SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

NEVELÉSTUDOMÁNYI DOKTORI ISKOLA

OKTATÁSELMÉLET PROGRAM

VÍGH-KISS ERIKA ROZÁLIA

A FEJBEN SZORZÁS STRATÉGIÁINAK VIZSGÁLATA

10-12 éves tanulók körében

PhD-értekezés

Témavezető: Csíkos Csaba DSc

egyetemi tanár

Szeged

2021

Tartalomjegyzék

„Non scholae, sed vitae discimus."

(latin közmondás)

BEVEZETÉS

A kogníció kutatásával az évszázadok során többen és többféle megközelítésből foglalkoztak. Az 1950-es években létrejövő kognitív pszichológia az emberi megismerési folyamatokat, az ember által kialakított reprezentációkat állítja a fókuszba (Pléh, 2010). Egyes képviselői szerint az emberek mindennapi döntéseik során nem a logikai és statisztikai törvényszerűségek alapján hozzák meg döntéseiket, hanem ún. heurisztikákat alkalmaznak, miközben emiatt számos hibát ejtenek (Tversky & Kahneman, 1974). Kísérletei során Piaget (Inhelder & Piaget, 1955) is fontosnak tartotta a gyermekek helytelen logikai következtetései, köztük az arányossági gondolkodás terén létrejött hibás következtetések okainak vizsgálatát. A helytelen matematikai gondolkodás racionális, ésszerű hibákat eredményez (Ben-Zeev, 1998a, 1998b). A gondolkodási hibák kutatása elősegítheti a matematikai gondolkodásfejlődésének megismerését.

Dolgozatunk témájául a számolási képesség, ezen belül a fejben végzett szorzás és az arányossági gondolkodás, a matematikatanulás iránti attitűd életkori jellemzőinek, valamint összefüggésrendszerének vizsgálatát választottuk. Gyakorló pedagógusként, szülőként számos esetben megfigyelhetjük, hogy a tanulók anélkül kezdik használni a számológépet, hogy biztosak lennének az aritmetikai műveletek végzésében. Számológép nélkül egy-egy alapművelet végeredményének becslésekor gyakran nagyságrendi hibákat ejtenek. Még érettségi előtt álló diákok is nehezen birkóznak meg szöveges feladatokkal, azon belül arányossági következtetéssel megoldható feladatokkal. A nemzetközi PISA matematika méréseken tapasztalható egyre romló magyar eredmények is felhívják a figyelmet a matematikatanításra, azon belül a számolási készség, arányossági gondolkodás fejlesztésének szükségességére. A PISA 2015 Összefoglaló jelentés szerint a 2015-ös PISA felmérés során a 15 éves magyar diákok által elért átlag 477 pont, a tanulók mintegy 30%-a a 2-es teljesítményszint alatt van (Ostorics, Szalay, Szepesi & Vadász, 2016). A 2018-as PISA felmérés matematika tartalmi kerete megegyezett a 2015-ös mérésével (Oktatási Hivatal, 2019). A magyar tanulók teljesítménye nem növekedett szignifikánsan, a matematika és természettudomány átlagpontszáma 481 pont, a szövegértésé 476 pont, így a legújabb eredmények szerint Magyarország a 31-37. helyen szerepel a mérésben részt vevő 79 ország között (OECD, 2019). A vizsgált téma létjogosultságát nemcsak a magyar tanulók nemzetközi felmérésekben tapasztalható egyre romló eredményei indokolják. Fontosnak tartjuk ezt a témát azért is, mert a jó számolási készséget, az arányossági gondolkodást több más tudományterületen (pl. fizika, kémia, földrajz, történelem) és a mindennapokban is hasznosíthatják a tanulók (pl. pénzváltáskor, kamatszámításkor, vásárláskor).

Kutatásunk során szerettünk volna választ kapni arra, mi lehet a magyar tanulók romló eredményének és a tanulók közötti teljesítménykülönbségek oka. Kíváncsiak voltunk, milyen különbségek vannak az egyes tanulók tudásszintje között, és tapasztalhatóak-e tudásszintbeli, stratégia-használatbeli eltérések a fiúk és a lányok között a fejben végzett szorzásra vonatkozó feladatok megoldása során. Szeretnénk választ kapni néhány olyan kérdésre, mint: Milyen stratégiákat használnak a 10-18 éves tanulók a fejben végzett szorzások során? Melyek azok a feladattípusok, amelyek a legnagyobb kihívás elé állítják a tanulókat? Milyen összefüggések találhatók az egyes háttérváltozók és a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények között? Megvizsgáljuk, milyen teljesítményt mutatnak az összehasonlító mérések alkalmával a tanulók a fejben végzett szorzás és a szöveges feladatok megoldása során, valamint milyen következtetésekre jutottak e téren végzett vizsgálataik során a magyar és külföldi kutatók. Megnézzük, hogyan illeszkednek a számolási stratégiák a matematikai műveltségbe, az arányossági gondolkodás tanítása a magyar kerettantervbe, hogyan történik vizsgálata a nemzetközi mérések során.

Arányossági gondolkodást kívánó feladatokkal a tanulók már az alsó tagozaton is találkoznak (OFI, 2012a). Az arányosság fogalmának meghatározása és absztrakció az 5-6. évfolyamon követelmény a kerettanterv szerint (OFI, 2012b), és későbbi évfolyamokon is követelményként jelenik meg, ez indokolja, hogy 10-18 éves tanulókat választottunk mintának. A vizsgálatainkba önként bekapcsolódott tanulók száma összesen több, mint 1400 fő. A papír-ceruza alapú mérésekre 2013 és 2019 között került sor.

Hipotéziseink szerint a gyenge számolási készségek és a szöveges (azon belül arányossági) feladatok megoldásakor nyújtott teljesítmények összefüggenek. Mérőeszköznek ezért is választottunk a szorzási stratégiákat vizsgáló teszt mellett arányossági feladatokat is tartalmazó Matematika Tudásszintmérő Tesztet. A vizsgálatok során háttérkérdőívet is felvettünk, a szakirodalom áttanulmányozása alapján ugyanis azt gondoljuk, a matematikateszteken elért eredmények számos háttérváltozóval korrelálhatnak. Reméljük, kutatásunk eredményét a gyakorló pedagógusok hasznosítani tudják a tanítás során.

Értekezésünk hármas célja: (1) a vizsgált témához kapcsolódó tudományterületek fogalomrendszerének rövid bemutatása; (2) a saját kutatásunk előzményeinek tekinthető külföldi és hazai vizsgálatok eredményeinek, következtetéseinek vázlatos ismertetése; (3) a fejben számolás során alkalmazott szorzási stratégiák vizsgálatával, fejlesztésével kapcsolatos eredményeink bemutatása. Az általunk végzett munka alapkutatásnak tekinthető, mivel ilyen jellegű vizsgálatok még nem folytak hazánkban. Ugyanakkor hozzátesszük, hogy eredményeink további kérdéseket vetnek fel, és a vizsgálatokat érdemes folytatni más mintán, más eszközökkel, módszerekkel. A vizsgálatok során papír-ceruza alapú mérőeszközöket alkalmaztunk, az eredményeket SPSS szoftver segítségével elemeztük, ennek során leíró és matematikai statisztikai számításokat és többváltozós összefüggés-vizsgálatokat is végeztünk.

Az *első és a második fejezet* a kutatáshoz fűződő legfontosabb fogalmak értelmezését, elméleti modelljeit tartalmazza. Az elméleti részben kitérünk a kognitív készségek és stratégiák, a matematikai műveltség értelmezésére. Rámutatunk arra, mik a matematikai szakértelem összetevői, és hogy milyen szerepet töltenek be a stratégiák a matematikai műveltség kialakulásában. Összefoglaljuk a stratégiahasználattal kapcsolatosan használt fogalmakat. Megvizsgáljuk, melyek a stratégiakutatás során alkalmazott legfontosabb modellek, így szót ejtünk Siegler és Shipley (1995) ASCM modelljéről, Shrager és Siegler (1998) SCADS számítógépes szimulációs modelljéről, valamint Siegler és Lin (2010) „egymást átfedő hullámok” fejlődési modelljéről.

Röviden összefoglaljuk az eddigi nemzetközi és hazai, stratégiakutatással kapcsolatos eredményeket, bemutatjuk a vizsgálatok főbb jellemzőit. A szakirodalom alapján felvázoljuk a matematikai készségek rendszerét, fejlődési szakaszait. Hangsúlyozzuk a magyar közoktatásra jellemző matematikatanítási problémákat, hiányosságokat. Rámutatunk arra, hogy a problémák megoldásában segíthetne a számolási stratégiák tudatosabb, rendszerezettebb tanítása. Megnézzük, milyen szerepet tölt be a matematika az adaptív stratégiahasználat kialakításában, hogyan fejleszthető a stratégiahasználat rugalmassága, hogyan segíthet a metakogníció az adaptív stratégiahasználat fejlesztésében; és szót ejtünk a stratégiahasználat vizsgálatának lehetőségeiről, így a szemmozgás-követés segítségével történő vizsgálatáról.

Az első két fejezetet a módszertan rész követi. A *harmadik fejezetben* megfogalmazzuk az empirikus kutatás célját, kutatási kérdéseinket. Ismertetjük a kiindulási hipotéziseinket, a vizsgálatok során alkalmazott módszereket. Kutatásunk tárgya a 10-18 éves tanulók szorzási stratégiáinak használata fejben végzett szorzás során. A számolási készségek megalapozása az alsó tagozaton történik, ugyanakkor számkörbővítés (egész számok, tizedes törtek, racionális számok, valós számok) és a magasabb szintű matematikatananyag miatt szükség van, lenne a számolási készség további fejlesztésére a felső tagozaton és a középiskolában is. A stratégiahasználat tanítása a pontos és gyors fejben számolási készség a többi tantárgy és a mindennapi életben hasznosíthatósága miatt is célszerű lenne. A korai és kizárólagos számológéphasználat ugyanis azt eredményezheti, hogy a tanulók egy része nagyságrendi hibákat ejt fejben számolás, becslés során, és a hasonló számolási hibákat a szöveges feladatok megoldása során sem veszi észre. Kutatásunk során célul tűztük ki, hogy feltérképezzük a vizsgált korosztály stratégiahasználatának jellegzetességeit, hibázási mintázatait, hogy azután a gyakorló pedagógusok számára hasznosítható következtetéseket, ajánlásokat fogalmazhassunk meg. A vizsgálatok az etikai normák figyelembevételével folytak. Vizsgálataink során saját fejlesztésű papír-ceruza alapú mérőeszközöket alkalmaztunk. Szorzási Stratégiák Tesztet, Matematika Tudásszintmérő Tesztet és a tanulók tanulási eredményeivel, tanulási szokásival, tantárgyak iránti attitűdjeivel kapcsolatos kérdéseket tartalmazó háttérkérdőíveket vettünk fel, illetve szóbeli interjút készítettünk a vizsgált tanulókkal. Úgy gondoltuk, hogy összefüggés mutatható ki a matematika teszten elért eredmény és az alkalmazott szorzási stratégiák eredményessége között, továbbá a szorzási stratégiák eredményessége számos háttértényezővel korrelál.

A célok ismertetését a hipotézisek megfogalmazása követi. Feltételeztük, hogy az általunk kifejlesztett mérőeszközök megbízhatóan mérik a vizsgált korosztály stratégiahasználatát, és a kapott eredmények, levont következtetések alkalmasak lesznek a gyakorló pedagógusok munkáját segítő ajánlások megfogalmazására. Hipotéziseink között szerepelt, hogy a tanulók között különbség van a stratégiahasználat eredményessége terén. Feltételezésünk szerint a fejben végzett számolás során az egyes évfolyamokon a szorzási stratégiák száma csökken, majd állandósul. Feltevéseink között szerepelt, hogy a Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb teljesítményt elérő tanulók a Szorzási Stratégiák Teszten is jobb eredményt érnek el.

A hipotézisek ismertetését következő részben az empirikus vizsgálatok eredményeit mutatjuk be. Az *első vizsgálatban* negyedik évfolyamos tanulók vettek részt, az általuk használt szorzási stratégiákat Tobii eye-tracker szoftver segítségével elemeztük. A *második vizsgálatban* 8-12. évfolyamos diákok körében vizsgáltuk a stratégiahasználatot. A *harmadik vizsgálatban* hetedik évfolyamos tanulók, a *negyedik* és *ötödik vizsgálatban* hatodik évfolyamos tanulók vettek részt, statégiahasználatuk fejlesztéséről ejtünk szót az ötödik vizsgálattal kapcsolatban.

A *központi vizsgálatban* (*harmadik fejezet*) a pilotmérésekben kifejlesztett mérőeszközök segítségével vizsgáltuk a 4-6. évfolyamos kisdiákok által alkalmazott szorzási stratégiákat fejben való számolás során. Úgy reméltük, hogy a mérőeszközök segítségével mélyebb összefüggéseket mutathatunk ki, láttathatunk meg a szorzási stratégiák használatára vonatkozóan.

