Szemistabilis eloszlások geometriai parciális vonzástartományából vett véletlen változók lineáris kombinációi

doktori disszertáció tézisfüzete

Kevei Péter
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet
Sztochasztika Tanszék

Témavezető:
Dr. Csörgő Sándor

2009

1. Az általánosított n-Pál paradoxon

A fejezet az [5] cikk bővített változata. Az egyenletek, tételek és következmények számozása a disszertációban és a tézisfüzetben a könnyebb hivatkozhatóság végett megegyezik.

Pál addig dobál egy nem szükségképpen szabályos érmét, míg fej nem lesz. Ha ez először a k-adik dobásra következik be, akkor Péter fizet Pálnak r^k dukátot, ahol $r = 1/q$, $q = 1 - p$ és $p \in (0, 1)$ a fejdobás valószínűsége minden egyes dobásnál. Ez az általánosított szentpétervári(p) játék, melyben tehát ha X jelöli Pál nyereményét, akkor $\mathbf{P}\{X = r^k\} = q^{k-1}p$, $k \in \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$ játékos mindegyike, Pál$_1$, Pál$_2$, …, Pál$_n$ pontosan egy általánosított szentpétervári játékot játszik Péterrel; nyereményeik rendre $X_1, X_2, \dots, X_n$. Játékosaink, mielőtt játszanának, nyereményük elosztására megegyezhetnek egy $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{n,n})$ osztozkodási stratégiában, melyben a komponensek nemnegatívak és összegük egy. Ennél a stratégiánál Pál$_1$ kap $p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_2 + \cdots + p_{n,n}X_n$ dukátot, Pál$_2$ kap $p_{n,n}X_1 + p_{1,n}X_2 + \cdots + p_{n-1,n}X_n$ dukátot, …, Pál$_n$ pedig $p_{2,n}X_1 + p_{3,n}X_2 + \cdots + p_{n,n}X_{n-1} + p_{1,n}X_n$ dukátot kap. Az elosztás igazságos abban az értelemben, hogy minden Pál nyereménye ugyanolyan eloszlású, és ugyanazt az

$$\begin{aligned} A_p(\boldsymbol{p}_n) &= \mathbf{E}[\, p_{1,n}X_1 + \cdots + p_{n,n}X_n, X_1] \\ &= \int_0^\infty \big[\mathbf{P}\{p_{1,n}X_1 + \cdots + p_{n,n}X_n > x\} - \mathbf{P}\{X_1 > x\}\big]\, \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.1}$$

hozamot eredményezi, amennyiben ez az integrál definiált, improprius Riemann vagy Lebesgue értelemben. Egy $\boldsymbol{p}_n$ stratégiát akkor nevezünk *megengedettnek*, ha minden komponense vagy 0, vagy q-nak egész kitevős hatványa. Egy stratégia entrópiája a $H_r(\boldsymbol{p}_n) = \sum_{j=1}^n p_{j,n} \log_r 1/p_{j,n}$ mennyiség.

1.1. Tétel. *Tetszőleges $p \in (0, 1)$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén a $\boldsymbol{p}_n$ osztozkodási stratégia $A_p(\boldsymbol{p}_n)$ hozama pontosan akkor létezik improprius Riemann értelemben, ha $\boldsymbol{p}_n$ megengedett. Ekkor $A_p(\boldsymbol{p}_n) = \frac{p}{q} H_r(\boldsymbol{p}_n)$.*

A tételt a klasszikus, $p = 1/2$ esetben Csörgő és Simons [6] bizonyította. Azt is megmutatták, hogy $X_1, X_2, \dots, X_n$ független szentpétervári$(1/2)$ változókhoz és tetszőleges $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \dots, p_{n,n})$ megengedett stratégiához elég bő valószínűségi mezőn megadható egy $X_{\boldsymbol{p}_n}$ szentpétervári változó és egy $Y_{\boldsymbol{p}_n}$ nemnegatív véletlen változó, melyre $T_{\boldsymbol{p}_n} = p_{1,n}X_1 + p_{2,n}X_n + \cdots + p_{n,n}X_n = X_{\boldsymbol{p}_n} + Y_{\boldsymbol{p}_n}$ majdnem biztosan. Ebből következik a $T_{\boldsymbol{p}_n} \geq_{\mathcal{D}} X_1$ sztochasztikus egyenlőtlenség. Ezért az $A_{1/2}(\boldsymbol{p}_n)$ integrálban az integrandus nemnegatív, vagyis $A_{1/2}(\boldsymbol{p}_n)$ az erősebb, Lebesgue értelemben is létezik minden megengedett osztozkodási stratégia esetén. Az alábbi tétel szerint a sztochasztikus dominancia két játékos esetén mindig teljesül.

