia-impulzus tenzorát. Különböző energia-impulzus tenzorokat tárgyaltam időszerű, térszerű és nullszerű skalármező gradiens választásokkor. Mind a Klein–Gordon, mind az általános skalármező esetén időszerű skalármező gradiens mellett a skalármező energia-impulzus tenzora ideális folyadék. A Klein–Gordon, és az általános skalármező energia-impulzus tenzora I-es típusú nem ideális folyadék, ha a skalármező gradiense térszerű. Nullszerű skalármező gradiens esetén mind a Klein–Gordon skalármező, mind az általános skalármező energia-impulzus tenzora II-es típusú nem ideális folyadékot ír le.

A 2. fejezetben levezetett nemmerőleges $2+1+1$ téridőfelbontással lehetőségessé vált a [197] hivatkozásban bemutatott perturbációszámítás páros szektorában az egyértelmű mértékrögzítés. Emiatt egy ígértes további kutatást jelenthet a perturbációs egyenletek levezetése a páros szektorban a 3. fejezetben tárgyalt általános EFT hatás esetén. A kapott páros és páratlan szektorbeli perturbációs egyenletek ezután összehasonlíthatók a [357] hivatkozásban bemutatott eredményekkel. Érdekes lenne továbbá megvizsgálni a perturbációs egyenletek stabilitását, kizárni a „ghost” és „Laplace” instabilitásokat, továbbá kiválasztani a legelőnyösebb mértékrögzítést.

A 3. fejezetben kapott gömbszimmetrikus, sztatikus téridő megoldások elemzése tartalmaz további kihívásokat. Szükséges lehet annak a megállapítása, hogy mely megfigyelési paraméterek alapján észlelhető a skalár haj jelenléte. Érdekes lenne megállapítani, melyek a fizikai, nem kauzalitást sértő k -eszencia megoldások. Azaz mely megoldások származhatnak valóban egy magasabb energiás, még nem létező kvantum-gravitáció EFT közelítéséből [225].

6. Summary

It is widely recognised that the universe contains unknown components, dark matter and dark energy. As one path toward their explanation, numerous gravitational theories modifying general relativity have been proposed. The Horndeski theory is one of the simplest class of these models introducing a single scalar field and remaining free of Ostrogradsky instability. The Kinetic Gravity Braiding subclass of Horndeski theory is compatible with gravitational wave and gamma-ray burst measurements. These theories include the k -essence theory which can describe dark matter and dark energy. Although it is constrained by observations, the k -essence family also includes numerous subtheories. Each of these also offers many dynamical solutions depending on simplifications and symmetry choices.

Derivation of exact solutions in modified gravity theories poses mathematical challenges. Let us simply consider the Einstein equation of general relativity. Despite its deceptively simple form due to the summation convention, the Einstein equation is a nonlinear, coupled partial differential equation system composed of 10 equations. Spacetime decomposition methods were developed to make the 4-dimensional dynamical equations more manageable. One branch of these is represented by a mathematical formalism that decomposes the spacetime in terms of metric variables. The first among them is the $3 + 1$ dimensional spacetime decomposition introduced by R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner. In addition to the temporal evolution, the propagation along a chosen spatial direction was studied through the development of the $s + 1 + 1$ dimensional spacetime decomposition [345]. The Hamiltonian formulation of gravity was discussed within the $s + 1 + 1$ decomposition [346], while this formalism also was applied to derive spherically symmetric, static spacetime solutions in GLPV and Horndeski theories [197] with $s = 2$. During the stability analysis of the solutions according to Ref. [197], an arbitrary function remained in the perturbation equations for the even-parity perturbations. This resulted from the need to use one degree of freedom to maintain the orthogonality of the foliation during the perturbation.

In section 2 of the dissertation, I presented the formalism of the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ spacetime decomposition based on ADM variables. The mathematical method of this formalism is closely related to those described in Refs. [345], [346] for the orthogonal $s + 1 + 1$ foliation. I introduced the orthonormal bases $f_{\mathbf{A}} = \{n, m, F_{\mathbf{i}}\}$ and $g_{\mathbf{A}} = \{k, l, G_{\mathbf{i}}\}$ and their duals, adapted to the families of 3-dimensional S_t and

$\mathfrak{M}_\chi$ hypersurfaces defined by the choices $t = \text{const.}$ and $\chi = \text{const.}$, respectively. The intersection of the 3-dimensional hypersurfaces determines the 2-dimensional $\Sigma_{t\chi}$ surface. I discussed the decomposition of the covariant derivatives of the vectors n^a , m^a , k^a and l^a , then defined the extrinsic curvatures, normal fundamental forms, normal fundamental scalars, and accelerations characterizing the embedding of $\Sigma_{t\chi}$. I showed that both m^a and k^a have vorticity, since the m^a projection of the Lie-bracket $[n, F_j]^a$ and the k^a projection of the Lie-bracket $[l, G_j]^a$ are non zero. The contraction of the 3-dimensional vorticities of the vectors m^a and k^a with respect to n^a and l^a are related to the forms $\mathcal{L}_a^*$ and $\mathcal{K}_a^*$, respectively. I derived the relations between the embedding variables and the metric variables using the relation (2.39) and their Lie derivatives along the evolution vector fields. In addition, I gave the expression of a generic EFT action in terms of scalars composed from the embedding variables using either (n^a, m^a) or (k^a, l^a) basis.

After the formulation of the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ decomposition, I provided an unambiguous gauge fixing in subsection 2.1. I used three degrees of freedom to impose the radial unitary and conformal gauge, similarly to [197]. Since preserving the orthogonality of the foliation during the subsequent perturbation is not required, I achieved an unambiguous gauge by choosing an additional condition $\hat{P} = 0$.

In subsection 2.2, I expressed the Einstein–Hilbert action in terms of quantities occurring in using either (n^a, m^a) or (k^a, l^a) basis. I used the (n^a, m^a) basis when giving the Liouville form of the Lagrangian and comprising the Hamiltonian and momentum constraints. I expressed the Lagrangian in terms of canonical momenta π_{ab} , p^a , p , composed from the embedding variables K_{ab} , $\mathcal{K}^a$, K , then I derived the canonical equations of motion.

In subsection 2.3, I compared the $1 + 1 + 2$ covariant formalism with the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ spacetime decomposition. I expressed the kinematical quantities of the $1 + 1 + 2$ covariant formalism in terms of embedding variables of the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism. There are no quantities in the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism corresponding to Ω and Ω^a components of the 3-dimensional vorticity ω_{ab} , nor to the 2-dimensional vorticity ξ . This arises from the existence of 3-dimensional hypersurfaces being essential for the double foliation. Considering the (n^a, m^a) basis, only the n^a projection of the 3-dimensional vorticity of m^a can be non-zero. This projection is related to the kinematical quantities α_a and Σ_a in the $1 + 1 + 2$ covariant formalism. I expressed the propagation equation (71) of Ref. [323] in terms of embedding variables of the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism, then I compared it with the momentum constraint (2.101). These two equations coincide in the obvious subcase $\Omega = 0 = \Omega^a$.

In section 3, I applied the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ formalism to derive the spheri-

cally symmetric, static black hole solutions, spacetimes with naked singularities, and homogeneous solutions in k -essence theories when choosing different $\bar{G}_4(\phi)$ function. I expressed the Lagrangians of Horndeski theory with $G_5(\phi, X) = 0$ in terms of variables occurring when using either (n^a, m^a) or (k^a, l^a) basis. I assumed that the EFT action functionally depends on the embedding variables and scalars constructed from them, which appear in the decomposed nonorthogonal $2 + 1 + 1$ form of the L_2 , L_3 and L_4 Lagrangians. I determined the field equations for a spherically symmetric, static background by varying the EFT action when using these two bases. I considered both the radial unitary and the conformal gauges. In order to test the field equations, I derived the Schwarzschild solution using the EFT field equations and selecting the Einstein–Hilbert subcase of the action. For the subclass of Horndeski theories with $G_2(\phi, X)$, $G_4(\phi, X) = G_4(\phi)$, $G_3(\phi, X) = 0$, $G_5(\phi, X) = 0$, I showed that only the general relativity limit allows the Schwarzschild solution. In the (k^a, l^a) basis, I derived the EFT field equations for the nonminimally coupled k -essence theories with $\bar{N} = \bar{M}^{-1}$. I obtained spacetime solutions by specifying different forms of the single free function $\bar{G}_4(\phi)$. In all cases, the solutions contained a central singularity at $r = 0$. The equation $\bar{N}^2 = 0$ determined the location of the event horizons. I identified the number of horizons in each solution related to the integrational constants. I found a black hole with a single horizon in the case $\bar{G}_4(\phi) = \text{const.}$ Outside of the horizon the spacetime is spherically symmetric, static and asymptotically (anti) de Sitter or asymptotically flat, depending on the integrational constant Λ . I obtained spacetimes with either a naked singularity or a black hole with one or two horizons in case of $\bar{G}_4(\phi) = r^\alpha$ ($\alpha > 0$). I plotted the resulting $\bar{N}^2$ function with $Bm = 1$, $Bm = -1$, and $\Lambda m^2 = -1$ in case of $\bar{G}_4(\phi) = A(1 + B)$. The solutions include naked singularities as well as hairy black holes with an event horizon. I also found black hole solutions with an additional singularity occurring either outside the horizon or between the two horizons.

In section 4, I analyzed the energy-momentum tensor of a minimally coupled scalar field using the nonorthogonal $2 + 1 + 1$ decomposition. First, I considered the minimally coupled Klein–Gordon scalar field and determined its energy-momentum tensors, when the scalar field gradient is timelike, spacelike, and lightlike. Next, I derived the energy-momentum tensor of a minimally coupled general scalar field defined by the Lagrangian density $L(X, \phi)$. I discussed different energy-momentum tensors with timelike, spacelike, and null scalar field gradients. The energy-momentum tensor took the form of a perfect fluid, when the scalar gradient is timelike. In addition, the energy-momentum tensor describes a type I imperfect fluid and a type II imperfect fluid when the scalar field gradient is spacelike and lightlike, respectively.