A *negyedik és ötödik fejezetben* összefoglaljuk, értelmezzük a kutatásaink eredményeit és bemutatjuk azok felhasználásának lehetőségeit. Eredményeink alapján az alkalmazott tesztek, háttérkérdőívek alkalmasak a 10-12 éves tanulók körében folytatott, a fejben számolás során alkalmazott szorzási stratégiákkal kapcsolatos mérések lefolytatására. Az általunk alkalmazott tesztek segíthetnek a tanároknak és a tanulóknak az állapotfelmérésben, ami egyúttal a metakognícióra alapozott fejlesztésben kiindulópontként szolgálhat, a stratégia-repertoár bővítését segítheti. Alkalmazhatóak a mérőeszközök azokban a kutatásokban, amikor a kutatók a matematikai tudásszint, a szorzási stratégiák és a matematikatanulással kapcsolatos meggyőződések modelljében keresik a válaszokat a stratégiahasználat eredményessége és a matematikai tudásszint, valamint a háttértényezők közötti kapcsolat összefüggéseire.

A *hatodik fejezetben (Diszkusszió és következtetések)* összegezzük kutatásunk eredményeit, újdonságértékét, ismertetjük kutatásunk korlátait, eredményének felhasználási lehetőségeit, és szót ejtünk a további kutatási lehetőségekről.

Az egyes fejezetek megírásakor a tárgyban megjelent korábbi publikációkat, valamint a matematika területén mérés és értékelés szakértő szakvizsgára felkészítő tanfolyam zárásaként írt szakdolgozat eredményeit is felhasználtuk. A szakirodalom áttekintésével kapcsolatos publikáció az *Aszklépiosz tanulmányok* kötetben (Vígh-Kiss, 2019), az *Új Kép* folyóiratban (Vígh-Kiss, 2015a), a *IX. Kiss Árpád Konferencia* által kiadott *Interdiszciplináris pedagógia és az oktatási rendszer újraformálása* című kötetben (Vígh-Kiss, 2016b), a *Practice and Theory in Systems of Education* (Vígh-Kiss, 2014c), *és a Questions and perspectives in education* című kötetekben (Vígh-Kiss, 2013a) jelentek meg, illetve többek között a *Health − Economy − Art Konferencián* (Vígh-Kiss, 2017d), a *HUCER Konferencián* (Vígh-Kiss, 2017c), a *Pedagógiai Értékelési Konferencián* (Vígh-Kiss, 2013b), a 3rd International Methodological Konferencie (Vígh-Kiss, 2014a) tartott előadásokban számoltunk be róla. A negyedikes tanulók körében végzett, szemmozgás-követéses vizsgálatról szóló eredményeinket az *Országos Neveléstudományi Konferencián* (Vígh-Kiss, Csíkos és Steklács, 2013) és a *Nemzetközi Szemmozgáskutatás Konferencián* (Vígh-Kiss, 2015c) publikáltuk, a vizsgálatról továbbá tanulmányunk jelent meg a *Szemkamerás vizsgálatok a pedagógiai kutatásban* című tanulmánykötetben (Vígh-Kiss, Csíkos és Steklács, 2019). A 8-12. évfolyamosok körében végzett felmérés tapasztalatairól a *Pedagógiai Értékelési Konferencián* (Vígh-Kiss, 2014d), az EARLI Special Interest Group 16 által szervezett *Metacognition* konferencián számoltunk be (Vígh-Kiss, 2014e). A hatodik évfolyamos tanulók vizsgálatának eredményeit a *Matematikát és Fizikát Oktatók 41. Országos Konferenciáján* (Vígh-Kiss, 2017a), az *Országos Neveléstudományi Konferencián* (2016c, 2017e) mutattuk be, valamint a *MAFIÓK* által megjelentetett tanulmánykötetben (Vígh-Kiss, 2017b) publikáltuk. A hatodik évfolyamos tanulók körében folytatott fejlesztés eredményeiről a 40. PME konferencián (Vígh-Kiss, 2016a) és az ONK konferenciákon (Vígh-Kiss, 2015d, 2016c) számoltunk be.

1. A FEJBEN SZÁMOLÁSI KÉSZSÉG

A fejezet első részében áttekintjük a számolási készség vizsgálatát érintő fogalmakat, kiindulva a kognitív készségek és stratégiák szerepéből. Ezt követően megvizsgáljuk a matematikai műveltség, a stratégiahasználat mindennapokban betöltött szerepét; majd a stratégiahasználat, az adaptív stratégiahasználat szakirodalomban leggyakrabban hivatkozott definícióit, elméleti modelljeit mutatjuk be. Ezután szót ejtünk a stratégiahasználat vizsgálatának lehetőségeiről, a stratégiahasználat rugalmasságának fejlesztéséről, és a metakogníció szerepéről a stratégiafejlesztésben.

1.1 Kognitív készségek és stratégiák

Az emberi gondolkodás fejlődésének vizsgálata során több nézőpont jött létre. Piaget szerint a műveleti szinten működő emberi értelem fejlődése 16 éves korra lezárul, azonban felnőtt korban is további fejlődési szintek jelennek meg (Pléh, 2003). Karmiloff-Smith (1992a, 1992b) úgy véli, hogy a már meglévő tudásunkra újabb, metatudásnak nevezhető tudás rakódik rá, miközben az előző szint is működik, a tudásról való tudásunk pedig segítheti a gondolkodásunkat. „Ugyanaz a tudás az újabb és újabb reprezentációs szintnek köszönhetően egyre adaptívabb, kreatívabb, hatékonyabb lesz” (Nagy, 2000. 82.o.).

Nagy József (2000) a „kognitív forradalom” legfőbb vívmányának tekinti, hogy az ember képessé vált számítógépen modellezni a saját értelme működését. A klasszikus kognitivizmus tárgykörébe eső makroszintű komponenseket kognitív készségeknek, a modern kognitivizmus által feltárt mikroszintű komponenseket pedig kognitív rutinoknak nevezzük. A McClelland, Rummelhart és a PDP Kutatócsoport (1986) által leírt PDP (Parallel Distributed Processing), azaz párhuzamos megosztottsággal működő modell szerint agyunkban valószínűleg több tízezer lokális párhuzamos megosztott hálózat működik, egymással is párhuzamos hálózatokat alkotva, vagyis az agyunkba érkező információk egyidejűleg aktiválják a megfelelő elemeket, s ez a folyamat elménk által kontrollálhatatlan.

A kognitív rutinok párhuzamos megosztott hálózatba szerveződött pszichikus komponensek, legfőbb szerepük az információfeldolgozás, ezen rutinok „működése a hálózat tagjainak serkentésével, gátlásával, önmódosulása (tanulása) pedig új kapcsolatok létrejöttével, a meglevő kapcsolatok erejének (súlyainak) változásával valósul meg” (Nagy, 2000. 82.o). Megkülönböztethetünk egységfelismerő, ill. viszonyító rutinokat. A kognitív rutinok elsajátítása rendkívül fontos. Ha pl. valaki nem rendelkezik elég szófelismerő rutinnal — a szakirodalom szerint ezek száma elemi szinten 1500, az irodalmi szövegek olvasásához pedig 5000 szónak kell egységfelismerő rutinná fejlődnie —, az funkcionálisan analfabéta (Nagy, 2000). A matematikatanításban a viszonyító rutinok is szerepet kapnak, így pl. a szóbeli viszonyító rutinok számát több százra tehetjük. Sajnos, az iskolába lépő gyermekek 5%-a ennek a készletnek csupán a felét képes használni, öt évvel elmaradva fejlettebb kortársaitól, s ezzel hatalmas feladatot róva a pedagógusokra.

A pedagógia egyik központi feladata a gyermek kognitív készségeinek, azaz információ-feldolgozó készségeinek fejlesztése. Nagy (2000) szerint a kognitív rutinokból álló kognitív készségek, mint pl. egy memoriter, az íráskészség, írásbeli szorzás, osztás készsége stb., fontos szerepet töltenek be az egyén aktivitásában, viselkedése során. Matematikai példákkal szemléltetve az alábbi négyféle kognitív készségről beszélhetünk: (1) Merev kognitív készség, pl.: egy megtanult szorzás a szorzótáblában, (2) Ciklikus kognitív készségek, pl.: a számlálás készsége, (3) Rugalmas kognitív készségek, pl.: az írásbeli szorzás készsége, (4) Komplex kognitív készség, plí: számolási készség (Nagy, 2000).

A kognitív készségek működésére a szerialitás jellemző (Nagy, 2000), azaz az egyes kognitív rutinok egymást követően, s nem egyszerre aktiválódnak. Nagy szerint, mivel a működésbe lépés ideje több, mint egy másodperc, elvileg hozzáférhető az explicit működtetés számára, a valóságban azonban egy optimálisan begyakorolt egyszerű készség implicit módon, azaz a tudatunk kontrollja nélkül működik. A pedagógusok feladata és célja, hogy egyrészt bekövetkezzen a kognitív készségek optimalizációja, begyakorlása, azaz az antropológiai optimum eléréséhez vezető fejlődés, másrészt pedig, hogy ezek a készségek egységes rendszerbe szerveződjenek.

A merev kognitív készségek a kognitív rutinokhoz hasonlóan az összetett képességek és kompetenciák építőkövei, számuk több százezerre tehető. Nagy (2000) szerint valószínűleg van a merev kognítív készségeknek egy olyan kritikus pontja, optimális mennyisége, amely nélkülözhetetlen a mindennapi életben. Iskoláztatása során egy gyermek rengeteg ilyen készséggel találkozik, azonban éppen ezek magas száma miatt a merev kognitív készségek megszilárdulása, állandósult kognitív készséggé válása esetleges (Nagy, 2000). Fontos volna tudni, hogy melyek azok a merev kognitív készségek, amelyek pl. a gyakorlati életben is hasznosítható, fejben végzett szorzás során nélkülözhetetlenek.

Nagy (2000) szerint a ciklikus kognitív készségek a merev kognitív készségekhez hasonlóan feltételfüggetlenek, viszont szemben azokkal nyitottak, mert a ciklusok végtelen sokszor ismétlődhetnek. A ciklikus készségek optimális elsajátítása, mint pl. a számlálás, 2-10 éves kor között történik, azaz több évig tartó folyamat, sajnos, szembeszökően nagyok a kialakult egyéni különbségek is (Nagy, 2000).

A rugalmas kognitív készségekre a feltételfüggőség és zártság jellemző, és kognitív rutinokból tevődnek össze, melyek között ciklikusakat is találhatunk. „A feltételfüggés azt jelenti, hogy a külső/belső feltételektől, az előző komponens eredményétől függően leállhat, majd innen újra indulhat a folyamat, megváltozhat a sorrend, kimaradhatnak lépések vagy új rutinok, készségek léphetnek be" (Nagy, 2000. 102.o.). A rugalmas készség zártságának oka, hogy komponenseinek száma véges sok. A rugalmasságot a fejünkben levő referenciakép teszi lehetővé. Nagy (2000) szerint előfordulhat azonban, mint pl. az írásbeli osztás vagy fejbéli szorzás esetén, hogy referenciaképpel nem, csupán a készség begyakorlásához szükséges begyakorlottsággal rendelkezünk, s becslések sorozata révén, az adott számítási feladat elvégzése során kell azt megalkotnunk.

A komplex kognitív készségek két fontos jellemzője: (1) a nyitottság (korlátlan ideig működtethetőség) és (2) a feltételfüggőség, ez utóbbi azt jelenti, hogy az elvégzendő tevékenység határozza meg, hogy mely készségeink aktiválódnak (Nagy, 2000). Nagy hangsúlyozza, hogy a komplex készségek nevükhöz híven véges sok, hasonló funkciót betöltő, egyszerű kognitív készség halmaza, melyek mindegyike valamely átfogó tevékenység (pl.: a kommunikáció komplex készségei, helyesírás, olvasás, számolás) elvégzésére alkalmas. Még nem ismerjük a kognitív készségek teljes rendszerét. A kognitív készségek elsajátítási folyamatai feltárhatók és feltárandók (Nagy, 2000).

A *kognitív stratégiák* fogalmának kialakulása Bruner, Goodnow és Austin (1956) nevéhez köthető. Értelmezésük szerint a kognitív stratégia mindazokat a kognitív eljárásokat jelenti, amelyekkel a kognitív működésünket, gondolkodásunkat és viselkedésünket ellenőrizzük és irányítjuk, mint pl.: jegyzetelési technika, számolási feladatok végrehajtása, olvasási stratégiák. Young (1978) hangsúlyozza, idézi Tóth (2006), hogy a legtöbb feladatot, problémát többféle módon is meg lehet oldani, és az egyén számára rendelkezésre álló stratégiák a számítógép programozásban használatos szubrutinokhoz hasonlíthatók.

A kognitív stratégiák vizsgálata azért is fontos, mert a stratégiahasználat rugalmassága fejleszthető. A stratégiák elsajátítása formális és informális úton is történhet. Baron (1978) szerint az intelligenciával és az emlékezettel szemben a stratégiák érzékenyebben reagálnak a fejlesztésre. Belmont és Butterfield (1975) mentálisan retardált tanulókkal végzett fejlesztő kísérleteinek eredményei optimizmusra adnak okot.