1.2. Tétel. *A $p \in (0,1)$ paraméter tetszőleges értékére, ha $\boldsymbol{p}_2 = (q^a, q^b)$ megengedett stratégia valamely $a, b \in \mathbb{N}$ esetén, akkor $T_{\boldsymbol{p}_2} = q^a X_1 + q^b X_2$ sztochasztikusan nagyobb, mint X_1.*

Érdekes módon háromnál több játékos esetén a sztochasztikus dominancia általában nem teljesül.

1.3. Tétel. *Ha $p = (n-1)/n$, $q = 1/n$ és $n = r > 2$ a játékosok száma, akkor $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ és nX_1 sztochasztikusan nem összehasonlíthatók.*

Az 1.2 Tétel fényében az (1.1)-beli integrandus nemnegatív, valahányszor a $\boldsymbol{p}_2$ stratégia megengedett, vagyis az $A_p(\boldsymbol{p}_2)$ hozam Lebesgue értelemben is véges. Az 1.3 Tétel szerint azonban az $A_p(\boldsymbol{p}_n)$ Lebesgue-integrálként való létezése nem adódhat sztochasztikus egyenlőtlenségből. Adódik azonban máshogy.

1.4. Tétel. *Tetszőleges p paraméterre az általánosított szentpétervári(p) játékban bármely megengedett $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{n,n})$ stratégia esetén az (1.1) formulával definiált $A_p(\boldsymbol{p}_n)$ integrál Lebesgue-integrálként is létezik.*

Az 1.1 Tételből kiderül, melyek azok a stratégiák, melyekkel Páljaink jobban járnak. Azonban nem minden p paraméter esetén van megengedett stratégia, sőt majdnem minden paraméter esetén nincs. Ha a p paraméterhez van megengedett stratégia, akkor p algebrai szám, vagyis ilyen p-ből legfeljebb megszámlálható sok van. Megmutatható, hogy mégis van „elég sok”.

1.5. Tétel. *A megengedett paraméterek halmaza sűrű a $(0,1)$ intervallumon.*

Amikor adott számú játékos esetén van megengedett stratégia, természetes a kérdés: melyik a legjobb? Abban a speciális esetben, amikor $p = (m-1)/m$ valamely $m \geq 2$ egész esetén, a következő tétel adja meg a választ. A tételben $\lfloor y \rfloor$ az alsó-, $\lceil y \rceil$ a felsőegészrészt, míg $\langle y \rangle$ az y törtrészét jelöli.

1.6. Tétel. *Ha $p = (r-1)/r$, $n = r^{\lfloor \log_r n \rfloor} + (r-1)r_n$ valamely $r \geq 2$ esetén és $0 \leq r_n \leq r^{\lfloor \log_r n \rfloor} - 1$, akkor minden $\boldsymbol{p}_n$ megengedett stratégiára*

$$A_p(\boldsymbol{p}_n) = \frac{p}{q} H_r(\boldsymbol{p}_n) \leq \frac{p}{q} \log_r n - \delta_p(n) =: A^*_{p,n},$$

ahol $\delta_p(u) = 1 + (r-1)\langle \log_r u\rangle - r^{\langle \log_r u\rangle}$, $u > 0$. *Továbbá egyenlőség csak a* $\boldsymbol{p}_n^*$ *stratégia esetén áll, mely stratégia a komponensek sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott:*

$$\boldsymbol{p}_n^* = (p_{1,n}^*, \dots, p_{n,n}^*) = (rp_n^*, \dots, rp_n^*, p_n^*, \dots, p_n^*), \qquad p_n^* = \frac{1}{r^{\lceil \log_r n\rceil}},$$

ahol a p_n^* *és* rp_n^* *értékű komponensek száma rendre*

$$m_{1,p}(n) = \frac{rn - r^{\lceil \log_r n\rceil}}{r-1} \quad \text{és} \quad m_{2,p}(n) = \frac{r^{\lceil \log_r n\rceil} - n}{r-1}.$$