The nonorthogonal $2+1+1$ spacetime decomposition presented in section 2 enables unambiguous gauge fixing for the even parity sector of the perturbation detailed in Ref. [197]. Consequently, the investigation of perturbational equations in the even parity sector suggests a promising direction in the discussion of the EFT action introduced in section 3. The resulting even and odd perturbational equations could be compared with the solutions presented in Ref. [357]. It could also be of interest to analyze the stability of perturbational equations, ruling out ghost and Laplacian instabilities, and selecting the most advantageous gauge fixing.

The investigation of spherically symmetric, static spacetime solutions obtained in section 3. contains additional challenges. It could be necessary to identify which observational parameters might reveal the presence of scalar hair. Determining which k -essence solutions are physical and do not violate causality would be also worthwhile. Specifically, the solution that could genuinely originate from a high-energy, as-yet-unknown quantum gravity EFT approximation [225].

7. Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Dr. Keresztes Zoltán témavezetőmnek átfogó és értékes szakmai támogatását, amely a kutatás teljes folyamatát végigkísérte. Hálás vagyok mindazért a tudásért, iránymutatásért és építő kritikáért, amelyet a munka minden szakaszában megosztott velem, és amely alapvetően formálta a disszertáció szakmai minőségét. Köszönöm szakértelmét a cikkek és a prezentációk elkészítésében is. Köszönöm mindazt a segítséget, amelyet a disszertáció létrejöttének teljes folyamatában nyújtott.

Köszönöm továbbá Dr. Gergely Árpád Lászlónak az ötleteit, aktív segítségét a közös munka során, valamint hálás vagyok bátorító és támogató hozzáállásáért.

Köszönöm családomnak, barátaimnak és az SZTNH-nál dolgozó kollégáimnak a disszertáció megírása közbeni állandó biztatásukat, amely sokat segített, hogy kitartó és elkötelezett maradjak.

Köszönettel tartozom az Új Nemzeti Kiválósági Programnak ÚNKP-19-3, ÚNKP-20-3, ÚNKP-21-3, ÚNKP-22-3 ösztöndíjakért, a CANTATA CA-15117 COST, a GW-verse CA-16104 COST és a QG-MM CA18108 COST kollaborációknak, valamint a 123996 számú NKFI kutatási pályázatnak, hogy hozzájárultak a nemzetközi konferenciákra való részvételhez.

Hivatkozások

- [1] G. Rodríguez-Moris, J. A. Docobo, *The Discovery of Neptune Revisited*, [arXiv:2405.06310[astro-ph.EP]] (2024).
- [2] S. P. Pogossian, *Vulcan and anomalous displacement of Mercury's perihelion*, *Astrophys. Space Sci.* **368**, 52 [arXiv:2212.00074[astro-ph.EP]] (2023).
- [3] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, 5. és 707 oldalak (1973).
- [4] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 189–196 (1916).
- [5] E. Hubble, M. L. Humason, *The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae*, *Astrophys. J.* **74**:43 (1931).
- [6] F. Zwicky, *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*, *Helv. Phys. Acta.* **6**, 110 (1933), angol fordítás: Zwicky, F. *Republication of: The redshift of extragalactic nebulae*, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 207–224 (2009).
- [7] F. Zwicky, *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*, *Astrophys. J.* **86**:217 (1937).
- [8] S. Smith, *The Mass of the Virgo Cluster*, *Astrophys. J.* **83**:23 (1936).
- [9] Planck Collaboration, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, *A&A* **641** [arXiv:1807.06209 [astro-ph.CO]] (2020).
- [10] V. C. Rubin, W. K. Ford, *Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions*, *Astrophys. J.* **159** (1970).
- [11] K. C. Freeman, *On the Disks of Spiral and S0 Galaxies*, *Astrophys. J.* **160**, 811 (1970).
- [12] D. H. Rogstad, G. S. Shostak, *Gross Properties of Five Scd Galaxies as Determined from 21-CENTIMETER Observations*, *Astrophys. J.* **176**, 315 (1972).
- [13] M. S. Roberts, A. H. Rots, *Comparison of Rotation Curves of Different Galaxy Types*, *A&A* **26**, 483–485 (1973).

-
- [14] M. S. Roberts, R. N. Whitehurst, *The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances*, *Astrophys. J.* **201**:327-346 (1975).
- [15] T. S. van Albada, J. N. Bahcall, K. Begeman, R. Sancisi, *Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198*, *Astrophys. J.* **295**:305-313 (1985).
- [16] C. Carignan, L. Chemin, W. K. Huchtmeier, F. J. Lockman, *Extended HI Rotation Curve and Mass Distribution of M31*, *Astrophys. J.* **641**:L109-L112, [arXiv:astro-ph/0603143] (2006).
- [17] V. C. Rubin, N. Thonnard, W. K. Ford, *Extended rotational curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties $Sa \rightarrow Sc$* , *The Astrophysical J.* **225**:L107-L111 (1978).
- [18] G. Bertone, D. Hooper, *History of dark matter*, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 045002 (2018).
- [19] B. Paczynski, *Gravitational Microlensing by the Galactic Halo*, *Astrophys. J.* **304**:1 (1986).
- [20] Alcock et al., *The MACHO Project: Microlensing Results from 5.7 Years of Large Magellanic Cloud Observations*, *The Astrophysical J.* **542**(1), 281-307. (2000).
- [21] T. Lasserre, EROS Collaboration, *Not enough stellar Mass Machos in the Galactic Halo*, [arXiv:astro-ph/0002253] (2000).
- [22] P. Tisserand és társai, *Limits on the Macho content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds*, *A&A* **469**(2), 387-404 [arXiv:astro-ph/0607207] (2007).
- [23] H. A. Bethe, *Energy Production in Stars*, *Phys. Rev.* **55**, 434 (1939).
- [24] F. Hoyle, *On Nuclear Reactions Occuring in Very Hot STARS.I. the Synthesis of Elements from Carbon to Nickel*, *Astrophysical Journal Supplement* **1**, 121 (1954); *The Steady-State Universe*, *Scientific American* **195**(3), 157-169 (1956).
- [25] R. A. Alpher, H. Bethe, G. Gamow, *The Origin of Chemical Elements*, *Phys. Rev.* **73**, 803 (1948).
- [26] R. A. Alpher, J. W. Follin, R. C. Herman, *Physical Conditions in the Initial Stages of the Expanding Universe*, *Phys. Rev.* **92**, 1347 (1953).

-
- [27] A. A. Penzias, R. W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, *Astrophys. J.* **142**:419-421 (1965).
- [28] H. Reeves, J. Audouze, W. A. Fowler, D. N. Schramm, *On the Origin of Light Elements*, *Astrophys. J.* **179**:909-930 (1973).
- [29] S. Burles, K. M. Nollett, M. S. Turner, *Big Bang Nucleosynthesis Predictions for Precision Cosmology*, *Astrophys. J.* **552**:1 [arXiv:astro-ph/0010171] (2001).
- [30] N. Jarosik és társai, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Sky Maps, Systematic Errors, and Basic Results*, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **192**(2), 14, [arXiv:1001.4744[astro-ph.CO]] (2011).
- [31] Planck Collaboration, *Planck 2015 results: XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters*, *A&A* **594**, A11 (2016).
- [32] K. Garrett, G. Dūda, *Dark Matter: A Primer*, Hindawi Publishing Corporation, *Advances in Astronomy*, Vol. **2011**, Article ID 968283 (2010).
- [33] V. de Sainte Agathe és társai, *Baryon acoustic oscillations at $z = 2.34$ from the correlations of Ly α absorption in BOSS DR14*, *A&A* **629**, A85 [arXiv : 1904.03400[astro-ph.CO]] (2019).
- [34] G. Hinshaw és társai, *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **208**, 19 [arXiv:1212.5226 [astro-ph.CO]] (2013).
- [35] B. J. Carr, S. W. Hawking, *Black holes in the early universe*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **168**, 399-415 (1974).
- [36] S. W. Hawking, *Black holes and thermodynamics*, *Phys. Rev. D* **13**, 191 (1976).
- [37] D. N. Page, S. W. Hawking, *Gamma rays from primordial black holes*, *Astrophys. J.* **206**:1-7 (1976).
- [38] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka, K. S. Thorne, *Gravitational waves from coalescing black hole MACHO binaries*, *Astrophys. J. Lett.* **487**, L139-L142. [arXiv:astro-ph/9708060] (1997).
- [39] LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 [arXiv:1602.03837] (2016).

-
- [40] S. Bird, I. Cholis, J. B. Muñoz, Y. Ali-Haïmoud, M. Kamionkowski, E. D. Kovetz, A. Raccanelli, A. G. Riess, *Did LIGO detect dark matter*, Phys. Rev. Lett. **116**, 201301 [arXiv:1603.00464] (2016).
- [41] S. Clesse, J. García-Bellido, *The clustering of massive Primordial Black Holes as Dark Matter: measuring their mass distribution with Advanced LIGO*, Phys. Dark. Univ. **15**, 142–147 [arXiv:1603.05234] (2017).
- [42] M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, S. Yokoyama, *Primordial Black Hole Scenario for the Gravitational Wave Event GW150914*, Phys. Rev. Lett. **117**, 061101 [arXiv:1603.08338] (2016).
- [43] A. M. Green, *Primordial black holes as a dark matter candidate – a brief overview*, Nuclear Physics B **1003**, 116494 [arXiv:2402.15211 [astro-ph.CO]] (2024).
- [44] D. G. Figueroa, S. Raatikainen, S. Rasanen, E. Tomberg, *Non-Gaussian tail of the curvature perturbation in stochastic ultra-slow-roll inflation: implications for primordial black hole production*, Phys. Rev. Lett. **127**, 101302 [arXiv:2012.06551[astro-ph.CO]] (2021).
- [45] H. Firouzjahi, *Revisiting Loop Corrections in Single Field USR Inflation*, [arXiv:2311.04080[astro-ph.CO]] (2023).
- [46] M. Trashorras, J. García-Bellido, S. Nesseris, *The clustering dynamics of primordial black holes in N-body simulations*, Universe **2021**, 7(1), 18 [arXiv:2006.15018[astro-ph.CO]] (2021).
- [47] J. L. Feng, *Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection*, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **48**: 495 [arXiv:1003.0904v2[astro-ph.CO]] (2010).
- [48] D. P. Kirilova, *Neutrino oscillations and the early universe*, the Astronomical Observatory of Belgrade (ISSN 0373-3742), No. 75, 167 - 178 (2003); Central Eur. J. Phys. **2**, 467-491 [arXiv:astro-ph/0312569] (2004).
- [49] R. Schaeffer, J. Silk, *Cold, Warm, or Hot Dark Matter: Biased Galaxy Formation and Pancakes*, Astrophys. J. **332**:1-16 (1988).
- [50] R. A.C. Croft, D. H. Weinberg, M. Pettini, L. Hernquist, N. Katz, *The Power Spectrum of Mass Fluctuations Measured from the Lyman-alpha Forest at Redshift $z = 2.5$* , Astrophys. J. **520**:1 [arXiv:astro-ph/9809401] (1999).