A kognitív stratégiákat többféleképpen csoportosíthatjuk. Hatásuk szerint Baron (1978) megkülönböztet rövid távú és hosszú távú kognitív stratégiákat, a tudatosság szerint pedig tudatosan és automatikusan működő stratégiákat. Baron (1978) javaslata alapján a kognitív stratégiák három fő csoportját különböztetjük meg: (1) központi stratégiák: a további stratégiák kialakítását segítik; (2) általános stratégiák: többféle helyzetben alkalmazhatók; (3) speciális stratégiák: a stratégiák egy sajátos területen történő alkalmazása.

Mérő László (2001) rendszerezte az egyes szakmai szintek, a kezdők, haladók, mesterjelöltek és nagymesterek szintjén levő emberek néhány jellemzőjét. Vizsgálta az emberek gondolkodását a kognitív sémák mennyisége és minősége, a problémamegoldás módja, a szakmai kommunikáció minősége, szakmai nyelve, a gondolkodási stílus, a tudatosság szintje, érés ideje és fejleszthetősége szempontjából. Úgy véli, hogy míg a kezdők rendelkezésére álló, meglehetősen bonyolult kognitív sémák száma néhány tucat, és a tudatosság szintje inkább metakognitív tudatlanságnak nevezhető (hiszen még azt sem tudja, hogy mit nem tud), addig a nagymester már kognitív sémák alapján, néhány tízezer kognitív séma közül válogathat, tudja, mit hogyan kell tenni, de nem tudja, honnan tudja ezt.

A következőkben megnézzük, mik a matematikai műveltség összetevői. Milyen szerepet töltenek be a számolási stratégiák, azon belül a szorzási stratégiák a matematikai műveltségben, és mi jellemző a tanulók stratégia-használatára? Vajon mennyire tudatosan alkalmazzák a 10-18 éves diákok a szorzási stratégiákat a fejszámolás során? Milyen hibázási mintázatok figyelhetők meg?

1.2. A matematikai műveltség

2012-ben, 2015-ben és 2018-ban a PISA vizsgálat az alkalmazott matematikai műveltség mérését célozta, a 2012-ben leírt definíciót alkalmazták mindhárom mérés során (OECD, 2019). „A matematikai műveltség az egyénnek az a képessége, hogy különböző kontextusokban megjelenő problémákat matematikailag megfogalmaz, matematikai ismereteit alkalmazva megold, és matematikailag értelmez. Idetartozik a matematikai gondolkodás, valamint a matematikai fogalmak, eljárások, tények és eszközök használata jelenségek leírásához, magyarázatához, előrevetítéséhez. Segítségével az egyén felismeri a matematika szerepét a világban, és konstruktív, elkötelezett, megfontolt állampolgárként megalapozott ítéleteket és döntéseket hoz.” (Balázsi, Ostorics, Szalay, Szepesi & Vadász, 2013, 15.). A mindennapi életben nélkülözhetetlen matematikai műveltség fogalma napjainkra kibővült: a döntéshozó képesség, adatok elemzésének képessége, numerikus, térbeli, grafikus, statisztikai és algebrai készségek, matematikai gondolkodás, stratégiák, általános gondolkodási képesség is beletartoznak (Numeracy = Everyone’s Business, The Report of the Numeracy Education Strategy Development Conference, 1997).

1.2.1. A matematikatanítás szerepe a versenyképesség növelésében

Napjaink gazdaságának fő jellemzője, hogy egy termék, szolgáltatás létrejöttében a szellemi hozzáadott érték a meghatározó (Vaszari, 2013). Egyre nagyobb szerepet kap a folyamat- és üzletfejlesztés, piaci helyzet elemzése, kapcsolatépítés, minőségbiztosítás, tehetségmenedzsment. A tudás mint termelési tényező a fenntartható fejlődés, a versenyképesség elérésének egyik kulcseleme. Az oktatási rendszer és a népesség egészségi állapota meghatározzák egy adott ország termelékenységének szintjét. A World Economic Forum (WEF) globális versenyképességi ragsorában Magyarország évek óta rosszul szerepel, 2017-ben a 60. helyen állt, számos mutató szerint nem vagyunk eléggé versenyképesek. A tudásalapú társadalomban a közoktatás legfőbb tartalékait a tanulás hatékonyságának javítása, a mélyebb megértésen alapuló, szélesebb körben alkalmazható tudás képezheti (Csapó, 2008b), ezen múlik a nemzet, a gazdaság, az egyén versenyképessége is. A nagyobb versenyképesség ugyanakkor többletjövedelmet, gazdagságot, és még több tudást eredményezhet.

Míg a magyar alsó tagozatos tanulók teljesítménye a nemzetközi TIMSS mérések szerint kiemelkedően magasabb, mint a nemzetközi átlag, addig a felső tagozaton folyamatosan csökkenő tendencia után a 8. évfolyamosok teszteredményei jóval a nemzetközi átlag alatti teljesítményt tükröznek. Ennek okát több kutató (Csapó, 2000; Dobi, 2002; Mátrai, 1997) az egyes országok eltérő tudáskoncepciójából eredezteti. A nyugati országokban a gyerekek iskolai tanulmányaik során gyakrabban találkoznak a realisztikus, más szóval életszerű, valóságközeli egyszerű és összetettebb problémákkal, míg a magyar tanulókkal szembeni elvárások közül még mindig a feladat matematikai szempontból korrekt módon történő megoldása a legfontosabb. Csapó (1998a) szerint az egyébként jól teljesítő diákok is leblokkolnak, ha a megszokottól eltérő megfogalmazású feladattal találják szembe magukat.

A matematikaoktatást módszerei miatt régen és ma is számos szemrehányás éri, egyesek a fontosságát is megkérdőjelezik, ezért fontos, hogy elejét vegyük ezeknek a kritikáknak. A XX. században többen is a matematikaoktatás reformja mellett törtek lándzsát, hazánkban ezt a mozgalmat az általános iskolában Varga Tamás, a középiskolában Surányi János neve fémjelzi. Kutatócsoportjaik és későbbi követőik, mint pl. Szendrei Julianna (2005) legfőbb törekvései összhangban állnak a gyermekközpontú pedagógia törekvéseivel, Pólya probléma-megoldással, matematika-tanítással kapcsolatos elveivel. Csapó is azt vallja, hogy az iskolai matematikaoktatásnak a gondolkodás fejlesztésére, az értelem kiművelésére kell koncentrálnia, kiemelten fontos, hogy az életben hasznosítható tudást közvetítsen (Csapó, 2003).

A gondolkodás fejlesztése, a gyakorlatban hasznosítható tudás kialakítása érdekében célszerű lenne minél több visszajelzést adni a tanulóknak arról, hogy gondolkodásuk mennyire megfelelő, mennyire rugalmas az adott feladat szempontjából. Az alaposabb elemzés feltételezi, hogy a gyerekek így megismerik a feladat különféle megoldási módjait, ill.

felismerik a megoldási utat jelentő stratégiák használhatóságát. Majoros már 1997-ben rámutatott arra (Orosz & Majoros, 1997), hogy létezik olyan hazai tanítási irányzat, amely a tanulók ismeretszerzési folyamatának pszichológiai sajátosságait jobban figyelembe veszi. Majoros (Orosz & Majoros, 1997) kiemeli, hogy a megszokottól eltérő, frappáns megoldások megbeszélése magas szakmai relevanciával bír. Ugyanis a szellemes megoldások mind a tanuló, mind a pedagógus számára nagy élményt jelentenek, munkájukat motiválják, továbbá jelentős mértékben segítik az egyes anyagrészek közötti mélyebb összefüggések megértését.

Oktatáspolitikai szempontból is fontos annak tisztázása, mit is tekintünk adaptív stratégiahasználatnak. A hazai oktatásirányítás − a magyar lakosok által felvett hitelek bedőlése, az ország eladósodása, a világgazdasági válság miatt és arra reagálva − kiemelt fontosságúnak tekinti a jövő generációjának pénzügyi tudatosságra nevelését. A sikeres pénzügyi döntések rugalmas stratégiahasználatot kívánnak. A 2012-es Nemzeti Alaptanterv és Kerettanterv (OFI, OFI 2012b) előírásai szerint a felső tagozaton matematika és történelem órán is szólni kell a hitel, a kamat, tőke fogalmakról. A 2012-ben megalkotott Nemzeti Alaptantervben (NAT, 2012) a kulcskompetenciáknak megfelelően a matematikai műveltségben kiemelten fontos: az 5-6. évfolyamon a biztos számolási készség kialakítása, kommunikáció fejlesztése (szövegértés). Fontos feladat a tanítás során a differenciálás. A fejlesztés különleges területei az egyéni különbségek figyelembevételével: a tehetséggondozás és a sajátos nevelés igényű gyermekekkel való foglalkozás. A matematikai műveltség fejlesztésében kiemelt szerep jut a vitakészség, a kreativitás fejlesztésének is. Az új NAT (2020) elvárja a tanulóktól a feladathoz illő matematikai modell kiválasztását és alkalmazásának képességét, tehát különféle gondolkodásmódok (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, valószínűségi, konstruktív stb.) és módszerek (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) elsajátítását. Hasonlóan elsajátítandó képesség alapszinten is a matematikai modellek alkotása, a modellek közötti váltás. Ezek a készségek mind segítik a tanulókban a stratégiahasználat rugalmasságát.

Csapó (2008a) kiemeli, hogy a megértés lehetősége nélküli mechanikus tanulás elidegeníti a tanulókat az egyes tantárgyaktól és a tanulástól. A különféle attitűdvizsgálatokból kiderül, hogy minél hosszabb ideig tanulnak egy tantárgyat, annál kevésbé szeretik azt (Csapó,1998a, 2002a), egyre kevésbé motiváltak (Józsa, 2002, 2007). Csapó szerint (2008a) az ördögi körből a kiút a tanulók tudásának minőségi javítása, a tanulási-tanítási folyamatok megváltoztatása lehet. Azonban ez nem a tanárokra szabott részletes utasításokat jelenti. Ami a matematikát illeti, sokféle, a gyakorlati életben hasznosítható számítás végzése segíthet, de az absztrakt levezetések inkább kerülendők (Csapó, 2008a). Lényegében minden tudáselem elhelyezhető a Csapó-féle háromdimenziós kocka modellben (OFI, 2015), melynek fő tengelyei: szakértelem, matematikai műveltség (mathematical literacy) és készségek. Csapó (2006) felhívja a figyelmet arra, hogy a tanulóknak nem kis hányada félanalfabétaként lép ki az oktatásból, és az előzetesen el nem sajátított fogalmakat nem képes használni a magasabb gondolkodási készséget igénylő, komplex feladatok megoldása során. Így van ez az elemi számolási készségekkel is, ha ezek fejletlenek, a szöveges feladatok megoldása nehézkes.

1.2.2. A matematikai szakértelem összetevői

A matematikai gondolkodást többféle megközelítésből vizsgálhatjuk (Vincze, 2006). A matematikai szakértelem (mathematical profiency) kifejlődésében kulcsfontosságú szerepet tölt be öt tényező, melyet Kilpatrick, Swafford és Findell (2001) öt egybefonódó szálként képzelnek el. Ezek a tényezők: (1) A *fogalmi megértés*, ez alatt a fogalmak, műveletek és relációk tulajdonságainak megértését értik. (2) *A procedurális könnyedség* kifejezés sokféle művelet ismeretére és azok alkalmazására vonatkozik, a műveletek végzéséhez szükséges gondolkodás rugalmasságát, pontosságát és hatékonyságát és használatát takarja. A (3) *stratégiai kompetenciák* alatt azt értjük, hogy a tanuló képes matematikai problémákat megfogalmazni, modellezni, megoldani. Ez a problémamegoldáshoz hasonló fogalom. A stratégiai kompetenciák, a fogalmi megértés és a procedurális könnyedség egymást kölcsönösen támogató jelenségek. (4) Az *adaptív gondolkodás* a fogalmakról és a fogalmak közötti összefüggésekről, viszonyokról való logikus gondolkodás képességet jelenti. Ahhoz, hogy egy problémát megfogalmazzunk, majd sikeresen megoldjunk, többféle fogalom, tény, eljárás között kell eligazodnunk. (5) Az *eredményre irányultság* „elsősorban affektív és kevésbé kognitív és metakognitív interakciókra utal" (Andrews, Diego-Mantecon, Vankuš, Op 't Eynde, & Conway, 2008, 142.o.), és többek között matematikai meggyőződéseket, az önhatékonyságra vonatkozó elképzeléseket, tanulási motivációt, attitűdöket foglal magában, (mint pl. a matematika hasznos és megtanulható).

1.2.3. A matematikai kompetencia készség-, képességkomponensei és azok fejlesztése

Nagy (2000) kognitív kompetencia felfogása szerint a kognitív kompetencia meghatározó részei a kommunikáció, a tanulás, a tudásalkotás és a gondolkodás. Ezek alkotóelemei a képességek, készségek, motívumok és rutinok. Ahhoz, hogy a tanulókban elérjük, kifejlesszük az alkalmazni képes tudást, meg kell keresnünk az adott kompetencia építőköveit: előbb szükséges fejlesztenünk a kompetenciát alkotó motívumokat, képességeket, készségeket és ismereteket, majd ezt követheti a valós élethez hasonlatos feladat kitűzése (Vidákovich, 2013).