Végül mutatunk egy stratégiageneráló algoritmust, mely megőrzi a sztochasztikus dominanciát. Legyen $p \in (0,1)$ megengedett paraméter, és tekintsünk a $(q^{a_1}, q^{a_2}, \dots, q^{a_n})$ és $(q^{b_1}, q^{b_2}, \dots, q^{b_m})$ megengedett stratégiákat. Az első stratégiába a q^{a_k} komponens helyébe $(q^{a_k+b_1}, q^{a_k+b_2}, \dots, q^{a_k+b_m})$-et írva egy $(q^{d_1}, q^{d_2}, \dots, q^{d_{n+m-1}})$ megengedett stratégiát kapunk, most már $n+m-1$ játékos esetén, ahol a $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_{n+m-1}$ sorozat az $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + b_1, \dots, a_k + b_m, a_{k+1}, \dots, a_n$ monoton átrendezése. Akkor mondjuk, hogy a $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, \dots, p_{n,n})$ stratégia *sztochasztikusan domináns,* ha $p_{1,n}X_1 + \cdots + p_{n,n}X_n \geq_{\mathcal{D}} X_1$. Utolsó tételünk szerint ezzel az algoritmussal sztochasztikusan domináns stratégiából indulva ugyancsak domináns stratégiát kapunk. Így az $n = m = 2$ állapotból indulva az 1.2 Tétel segítségével domináns stratégiák seregét gyárthatjuk meg.

1.7. Tétel. *Ha mind a* $(q^{a_1}, q^{a_2}, \dots, q^{a_n})$ *stratégia, mind a* $(q^{b_1}, q^{b_2}, \dots, q^{b_m})$ *stratégia sztochasztikusan domináns, akkor a generált* $(q^{d_1}, q^{d_2}, \dots, q^{d_{n+m-1}})$ *stratégia is az lesz.*

2. Összetartó aszimptotikus sorfejtések általánosított szentpétervári nyereményekre

A fejezet a [2] cikk eredményeit tartalmazza.

Tovább általánosítjuk a szentpétervári játékot. Pál addig dobál egy nem szükségképpen szabályos pénzérmét, amíg az fej nem lesz. Ha ez a k-adik dobásra következik be, akkor Péter fizet Pálnak $r^{k/\alpha}$ dukátot, ahol $\alpha \in (0,2)$ tetszőleges paraméter, $p \in (0,1)$ a fej valószínűsége minden egyes dobásnál, $q = 1-p$ és $r = 1/q$.

Tetszőleges $p \in (0,1)$, $\alpha \in (0,2)$ és $\gamma \in (q,1]$ paraméterhármas esetén tekintsük a

$$W_\gamma^{\alpha,p} = \frac{1}{\gamma^{1/\alpha}} \left\{ \sum_{m=0}^{-\infty} r^{m/\alpha} \left[Y_m^{p,\gamma} - \frac{p\gamma}{qr^m} \right] + \sum_{m=1}^{\infty} r^{m/\alpha}\, Y_m^{p,\gamma} \right\} + s_\gamma^{\alpha,p} \tag{2.2}$$

korlátlanul osztható véletlen változót, ahol $\ldots, Y_{-2}^{p,\gamma}, Y_{-1}^{p,\gamma}, Y_0^{p,\gamma}, Y_1^{p,\gamma}, Y_2^{p,\gamma}, \ldots$ független Poisson eloszlású véletlen változók úgy, hogy az $Y_m^{p,\gamma}$ paramétere $pr\gamma q^m = p\gamma/(qr^m)$, $s_\gamma^{\alpha,p}$ pedig valós állandó. Jelölje $G_{\alpha,p,\gamma}(x) = \mathbf{P}\{W_\gamma^{\alpha,p} \le x\}$ az eloszlás-,