-
- [51] D. N. Spergel, P. J. Steinhardt, *Observational evidence for self-interacting cold dark matter*, Phys. Rev. Lett. **84**:3760-3763 [arXiv:astro-ph/9909386] (2000).
- [52] S. Hannestad, R. J. Scherrer, *Self-interacting warm dark matter*, Phys. Rev. D **62**, 043522 [arXiv:astro-ph/0003046] (2000).
- [53] E. Castorina, *Massive neutrinos and the large scale structure of the univers*, PhD értekezés, SISSA Via Bonomea, Trieste, Olaszország (2015).
- [54] S. Dodelson, L. M. Widrow, *Sterile neutrinos as dark matter*, Phys. Rev. Lett. **72**, 17 [arXiv:hep-ph/9303287] (1994).
- [55] A. Boyarsky, M. Drewes, T. Lasserre, S. Mertens, O. Ruchayskiy, *Sterile neutrino dark matter*, Progress in Particle and Nuclear Physics **104**:1-45 [arXiv:1807.07938[hep-ph]] (2019).
- [56] LSND Collaboration, *Evidence for neutrino oscillations from the observation of $\bar{\nu}_e$ appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ beam*, Phys.Rev. D **64**, 112007 [arXiv:hep-ex/0104049] (2001).
- [57] C. R. Watson, Z. Li, N. K. Polley, *Constraining sterile neutrino warm dark matter with Chandra observations of the Andromeda galaxy*, JCAP **03**:018 [arXiv:1111.4217 [astro-ph.CO]] (2012).
- [58] MiniBooNE Collaboration, *The MiniBooNe detector*, Nucl. Instrum. Meth. A **599**, 28-46 [arXiv:0806.4201[hep-ex]] (2009).
- [59] IceCube Collaboration, *Measurement of atmospheric neutrino oscillations at 6-56 GeV with IceCube DeepCore*, Phys. Rev. Lett. **120**, 071801 [arXiv:1707.07081[hep-ex]] (2018).
- [60] Y. Du, F. Huang, H. L. Li, Y. Z. Li, J. H. Yu, *Revisiting Dark Matter Freeze-in and Freeze-out through Phase-Space Distribution*, JCAP **04**, 012 [arXiv:2111.01267[hep-ph]] (2022).
- [61] L. Roszkowski, E. M. Sessoloc, S. Trojanowski, *WIMP dark matter candidates and searches – current status and future prospects*, Rept. Prog. Phys. **81**(6), 066201 [arXiv:1707.06277 [hep-ph]] (2018).
- [62] J. Ellis, K. A. Olive, *Supersymmetric Dark Matter Candidates*, Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches, edited by Gianfranco Bertone, Chapter 8, 142-163 [arXiv:1001.3651[astro-ph.CO]] (2010).

-
- [63] O. Klein, *Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity*, Z. Phys. **37**, 895-906 (1926), angol fordítás: *Surveys High Energ. Phys.* **5**, 241-244 (1986).
- [64] T. Hällgren, *Kaluza-Klein Dark Matter from Deconstructed Universal Extra Dimensions*, AIP Conf. Proc. **903**, 652–655 [arXiv:hep-ph/0610367] (2007).
- [65] Fermi-LAT Collaboration, *Searching for Dark Matter Annihilation from Milky Way Dwarf Spheroidal Galaxies with Six Years of Fermi-LAT Data*, Phys. Rev. Lett. **115**, 231301 [arXiv:1503.02641[astro-ph.HE]] (2015).
- [66] XENON Collaboration, *First dark matter search results from the XENON1T experiment*, Phys. Rev. Lett. **119**, 181301 [arXiv:1705.06655 [astro-ph.CO]] (2017).
- [67] LUX Collaboration, *Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure*, Phys. Rev. Lett. **118**, 021303 [arXiv:1608.07648[astro-ph.CO]] (2017).
- [68] DarkSide Collaboration, *Results from the first use of low radioactivity argon in a dark matter search*, Phys. Rev. D **93**, 081101 [arXiv:1510.00702[astro-ph.CO]] (2016).
- [69] The ATLAS Collaboration, *Search for supersymmetry using final states with one lepton, jets, and missing transverse momentum with the ATLAS detector in $\sqrt{s} = 7\text{TeV}$ pp collisions*, Phys. Rev. Lett. **106**, 131802 [arXiv:1102.2357[hep-ex]] (2011).
- [70] R. D. Peccei, H. R. Quinn, *Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles*, Phys. Rev. D **16**, 1791-1797 (1977).
- [71] R. D. Peccei, *The Strong CP Problem and Axions*, Lect. Notes Phys. **741**:3-17 [arXiv:hep-ph/0607268] (2008).
- [72] X. Wang, *Dissecting dark matter candidates: A comprehensive evaluation of axions, sterile neutrinos and WIMPS*, Theoretical and Natural Science **28**(1):43-56 (2023).
- [73] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, Front. Phys. **69**, 1 (1990).
- [74] P. W. Graham, I. G. Irastorza, S. K. Lamoreaux, A. Lindner, K. A. van Bibber, *Experimental searches for the axion and axion-like particles*, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **65**:485-514 [arXiv:1602.00039[hep-ex]] (2015).

-
- [75] Y. Michimura, T. Fujita, J. Kume, S. Morisaki, K. Nagano, A. Nakatsuka, I. Obata, *Ultralight dark matter searches with KAGRA gravitational wave telescope*, J. Phys.: Conf. Ser. **2156**, 012071 [arXiv:2111.00420[hep-ph]] (2021).
- [76] M. S. Turner, *Early-Universe Thermal Production of Not-So-Invisible Axions*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2489 (1987).
- [77] E. Hubble, *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, Volume 15, Issue 3, 168-173 (1929).
- [78] A. G. Riess és társai, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116**:1009-1038 [arXiv:astro-ph/9805201] (1998).
- [79] S. Perlmutter et al., *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517**:565-586 [arXiv:astro-ph/9812133] (1999).
- [80] A. G. Riess, *A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3*, Astrophys. J. **730**: 119 (2011).
- [81] B. P. Schmidt, *Nobel Lecture: Accelerating expansion of the Universe through observations of distant supernovae*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1151 (2012).
- [82] S. Chandrasekhar, *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*, Astrophys. J. **74**:81 (1931).
- [83] I. Debono, G. F. Smoot, *General Relativity and Cosmology: Unsolved Questions and Future Directions*, Universe **2016** 2(4), 23 [arXiv:1609.09781[gr-qc]] (2016).
- [84] M. Visser, *Jerk, snap, and the cosmological equation of state*, Class. Quant. Grav. **21**, 2603 [arXiv:gr-qc/0309109] (2004).
- [85] M. Dunajski, G. Gibbons, *Cosmic Jerk, Snap and Beyond*, Class. Quant. Grav. **25**, 235012 [arXiv:0807.0207[gr-qc]] (2008).
- [86] D. Eager, A. M. Pendrill, N. Reistad, *Beyond velocity and acceleration: jerk, snap and higher derivatives*, European Journal of Physics **37**, 065008, (2016).
- [87] F. S. N. Lobo, J. P. Mimoso, M. Visser, *Cosmographic analysis of redshift drift*, JCAP **04**, 043 [arXiv:2001.11964[gr-qc]] (2020).

-
- [88] A. Sandage, *The Ability of the 200-Inch Telescope to Discriminate Between Selected World Models*, *Astrophys. J.* **133**:355 (1961).
- [89] T. Chiba, T. Nakamura, *The Luminosity Distance, the Equation of State, and the Geometry of the Universe*, *Prog. Theor. Phys.* **100**, 1077-1082 [arXiv:astro-ph/9808022] (1998).
- [90] Y. L. Bolotin, V. A. Cherkaskiy, O. A. Lemets, D. A. Yerokhin, L. G. Zazunov, *Cosmology In Terms Of The Deceleration Parameter. Part I*, [arXiv:1502.00811[gr-qc]] (2015).
- [91] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby, *General Relativity: An introduction for physicists*, 187, Cambridge University Press (2006).
- [92] P. Astier és társai, *The Supernova Legacy Survey: Measurement of Omega-M, Omega-Lambda and w from the First Year Data Set*, *A&A* **447**, 31-48 [arXiv:astro-ph/0510447] (2006).
- [93] A. G. Riess és társai, *New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy*, *Astrophys. J.* **659**:98-121 [arXiv:astro-ph/0611572] (2007).
- [94] W. M. Wood-Vasey és társai, *Observational Constraints on the Nature of Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey*, *Astrophys. J.* **666**:694-715 [arXiv:astro-ph/0701041] (2007).
- [95] A. G. Riess és társai, *A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s⁻¹ Mpc⁻¹ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team*, *Astrophys. J. Lett.* **934**(1), L7 [arXiv:2112.04510[astro-ph.CO]] (2022).
- [96] L. Galbany és társai, *An updated measurement of the Hubble constant from near-infrared observations of Type Ia supernovae*, *A&A* **679**, A95 [arXiv:2209.02546[astro-ph.CO]] (2023).
- [97] R. A. Hulse, J. H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*, *ApJL* **195**:L51–L53 (1975).
- [98] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 [arXiv:1602.03837[gr-qc]] (2016).