A munkapiaci elvárásoknak megfelelő, alkalmazni képes tudáshoz szükséges a diákok matematikai kompetenciáinak fejlesztése, hiszen a matematikai kompetencia a kognitív kompetencia részrendszereként kiemelkedő szerepet játszik a kognitív fejlődésben. Erre számos bizonyítékot találhatunk a Szegedi Műhely kutatóinak, köztük Nagy, Csapó, Vidákovich és Józsa mintegy 40 év során végzett vizsgálataiban. A matematikai kompetencia tág fogalma magában foglalja a matematikai ismereteket, az alkalmazásokhoz kapcsolódó tartalmakat (Vidákovich, 2013); legfontosabb összetevői a matematika-specifikus és nem matematika-specifikus készségek és képességek. Ezen komponensek működését, fejlődését tantárgy-specifikus és nem tantárgy-specifikus motívumok befolyásolják.

A matematikai műveltség rendszerét az OECD PISA 2003 vizsgálatban három klaszterre bontva ábrázolják (Vidákovich, 2013). Az első és a második klaszter tartalmazza a kutatásunk szempontjából fontos sztenderd komponenseket. Az első, reproduktív klaszterben találjuk a sztenderd reprezentációkat, definíciókat, rutin számításokat, rutin eljárásokat és rutin feladatmegoldást. A második, klaszterkonnektív klaszter részei: modellezés, sztenderd problémamegoldás, transzláció és értelmezés, összetett, de jól definiált módszerek. Míg a harmadik, reflektív klaszterbe sorolható: komplex problémamegoldás és problémafelvetés, reflexió és belátás, eredeti matematikai megközelítés, összetett, bonyolult módszerek, általánosítás. Vidákovich (2013) hangsúlyozza, hogy a különböző típusú PISA-feladatok gyakoroltatása helyett, előtt, a feladatokban tetten érhető alapkészségeket, elemeket célszerű gyakorolni.

A gondolkodási képességeket pszichológiai szemszögből vizsgálva Carroll (1993) elkészítette az intelligencia faktoranalízisét, ezt láthatjuk az 1. táblázatban.

1. táblázat. Az intelligencia faktoranalízise (forrás: Carroll, 1993)

Gondolkodási képességek	Kommunikációs képességek		Tudásszerző képességek		Tanulási képességek
	nyelvi	vizuális	feladat-megoldás	probléma-megoldás	
rendszerezés	nyelvi fejlettség	térlátás	reakcióidő	probléma-érzékenység	memória-terjedelem
kombinativitás	szövegértés	térbeli viszonyok	számolási képesség	eredetiség, kreativitás	asszociatív memória
deduktív következtetés	olvasási sebesség	hosszúság-becslés	művelet-végzési sebesség		értelmes memória
induktív következtetés		rész-egész észlelés			tanulási sebesség
mennyiségi következtetés		észlelési sebesség			
gondolkodási sebesség					

Amint megfigyelhetjük, Carroll szerepelteti az intelligencián belül azokat a képességeket, amelyek szerepet játszhatnak a matematikai gondolkodásban. Empirikus eredményekkel igazolta, hogy az ún. általános faktor, a *g* faktor, egész életünkben meghatározhatja a matematikai feladatok megoldására és a megoldás megtanulására való képességünket. A tudásszerző képességeket kiemelhetjük, mint a matematikatanulás szempontjából fontos képességet. Ezek fontos alkotóelemei a feladatmegoldás, számolási képesség, műveletvégzési képesség, kapcsolatba hozhatók kutatásunkkal, ahogy a gondolkodási képességek között szerepeltetett mennyiségi következtetés, és a kommunikációs képességek sorában levő nyelvi fejlettség, szövegértés is.

A következő fejezetekben szót ejtünk a matematikai tudás mérésének hagyományairól, lehetőségeiről, összegezzük a legismertebb nemzetközi és hazai mérések tapasztalatait. Ezt követően bemutatjuk a tanulók közötti teljesítménykülönbségek néhány aspektusát.

1.3. Nemzetközi és hazai matematikai tudásszintmérések

A nemzetközi és hazai matematikai tudásszintmérések több évtizedes hagyományra nyúlnak vissza. A mérések négy főbb területet vesznek górcső alá: (1) „matematikai tudásszintmérések”, (2) „a matematikai kompetencia vizsgálatára irányuló mérések”, (3) „a matematikai feladat-és problémamegoldást vizsgáló szöveges feladatok” és (4) „a matematikai alapképességek vizsgálata” (Vidákovich & Csíkos, 2009, 150.o.).

A hazai mérések megindulásáért elsősorban Kiss Árpádnak lehetünk hálásak. Az általa végzett tudásszintmérések eredményei azt mutatták, hogy az 1950-es évek tantervi követelményei és a tanulók teljesítményei nem csengenek össze (Kiss, 1961). Kiss Árpád kezdeményezésére az 1967-ben megalakult nemzetközi szervezethez, az IAE-hez 1968-ban hazánk is csatlakozott. Az International Association for the Evaluation of Achievement (IEA) második, ún. SIMS vizsgálata során a magyar 13 évesek az ötödik legjobb eredményt érték el a mérésben részt vevő 14 ország között (Vidákovich & Csíkos, 2009).

Az IEA mérései az iskolában elsajátított lexikális tudást vizsgálták, közelebb állnak a magyar matematika tantervek elvárásaihoz, mint a PISA mérések. 1995-ben végezte az IEA a TIMSS mérést (Third International Mathematic and Science Survey), a harmadik mérés során a részt vevő országok negyedik és nyolcadik osztályos tanulói matematikai és természettudományi tesztet töltöttek ki. Ekkor még elégedettek lehettünk a magyar tanulók teljesítményével, hiszen a 14 éves tanulóink átlagpontszáma 537 pont (Vári & Krolopp, 1997). 1999-ben kisebb teljesítménynövekedésnek örülhettünk (552 pont), majd zuhanórepülésbe kezdtünk. A négyévenkénti mérések egyre gyengülő eredményei után végül 2011-ben már csak 505 pontot értünk el (Balázsi, Ostorics & Szalay, 2007). 2015-ben az 500 pontos átlag fölötti 527 pontot értük el.

Az OECD (Gazdasági Együttműködési és Fejlesztési Szervezet) országok 2000-ben indítottak egy vizsgálatot, melynek fő célja az volt, hogy összehasonlítsák az egyes országok 15 éves tanulóinak gyakorlatban is alkalmazható, a munkavállaláshoz szükséges kompetenciáinak szintjét. A PISA (Program for International Student Assessment) mérés során normaorientált tesztek segítségével szereznek adatokat a diákok matematikai, szövegértési és természettudományi kompetenciáiról. A normát az OECD-országok adataihoz igazítják. „A matematika-képességskálát 2003-ban úgy alakították ki, hogy az OECD átlag 500 pontnál legyen, a szórás pedig 100 pont legyen” (Ostorics, Szalay, Szepesi & Vadász, 2016, 43.)

A 2000. évi mérésekbe hazánk is bekapcsolódott. A magyar társadalmat sokkolták az 500 pontos OECD átlag alatti magyar teljesítmények (488 pont). 2003-ban a PISA-vizsgálatokban a fő mérési terület a matematika volt, erre a tartalomterületre három évente fókuszálnak a kutatók. A magyar teljesítmények több mérés során is a 490 pont körül ingadoztak, 2009-ben még a 26. helyen álltunk. Míg 2012-ben egy újabb csökkenő tendenciának lehettünk tanúi, a magyar tanulók által elért 477 pont a 44 résztvevő ország között 32. helyre volt elegendő. A 2015-ös PISA-méréseken a magyar 15 éves tanulók átlageredménye 477 pont volt, ami szignifikánsan alacsonyabb a 490 pontos OECD-átlagnál, ami az OECD országok között a 28-30. helyet jelenti (Ostorics, Szalay, Szepesi & Vadász, 2016). Azóta ez a helyezés nem javult (Radó, 2019).

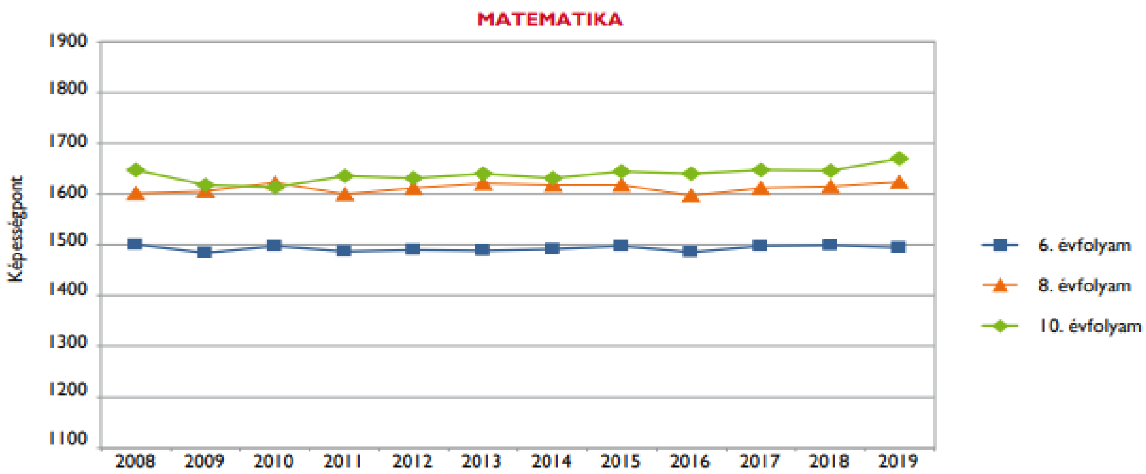
A PISA-mérésben részt vevőket megkérik egy háttérkérdőív kitöltésére is, az így kapott információkat összevetik az országok teszteken elért teljesítményével (Balázsi, Ostorics & Szalay, 2007). A magyar diákok mintegy ötöde található a 2. képességszint alatt, ami a funkcionális analfabetizmust jelenti (Csapó, 2017). A 2012-es PISA-mérés arra is ráirányította a kutatók figyelmét, hogy a tanulók gyenge teljesítménye korrelál a családi háttérrel. Az ESCS-index (Index of Economic Social and Cultural Status) a család gazdasági, társadalmi és kulturális státuszát szimbolizálja. 2012-es PISA-mérések szerint a családi háttérindex a matematika teljesítmény varianciájának csaknem harmadát, 31,2%-át magyarázza, ami szignifikánsan magasabb, mint az OECD átlag (20,7%) (Csapó, Fejes, Kinyó & Tóth, 2014).

Hasonlóan elszomorító eredményeket kapunk a TIMSS vizsgálatokból is, a magyar tanulók teljesítményére átlagon felüli hatással van a családi háttér, gazdasági, társadalmi és kulturális státusz. Mindkét fajta nemzetközi vizsgálatból leszűrhető tanulságként, hogy a magyar oktatási rendszer nem képes a társadalmi rétegek között meglévő egyenlőtlenségek kiegyenlítésére, hanem rögzíti azokat (Csapó, 2017).

A PISA-vizsgálatok hatására 2001-ben Országos Kompetenciamérés indult, az ötödik és kilencedik évfolyamosok körében matematika és szövegértési kompetenciákat vizsgáltak. A 2004-es OKM jelentés meghatározása szerint:

„A matematikai műveltség mérésének célja annak megállapítása, hogy a tanulók mennyire képesek bizonyos fogalmakat elemezni, összefüggésbe helyezni és kifejteni, miközben különböző területeken és helyzetekben jelentkező matematikai feladatokat, problémákat értelmeznek, formalizálnak, megoldanak, jól megalapozott döntéseket hoznak, és ezáltal a társadalom aktív és konstruktív tagjává váljanak.” (Balázsi, Szabó, Szabó, Szalay & Szepesi, 2004, 14.o.). 2004-ben a negyedikes tanulókat vonták be a vizsgálatokba, de a 2012/13-as tanévtől részvételük a mérésben opcionálissá vált (Balázsi, Ostorics & Szalay, 2007).

Az OKM eredményeket az egyszerűbb összehasonlítás miatt a PISA mérések során alkalmazott elvek szerint értékelik. A képességpontokat sztenderdizálták, így az első mérésekkor az átlag 500 pont, a szórás 100 pontnyi volt. Majd 2008-tól kezdve bevezették az új, évfolyamfüggetlen egységes képességskálát 1500 pontos átlaggal, míg a szórás 200 képességpont lett (Balázsi, Lak & Szabó, 2011). Ugyan az egyes években az évfolyamok átlageredménye között különbségek értéke minden esetben szignifikáns, 2008 óta nem mutatható ki statisztikai változás (Belinszki, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2020), az egyes évfolyamokon vizsgált tanulók teljesítménye csekély mértékben ingadozik, ezt figyelhetjük meg az 1. ábrán.



1. ábra A 2019-es és a korábbi kompetenciamérések átlageredményei

(forrás: Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019. 10.o.)