$$\mathbf{g}_{\alpha,p,\gamma}(t) = \mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tW_\gamma^{\alpha,p}}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}G_{\alpha,p,\gamma}(x) = \mathrm{e}^{y_\gamma^{\alpha,p}(t)}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

pedig a karakterisztikus függvényt, ahol a kitevő

$$y_\gamma^{\alpha,p}(t) = \mathrm{i}ts_\gamma^{\alpha,p} + \sum_{l=0}^{-\infty}\left(\exp\left\{\frac{\mathrm{i}tr^{\frac{l}{\alpha}}}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right\} - 1 - \frac{\mathrm{i}tr^{\frac{l}{\alpha}}}{\gamma^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\frac{p\gamma}{qr^l} + \sum_{l=1}^{\infty}\left(\exp\left\{\frac{\mathrm{i}tr^{\frac{l}{\alpha}}}{\gamma^1\alpha}\right\} - 1\right)\frac{p\gamma}{qr^l}.$$

A karakterisztikus függvény kitevőjének alakjából azonnal következik, hogy $W_\gamma^{\alpha,p}$ szemistabilis eloszlású α karakterisztikus kitevővel. Ebből adódik, hogy a $G_{\alpha,p,\gamma}$ eloszlás végtelen sokszor differenciálható.

Tekintsük osztozkodási stratégiák egy $\{\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, \ldots, p_{n,n})\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatát, melyre $\overline{p}_n = \max\{p_{1,n}, \ldots, p_{n,n}\} \to 0$. Ebben a fejezetben az

$$S_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p} = \sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^{1/\alpha}\, X_k - \frac{p}{q}\, H_{\alpha,p}(\boldsymbol{p}_n) \tag{2.8}$$

véletlen változó aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, ahol $H_{\alpha,p}(\boldsymbol{p}_n)$ a stratégiától függő állandó. Az approximáló szemistabilis eloszlásaink a

$$W_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^{1/\alpha}\, W_{1,k}^{\alpha,p}, & \text{ha } \alpha \ne 1, \\ \sum_{k=1}^{n} p_{k,n} W_{1,k}^{1,p} - \frac{p}{q}\, H_{1,p}(\boldsymbol{p}_n), & \text{ha } \alpha = 1, \end{cases} \tag{2.9}$$

véletlen változók lesznek, ahol a $W_{1,1}^{\alpha,p}, W_{1,2}^{\alpha,p}, \ldots, W_{1,n}^{\alpha,p}$ változók a $W_1^{\alpha,p}$ független példányai, amit a (2.2) formulából kapunk a $\gamma = 1$ helyettesítéssel. A megfelelő karakterisztikus függvény $\mathbf{g}_{\alpha,p,\boldsymbol{p}_n}(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tW_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}})$, az eloszlásfüggvény pedig $G_{\alpha,p,\boldsymbol{p}_n}(x) = \mathbf{P}\{W_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p} \le x\}$.

Adott $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, \ldots, p_{n,n})$ stratégia esetén minden $p_{k,n}$ komponensre definiáljuk a $\gamma_{k,n} = 1/(p_{k,n} r^{\lceil \log_r 1/p_{k,n} \rceil}) \in (q, 1]$ paramétereket, melyek az egyes komponensek két egymást követő q-hatvány közötti helyzetét határozzák meg. A (2.3) és a $\mathbf{g}_{\alpha,p,\boldsymbol{p}_n}(t) = \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tW_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}})$ formulák segítségével definiáljuk a $\mathbf{g}_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(t)$ függvényt, mely $\alpha \ne 1$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(t) = \mathbf{g}_{\alpha,p,\boldsymbol{p}_n}(t)\Bigg[1 &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^2 \big[y_{\gamma_{k,n}}^{\alpha,p}(t)\big]^2 + \mathrm{i}ts_1^{\alpha,p}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^{1+\frac{1}{\alpha}}\, y_{\gamma_{k,n}}^{\alpha,p}(t) \\ &+ \frac{t^2}{2}\left\{(s_1^{\alpha,p})^2 + \frac{p}{q - q^{2/\alpha}}\right\}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^{\frac{2}{\alpha}}\Bigg],\end{aligned}$$