-
- [99] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **116**, 241103 (2016).
- [100] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2*, Phys. Rev. Lett. **118**, 221101 [arXiv:1706.01812[gr-qc]] (2017).
- [101] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *GW170608: Observation of a 19-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Astrophys. J. Lett. **851**, L35 [arXiv:1711.05578[astro-ph.HE]] (2017).
- [102] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **119**, 141101 [arXiv:1709.09660[gr-qc]] (2017).
- [103] LIGO Scientific and Virgo Collaborations, *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*, Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 [arXiv:1710.05832[gr-qc]] (2017).
- [104] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *A Gravitational-wave Measurement of the Hubble Constant Following the Second Observing Run of Advanced LIGO and Virgo*, Astrophys. J. **909**(2), id. 218, 18 [arXiv:1908.06060[astro-ph.CO]] (2021).
- [105] C. R. Bom, V. Alfradique, A. Palmese, G. Teixeira, L. Santana-Silva, A. Santos, P. Darc, *A dark standard siren measurement of the Hubble constant following LIGO/Virgo/KAGRA O4a and previous runs*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **535**(1), 961–975 [arXiv:2404.16092[astro-ph.CO]] (2024).
- [106] J. Hu, F. Wang, *Hubble Tension: The Evidence of New Physics*, Universe **2023**, 9(2), 94 [arXiv:2302.05709 [astro-ph.CO]] (2023).
- [107] L. Perivolaropoulos, *Hubble Tension or Distance Ladder Crisis?*, [arXiv:2408.11031v2[astro-ph.CO]] (2024).
- [108] M. Milgrom, *MOND theory*, Canadian Journal of Physics **93**(2): 107 [arXiv:1404.7661[astro-ph.CO]] (2015).
- [109] J. D. Bekenstein, *Relativistic gravitation theory for the MOND paradigm*, Phys. Rev. D **70**, 083509 [arXiv:astro-ph/0403694] (2004).

-
- [110] J. M. Overduin, P. S. Wesson, *Kaluza-Klein Gravity*, Phys. Rept. **283**:303-380 [arXiv:gr-qc/9805018] (1997).
- [111] Z. Carson, K. Yagi, *Probing Einstein-dilaton Gauss-Bonnet Gravity with the inspiral and ringdown of gravitational waves*, Phys. Rev. D **101**, 104030 [arXiv:2003.00286[gr-qc]] (2020).
- [112] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Porrati, *4D Gravity on a Brane in 5D Minkowski Space*, Phys. Lett. B **485**, 208-214 [arXiv:hep-th/0005016] (2000).
- [113] M. Montero, C. Vafa, I. Valenzuela, *The Dark Dimension and the Swampland*, J. High Energ. Phys. **2023**, 22, [arXiv:2205.12293[hep-th]] (2023).
- [114] R. Maartens, K. Koyama, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Relativity **13**, 5 [arXiv:1004.3962 [hep-th]] (2010).
- [115] P.Kanti, N.E.Mavromatos, J.Rizos, K.Tamvakis, E.Winstanley, *Dilatonic Black Holes in Higher Curvature String Gravity*, Phys. Rev. D **54**, 5049-5058 [arXiv:hep-th/9511071] (1996).
- [116] C. Eling, T. Jacobson, D. Mattingly, *Einstein-Aether Theory*, [arXiv:gr-qc/0410001] (2004).
- [117] S. F. Hassan, R. A. Rosen, *Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity*, JHEP **2012**, 126 [arXiv:1109.3515[hep-th]] (2012).
- [118] K. Wood, *A new look at multi-gravity and dimensional deconstruction*, [arXiv:2501.16442[hep-th]] (2025).
- [119] M. Chaichian, J. Kluson, M. Oksanen, A. Tureanu, *Can TeVeS be a viable theory of gravity?*, Phys. Lett. B **735**, 322-326 [arXiv:1402.4696[hep-th]] (2014).
- [120] C. Gao, *A novel two-field pure k-essence for inflation, dark matter, dark energy and black holes*, Universe **2024**, 10, 235 [arXiv:2402.04460[gr-qc]].
- [121] C. de Rham, *Massive Gravity*, Living Rev. Relativity **17**, 7 [arXiv:1401.4173[hep-th]] (2014).
- [122] P. Hořava, *Quantum gravity at a Lifshitz point*, Phys. Rev. D **79**, 084008 [arXiv:0901.3775[hep-th]] (2009).
- [123] T. P. Sotiriou, *Hořava-Lifshitz gravity: a status report*, J. Phys. Conf. Ser. **283**:012034 [arXiv:1010.3218[hep-th]] (2011).

-
- [124] S. Capozziello, F. Bajardi, *Non-Local Gravity Cosmology: an Overview*, Int. J. Mod. Phys. D **31**(06), 2230009 [arXiv:2201.04512[gr-qc]] (2022).
- [125] V. H. Weyl, *A New Extension of Relativity Theory*, Annalen Phys. **59**, 101-133 (1919).
- [126] R. Utiyama, B. S. DeWitt, *Renormalization of a Classical Gravitational Field Interacting with Quantized Matter Fields*, J. Math. Phys. **3**, 608 (1962).
- [127] K. S. Stelle, *Renormalization of higher-derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D **16**, 953 (1977).
- [128] T. P. Sotiriou, *6+1 lessons from $f(R)$ gravity*, J. Phys. Conf. Ser. **189**:012039 [arXiv:0810.5594[gr-qc]] (2009).
- [129] S. Capozziello, M. Francaviglia, *Extended Theories of Gravity and their Cosmological and Astrophysical Applications*, Gen. Relativ. Gravit. **40**, 357-420 [arXiv:0706.1146[astro-ph]] (2008).
- [130] T. P. Sotiriou, *Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology*, PhD thesis, Advisors: Stefano Liberati and John C. Miller, International School for Advanced Studies, Trieste, Italy [arXiv:0710.4438[gr-qc]] (2007).
- [131] R. P. Woodard, *Avoiding Dark Energy with $1/R$ Modifications of Gravity*, Lect. Notes Phys. **720**, 403-433, [arXiv:astro-ph/0601672] (2007).
- [132] M. V. Ostrogradsky, *Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres*, Mem. Acad. St. Petersburg 6 (1850) 385.
- [133] R. P. Woodard, *The Theorem of Ostrogradsky*, Scholarpedia **10**, 32243 [arXiv:1506.02210[hep-th]] (2015).
- [134] T. Kobayashi, *Horndeski theory and beyond: a review*, Rept. Prog. Phys. **82**(8), 086901, [arXiv:1901.07183[gr-qc]] (2019).
- [135] P. Jordan, *Schwerkraft und weltall: Grundlagen der theoretischen kosmologie*, Die Wissenschaft (1955).
- [136] Y. Fujii, K. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (2004).
- [137] C. Brans, R. H. Dicke, *Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*, Phys. Rev. **124**, 925 (1961).

-
- [138] C. H. Brans, *The roots of scalar-tensor theory: an approximate history*, [arXiv:gr-qc/0506063] (2005).
- [139] R. D. Reasenberg és társai, *Viking relativity experiment – Verification of signal retardation by solar gravity*, Astrophys. J. Part 2 - Letters to the Editor **234**, L219-L221 (1979).
- [140] T. M. Eubanks és társai, *Advances in Solar System Tests of Gravity*, American Physical Society, APS/AAPT Joint Meeting, abstract id. K11.05 (1997).
- [141] B. Bertotti, L. Iess, P. Tortora, *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature **425**, 374 (2003).
- [142] A. Nicolis, R. Rattazzi, E. Trincherini, *The galileon as a local modification of gravity*, Phys. Rev. D **79**, 064036 [arXiv:0811.2197[hep-th]] (2009).
- [143] A. Nicolisa, R. Rattazzib, E. Trincherinic, *The galileon as a local modification of gravity*, Phys. Rev. D **79**, 064036 [arXiv:0811.2197[hep-th]] (2009).
- [144] C. Deffayet, G. Esposito-Farese, A. Vikman, *Covariant Galileon*, Phys. Rev. D **79**, 084003 [arXiv:0901.1314[hep-th]] (2009).
- [145] C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer, G. Zahariade, *From k-essence to generalized Galileons*, Phys. Rev. D. **84** , 064039 [arXiv:1103.3260[hep-th]] (2011).
- [146] G. W. Horndeski, *Second-Order Scalar-Tensor Field Equations in a Four-Dimensional Space*, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363-384 (1974).
- [147] S. Capozziello, V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity*, Springer, Netherlands (2011).
- [148] J. B. Achour, D. Langlois, K. Noui, *Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations*, Phys. Rev. D **93**, 124005 [arXiv:1602.08398[gr-qc]] (2016).
- [149] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, F. Vernizzi, *Essential building blocks of dark energy*, J. Cosmol. Astropart. Phys. **08**, 025 [arXiv:1304.4840[hep-th]](2013).
- [150] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, F. Vernizzi, *Healthy theories beyond Horndeski*, Phys. Rev. Lett. **114**, 211101 [arXiv:1404.6495[hep-th]] (2015).
- [151] S. M. Carroll, *The Cosmological Constant*, Living Rev. Rel. **4**:1, [arXiv:astro-ph/0004075] (2001).