A matematikai alapképességek vizsgálata során Varga Tamás felhívta a figyelmet arra, hogy a negyedikes tanulók matematika tudásának fejlettsége között több évnyi különbség is lehet (Varga, 1971). Hasonló következtetésekre jutott Nagy József: a számlálás esetében is több évben kifejezhető fejlődési különbség az óvodás, kisiskolás gyerekek között (Nagy, 1980). A matematikai kompetencia készségeinek és képességeinek (pl. számlálás, mennyiségi következtetés) fejlettsége már az óvodáskorban előre jósolhatja a későbbi iskolai teljesítményt. A Diagnosztikus Fejlődésvizsgáló Rendszer kidolgozásával a Szegedi Műhely kutatói célul tűzték ki a gyermekek képességszintjének diagnosztikus felmérését. Ez a későbbi óvodai, iskolai fejlesztés kiindulópontjául szolgálhat. Az egyes komponensek fejlődésében mutatkozó jellegzetes különbségeket az iskola lassan, vagy nem képes kompenzálni, amiről az évenkénti megrendezett országos kompetenciamérések, és a háromévenként szervezett PISA mérések beszámolóiban meggyőződhetünk.

Célszerű lenne a tanulók közötti tudásszintkülönbségnek utána járni és felszámolni. A Szegedi Műhely kutatói több tanulmányt írtak a témában. A számlálás és az értelmi fejlettség kapcsolatát vizsgálta Vidákovich (Vidákovich, 1989), Józsa pedig a számlálási készség kritériumorientált fejlesztésével foglalkozott (Józsa, 2000, 2003), Nagy és munkatársai elemi alapkészségek fejlettségét kutatták 4−8 éves korú gyerekeknél (Nagy, Józsa, Vidákovich & Fazekasné Fenyvesi Margit, 2004). A matematikai kompetencia fejlesztésének nagy hagyománya van hazánkban (ld. pl. Vidákovich, 2008). Az utóbbi években irányult a kutatók figyelme a stratégiakutatásokra, főleg Csíkos összeadással kapcsolatos kutatásai nyomán (Csíkos, 2003a, 2003b, 2012, 2013).

1.4. Az oktatási rendszeren belül mért különbségek mértéke, természete, okai

Az oktatási rendszeren belül mért különbségeket 2009 óta évről évre tanulmányozhatjuk az országos kompetenciamérésekről kiadott összefoglaló jelentésekben. „A 2018. évi Országos kompetenciamérésben a tanulók matematikai eszköztudás átlageredménye a 6. évfolyamon 1499, a 8. évfolyamon 1614, a 10. évfolyamon 1647, a szövegértés átlageredménye a 6. évfolyamon 1492, a 8. évfolyamon 1602, a 10. évfolyamon 1636 pont volt” (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019, 7.o.).

1.4.1. Területi különbségek

A hazai oktatáskutatókat régóta foglalkoztatja, mik lehetnek a magyar oktatási rendszerre jellemző jelentős területi egyenlőtlenségek okai. Az évente közölt megyékre, régiókra, járásokra lebontott adatok megerősítik, hogy kompetenciamérésben a legmagasabb átlageredményeket Nyugat-Dunántúl és a Közép-Magyarország régió hozza, és szembetűnő módú, 83–90 pontnyi a lemaradása matematikából az országos átlagtól Észak-Magyarország és az Észak-Alföld régióknak. A szövegértési teljesítményre hasonló megállapítások tehetők. Az eddigi mérések alapján a legjobb teljesítményt mindhárom vizsgált évfolyamon a fővárosi tanulók nyújtják. A megyék közötti különbségek matematikából kisebbek, 98–122 pont közé esnek, míg szövegértésből elérhetik a 130 pontot. Az egyes évfolyamok között a régiókban mért különbség egyre nő, legmagasabb teljesítménykülönbség a 8. évfolyamosok körében figyelhető meg mind matematikából, mind szövegértésből. A járásokra lebontott eredmények még nagyobb különbségekről számolnak be az egyes évfolyamokon, ez matematikából 288, 386, illetve 662 képességpontot jelent.

Településtípus, képzési forma, feladatellátási helyek szerinti különbségek

A 6. és a 8. évfolyamon tanulók általában a lakóhelyükön járnak iskolába, így ezeken az évfolyamokon megfigyelhető jelenségek élesen mutatják a lakóhely szerinti teljesítménykülönbségeket is. A 2018-as országos kompetenciamérésben a 6. és a 8. évfolyamon matematikából 115, illetve 145, szövegértésből 130, illetve 148 pontnyi különbség látható a községi és a fővárosi iskolák tanulói között (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). A jelentős különbségeket általában a településtípusok gazdasági fejlettsége közti különbségek és a szociális jellemzők magyarázzák. A 10. évfolyamon a községi és a budapesti tanulók átlageredményei között még nagyobb különbségeket figyelhetünk meg, ez matematikából 171 képességpont.

A különböző képzésben részt vevő tanulók teljesítményszintje még inkább eltér egymástól. A 6. és a 8. évfolyamon tanulók mintegy 4%-a nyolc évfolyamos gimnáziumokban tanul, a 8. évfolyamosok 5%-a pedig hat évfolyamos gimnáziumban. E két iskolatípusba járók a 6. és a 8. évfolyamon mindkét mérési területen szembetűnően (161–183 ponttal) magasabb átlagteljesítményt értek el általános iskolás kortársaikhoz képest (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). A legmagasabb teljesítményt a nyolcévfolyamos gimnáziumokban érik el, őket követik a négy évfolyamos gimnáziumok 98-cal kevesebb ponttal, majd 386-tal kevesebb ponttal a szakgimnáziumok. A szakközépiskolások átlagpontszáma csaknem egy szórásnyival marad az országos átlag alatt, még az általános iskola 6. évfolyamos tanulóinál is kisebb.

A PISA felmérések során az egyes országokon belül a tanulók közötti teljesítménykülönbségeket vizsgálva kimutatták, hogy Magyarországon a tanulók közötti különbségeket az iskolák közötti különbségek jobban befolyásolják, mint az iskolán belüli különbségek. Megfigyelhető, hogy a 6. és 8. évfolyamos kompetenciamérésben a feladatellátási helyeken belüli különbségek a tanulók közötti különbségek 67-72%-át magyarázzák, telephelyek közötti különbségek pedig a variancia 28-33%-át teszik ki, míg a 10. évfolyamon ez az arány nagyjából 50-50% (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). Ennek okai közé sorolhatjuk az általános iskolákban megfigyelhető heterogén tanulói összetételt, a korai szelekciót és a jelentős, intézmények közötti különbséget.

A tanulók átlageredményeit összehasonlítva nem találunk jelentős különbséget a különböző településtípusok iskolái között. A különböző képzési formák/ településtípusok tanulóira illesztett regressziós egyenesek azt mutatják, hogy a 8. évfolyamon nem mutathatók ki számottevő különbségek a képzési forma és a településtípus szerint. Ebből következik, hogy a településtípusok szerint mért tanulói teljesítménykülönbségeket kevésbé magyarázza az iskolákban végzett oktatómunka színvonala, sokkal inkább a különböző településtípusok eltérő gazdasági és szociális jellemzői, továbbá a 6. évfolyamos tanulók eltérő fejlettségi szintje, melyből adódó különbség számottevően nem csökken a későbbiekben sem (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). A korai szelekció hat és nyolc évfolyamos gimnáziumokat hozza előnyös helyzetbe. A hat és nyolc évfolyamos gimnáziumokban a tanulók jobban fejlődnek két év alatt, ennek oka részben az osztályok magasabb átlagos képességszintje lehet. A 8. és 10. évfolyamok között nagyobb képességpontkülönbséget tapasztalhatunk a különböző képzési formák esetén. A 8. osztályos hat-, és nyolcévfolyamos tanulók képességszintje matematikából átlagosan 72–78 ponttal emelkedik a 10. évfolyam végére, a négy évfolyamos gimnáziumokban továbbtanulóké 55 ponttal, a szakgimnáziumokban tanulóké ez a növekedés 37 pontnyi, a szakközépiskolások esetén pedig nem kimutatható, matematikai eszköztudásuk megreked a hatodik évfolyamos szint közelében (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). Négy évnyi tanulás a nyolcosztályos gimnáziumokban eredményezi a leglátványosabb fejlődést (203 pont), ellenpólusa ennek a szakközépiskolás tanulók 61 pontos teljesítménynövekedése.

1.4.2. A családi háttér hatása a teljesítményre

A kompetenciamérés során a tanulók háttérkérdőívet töltenek ki. A kérdések a következőkre vonatkoznak: az otthon található könyvek száma; a szülők iskolai végzettsége; a család anyagi helyzete; a család birtokában lévő anyagi javak; a szülők munkaerő-piaci státusa; tanulást segítő eszközök; családi programok jellege; kulturális tevékenységek (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). A kérdőívtételek segítségével ún. családiháttérindexet (CSH) számítanak ki, ez a tanulók családi jellemzőinek együttes befolyását összesíti. A családiháttér-index és a tanulók teszten elért eredménye közötti kapcsolatot lineáris regresszióval becsülik. A családiháttér-index standardizált értékeit telephelyek szerinti jelentések tartalmazzák. „Az index értéke 2018-ban a résztvevő diákok 80%-ára kiszámítható, korrelációja a képességpontokkal 0,51 és 0,56 között változik, az index értéke a tanulók képességében mutatkozó különbségek 26-31%-át magyarázza meg (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019, 34.o.)"

Az országos kompetenciamérés eredményeiből kitűnik, hogy már hatodik évfolyamon is a magasabb családi háttérindex magasabb pontszámot eredményez mindkét mért területen. 6. és a 8. évfolyamon a település függetlenül az azonos CSH indexszel rendelkező tanulók matematikai eszköztudása nem tér el egymástól lényegesen, viszont a különböző képzési formákban tanulók esetén jelentős eltérés okoz az eltérő családi háttér (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019).

A tervezett végzettség és a teljesítmény kapcsolata

A családi háttér jelentősen befolyásolja tanuló továbbtanulási céljait. A mérési eredmények és a továbbtanulási célok között szoros összefüggés mutatható ki: minél magasabb végzettséget tűznek ki célként maguk elé a tanulók, annál jobb az átlagpontszámuk. Az országos átlagnál magasabb pontszámot a felsőfokú végzettség megszerzését tervezők érték el, matematikából tőlük egy szórásnyira (100–162 pont) lemaradva találjuk a szakmunkásképző iskola elvégzését célul kitűző tanulókat (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász és Vadász, 2019). A főiskolai tanulmányokat célul kitűző diákok a csak érettségizni kívánó tanulókhoz képest matematikából 114–187 ponttal értek el többet átlagosan, ez a különbség minden vizsgált évfolyamon megfigyelhető. „A különböző végzettségek elérését tervező tanulók teljesítményei közötti különbségek valamelyest növekednek a magasabb évfolyamok felé haladva, ahogy a tanulók egyre közelebb kerülnek a továbbtanulásra vonatkozó döntésükhöz. (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019, 41.o.)."

1.5. A nemek közötti különbségek a matematikai teljesítményben

Az utóbbi néhány évtizedben több kutatás zajlott annak kimutatására, miért alulreprezentáltak a nők a matematikai, műszaki, agrár- és természettudományi területeken, és mik lehet ennek okai. Baron-Cohen (2003) úgy véli, a nemi különbségek már születéstől kezdve megfigyelhetők: a lányok az érzelmek, személyes kapcsolatok iránt, a fiúk pedig a tárgyak iránt érdeklődnek inkább, és ez utóbbi segíti a matematikai készség későbbi fejlődését. Spelke (2005) úgy gondolja, a lányok és fiúk között a matematikai megismerés területén és az érdeklődésben csecsemőkorban nincsen kimutatható különbség, az a serdülőkorhoz köthető, ekkor viszont más faktorok hatása is jelentkezik (pl. biológiai, szociális). Öt, a koragyermekkorban kibontakozó mechanizmust azonosítottak, melyek együtt a matematikai gondolkodás alapját képezik: (1) kis, de pontos mennyiségeket reprezentáló rendszer, (2) nagy, de pontatlan mennyiségeket reprezentáló rendszer, (3) verbális rendszer, (4) téri memória, (5) geometriai tudást reprezentáló rendszer (Spelke, 2005). Az ezek fejlődésével és együttműködésével kapcsolatos vizsgálatok sem mutattak eltérést a két nem esetén (Gelman, 1991). Kamaszkorban már kimutatható néhány különbség a kognitív profilban (de nem a teljesítményben), így a fiúk inkább a térbeli, a lányok a verbális feladatokban, aritmetikai számításokban jobbak, más stratégiát alkalmaznak a megoldások során (Spelke, 2005; Penner & Paret, 2008).

1.5.1. Nemek közötti különbségek a matematika tanításában és tanulásában

A matematika teljesítménnyel kapcsolatos kutatások egy része a fiúk fölényét mutatja ki (Aunola, Leskinen, Lerkkanen & Nurmi, 2004; Githua & Mwangi, 2003; Marsh, Martin, & Cheng, 2008; Mullis, Martin, Gonzales & Chrostowski, 2004), míg Lindberg, Hyde, Petersen & Linn (2010) jelentéktelennek találja a nemek közötti teljesítmény-különbséget. Brown és Kanyongo (2010), valamint Robinson és Lubienski (2011) pedig kimutatták, hogy a mérések során a lányok a fiúktól valamivel magasabb pontszámot értek el matematikában az elmúlt négy évtizedben. A lányok alacsonyabb matematikai teljesítményét több tényező magyarázza. A tanárok és a társak támogatása pozitívan hat a tantárgyi attitűdökre (Eccles, 2011), szoros kapcsolatban áll az teszteredményekkel, motivációval és az önhatékonysággal (Danielsen, Wiium, Wilhelmsen & Wold, 2010; Eccles & Roeser, 2011).