ahol $s_1^{\alpha,p}=p/(q-q^{1/\alpha})$ a (2.2)-ben szereplő konstans, és $\alpha=1$ esetén

$$\mathbf{g}_{\boldsymbol{p}_n}^{1,p}(t)=\mathbf{g}_{1,p,\boldsymbol{p}_n}(t)\Bigg[1-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n p_{k,n}^2\big[y_{\gamma_{k,n}}^{1,p}(t)\big]^2-\mathrm{i}t\frac{p}{q}\sum_{k=1}^n p_{k,n}^2\,y_{\gamma_{k,n}}^{1,p}(t)\log_r\frac{1}{p_{k,n}}\\+\frac{t^2}{2}\bigg\{\frac{p^2}{q^2}\sum_{k=1}^n p_{k,n}^2\log_r^2\frac{1}{p_{k,n}}+\frac{1}{q}\sum_{k=1}^n p_{k,n}^2\bigg\}\Bigg].$$

Végül tekintsük azt a $G_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(\cdot)$ függvényt az egyenesen, mely a fenti $\mathbf{g}_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(t)$ függvény inverz Fourier – Stieltjes transzformáltja, azaz

$$\mathbf{g}_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}G_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(x),\qquad t\in\mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Az $S_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}$ lineáris kombinációkra vonatkozó eredményünk a következő

2.1. Tétel. *Tetszőleges $\{\boldsymbol{p}_n=(p_{1,n},\dots,p_{n,n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ stratégiasorozat esetén*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\mathbf{P}\big\{S_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}\le x\big\}-G_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}(x)\Big|=\begin{cases}O\big(\overline{p}_n^{\,2}\big), & \text{ha } 0<\alpha<1/2,\\ O\big(\overline{p}_n^{\,1/\alpha}\big), & \text{ha } 1/2\le\alpha<3/2;\\ O\big(\overline{p}_n^{\,(4-2\alpha)/\alpha}\big), & \text{ha } 3/2\le\alpha<2,\end{cases}$$

ahol $\overline{p}_n=\max\{p_{1,n},\dots,p_{n,n}\}$ a komponensek maximuma.

Az egyenletes $\boldsymbol{p}_n^{\diamond}=(1/n,\dots,1/n)$ stratégiára a fenti tétel a [1] cikkben szereplő eredményre redukálódik, azzal a különbséggel, hogy ott egy korrekciós tag hiányzik. Azt, hogy ez a tag valóban javít a sorfejtés pontosságán, legalábbis az $\alpha\neq 1$ esetben, Pap [8] mutatta meg. Innen látszik, hogy tetszőleges $\boldsymbol{p}_n$ stratégia esetén az (2.15) definíció a $G_{\boldsymbol{p}_n^{\diamond}}^{\alpha,p}(\cdot)$ approximáló függvény megfelelő általánosítása.

Megjegyezzük, hogy a $p_{1,n}^{1/\alpha},\dots,p_{n,n}^{1/\alpha}$ súlyok összege csak akkor egy, ha $\alpha=1$, így $\alpha\neq 1$ esetén a megfelelő lineáris kombináció nem feleltethető meg egy osztozkodási stratégiának. Ugyanakkor, egy egyszerű transzformációval a 2.1 Tétel átírható egy ekvivalens, természetesebb formába.