-
- [152] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *Cosmology with a time-variable cosmological "constant"*, *Astrophys. J.* **325**:L17-L20 (1988).
- [153] M. Peloso, F. Rosati, *On the Construction of Quintessential Inflation Models*, *JHEP* **9912**, 026 [arXiv:hep-ph/9908271] (1999).
- [154] S. Tsujikawa, *Quintessence: A Review*, *Class. Quant. Grav.* **30**, 214003 [arXiv:1304.1961[gr-qc]] (2013).
- [155] M. C. D. Marsh, *The Swampland, Quintessence and the Vacuum Energy*, *Phys. Lett. B* **789**, 639-642 [arXiv:1809.00726[hep-th]] (2019).
- [156] A. Kamenshchik, U. Moschella, V. Pasquier, *An alternative to quintessence*, *Phys. Lett. B* **511**, 265-268, [arXiv:gr-qc/0103004] (2001).
- [157] J. Zhang, X. Zhang, H. Liu, *Agegraphic dark energy as a quintessence*, *Eur. Phys. J. C* **54**, 303-309 [arXiv:0801.2809[astro-ph]] (2008).
- [158] B. A. Bassett, M. Kunz, D. Parkinson, C. Ungarelli, *Condensate cosmology – dark energy from dark matter*, *Phys. Rev. D* **68**, 043504 [arXiv:astro-ph/0211303] (2003).
- [159] S. Capozziello, A. Melchiorri, A. Schirone, *Scaling Dark Energy*, *Phys. Rev. D* **70**, 101301 [arXiv:astro-ph/0408112] (2004).
- [160] G. W. Gibbons, *Cosmological Evolution of the Rolling Tachyon*, *Phys. Lett. B* **537**, 1-4 [arXiv:hep-th/0204008] (2002).
- [161] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt, *A Dynamical Solution to the Problem of a Small Cosmological Constant and Late-time Cosmic Acceleration*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438-4441 [arXiv:astro-ph/0004134] (2000).
- [162] C. Armendariz-Picon, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt, *Essentials of k-essence*, *Phys. Rev. D* **63**, 103510 [arXiv:astro-ph/0006373] (2001).
- [163] R. J. Scherrer, *Purely kinetic k-essence as Unified Dark, Matter*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 011301 [arXiv:astro-ph/0402316] (2004).
- [164] L. R. Abramo, N. Pinto-Neto, *On the Stability of Phantom k-essence Theories*, *Phys. Rev. D* **73**, 063522, [arXiv:astro-ph/0511562] (2006).

-
- [165] R. Lazkoz, R. Maartens, E. Majerotto, *Observational constraints on phantom-like braneworld cosmologies*, Phys. Rev. D **74**, 083510 [arXiv:astro-ph/0605701] (2006).
- [166] H. van Dam, M. J. G. Veltman, *Massive and mass-less Yang-Mills and gravitational fields*, Nucl. Phys. B **22**(2), 397-411 (1970).
- [167] V. I. Zakharov, *Linearized gravitation theory and the graviton mass*, JETP Lett. **12**, 312 (1970).
- [168] A. I. Vainshtein, *To the problem of nonvanishing gravitation mass*, Physics Letters B **39**(3), 393-394 (1972).
- [169] C. Deffayet, G. Dvali, G. Gabadadze, A. I. Vainshtein, *Nonperturbative Continuity in Graviton Mass versus Perturbative Discontinuity*, Phys. Rev. D **65**, 044026 [arXiv:hep-th/0106001] (2002).
- [170] E. Babichev, C. Deffayet, *An introduction to the Vainshtein mechanism*, Class. Quantum Grav. **30**, 184001 [arXiv:1304.7240[gr-qc]] (2013).
- [171] C. Burrage, J. Dombrowski, D. Saadeh, *The shape dependence of Vainshtein screening in the cosmic matter bispectrum*, JCAP **10**:023 [arXiv:1905.06260[astro-ph.CO]] (2019).
- [172] J. Khoury, A. Weltman, *Chameleon Cosmology*, Phys. Rev. D **69**, 044026 [arXiv:astro-ph/0309411] (2004).
- [173] J. Khoury, A. Weltman, *Chameleon Fields: Awaiting Surprises for Tests of Gravity in Space*, Phys. Rev. Lett. **93**, 171104 [arXiv:astro-ph/0309300] (2004).
- [174] P. Brax, P. Valageas, *The effective field theory of K -mouflage*, JCAP **01**:020, [arXiv:1509.00611[astro-ph.CO]] (2016).
- [175] A. Aviles, J. L. Cervantes-Cota, D. F. Mota, *Screenings in Modified Gravity: a perturbative approach*, A&A **622**, A62 [arXiv:1810.02652[astro-ph.CO]] (2019).
- [176] Z. Xiong, D. Huang, *Gravitational wave birefringence in symmetron cosmology*, Phys. Rev. D **111**, 084020 (2024).
- [177] P. Creminelli, M. A. Luty, A. Nicolis, L. Senatore, *Starting the Universe: Stable Violation of the Null Energy Condition and Non-standard Cosmologies*, JHEP **0612**, 080 [arXiv:hep-th/0606090] (2006).

-
- [178] C. Cheung, P. Creminelli, A. L. Fitzpatrick, J. Kaplan, L. Senatore, *The Effective Field Theory of Inflation*, JHEP **0803**, 014 [arXiv:0709.0293 [hep-th]] (2008).
- [179] F. Piazzaa, F. Vernizzi, *Effective Field Theory of Cosmological Perturbations*, Class. Quantum Grav. **30**, 214007, [arXiv:1307.4350[hep-th]] (2013).
- [180] N. Frusciante, L. Perenon, *Effective Field Theory of Dark Energy: a Review*, Phys. Rept. **857**, 1-63 [arXiv:1907.03150[astro-ph.CO]] (2020).
- [181] G. Gubitosi, F. Piazza, F. Vernizziar, *The Effective Field Theory of Dark Energy*, JCAP **02**:032 [aXiv:1210.0201[hep-th]] (2013).
- [182] F. J. Himpfel, *A Higgs Boson Composed of Gauge Bosons*, [arXiv:1502.06438[hep-ph]] (2015).
- [183] F. J. Himpfel, *Dynamical Symmetry Breaking by $SU(2)$ Gauge Bosons*, [arXiv:1801.04604[hep-ph]] (2018).
- [184] R. Contino, *Tasi 2009 lectures: The Higgs as a Composite Nambu-Goldstone Boson*, [arXiv:1005.4269[hep-ph]] (2010).
- [185] S. Xue, *Higgs boson origin from a gauge symmetric theory of massive composite particles and massless $W^\pm$ and Z_0 bosons at the TeV scale*, Nuclear Physics B **990**, 116168 [arXiv:2210.04825[hep-ph]] (2023).
- [186] J. F. Donoghue, *General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections*, Phys. Rev. D **50**, 3874-3888 [arXiv:gr-qc/9405057] (1994).
- [187] A. Ashtekar, E. Bianchi, *A Short Review of Loop Quantum Gravity*, Rep. Prog. Phys. **84**, 042001 [arXiv:2104.04394[gr-qc]] (2021).
- [188] G. B. De Luca, E. Silverstein, G. Torroba, *Hyperbolic compactification of M-theory and de Sitter quantum gravity*, Sci. Post. Phys. **12**, 083 [arXiv:2104.13380[hep-th]] (2022).
- [189] P. Castorina, A. Iorio, H. Satz, *Hunting Quantum Gravity with Analogs: the case of High Energy Particle Physics*, Universe **2022**, 8(9), 482 [arXiv:2207.11935[hep-ph]] (2022).
- [190] J. Kennedy, L. Lombriser, A. Taylor, *Reconstructing Horndeski models from the effective field theory of dark energy*, Phys. Rev. D **96**, 084051 [arXiv:1705.09290[gr-qc]] (2017).

-
- [191] P. Creminelli, G. D'Amico, J. Norena, F. Vernizzi, *The Effective Theory of Quintessence: the $w < -1$ Side Unveiled*, JCAP **0902**:018 [arXiv:0811.0827[astro-ph]] (2009).
- [192] J. Bloomfield, *A Simplified Approach to General Scalar-Tensor Theories*, JCAP **1312**:044 [arXiv:1304.6712[astro-ph.CO]] (2013).
- [193] J. K. Bloomfield, E. E. Flanagan, M. Park, S. Watson, *Dark energy or modified gravity? An effective field theory approach*, JCAP **1308**:010 [arXiv:1211.7054[astro-ph.CO]] (2013).
- [194] J. Gleyzes, D. Langlois, M. Mancarella, F. Vernizzi, *Effective Theory of Interacting Dark Energy*, JCAP **1508**(08):054 [arXiv:1504.05481[astro-ph.CO]] (2015).
- [195] J. Gleyzes, D. Langlois, M. Mancarella, F. Vernizzi, *Effective Theory of Dark Energy at Redshift Survey Scales*, JCAP **1602**(02):056 [arXiv:1509.02191[astro-ph.CO]] (2016).
- [196] V. Cardoso, M. Kimura, A. Maselli, L. Senatore, *Black holes in an Effective Field Theory extension of GR*, Phys. Rev. Lett. **121**, 251105 [arXiv:1808.08962[gr-qc]] (2018).
- [197] R. Kase, L. Á. Gergely, S. Tsujikawa, *Effective field theory of modified gravity on spherically symmetric background: leading order dynamics and the odd mode perturbations*, Phys. Rev. D **90**, 124019 [arXiv:1406.2402 [hep-th]] (2014).
- [198] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *Tests of General Relativity with GW150914*, Phys. Rev. Lett. **116**, 221101 [arXiv:1602.03841[gr-qc]] (2016).
- [199] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, Fermi Gamma-ray Burst Monitor, INTEGRAL, *Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB170817A*, Astrophys. J. Lett. **848**, L13 [arXiv:1710.05834[astro-ph.HE]] (2017).
- [200] S. Mirshekari, N. Yunes, and C. M. Will, *Constraining Lorentz-violating, Modified Dispersion Relations with Gravitational Waves*, Phys. Rev. D **85**, 024041 [arXiv:1110.2720[gr-qc]] (2012).
- [201] LIGO Scientific Collaboration, Virgo Collaboration, *Tests of General Relativity with the Binary Black Hole Signals from the LIGO-Virgo Catalog GWTC-1*, Phys. Rev. D **100**, 104036 [arXiv:1903.04467 [gr-qc]] (2019).