Samuelsson & Samuelsson (2016) fiúk és a lányok közötti nemi különbségeket a tanulással, önszabályozott tanulással kapcsolatos vélekedésekkel kapcsolatban vizsgálta. A 120 iskolában 6758 svéd általános iskola tanuló körében folytatott vizsgálat során megfigyelték, hogy a fiúk a matematikát fontosabbnak tekintik, mint a lányok. A teljes kérdőív mintegy száz állítást tartalmazott, minden tényezőre elvégezve reliabilitás-vizsgálatot, a legtöbb tényezőre a Cronbach α értéke megfelelő volt: „A matematika fontos” cím alatt (α = 0,83), „Támogató osztálytermi környezet” (α = 0,84), „Részvétel”, azaz a munkakörülmények befolyásolása a tanulók által (α = 0,87), „A célok és elvárások egyértelmű közlése ” (α = 0,75), „Csoport-és projektmunka alkalmazása” (α = 0,63), „Zajos osztály” (amikor nem tanulásról van szó, α = 0,76), „Tanárközpontú tanterem” (α = 072), „A tanár magas elvárásai, követelményei” (α = 0,54).

A fiúk úgy érezték, hogy jobban tudják befolyásolni a tanulás közbeni munkakörülményeiket, és többször végeznek csoportmunkát, a lányok ezt másképpen gondolták magukról. Az eredmények szignifikáns különbséget mutattak a fiúk és a lányok vélekedése között a matematika fontosságát és nehézségét tekintve. Regressziós analízis segítségével egyenleteket állítottak fel a fiúk és a lányok mintájára. kimutatták, hogy a magas tanári elvárások negatívan befolyásolták a tanulók matematikai eredményeit, erre a fiúk érzékenyebbek voltak. Úgy tűnt, hogy a „Támogató osztálytermi környezet", a „Részvétel" és „A célok és elvárások egyértelmű közlése" tényezőkhöz hasonlóan a lányok magasabb pontszámát eredményezi, míg a fiúk tanulását, magasabb eredményeit a csoport- és projektmunka segítette jobban. A „Támogató környezet", a „Részvétel", az „Egyértelműen megfogalmazott célok", a „Csoportmunka" és a „Tanárközpontú tanterem" tényezők pozitív hatást gyakoroltak a diákok teljesítményére. A regressziós egyenletben a matematika teljesítményt legjobban a támogató környezet jósolta meg (0,25), a részvétel (0,10), az egyértelműen megfogalmazott célok (0,14) és a csoportmunka (0,12) kevésbé. A svéd kutatópáros (Samuelsson & Samuelsson, 2016) azt találta, hogy a fiúk a matematikát fontosabbnak tekintik, mint a lányok. Korábban már Nyström (2012) is rámutatott arra, hogy a fiúk is értékelik a tudást és a jó osztályzatokat (Samuelsson & Samuelsson, 2016). A hatékony matematikai oktatás úgy tűnik, hogy azonos mind a fiúk, mind a lányok esetében: a „Támogató osztálytermi környezet", a „Célok és elvárások egyértelmű közlése", a „Részvétel" pozitívan befolyásolják a tanulók matematika teljesítményét (Samuelson &Samuelson, 2016).

1.5.2. Átlageredmények és a fejlődés mértéke

A PISA-mérések során a nemek szerint szignifikáns tesztpontszám-különbségeket figyeltek meg az országok között (Marks, 2008). Szövegértésből 2015-ben az európai lányoknak átlagosan 0,35 szórásegységgel, hazánkban 0,27 SD-vel, azaz szignifikánsan jobb a teljesítményük, mint a fiúknak; míg matematikából átlagosan 0,07 szórásegységgel jobbak a fiúk a legtöbb országban (Hermann, 2018). A tesztpontszám-különbség szórása matematikából Európában átlagosan 0,10 SD, Magyarországon ez közepes szinten van, a fiúk értek el átlagosan kicsit jobb eredményt (0,09 SD). Csupán Finnországban és Albániában teljesítenek jobban a lányok a fiúknál. A természettudományos méréseken változatos a kép: az országok egyharmadrészében a fiúk, a másik harmadában a lányok teljesítménye jobb (Hermann, 2018).

Marks (2008) hangsúlyozza, hogy a 2015-ös PISA mérésben a három tudásterületen mért tesztpontszám-különbségek közötti korreláció értéke magas, 0,8 körüli. Megfigyelhető, hogy egyes oktatási rendszerekben (finn, lett) a lányoknak viszonylagosan magasabb teljesítménye, illetve a (pl. osztrák, olasz) fiúk magasabb teljesítménye. Marks (2008) szerint az országok közötti különbségek oka nem a nemi szerepek szerinti eltérő mértékű specializáció áll, és azt a tantárgyspecifikus oktatáspolitika (például matematikatanítási módszerek, tananyag) sem magyarázza. Guiso és munkatársai (2008), Else-Questés és munkatársai (2010) társadalmi és kulturális tényezőkkel magyarázzák a különbségeket, míg Fryer–Lewitt (2010), Stoet–Geary (2015) szerint nem mutatható ki szignifikáns összefüggés. Van Langen és szerzőtársai (2006) az oktatási rendszerek integráltságát vizsgálva (iskolatípusok, szegregáció, iskolák közötti különbségek) megállapították, hogy az egységesebb iskolarendszerek a lányok magasabb teljesítményét segítik.

Az OECD (2013) által kialakított kompozit index az úgynevezett diákorientált tanítási gyakorlatot méri a projektmunka, csoportmunka gyakoriságán keresztül. Hermann–Kopasz (2018) az iskolarendszerek három jellemzőjét vizsgálva arra a következtetésre jutottak, hogy a hagyományosabb oktatási rendszerek (gyakori évismétlés, korai szelekció, és a modern pedagógiai módszerek ritkább alkalmazása) általában a fiúk eredményére hat pozitívan, másrészt a korai szelekció javítja a lányok relatív eredményeit is.

Az Országos Kompetenciamérés eredményei alapján Hermann (2018) úgy találta, hogy a nemek szerinti markáns különbségek rajzolódnak ki az egyes képességszinteken. Matematikából szembetűnő, hogy a fiúk a magasabb képességszinteken több pontot érnek el, mint a lányok, míg az alacsonyabb képességszinteken nincsen számottevő pontszámkülönbség. Matematikából a tesztpontszám-különbség 10. évfolyamon a legnagyobb, a fiúk előnye vitathatatlan. A gyengébb képességszinteken a lányok a többi országgal összevetve jól teljesítenek a fiúkhoz mérten mindhárom PISA-vizsgálati területen, míg a magasabb képességszinteken átlagos a tesztpontszám-különbség, ez Hermann (2018) szerint valószínűleg az iskolatípusok közötti különbségekből származik. Az európai országokban a természettudományok terén a legjobb teljesítményt elérő fiúk eredménye legalább akkora, mint a legjobban teljesítő lányoké, míg az alacsonyabb képességszinteken a lányok pontszáma magasabb. Baye–Monseur (2016) szerint ezek fényében nem meglepő, hogy a fiúk vesznek részt magasabb arányban a STEM-képzésekben (science, technology, engineering, mathematics). A fiúk esetén a teljesítmények szóródása nagyobb, mint a lányoknál (Baye–Monseur, 2016). A PISA-vizsgálatok mindhárom területén fiúk esetében átlagosan 15 százalékkal magasabb varianciát figyeltek meg, Magyarországon ez az érték jóval alacsonyabb (Hermann, 2019).

Míg A PIRLS és a tantervi tartalmakhoz igazodó TIMSS nemzetközi mérések eredményei szerint alig kimutatható a teljesítménybeli különbség nemek szerint, addig az országos kompetenciamérések során hasonló mintázatot mutatnak, mint a PISA méréseken láttunk. A fiúk és a lányok teszteredményei között számottevő különbségek rajzolódnak ki. A fiúk és a lányok országos kompetenciamérésen elért átlageredményeit összevetve településtípusonként, illetve képzési formák szerint úgy látjuk, hogy más mérésekkel összhangban, itt is megfigyelhető mindhárom évfolyamon a lányok jobb (40–66 ponttal magasabb) szövegértési teljesítménye és a fiúk 21-31 ponttal magasabb matematika átlagpontszáma.

A fiúk és a lányok átlageredményei közötti hasonló különbség figyelhető meg mindhárom évfolyamon a különböző képzési formák és településtípusok szerint is. A 6. és a 8. évfolyamon a hat- és nyolc évfolyamos gimnáziumokban tanuló fiúk matematikából jóval eredményesebbek a lányoknál, mint az általános iskolás társaik, szövegértési teljesítményük is kevésbé marad el a lányokétól. A 10. évfolyamon a lányok szövegértés átlagpontszáma 66 ponttal jobb a fiúk átlagpontszámától, míg matematikából a fiúk vezetnek 31 pontkülönbséggel. A képzési formák szerinti bontást figyelve a tizedik évfolyamos fiútanulók (a szakközépiskola kivételével) minden képzési formában matematikából 62–81 ponttal magasabb eredménnyel dicsekedhetnek, és hátrányuk szövegértésből csekély (21-37 pontos) szóródást mutat (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019). A különböző képzési formákban tanulók átlagteljesítménye közötti jelentős eltérések hátterében a fiúk és lányok iskolaválasztása állhat.

A lányok szívesebben tanulnak tovább gimnáziumban, míg a fiúk gyakrabban választják a szakképzést (is) adó középiskolákat.

„Látható, hogy a két mérési területen a fiúk és a lányok átlageredményei közötti különbség jellemzően összefügg egymással. Ahol nagyobb a lányok előnye a szövegértés területén, ott kisebb a lemaradásuk matematikából, és fordítva, ahol a fiúk átlaga jobban megközelíti a lányokét szövegértésből, ott a matematikában nagyobb előnnyel rendelkeznek. A nemek közötti különbségek iránya azonban mindvégig megmarad.” (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019, 31. o.). Lak, Szepesi, Takácsné Kárász és Vadász (2019) rámutattak arra, hogy a két mért területen a 6. és a 8. évfolyam, illetve a 8. és a 10. évfolyam között a két nem képviselői hasonló mértékű fejlődést mutatnak, csak 8. és 10. évfolyam között figyelhető meg a fiúk 18 ponttal nagyobb fejlődése matematikából. Ugyanazon tanulói populáció fejlődését a 2014-es és a 2018-as mérések közötti időszakban vizsgálva Lak, Szepesi, Takácsné Kárász és Vadász (2019) arra jutottak, hogy a 6. és 8. évfolyam között matematikából a fiúk és a lányok hasonló ütemben fejlődtek, míg szövegértésből a lányok fejlődtek gyorsabban. A 8. és a 10. évfolyam között a fiúk matematikából átlagosan 52 ponttal értek el többet, míg a lányok 30 ponttal; és a szövegértésben is a fiúk (az átlagosan 65 ponttal nagyobb fejlődéssel) majdnem utolérték a lányokat.

1.6. A stratégiahasználat

A múlt században változott a kutatók (Thompson, 1999; McIntosh, 1990; Northcote & McIntosh, 1999; McIntosch, Rey & Reys, 1997; Wandt & Brown, 1957) véleménye a fejszámolást illetően, fontosnak tartják, hogy nagyobb figyelmet kapjon a tanítása. Széles körű szociológiai kutatásokat végezve Wandt és Brown (1957) arra a következtetésre jutottak, hogy a felnőttek a számolások háromnegyed részét fejben végzik el. Northcote és McIntosh (1999) úgy találta, hogy a 24 órás periódus alatt a számítások 84,6%-át fejben, 11%-át írásban, 6,8%-át pedig számológépen végezték. A számítások 60%-a becslés, 40%-a pontos számítás volt. A tanulók sok hibát ejtenek a hosszabb írásbeli számítások (pl. szorzás, osztás) során. Ennek oka, hogy elfelejtik, rosszul sajátítják el a számolási algoritmusokat. Ugyanezt a jelenséget figyelhetjük meg a fejszámolások során.