Megengedett stratégiák esetén minden $p_{k,n}$ komponens értéke vagy 0, vagy q-nak egész kitevős hatványa, így $\gamma_{k,n}=1$. Ezt a $\mathbf{g}_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p}$ definíciójába beírva láthatjuk, hogy megengedett stratégiák esetén van valódi határeloszlás, és ekkor hagyományos aszimptotikus sorfejtéseket kapunk. A 2.1 Tételben a domináns tagokra fókuszálva adódik az alábbi

2.2. Következmény. *Tetszőleges $\{\boldsymbol{p}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ megengedett stratégiasorozatra, $\alpha \in (0,1)$ esetén*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left\{S_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p} \le x\right\} - \left[G_{\alpha,p,1}(x) - G_{\alpha,p,1}^{(0,2)}(x)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^2\right]\right| = \begin{cases} O(\overline{p}_n^2), & \text{ha } 0<\alpha\le 1/2,\\ O(\overline{p}_n^{1/\alpha}), & \text{ha } 1/2<\alpha<1;\end{cases}$$

$\alpha = 1$ esetén

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left\{S_{\boldsymbol{p}_n}^{1,p} \le x\right\} - \left[G_{1,p,1}(x) + G_{1,p,1}^{(1,1)}(x)\frac{p}{q}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^2 \log_r \frac{1}{p_{k,n}} - G_{1,p,1}^{(2,0)}(x)\frac{p^2}{2q^2}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^2 \log_r^2 \frac{1}{p_{k,n}}\right]\right| = O(\overline{p}_n);$$

végül ha $\alpha \in (1,2)$, akkor

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\mathbf{P}\left\{S_{\boldsymbol{p}_n}^{\alpha,p} \le x\right\} - \left[G_{\alpha,p,1}(x) - G_{\alpha,p,1}^{(2,0)}(x)\left\{\frac{p^2}{(q-q^{1/\alpha})^2} + \frac{p}{q-q^{2/\alpha}}\right\}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_{k,n}^{2/\alpha}\right]\right| = \begin{cases} O(\overline{p}_n^{1/\alpha}), & \text{ha } 1<\alpha\le 3/2,\\ O(\overline{p}_n^{(4-2\alpha)/\alpha}), & \text{ha } 3/2<\alpha<2.\end{cases}$$

3. Összetartási tételek lineáris kombinációkra

A fejezet a [6] cikk eredményeit tárgyalja.

Tekintsük a $W(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0)$ szemistabilis véletlen változót, melynek karakterisztikus függvénye

$$\mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tW(\psi_1^\alpha,\psi_2^\alpha,0)}) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_0^\infty \beta_t(\psi_1^\alpha(u))\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty \beta_t(-\psi_2^\alpha(u))\,\mathrm{d}u\right\},$$

ahol $\beta_t(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1 - \frac{\mathrm{i}tx}{1+x^2}$, és

$$\psi_j^\alpha(s) = -\frac{M_j(s)}{s^{1/\alpha}}, \quad s>0,\ j=1,2, \tag{3.3}$$

ahol M_1, M_2 nemnegatív, korlátos, jobbról folytonos függvények a $(0,\infty)$ intervallumon, melyek közül legalább az egyik nem azonosan 0, és ha valamelyik nem azonosan 0, akkor szigorúan pozitív infimuma van, valamint teljesül az $M_j(cs) = M_j(s)$ logaritmikus periodicitás valamilyen $c > 1$ állandóval, továbbá a $\psi_j(s)$, $j = 1, 2$, függvények monoton növekvőek. Az előállításban szereplő $\alpha \in (0, 2)$ paramétert a szemistabilis eloszlás karakterisztikus kitevőjének nevezzük. Megyesi [7] megmutatta, hogy ilyen módon minden szemistabilis eloszlást meg lehet adni, egy additív konstans erejéig. Legyen $V(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0) = W(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0) + \theta(\psi_1^\alpha) - \theta(\psi_2^\alpha)$, ahol $\theta(\psi)$ valós állandó, a változó eloszlásfüggvénye pedig $G_{\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0}(x) = \mathbf{P}\{V(\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0) \le x\}$.