-
- [202] I. H. Stairs, *General Relativity with Pulsar Timing*, Living Rev. Relativ. **6**(1): 5 (2003).
- [203] C. W. F. Everitt és társai, *Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*, Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 [arXiv:1105.3456[gr-qc]] (2011).
- [204] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L1 [arXiv:1906.11243[astro-ph.GA]] (2019).
- [205] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. II. Array and Instrumentation*, Astrophys. J. Lett. **875**, L2 [arXiv:1906.11239[astro-ph.IM]] (2019).
- [206] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. III. Data Processing and Calibration*, Astrophys. J. Lett. **875**, L3 [arXiv:1906.11240[astro-ph.GA]] (2019).
- [207] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. IV. Imaging the Central Supermassive Black Hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L4 [arXiv:1906.11241[astro-ph.GA]] (2019).
- [208] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. V. Physical Origin of the Asymmetric Ring*, Astrophys. J. Lett. **875**, L5 [arXiv:1906.11242[astro-ph.GA]] (2019).
- [209] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results. VI. The Shadow and Mass of the Central Black Hole*, Astrophys. J. Lett. **875**, L6 [arXiv:1906.11243[astro-ph.GA]] (2019).
- [210] H. Witek, L. Gualtieri, P. Pani, T. P. Sotiriou, *Black holes and binary mergers in scalar Gauss-Bonnet gravity: scalar field dynamics*, Phys. Rev. D **99**, 064035 [arXiv:1810.05177[gr-qc]] (2019).
- [211] P. Creminelli, F. Vernizzi, *Dark Energy after GW170817 and GRB170817A*, Phys. Rev. Lett. **119**, 251302 [arXiv:1710.05877[astro-ph.CO]] (2017).
- [212] J. M. Ezquiaga, M. Zumalacárregui, *Dark Energy after GW170817: dead ends and the road ahead*, Phys. Rev. Lett. **119**, 251304, [arXiv:1710.05901[astro-ph.CO]] (2017).

-
- [213] E. Bellini, I. Sawicki, *Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity*, JCAP **07**:050 [arXiv:1404.3713[astro-ph.CO]] (2014).
- [214] C. Deffayet, O. Pujolas, I. Sawicki, A. Vikman, *Imperfect Dark Energy from Kinetic Gravity Braiding*, JCAP **1010**:026 [arXiv:1008.0048[hep-th]] (2010).
- [215] B. R. Dinda, N. Banerjee, *Constraints on the speed of sound in the k-essence model of dark energy*, Eur. Phys. J. C **84**:177 [arXiv:2309.10538[astro-ph.CO]] (2024).
- [216] S. E. Perkins, R. Nair, H. O. Silva, N. Yunes, *Improved gravitational-wave constraints on higher-order curvature theories of gravity*, Phys. Rev. D **104**, 024060 [arXiv:2104.11189[gr-qc]] (2021).
- [217] C. de Rham, S. Melville, *Gravitational Rainbows: LIGO and Dark Energy at its Cutoff*, Phys. Rev. Lett. **121**, 221101 [arXiv:1806.09417[hep-th]] (2018).
- [218] P. Brax, L. Heisenberg, A. Kuntz, *Unveiling the Galileon in a three-body system: scalar and gravitational wave production*, JCAP **05**:012 [arXiv:2002.12590[gr-qc]] (2020).
- [219] A. Kuntz, *Testing gravity with the two-body problem*, PhD thesis, Soutenue à Aix-Marseille Université [arXiv:2010.0593[gr-qc]] (2020).
- [220] E. Albertini, J. Kozuszek, T. Wiseman, *Dynamics of dRGT ghost-free massive gravity in spherical symmetry*, JHEP **2024**(12), 1-26 [arXiv:2409.18802[hep-th]].
- [221] S. Mironov, A. Shtennikova, M. Valencia-Villegas, *Luminal Scalar-Tensor theories for a not so dark Dark Energy*, Phys. Rev. D **111**(10), L101501 [arXiv:2412.13460[hep-th]] (2025).
- [222] J. Zhang, J. Chen, H. Jiao, R. Cai, Y. Zhang, *Probing Spin-2 Ultralight Dark Matter with Space-based Gravitational Wave Detectors in Millihertz*, [arXiv:2501.11071[gr-qc]] (2025).
- [223] J. Fier, H. Han, B. Li, K. Lin, S. Mukohyama, A. Wang, *Gravitational wave cosmology in Einstein-scalar-Gauss-Bonnet gravity*, [arXiv:2503.01975[gr-qc]] (2025).
- [224] G. Gutierrez-Cano, G. Niz, *Euler-Heisenberg Black Holes in Einsteinian Cubic Gravity*, Gen. Relativ. Gravit. **57**, 8 [arXiv:2402.06867[gr-qc]] (2025).

-
- [225] C. Bonvin, C. Caprini, R. Durrer, *No-go theorem for k -essence dark energy*, Phys. Rev. Lett. **97**, 081303 [arXiv:astro-ph/0606584] (2006).
- [226] C. Zhang, T. Zhu, *Linear instability of hairy black holes in Horndeski theory*, Chinese Phys. C **48**, 075106, [arXiv:2404.10456[gr-qc]] (2024).
- [227] S. Mukohyama, S. Tsujikawa, A. Wang, *Revisiting linear stability of black hole odd-parity perturbations in Einstein-Aether gravity*, Phys. Rev. D **110**, 044024 [arXiv:2405.14071[gr-qc]] (2024).
- [228] C. Zhang, R. Kase, *Even-parity stability of hairy black holes in $U(1)$ gauge-invariant scalar-vector-tensor theories*, Phys. Rev. D **110**, 044047 [arXiv:2404.11910[gr-qc]] (2024).
- [229] W. Wu, Y. Tang, *Post-Newtonian Binary Dynamics in Effective Field Theory of Horndeski Gravity*, Chinese Physics C **48**, 035101 [arXiv:2312.02507[gr-qc]] (2024).
- [230] M. M. Ivanov, Y. Li, J. Parra-Martinez, Z. Zhou, *Gravitational Raman Scattering in Effective Field Theory: a Scalar Tidal Matching at $\mathcal{O}(G_3)$* , Phys. Rev. Lett. **132**, 131401 [arXiv:2401.08752[hep-th]] (2024).
- [231] K. Bamba, J. Matsumoto, S. Nojiri, *Cosmological perturbations in k -essence model*, Phys. Rev. D **85**, 084026 [arXiv:1109.1308[hep-th]] (2012).
- [232] C. Montgomery, W. Orchiston, I. Whittingham, *Michell, Laplace and the origin of the black hole concept*, Journal of Astronomical History and Heritage (ISSN 1440-2807), Vol. **12**, No. 2, 90-96 (2009).
- [233] R. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press (1984).
- [234] J. Wheeler, *On the Definition of Black Holes: Bridging the Gap Between Black Holes and Singularities*, Annals of Physics **455**, 169356 [arXiv:2205.12942[gr-qc]] (2023).
- [235] M. Visser, *Physical observability of horizons*, Phys. Rev. D **90**, 127502, [arXiv:1407.7295[gr-qc]] (2014).
- [236] R. Penrose, *Gravitational Collapse and Space-Time Singularities*, Phys. Rev. Lett. **14**(3), 57–59 (1965).

-
- [237] W. Rindler, *Visual Horizons in World Models*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society **116**(6), 662–677 (1956).
- [238] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1973).
- [239] J. R. Oppenheimer, H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, Phys. Rev. **56**(5), 455–459 (1939).
- [240] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Annalen der Physik. **355**(9), 106–120 (1916).
- [241] G. Nordström, *On the mass of a material system according to the gravitation theory of Einstein*, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences. **20**, 1076–1091 (1918).
- [242] J. Nordebo, *The Reissner-Nordström metric*, Umeå University, Faculty of Science and Technology, Department of Physics, Independent thesis Basic level (degree of Bachelor), diva2:912393, (2016).
- [243] R. P. Kerr, *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**(5), 237–238 (1963).
- [244] G. Debney, R. P. Kerr, A. Schild, *Solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell Equations*, J. Math. Phys. **10**, 1842 (1969).
- [245] D. C. Robinson, *Uniqueness of the Kerr Black Hole*, Phys. Rev. Lett. **34**, 905 (1975).
- [246] R. P. Kerr, W. B. Wilson, *Singularities in the Kerr-Schild metrics*, Gen. Relativ. Gravit. **10**(4), 273–281 (1979).
- [247] E. Fackerell, R. P. Kerr, *Einstein vacuum field equations with a single non-null Killing vector*, Gen. Relativ. Gravit. **23**, 861–878 (1991).
- [248] R. P. Kerr, *Discovering the Kerr and Kerr–Schild metrics*, [arXiv:0706.1109[gr-qc]] (2007).
- [249] M. Vissel, *The Kerr spacetime: A brief introduction*, [arXiv:0706.0622[gr-qc]] (2007).

-
- [250] M. Campanelli, C. O. Lousto, Y. Zlochower, *Algebraic Classification of Numerical Spacetimes and Black-Hole-Binary Remnants*, Phys. Rev. D **79**, 084012 [arXiv:0811.3006[gr-qc]] (2009).
- [251] E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, *Metric of a Rotating, Charged Mass*, J. Math. Phys. **6**(6), 918–919 (1965).
- [252] R. Penrose, *Some unsolved problems in classical general relativity*, In Seminar on Differential Geometry, Volume 102 of Ann. of Math. Stud., 631–668. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1982).
- [253] M. Van de Moortel, *The Strong Cosmic Censorship Conjecture*, [arXiv:2501.13180[gr-qc]] (2025).
- [254] R. Ruffini, J. A. Wheeler, *Introducing the black hole*, Physics Today **24**(1), 30–41 (1971).
- [255] S. W. Hawking, *Black holes in the Brans-Dicke theory of gravitation*, Commun. Math. Phys. **25**, 167 (1972).
- [256] J. D. Bekenstein, *Novel "no-scalar-hair" theorem for black holes*, Phys. Rev. D **51**, R6608 (1995);
- [257] T. Hertog, *Towards a Novel no-hair Theorem for Black Holes*, Phys. Rev. D **74**, 084008 [arXiv:gr-qc/0608075] (2006).
- [258] T.P. Sotiriou, V. Faraoni, *Black Holes in Scalar-Tensor Gravity*, Phys. Rev. Lett. **108**, 081103 [arXiv:1109.6324[gr-qc]] (2012).
- [259] S. Carloni, P. K. S. Dunsby, *The 1+1+2 formalism for scalar-tensor gravity*, Gen. Relativ. Gravit. **48**, 136 [arXiv:1306.2473[gr-qc]] (2016).
- [260] O. J. Tattersall, P. G. Ferreira, M. Lagos, *Speed of gravitational waves and black hole hair*, Phys. Rev. D **97**, 084005 [arXiv:1802.08606[gr-qc]] (2018).
- [261] L. Hui, A. Nicolis, *A no-hair theorem for the galileon*, Phys. Rev. Lett. **110**, 241104 (2013) [arXiv:1202.1296 [hep-th]].
- [262] Erick J. Weinberg, *Black holes with hair*, Advances in the Interplay between Quantum and Gravity Physics, Proceedings of the NATO Advances Study Institute on Advances in the Interplay between Quantum and Gravity Physics, Helyszín:

- Erice, Italy, 30 April-10 May, 2001. Szerkesztette: Peter G. Bergmann and Venzo de Sabbata, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, 523, [arXiv:gr-qc/0106030].
- [263] M. S. Volkov, D. V. Gal'tsov, *Gravitating Non-Abelian Solitons and Black Holes with Yang-Mills Fields*, Phys. Rept. **319**:1-83, [arXiv:hep-th/9810070] (1999).
- [264] O. Bechmann, O. Lechtenfeld, *Exact Black-Hole Solution With Self-Interacting Scalar Field*, Class. Quant. Grav. **12**,1473-1482, [arXiv:gr-qc/9502011] (1995).
- [265] P. I. Kuriakose, V. C. Kuriakose, *Static Black Hole dressed with a massive Scalar field*, [arXiv:0805.4554[gr-qc]] (2008).
- [266] T. P. Sotiriou, S. Zhou, *Black hole hair in generalized scalar-tensor gravity*, Phys. Rev. Lett. **112**, 251102, [arXiv:1312.3622[gr-qc]] (2014).
- [267] E. Babichev , C. Charmousis, *Dressing a black hole with a time-dependent Galileon*, JHEP **1408**, 106 [arXiv:1312.3204[gr-qc]] (2014).
- [268] R. C. Bernardo, I. Vega, *Hair-dressing Horndeski: an approach to hairy solutions in cubic Horndeski gravity*, Phys. Rev. D **99**, 124049 [arXiv:1902.04988 [gr-qc]] (2019).
- [269] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, San Francisco (2004).
- [270] S. V. Babak, L. P. Grishchuk, *The Energy-Momentum Tensor for the Gravitational Field*, Phys. Rev. D **61**, 024038 [arXiv:gr-qc/9907027 (2000).
- [271] A. Borde, *Geodesic focusing, energy conditions and singularities*, Class. Quantum Grav., Volume **4**, Issue 2, 343-356 (1987).
- [272] M. Visser, C. Barcelo, *Energy conditions and their cosmological implications*, COSMO-**99**, 98-112 [arXiv:gr-qc/0001099] (2000).
- [273] E. Curiel, *A Primer on Energy Conditions*, In: D. Lehmkuhl, Eds: G. Schiemann, E. Scholz, Towards a Theory of Spacetime Theories. Einstein Studies, Volume 13, 43–104, Birkhäuser, New York, [arXiv:1405.0403[physics.hist-ph]] (2017).
- [274] H. Maeda, T. Harada, *Criteria for energy conditions*, Class. Quant. Grav. **39**,195002 [arXiv:2205.12993[gr-qc]] (2022).

-
- [275] M. J. Reboucas, J. Santos, A. F. F. Teixeira, *Classification of Energy Momentum Tensors in $n \geq 5$ Dimensional Space-times: a Review*, Braz. J. Phys. **34**, 535-543 [arXiv:gr-qc/0312064] (2004).
- [276] V. Faraoni, E. Mokhtar, Z. R. Mokkedem, *Dominant Energy Condition and dissipative fluids in general relativity*, Gen. Relativ. Gravit. **55**, 56 [arXiv:2210.16689[gr-qc]] (2023).
- [277] V. Faraoni, E. Gunzig, P. Nardone, *Conformal transformations in classical gravitational theories and in cosmology*, Fund. Cosmic Phys. **20**:121 [arXiv:gr-qc/9811047] (1999).
- [278] Y. Fujii, K. I. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, Cambridge University Press, Cambridge (2003).
- [279] R. H. Dicke, *Mach's Principle and Invariance under Transformation of Units*, Phys. Rev. **125**, 2163 (1962).
- [280] V. Faraoni, S. Nadeau, *The (pseudo)issue of the conformal frame revisited*, Phys. Rev. D **75**, 023501 [arXiv:gr-qc/0612075] (2007).
- [281] M. Galaverni, G. Gionti, *Spherically Symmetric Geometrodynamics in Jordan and Einstein frames*, Eur. Phys. J. C **85**, 740 [arXiv:2501.08364[gr-qc]] (2025).
- [282] D. I. Santiago, A. S. Silbergleit, *On the Energy-Momentum Tensor of the Scalar Field in Scalar-Tensor Theories of Gravity*, Gen. Relativ. Gravit. **32**, 565-581, [arXiv:gr-qc/9904003] (2000).
- [283] G. Magnano, L. M. Sokolowski, *Physical equivalence between nonlinear gravity theories and a general-relativistic self-gravitating scalar field*, Phys. Rev. D **50**, 5039 (1994).
- [284] J. Francfort, B. Ghosh, R. Durrer, *Cosmological Number Counts in Einstein and Jordan frames*, JCAP **09**:071, [arXiv:1907.03606[gr-qc]] (2019).
- [285] N. Deruelle, M. Sasaki, *Conformal Equivalence in Classical Gravity: the Example of "Veiled" General Relativity*, In: S. Odintsov, Eds: D. Sáez-Gómez, S. Xambó-Descamps, Cosmology, Quantum Vacuum and Zeta Functions, Springer Proceedings in Physics, vol 137, Springer, Berlin, Heidelberg, [arXiv:1007.3563[gr-qc]] (2011).

-
- [286] V. Faraoni, *Non-minimal coupling of the scalar field and inflation*, Phys. Rev. D **53**, 6813 [arXiv:astro-ph/9602111] (1996).
- [287] K. A. Malik, D. Wands, C. Ungarelli, *Large-scale curvature and entropy perturbations for multiple interacting fluids*, Phys. Rev. D **67**, 063516, [arXiv:astro-ph/0211602] (2003).
- [288] R. de Putter, E. V. Linder, *Kinetic k-essence and Quintessence*, Astropart. Phys. **28**:263-272 [arXiv:0705.0400[astro-ph]] (2007).
- [289] T. Prokopec, N. C. Tsamis, R. P. Woodard, *Two loop stress-energy tensor for inflationary scalar electrodynamics*, Phys. Rev. D **78**, 043523 [arXiv:0802.3673[gr-qc]] (2008).
- [290] L. García, J. Tejeiro, L. Castañeda, *K-essence scalar field as dynamical dark energy*, [arXiv:1210.5259[astro-ph.CO]] (2012).
- [291] S. Hussain, S. Nelleri, K. Bhattacharya, *Comprehensive Study of k-essence Model: Dynamical System Analysis and Observational Constraints from Latest Type Ia Supernova and BAO Observations*, JCAP **03**:025 [arXiv:2406.07179[astro-ph.CO]] (2025).
- [292] P.S. Letelier, *Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components*, Phys. Rev. D **22**, 4 (1979).
- [293] M. S. Madsen, *A note on the equation of state of a scalar field*, Astrophys. Space. Sci. **113**, 205–207 (1985).
- [294] M. S. Madsen, *Scalar fields in curved spacetimes*, Class. Quantum Grav. **5**, 627 (1988).
- [295] L. O. Pimentel, *Energy-momentum tenzor in the general scalar-tensor theory*, Class. Quantum Grav. **6**:L263-L265 (1989).
- [296] V. Faraoni, J. Côté, *Imperfect fluid description of modified gravities*, Phys. Rev. D **98**, 084019 [arXiv:1808.02427[gr-qc]] (2018).
- [297] B. V. Ivanov, *The importance of anisotropy for relativistic fluids with spherical symmetry*, Int. J. Theor. Phys. **49**, 1236 arXiv:1005.1047[gr-qc] (2010).
- [298] V. Faraoni, J. Côté, *Scalar field as a null dust*, Eur. Phys. J. C **79**, 318 [arXiv:1812.06457[gr-qc]] (2019).

-
- [299] V. Faraoni, *Correspondence between a scalar field and an effective perfect fluid*, Phys. Rev. D **85**, 024040 [arXiv:1201.1448[gr-qc]] (2012).
- [300] R.L. Seliger, G.B. Whitham, *Variational principles in continuum mechanics*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, Volume **305**, Issue 1480, 1-25 (1968).
- [301] B. F. Schutz, *Perfect Fluids in General Relativity: Velocity Potentials and a Variational Principle*, Phys. Rev. D **2**, 2762 (1970).
- [302] J. D. Brown, *Action functionals for relativistic perfect fluids*, Class. Quantum Grav. **10**, 1579 [arXiv:gr-qc/9304026] (1993).
- [303] I. Semiz, *Comment on "Correspondence between a scalar field and an effective perfect fluid"*, Phys. Rev. D **85**, 068501 (2012).
- [304] X. Roy, *On the 1+3 Formalism in General Relativity*, [arXiv:1405.6319[gr-qc]] (2014).
- [305] R. A. d’Inverno, J. Stachel, *Conformal two-structure as the gravitational degrees of freedom in general relativity*, J. Math. Phys. **19**, 2447 (1978).
- [306] R. A. d’Inverno, J. Smallwood, *Covariant 2+2 formulation of the initial-value problem in general relativity*, Phys. Rev. D **22**, 1233 (1980).
- [307] R. Geroch, A. Held, R. Penrose, *A spacetime calculus based on pairs of null directions*, J. Math. Phys. **14**, 874 (1973).
- [308] C. G. Torre, *Null surface geometrodynamics*, Class. Quantum Grav. **3**, 773 (1986).
- [309] S. A. Hayward, *The general solution to the Einstein equations on a null surface*, Class. Quantum Grav. **10**, 773 (1993).
- [310] E. Gourgoulhon, S. Bonazzola, *Noncircular axisymmetric stationary spacetimes*, Phys. Rev. D **48**, 2635 (1993).
- [311] E. Gourgoulhon, *Generalized Damour–Navier–Stokes equation applied to trapping horizons*, Phys. Rev. D **72**, 104007 [arXiv:gr-qc/0508003] (2005).
- [312] E. Gourgoulhon, J. L. Jaramillo, *A 3+1 perspective on null hypersurfaces and isolated horizons*, Phys. Rep. **423**, 159-294 [arXiv:gr-qc/0503113] (2006).