A külföldi oktatáskutatók már közel 40 éve foglalkoznak stratégiakutatással. Az emberek a kognitív feladatok, az aritmetikai feladatok megoldásakor többféle stratégiát használnak (Siegler, 2007). A stratégiafajták számossága, változatossága felvetődik a kérdés, milyen jellemzői vannak a rugalmas stratégiahasználatnak, hogyan választjuk ki a számítás során az optimális stratégiát (Baroody, 2003; Hatano, 2003; McMullen, Brezovszky, Rodríguez-Aflecht, Pongsakdi, Hannula-Sormunen & Lehtinen, 2016; Threlfall, 2009; Verschaffel, Luwel, Torbeyns & VanDooren, 2009). Az adaptív stratégiahasználó afféle szakértői rutinnal rendelkezik, rugalmasan alkalmazza a szokásos számítási eljárásokat (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2001). Az adaptív szakértelem összefügg a matematikai problémák megértésének képességével, tanulmányozása kulcsfontosságú a matematikai kompetencia fejlesztésének szempontjából (Kieran, 1992; Newton, Pollack, Kokka, Rittle-Johnson & Durkin, 2015; Xu, Liu, Star, Wang, Liu & Zhen, 2017). Éppen ezért a stratégiahasználat vizsgálata szerte a világon a matematikatanítás fontos céljává vált, az oktatáskutatók figyelmének fókuszába került (Sievert, van den Ham, Niedermeyer & Heinze, 2019)

Több nyugati országban már beépítették a tantervbe a fejben végzett számolási, köztük a szorzási stratégiák tanítását. Az új külföldi, pl. amerikai tantervek a szabályok tanítása helyett a számolási algoritmusok megértésére helyezik a hangsúlyt. Lemaire és Siegler (1995) alkotta modell óta számos tanulmányban olvashatunk a stratégiatanításról, a fejlesztő kísérletekről (Jakob & Mulligan, 2014). Az egyes iskolák, osztályok teljesítményei között nagy különbségeket láthatunk (Csapó, 2002, 2003, 2004a). A tanulók aritmetikai képességei között egyéni különbségek vannak (Dowker, 2005). A PISA matematikai vizsgálatok eredményei is ráirányítják a figyelmet a számolási készségek fejlesztésére. Fontos lenne az oktatási rendszerben megfigyelhető teljesítménykülönbségek csökkentése, felszámolása.

Az utóbbi évtizedekben a kutatók figyelme a tanulók gondolkodásának kutatására, azon belül a metakognitív stratégiák kutatására irányult. Stratégiának nevezzük a valamilyen magasabb cél elérésére alkalmazott műveletet, műveletsort (Lemaire & Reder, 1999). A stratégiahasználat az élet minden területén megfigyelhető: az emberi megismerés, a tudományos érvelés (Kuhn, Schäuble & Garcia-Milla, 1992), a döntéshozatal (Payne, Bettman & Johnson, 1988), az idő megmondása (Siegler & McGilly, 1989), pénzváltás (Lemaire & Lecacheur, 2001); az oktatás, a tanulás számos területén megjelenik: matematika, olvasás, nyelvtanulás, szótanulás, szeriális emlékezet (Siegler & Jenkins, 1989), helyesírás (Rittle-Johnson, Siegler & Alibali, 2001), kottaolvasás (Buzás, 2016). A stratégiahasználat s a metakogníció szorosan összekapcsolódó fogalmak.

1.6.1. Az adaptív stratégiahasználat fogalma és modelljei

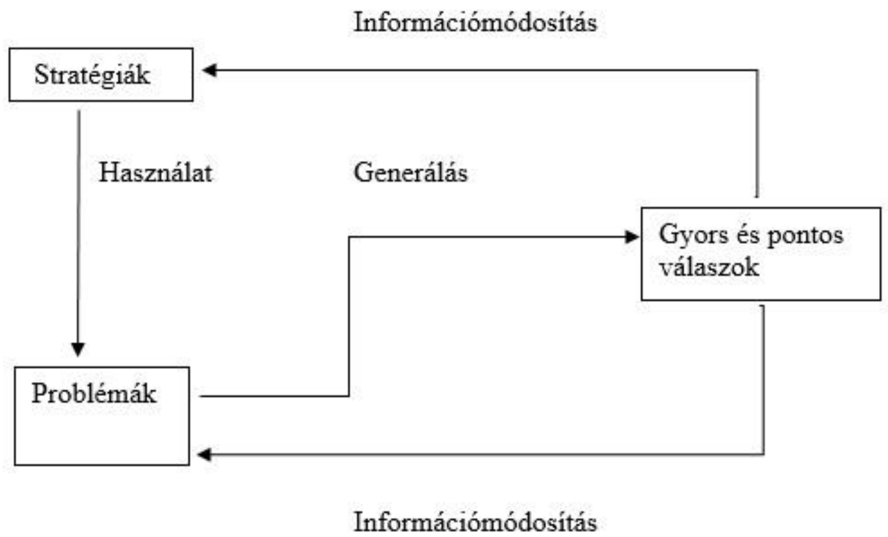
Az adaptív stratégiahasználat fogalmát Hatano (1982) alkotta meg abacus mesterekkel kapcsolatban. Szerinte a stratégiahasználat tudatosságot jelent a problémamegoldás minden fontosabb lépésénél (tervezés, nyomon követés és ellenőrzés). Ezt a fogalmat a problémamegoldás folyamatával kapcsolatos tevékenységek leírására a nemzetközi szakirodalom egyre gyakrabban használja. Egy adott feladat megoldására – akár valamilyen döntési problémáról, akár szövegértési feladatról, akár valamilyen matematikafeladatról van szó – számos mód kínálkozik, az optimális megoldás megtalálása sokféleképp történhet, és a megoldás során többféle, egymással egyenértékű stratégia alkalmazása is eredményes lehet.

A stratégia rugalmasságát vagy adaptivitását többféleképp definiálhatjuk. Pl. az összeadás és kivonás elvégzésekor több stratégiát különböztethetünk meg. Egyes kutatók (Van der Heijden, 1993; Thompson, 1999; Blöte, Van der Burg & Klein, 2001) kognitív pszichológiai megközelítésükből adódóan két szempontot tartanak vizsgálandónak: a stratégiákból és a feladattípusokból álló párokat, kombinációkat attól függően tekintik rugalmasnak vagy rugalmatlannak, hogy mennyire jól illeszkednek egymáshoz. Van der Heijden (1993) számára a stratégiahasználat rugalmassága az egyén által a feladat megoldása során alkalmazott feladat jellemzőihez való rugalmas adaptációt, alkalmazkodást jelenti; hozzá hasonlóan vélekednek Blöte, Van der Burg & Klein (2001). Thompson (1999) a feladatban szereplő számokhoz illeszkedő számolásos stratégiaválasztást tekinti rugalmas stratégiahasználatnak, és ennek fejlesztését tűzi ki célul a kisiskolásoknál. Heirdsfield és

Cooper (2002) a stratégia rugalmasságát, adaptivitását több különböző stratégia alkalmazásának tekintik, és szerintük az egyes stratégiák közötti váltás képessége magasabb szintű gondolkodást takar. Míg Verschaffel, Torbeyns, Luwel, Van Dooren és De Smedt (2007) véleménye szerint a különböző stratégiák közötti választás hatékonysága is fontos kérdés. A többi kutatóval szemben azt hangsúlyozzák, hogy az egyes stratégiák közötti váltás könnyedsége és a hatékonyság nem feltétlenül járnak együtt, esetenként az egyén képes lehet könnyedén váltani egyik stratégiáról a másikra, miközben egyes feladatok megoldása során egy adott stratégia alkalmazása adaptívabbnak bizonyul a többinél.

A stratégiarugalmasság, adaptivitás előbbi definíciói finomításra szorulnak. A stratégiák véletlenszerű használatát, és a feladat jellemzőihez illeszkedő stratégiát sem tekintjük adaptívnak, hiszen az egyénenként és feladatonként is változhat. Ezért hozta létre Siegler munkatársaival az ASCM, majd SCADS modelljét, mely az adaptív stratégiahasználatot a feladatmegoldó szemszögéből vizsgálja. Siegler és Shipley adaptív stratégiaválasztási modelljét (Siegler & Shipley, 1995) alapvetően matematikai feladatok megoldására alkotta meg, majd azt általánosították a problémamegoldásra. A modell bemutatja, hogyan választjuk ki az adott probléma megoldására a leginkább megfelelő stratégiát, illetve az idők és tanulás folyamán hogyan változik, fejlődik a stratégiaválasztásunk. A szerzők hangsúlyozzák, hogy a gyermekekben a fejlődés során egyes stratégiák alkalmazása automatikussá válik, abban az értelemben, hogy gyorsabban és kevesebb odafigyeléssel oldanak meg bizonyos problémákat.

Siegler, Shipley és Lemaire a stratégiahasználat vizsgálata kapcsán létrehoztak egy számítógépes szimulációs modellt. Az ASCM – Adaptive Strategy Choice Model neve magyarra *adaptív stratégiaválasztás modell*ként fordítható. A modell fő részei a következők: (1) Stratégiák, (2) Problémák, (3) Gyors és pontos válaszok. A modellt Sieglerék később finomították, a modell részei közötti kapcsolatot a 2. ábra mutatja:



2. ábra Az ASCM

(forrás: Siegler & Lemaire, 1997, Journal of Experimental Psychology: General, 126(1), 73. o. ábrája alapján)

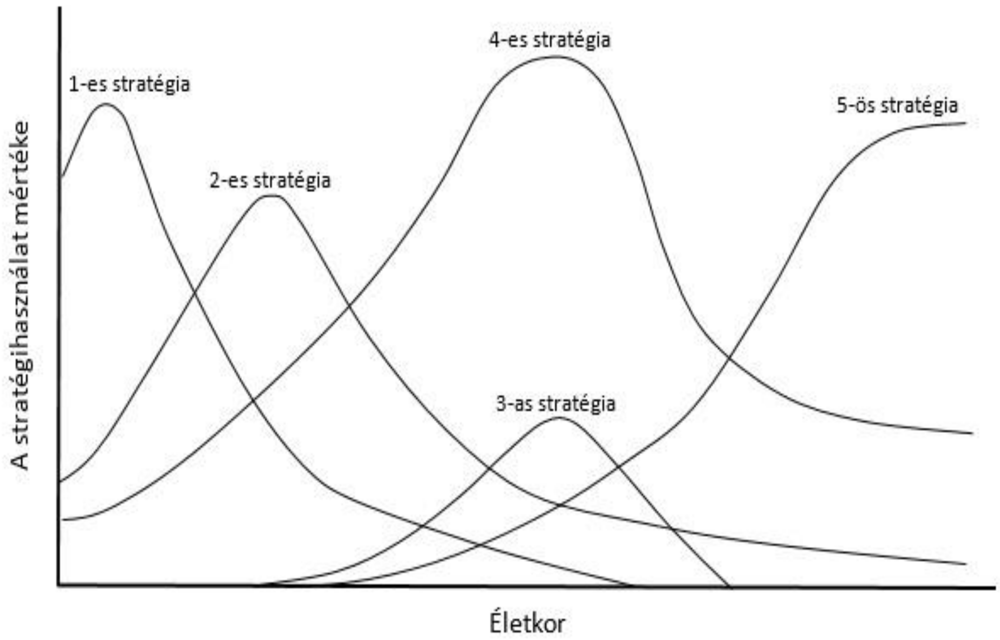
Siegler és Shipley, (1995) szerint a modell működésének lényege a következő: a *problémák (Problems)* megoldása során *gyors és pontos válaszok (Speeds Accuracies Answers)* adására törekszünk. Amennyiben válaszunk helyes és elég gyors, nem változtatunk stratégiát. A helytelen és/vagy lassú válasz következménye kétféle lehet: (1) módosítjuk információinkat (*Modifies Information About*) a stratégiáról, újragondoljuk és megoldjuk a problémát, (2) módosítjuk a problémára vonatkozó információinkat, és újra választ keresünk a problémára.

Lemaire és Siegler (Lemaire & Siegler, 1995) számítógépes szimulációs-modelljét 3 adatbázis alkotja: probléma, stratégiák és válaszok. Ezek rendszere meghatározza, hogy egy adott stratégia, adott probléma és az arra adott válasz hogyan függ össze. A modell az előző modelltől abban tér el, hogy az egyén különböző információkat használ ahhoz, hogy megváltoztassa az adatbázist a stratégia, a probléma, illetve a kettő interakciója segítségével.

A probléma megoldásával kapcsolatban a modell négy fogalmat használ. (1) Globális adat: arra válaszol, hogy általános szinten milyen hatékony egy stratégia, (2) Tulajdonság adat: a stratégiára jellemző gyorsaság és pontosság, (3) Probléma-specifikus adat: egy adott feladattípus esetén mennyire hatékony egy adott stratégia, (4) Újdonságérték: az egyén a múltban milyen gyakran használta az adott stratégiát hasonló probléma megoldása során. Ha már hatékony egy stratégia, akkor nehéz új stratégia elsajátítása, elsajátíttatása. A modell alkotói úgy vélik, ha például egy gyerek az összeadás tanulásánál eredményesen és következetesen tudja már használni az összeadás stratégiát, nem tartja helyesnek, hogy áttérjen a minimum stratégiára.

Lemaire és Siegler (1995) adaptív stratégiahasználat modellje, az ASCM modell újdonságértéket rendel az újonnan felfedezett, bevezetett stratégiákhoz. Szerintük ezek az értékek ideiglenesen hozzáadódnak az új stratégia erejéhez, és arra késztetik a diákokat, hogy ezt használja még akkor is, ha addig sikertelenül vagy kevés sikerrel alkalmazta. Az új stratégia minden egyes alkalommal veszít újdonságértékéből, ellenben információt nyerünk annak gyorsaságáról és pontosságáról. Ennek következtében az új stratégiát nagyobb valószínűséggel alkalmazzuk, mivel minden egyes használat gazdagítja az adatbázisunkat a stratégia hatékonyságáról, tartja Lemaire és Siegler (1995). Egy probléma megoldása során az ASCM a stratégiák gyorsaságát, a pontosságát és újdonságértékét használja annak megállapítására, hogy egy adott stratégia használata mennyire adaptív a probléma megoldásakor. Egy adott probléma megoldásakor egy még ismeretlen stratégia alkalmazása során az ASCM-modell szerint a stratégia globális és tulajdonság adataira támaszkodhatunk.