Tekintsünk egy F eloszlásfüggvényt, ami benne van a $G_{\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha, 0}$ szemistabilis eloszlás geometriai parciális vonzástartományában, és legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, F eloszlású véletlen változók. Tekintsük $\{\boldsymbol{p}_n\}$ stratégiák egy sorozatát, melyre teljesül a $\overline{p}_n = \max\{p_{j,n} : j = 1, 2, \dots, n\} \to 0$ aszimptotikus elhanyagolhatósági feltétel. A fejezetben az

$$S_{\alpha, \boldsymbol{p}_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{j,n}^{1/\alpha}}{l(p_{j,n})} X_j - \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{j,n}^{1/\alpha}}{l(p_{j,n})} \int_{p_{j,n}}^{1-p_{j,n}} Q(s)\, \mathrm{d}s \tag{3.8}$$

véletlen változó aszimptotikus viselkedését vizsgáljuk, ahol $l(\cdot)$ egy 0-ban lassú változású függvény, ami az F eloszlásfüggvény Q kvantilisának előállításában jelenik meg.

Jelölje $\lambda > 0$ esetén a ${}_\lambda\psi(s) = \psi(s/\lambda)$ függvényt, és legyen $\psi_j^{\alpha,\lambda}(s) = \lambda^{-1/\alpha}{}_\lambda\psi_j^\alpha(s) = -M_j(s/\lambda)s^{-1/\alpha}$, $s > 0$, ahol az M_j függvények (3.3) előállításból valók, $j = 1, 2$. Definiáljuk a $V_{\alpha,\lambda}(M_1, M_2)$ véletlen változót és karakterisztikus függvényét a

$$V_{\alpha,\lambda}(M_1, M_2) = V(\psi_1^{\alpha,\lambda}, \psi_2^{\alpha,\lambda}, 0)\,, \ \mathbf{E}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tV_{\alpha,\lambda}(M_1,M_2)}) = \mathrm{e}^{y_{\alpha,\lambda}(t)},\ t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

formulával. A rövidség kedvéért vezessük be a $\gamma_{j,n} = \gamma_{1/p_{j,n}}$ jelölést, ahol a γ_x függvény hasonlóan definiált, mint a szentpétervári esetben. Legyen $V_{\boldsymbol{p}_n}$ az az egyértelműen meghatározott véletlen változó, melynek karakterisztikus függvénye

$$\mathbf{E}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tV_{\alpha,\boldsymbol{p}_n}}\big) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}G_{\alpha,\boldsymbol{p}_n}(x) = \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} p_{j,n}\, y_{\alpha,\gamma_{j,n}}(t) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

ahol $y_{\alpha,\gamma_{j,n}}(\cdot)$ a (3.9) formulában szereplő $V_{\alpha,\gamma_{j,n}}$ véletlen változó karakterisztikus függvényének exponense. Ennek a résznek a fő eredménye a következő összetartási tétel.

3.1. Tétel. *Legyen $\{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^\infty$ olyan stratégiasorozat, melyre $\overline{p}_n \to 0$. Ekkor*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \big|\mathbf{P}\big\{S_{\alpha,\boldsymbol{p}_n} \le x\big\} - G_{\alpha,\boldsymbol{p}_n}(x)\big| \to 0.$$

A (3.11) formula szerint az egyenletes $\boldsymbol{p}_n^\diamond = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ stratégia esetén teljesül a $V_{\alpha,\boldsymbol{p}_n} \stackrel{\mathcal{D}}{=} V_{\alpha,\gamma_n}(M_1, M_2)$ eloszlásbeli egyenlőség, ezért ebben az esetben a 3.1 Tétel a [3] cikkbeli 2. Tétel teljes összegekre vonatkozó, legfontosabb speciális esetét adja vissza.

Megjegyezzük, hogy most is csak akkor beszélhetünk valódi osztozkodásról, ha $\alpha = 1$ és $l(\cdot) \equiv 1$, azaz ekkor lesz (3.8)-ban a komponensek összege egy. Ugyanakkor, egy transzformációval most is átírhatjuk a 3.1 Tételt megfelelő alakúra.

Végül megmutatjuk, hogy bizonyos speciális stratégiasorozat esetén a fenti összetartási tétel hagyományos határeloszlás-tétellé redukálódik. Egy $\{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^\infty$ stratégiasorozatot *kiegyensúlyozottnak* nevezünk, ha a

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\min\{p_{j,n} \colon j = 1, 2, \ldots, n\}}{\max\{p_{j,n} \colon j = 1, 2, \ldots, n\}} > 0$$

feltétel teljesül. Ez nagyjából annyit jelent, hogy minden komponens számít.