- [313] Y. Choquet-Bruhat, P. T. Chruściel, J. M. Martín-García, *The light-cone theorem*, Class. Quantum Grav. **26**, 135011 [arXiv:0905.2133[gr-qc]] (2009).
- [314] J.H. Yoon, *Hamiltonian structure and constraint algebra in the (2+2) formalism*, Class. Quantum Grav. **31**, 045005, arXiv:2405.20515 [gr-qc] (2024).
- [315] I. Rácz, *Cauchy problem as a two-surface based 'geometrodynamics'*, Class. Quantum Grav. **32**, 015006, arXiv:1409.4914 [gr-qc] (2015).
- [316] A. Maciel, M. L. Delliou, J. P. Mimoso, *New insights on null and timelike warped symmetric spacetime splittings*, [arXiv:2405.09968[gr-qc]] (2023).
- [317] G. F. R. Ellis, *Relativistic cosmology*, Gen. Relativ. Gravit. **41**, 581-660 (2009), Proc. Int. Sch. Phys. Fermi **47**, 104-182 (1971).
- [318] J. Ehlers, *Contributions to the relativistic mechanics of continuous media*, Gen. Relativ. Gravit. **25**, 1225-1266 (1993).
- [319] H. van Elst, *Extensions and applications of 1+3 decomposition methods in general relativistic cosmological modelling*, Ph.D. thesis, University of London (1996).
- [320] G. F. R. Ellis, H. van Elst, *Cosmological models*, NATO Adv. Study Inst. Ser. C. Math. Phys. Sci. 541:1-116, [arXiv:gr-qc/9812046] (1999).
- [321] S. Bonometto, V. Gorini, U. Moschella, *Modern cosmology*, Institute of Physics, Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation, Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia (2002).
- [322] C. A. Clarkson, R. K. Barrett, *Covariant Perturbations of Schwarzschild Black Holes*, Class. Quant. Grav. **20**, 3855 [arXiv:gr-qc/0209051] (2003).
- [323] C. A. Clarkson, *Covariant approach for perturbations of rotationally symmetric spacetimes*, Phys. Rev. D **76**, 104034 [arXiv:0708.1398[gr-qc]] (2007).
- [324] C. Hansraj, R. Goswami, S. D. Maharaj, *A semi-tetrad decomposition of the Kerr spacetime*, Eur. Phys. J. C **83**, 321 [arXiv:2109.04162[gr-qc]] (2023).
- [325] J. Hakata, R. Goswami, C. Hansraj, S. D. Maharaj, *What makes a shear-free spherical perfect fluid be inhomogeneous with tidal effects?*, Gen. Relativ. Gravit. **55**, 119 [arXiv:2306.14581 [gr-qc]] (2023).

- [326] Z. Keresztes, M. Forsberg, M. Bradley, P. K. S. Dunsby, L. Á. Gergely, *Gravitational, shear and matter waves in Kantowski-Sachs cosmologies*, J. Cosm. Astrop. Phys. **11**, 042, [arXiv:1507.08300[gr-qc]] (2015).
- [327] Z. Keresztes, L. Á. Gergely, Covariant gravitational dynamics in $3+1+1$ dimensions, Class. Quant. Grav. **27** 105009, [arXiv:0909.0490[gr-qc]] (2010).
- [328] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Gravitation: An Introduction to Current Research*, 7. fejezet, 227–265, szerkesztő L. Witten, Wiley, New York, [arXiv:gr-qc/0405109] (1962).
- [329] E.ourgoulhon, *3+1 Formalism in General Relativity*, Bases of Numerical Relativity, Lecture Notes in Physics, Springer Berlin, Heidelberg (2012).
- [330] Gonzalo J. Olmo, *Palatini Approach to Modified Gravity: $f(R)$ Theories and Beyond*, Int. J. Mod. Phys. D **20**:413-462, [arXiv:1101.3864[gr-qc]] (2011).
- [331] D. Sáez-Chillón Gómez, *$3 + 1$ decomposition in modified gravities within the Palatini formalism and some applications*, Phys. Rev. D **104**, 024029 (2021).
- [332] J. B. Jiménez, L. Heisenberg, T. S. Koivisto, *Teleparallel Palatini theories*, JCAP **08**:039 (2018).
- [333] J. B. Jiménez, L. Heisenberg, T. S. Koivistoc, *The Geometrical Trinity of Gravity*, Universe **2019**, 5(7), 173 [arXiv:1903.06830[hep-th]] (2019).
- [334] S. Capozziello, A. Finch, J. L. Said, A. Magro, *The $3+1$ formalism in teleparallel and symmetric teleparallel gravity*, Eur. Phys. J. C **81**, 1141 (2021).
- [335] F. Piazza, F. Vernizzi, *Effective Field Theory of Cosmological Perturbations*, Class. Quantum Grav. **30**, 214007 [arXiv:1307.4350[hep-th]] (2013).
- [336] J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, F. Vernizzi, *New Class of Consistent Scalar-Tensor Theories*, Phys. Rev. Lett. **114**, 211101 (2015).
- [337] G. Servignat, J. Novak, I. Cordero-Carrión, *A new formulation of general-relativistic hydrodynamic equations using primitive variables*, Class. Quantum Grav. **40**, 105002 [arXiv:2212.10853[gr-qc]] (2023).
- [338] D. D. Doneva, L. A. Saló, S. S.Yazadjiev, *$3 + 1$ non-linear evolution of Ricci-coupled scalar-Gauss-Bonnet gravity*, Phys. Rev. D **110**, 024040 [arXiv:2404.15526[gr-qc]] (2024).

- [339] J. Gorard, *Computational General Relativity in the Wolfram Language using Gravitas I: Symbolic and Analytic Computation*, Preprints **2024**, 2024011859 [arXiv:2308.07508[gr-qc]] (2024).
- [340] J. Gorard, *Computational General Relativity in the Wolfram Language using Gravitas II: ADM Formalism and Numerical Relativity*, Preprints **2024**, 2024011859 [arXiv:2401.14209[gr-qc]] (2024).
- [341] M. Sasaki, *$[(2+1)+1]$ -Formalism of General Relativity*, Problems of Collapse and Numerical Relativity, NATO ASI Series, vol 134. Springer, Reidel, Dordrecht, 203-220 (1984).
- [342] E. T. Newman, R. Penrose, *An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*, J. Math. Phys. **3**(3): 566–768 (1962).
- [343] E. T. Newman, R. Penrose, *Errata: An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients*, J. Math. Phys., **4**(7): 998 (1963).
- [344] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*, Clarendon Press, Oxford University Press (1983).
- [345] L. Á. Gergely and Z. Kovács, *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions*, Phys. Rev. D **72**, 064015 [arXiv:gr-qc/0507020] (2005).
- [346] Z. Kovács and L. Á. Gergely, *Gravitational dynamics in $s+1+1$ dimensions II. Hamiltonian theory*, Phys. Rev. D **77**, 024003 [arXiv:0709.2131[gr-qc]] (2008).
- [347] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Hamiltonian Dynamics of Doubly-Foliable Space-Times*, Universe **2018**, 4(1), 9 [arXiv:2007.00983[gr-qc]] (2018).
- [348] C. Gergely, Z. Keresztes, and L. Á. Gergely, *Gravitational dynamics in a $2+1+1$ decomposed spacetime along nonorthogonal double foliations: Hamiltonian evolution and gauge fixing*, Phys. Rev. D **99**, 104071 [arXiv:1905.00039[gr-qc]] (2019).
- [349] C. Gergely, *Feketelyuk-perturbációk skalár-tenzor gravitációelméletekben*, Fizikai Szemle 70: 3 pp. 97-102., 6 p. (2020).
- [350] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *$2+1+1$ General relativistic Hamiltonian dynamics and gauge fixing in Horndeski gravity*, Romanian Astron. J., Vol. **30**, No. 1, 45-54 (2020).

-
- [351] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Doubly-foliable space-times and gauge-fixing of perturbations in scalar-tensor gravity theories*, The Fifteenth Marcel Grossmann Meeting, pp. 386-391 (2022).
- [352] Z. Kovács, *On the Hamiltonian structure of the $(n+2)$ -dimensional geometrodynamics*, Class. Quantum Grav. **31**, 235005, [arXiv:1406.2402[hep-th]] (2014).
- [353] C. Nagy, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Spherically symmetric, static black holes with scalar hair, and naked singularities in nonminimally coupled k -essence*, Phys. Rev. D **103**, 124056, [arXiv:2210.00287[gr-qc]] (2021).
- [354] C. Gergely, Z. Keresztes, L. Á. Gergely, *Minimally coupled scalar fields as imperfect fluids*, Phys. Rev. D **102**, 024044, [arXiv:2007.01326[gr-qc]] (2020).
- [355] J. A. Schouten, *Der Ricci Kalkül*, Sprinter Verlag (1924).
- [356] T. Kobayashi, H. Motohashi, T. Suyama, *Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations I: The odd-parity sector*, Phys. Rev. D **85**, 084025, [arXiv:1202.4893[gr-qc]] (2012).
- [357] T. Kobayashi, H. Motohashi, T. Suyama, *Black hole perturbation in the most general scalar-tensor theory with second-order field equations II: the even-parity sector*, Phys. Rev. D **89**, 084042, [arXiv:1402.6740[gr-qc]] (2014).
- [358] H. Mihály, *Descartes és Segner tétele*, Haladvány Kiadvány (2018. 02. 18.), [<http://math.bme.hu/~hujter/180218.pdf>].
- [359] L. Á. Gergely, *Spherically symmetric static solution for colliding null dust*, Phys. Rev. D **58**, 084030 [arXiv:gr-qc/9809024] (1998).
- [360] L. Á. Gergely, *Spherically symmetric closed universe as an example of a 2D dilatonic model*, Phys. Rev. D **59**, 104014 [arXiv:gr-qc/9902016] (1999).
- [361] S. A. Hayward, *Wormholes supported by pure ghost radiation*, Phys. Rev. D **65**, 124016 [arXiv:gr-qc/0202059] (2002).
- [362] L. Á. Gergely, *Wormholes, naked singularities and universes of ghost radiation*, Phys. Rev. D **65**, 127503 [arXiv:gr-qc/0204016] (2002).