A klasszikus elmélet szerint, ha létezik határeloszlás az egyenletes $\boldsymbol{p}_n^\diamond = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ stratégiasorozat mentén, akkor az szükségképpen stabil. Az alábbi következmény a szemistabilitás egyfajta lényegét ragadja meg: megmutatjuk, hogy minden szemistabilis eloszlás előáll, mint olyan kiegyensúlyozott stratégiasorozaton vett határeloszlás, aminek lényegében két különböző komponense van.

3.1. Következmény. *Tetszőleges $\kappa \in (\mathbf{c}^{-1}, 1]$ esetén megadható olyan kiegyensúlyozott $\{\boldsymbol{p}_n\}_{n=1}^\infty$ stratégiasorozat, melyre $S_{\alpha,\boldsymbol{p}_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} V_{\alpha,\kappa}(M_1, M_2)$, ahol $V_{\alpha,\kappa}(M_1, M_2)$ a (3.9) formulával definiált véletlen változó. Továbbá minden $n \in \{2, 3, \ldots\}$ esetén a $\boldsymbol{p}_n = (p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{n,n})$ stratégia megkonstruálható úgy, hogy az első $n-1$ komponens között csak kettő különböző szerepel.*

Az itteni eredmények bizonyításához szükségünk van az összetartás általános elméletének kidolgozására. Akkor mondjuk, hogy az X_n és Y_n véletlen változók vagy F_n és G_n eloszlásfüggvényeik *összetartanak*, ha $L(F_n, G_n) \to 0$, ahol $L(\cdot,\cdot)$ a Lévy-metrikát jelöli.

3.3. Tétel. *Ha az eloszlásfüggvények $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ sorozat sztochasztikusan kompakt, akkor $L(F_n, G_n) \to 0$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\phi_n(t) - \psi_n(t) \to 0$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahol ϕ_n és ψ_n a megfelelő karakterisztikus függvények.*

A 3.1 Tétel bizonyításának fő eszköze a következő tétel, miszerint ha G_n abszolút folytonos minden n-re, és a sűrűségfüggvények egyenletesen korlátosak, akkor az előző tétel feltétele mellett az egyenletes konvergencia is adódik.

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *sorozat sztochasztikusan kompakt, és megadható egy* $K > 0$ *állandó, melyre* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in\mathbb{R}} |G_n'(x)| \le K$. *Ekkor* $F_n(x) - G_n(x) \to 0$ *minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén pontosan akkor, ha* $\phi_n(t) - \psi_n(t) \to 0$ *minden* $t \in \mathbb{R}$ *esetén. Továbbá ekkor a konvergencia egyenletes, azaz* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - G_n(x)| \to 0$.

Hivatkozások

[1] Csörgő, S. (2007). Merging asymptotic expansions in generalized St. Petersburg games. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **73**, 297–331.

[2] Csörgő, S., and Kevei, P. (2008). Merging asymptotic expansions for cooperative gamblers in generalized St. Petersburg games. *Acta Mathematica Hungarica* **121 (1–2)**, 119–156.

[3] Csörgő, S., and Z. Megyesi, Z. (2002). Merging to semistable laws. *Theory Probab. Appl.* **47**, 17–33.

[4] Csörgő, S., and Simons, G. (2006). Pooling strategies for St. Petersburg gamblers. *Bernoulli* **12**, 971–1002.

[5] Kevei, P. (2007). Generalized n-Paul paradox. *Statist. Probab. Letters* **77**, 1043–1049.

[6] Kevei, P., and Csörgő, S. Merging of linear combinations to semistable laws, *Journal of Theoretical Probability.* To appear.

[7] Megyesi, Z. (2000). A probabilistic approach to semistable laws and their domains of partial attraction. *Acta Sci. Math. (Szeged)* **66**, 403–434.

[8] Pap, G. The accuracy of merging approximation in generalized St. Petersburg games, preprint. Available from Internet: `http://uk.arxiv.org/pdf/0710.1438.pdf`.