Lemaire és Siegler (Lemaire & Siegler, 1995) 2. osztályos francia tanulók szorzással kapcsolatos stratégiát vizsgálta, egy év során három alkalommal. A vizsgálatok tapasztalatai szerint a gyorsaság és a pontosság javulása négy tényezőnek köszönhető: (1) új stratégiák elsajátítása, (2) a leghatékonyabb stratégia használatának gyakorisága, (3) javulás mindegyik stratégia használata során, (4) adaptívabb választás a stratégiák között. Az emberek stratégiahasználatának változásait szemlélteti a 3. ábra.

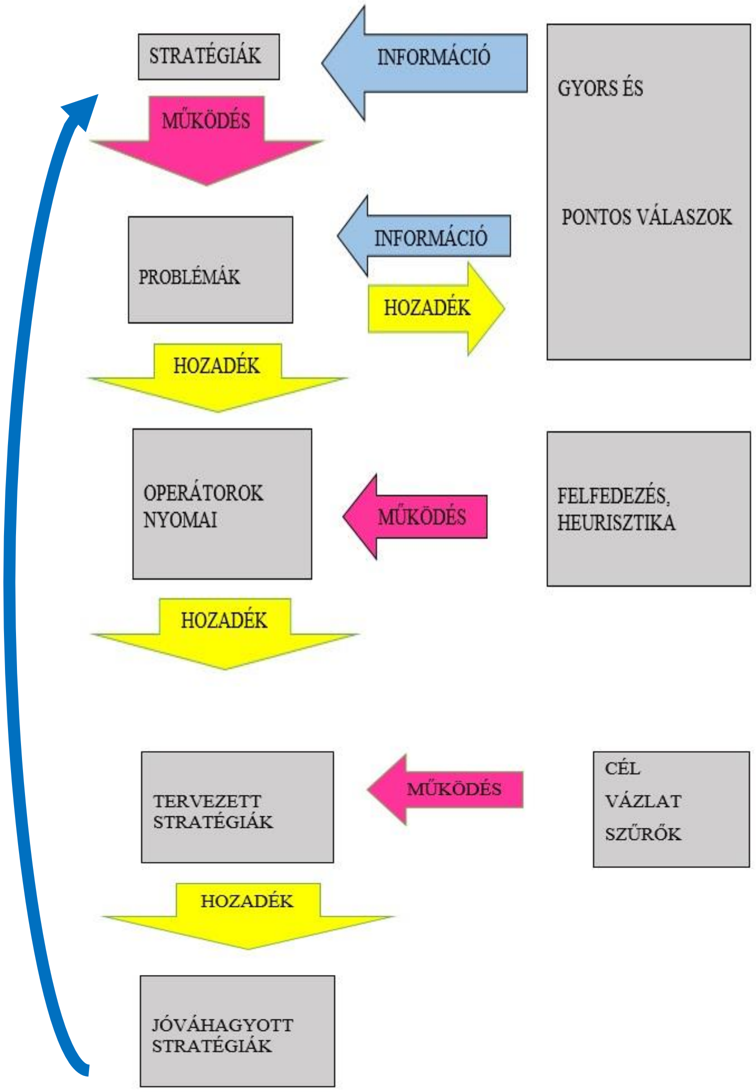


3. ábra Az „egymást átfedő hullámok" fejlődési modell

(forrás: Csíkos, 2013. 35.o.; Siegler & Lin, 2010. 87. o. ábrája alapján)

A Lemaire és Siegler (1995) által alkotott modell a stratégiák fejlődését vizsgálja úgy, hogy a teljesítményt a használt stratégia függő változójának tekintik. Véleményük szerint az alábbi fogalmakkal kapcsolatos kérdéseket érdemes vizsgálnunk:

– *Stratégiák repertoárja*: az adott helyzetben a rendelkezésünkre álló stratégiák közül választhatjuk ki a megfelelőt. Általában feltételezzük, hogy a fejlődés során a stratégiák száma, köre lineárisan bővül, de egyes stratégiák el is tűnhetnek (pl.: a „Nem tudom" stratégia).
– *A stratégiák eloszlása*: az adott stratégia alkalmazását leírhatjuk annak gyakoriságával, s erre vonatkozóan az egyén fejlődése során érdekes megállapításokat tehetünk. Előfordulhat egy stratégia megjelenése viszonylag korán, de lehet, hogy eleinte csak bizonyos feladatokban alkalmazzuk.
– *A stratégia kivitelezésének hatékonysága*: a választott/ előírt stratégia segítségével egyre gyorsabban, egyre kevesebb hibával tudjuk megoldani a feladatot.
– *Stratégiaszelekció*: arra vonatkozik, hogy a vizsgált személy hogyan, mi alapján választja ki az adott feladatban alkalmazott stratégiáját. Az ember fejlődése során a választott stratégia egyre jobban illeszkedik a feladat sajátosságaihoz, ez a rugalmas stratégiaváltás. Siegler SCADS számítógépes szimulációs modellje látható a 4. ábrán.



4. ábra A SCADS modell

(forrás: Shrager & Siegler, 1998, Psychological Science, 9(5), 408.o. ábrája alapján)

Az adaptív stratégiahasználat jelenségének vizsgálatában alapvető kérdés, hogy adott feladat vagy probléma megoldásához az egyén hányféle stratégiát képes alkalmazni. Feltételezhető, hogy az egyéni életút során változik, növekszik egy adott problémához használható stratégiák száma, bővül a stratégiarepertoár. Lemaire és Siegler (1995) eredményei szerint egy bizonyos feladat megoldása során a megfigyelhető stratégiák száma bővül, ám az egyéni fejlődés adott pontján a stratégiák számának növekedése megáll. Ezen a fejlődési ponton várható, hogy az egyén a meglévő repertoárból ki tudja választani a feladathoz legjobban illeszkedő stratégiát, és azután előnyben fogja részesíteni ezt a kiválasztott stratégiát a többivel szemben.

Siegler (2000) a SCADS modellt, azaz a Strategy Choice and Discovery Simulation (stratégiaválasztás-, és felfedezés szimuláció) az ASCM modell finomítása során kapta. Úgy véli, hogy az adott stratégiát egy adott egyén a konkrét feladathoz attól függően választja, hogy annak segítségével mennyire pontosan és gyorsan tudja megoldani a feladatot (a repertoárjában meglevő többi stratégiával összehasonlítva), tehát az optimális sebesség, pontosság elérése a célja. A problémamegoldó a döntését a korábbi tapasztalatai függvényében hozza meg. Siegler modellje az adaptivitás finomabb definíciójára illeszkedik, s emiatt bonyolultabb is. Mindazonáltal az eddig ismert egyik legfontosabb szimulációs modellnek tekinthető, jól szemlélteti azt, hogyan választanak az alsó tagozatos gyerekek a feladatmegoldás során a már rendelkezésükre álló stratégiák közül, ill. hogyan fedeznek fel, fejlesztenek ki újabb stratégiákat. Siegler definícióját dualitás jellemzi: mind az egyén sajátosságait, mind a feladat jellemzőit figyelembe veszi.

A stratégiahasználat vizsgálata során számos érdekes jelenségre fény derült. Thomas (2002) szerint különbségek tapasztalhatók az egyének stratégiahasználatában. A gyermek stratégiáinak repertoárja folyamatosan bővül. A stratégiahasználat függ a szituációtól, a feladat és az egyén jellemzőitől (Siegler, 2000, 2003, 2005, 2007), az ember felnőtt korában jobban tudja illeszteni saját stratégiáit a feladat sajátosságaihoz (Tronsky, 2005). Életünk folyamán egyes stratégiák eltűnnek, az ismert stratégiák alapján újakat fejlesztünk ki (Torbeyns, de Smedt, Ghesquiére & Verschaffel, 2009).

A stratégiahasználat vizsgálata során a kutatók figyelték az osztálytermi kultúrát is. Ellis (1997) munkáiban a rugalmasság/ adaptivitás vizsgálata során a feladat és feladatmegoldó jellemzői mellett egy harmadik dimenzió is megjelenik. Szerinte az egyén stratégiaválasztását a szocio-kulturális kontextus is jelentősen meghatározza. Kimutatta továbbá, hogy a gyermekek életkorának előrehaladtával a tapasztalatuk is növekszik, és implicit tudásként használják fel az adott kultúra (akár osztálytermi kultúra), a tanár elvárásait. Az Ellis által használt definíció szerint egy stratégiaválasztás adaptív, ha mind az egyén, mind a feladat jellemzőihez, mind az adott társadalmi kulturális kontextushoz legjobban illeszkedik. Az optimális stratégia tehát nem feltétlenül a leggyorsabban a helyes választ eredményező stratégiát jelenti. Brousseau (1997) szerint az osztálytermekben létezik egyfajta „didaktikai egyezmény", Greer (1997) megfogalmazásában „kísérleti egyezmény", ami jelentős befolyással bír egy adott feladatmegoldó szituációban. Több kutató (Rogoff, 1990; Lave & Wenger, 1991; Ellis, 1997) úgy véli, hogy a sebesség és a pontosság mellett más tényezők is fontosak lehetnek egy osztályteremben, így a megoldás eleganciája, eredetisége, a megoldási stratégia egyszerűsége, a megoldás formalizáltsága, általánosíthatósága, stb. Selter (2009) a két fogalmat, rugalmasság és adaptivitás, elkülöníti egymástól. Szerinte a stratégiarugalmasság a már rendelkezésünkre álló különböző stratégiák közötti váltás képességét jelenti, míg az adaptivitás a régi és a kreatív módon felfedezett stratégiák közötti választás képessége.

A kutatókban joggal merül fel a kérdés ennyiféle definíció ismeretében, hogy mérhető-e a stratégiahasználat adaptivitása, és ha igen, akkor mi módon? Ezekre a kérdésekre több külföldi kísérlet alapján igenlő választ adhatunk. Az általunk használt definíciót követően összefoglaljuk a legfontosabb és legújabb eredményeket. A továbbiakban Csíkos és Steklács (2011) definícióját fogadjuk el, miszerint egy feladatmegoldó stratégiát akkor tekinthetünk adaptívnak, ha az adott stratégia választása mind a feladat tulajdonságaival, mind a feladatmegoldó jellemzőivel összhangban van. Csíkos és Steklács (2011) azt mondják, hogy ebben a kétváltozós rendszerben (1) a feladat jellemzői bizonyos stratégia választását indukálhatják, (2) adott egyén számára bizonyos stratégia használata általában valamilyen előnnyel bírhat. A két dimenzió együttes jelenléte azonban Csíkos és Steklács (2011) szerint egy újabb szempontot is felvet: érdemes azt vizsgálnunk, hogy egy adott probléma esetén egy adott ember milyen stratégia kiválasztásával képes a problémamegoldás során legnagyobb hatékonyságra. Úgy vélik, egy stratégia eredményessége a feladatmegoldás hibátlansága vagy a felhasznált idő alapján, esetleg e két változó együttes mérése alapján határozható meg. Vizsgálatunk során a stratégia eredményességét a feladatmegoldás hibátlansága alapján ítéljük meg.

Mit fejleszt a fejszámolás? Vetődik fel a kérdés. „A számológépek és a számítógépek világában például minek a gyerekeket fejszámolással gyötörni? (...) Válaszolhatnám viccesen erre, hogy az sem baj, ha meg tudjuk becsülni, hogy van-e annyi pénzünk, mint amennyit a kosarunkba tett áruért fizetni kell. Fordítsuk azonban a szót komolyabbra! A fejszámolás hatásos tanulásának csupán az egyik eredménye az, hogy jól tudunk számolni és becsülni. Ennél azonban sokkal fontosabb, hogy milyen nagy szerepe van az emlékezetünk fejlesztésében. Az emlékezet szervezett működtetésének edzéséről van itt szó.” (Szendrei, 2005, 17-18.o.)

A matematikafeladatok nagy része többféleképpen is megoldható. Az egyedüli üdvözítőnek kikiáltott módszer drillezése károsan hat a gyermekek gondolkodására, pszichikus fejlődésére, önértékelésére, önbizalmára (Holt, 1991). Szükséges, hogy tanítványainknak minél több megoldási utat, stratégiát megmutassunk egy-egy feladat, probléma megoldásakor, hogy azután saját maguk választhassák ki az adott pillanatban az adott feladat megoldása során a számukra legoptimálisabb, leggyorsabb és legeredményesebb stratégiát, amit tulajdonképpen az adaptív stratégiahasználat fogalma takar.

Magyarországon a stratégiahasználat vizsgálata rövid múltra tekint vissza. Az első hazai tanulmányok Csíkos, Kelemen és Steklács nevéhez köthetők, fejben végzett összeadási, olvasási stratégiákról számolnak be az alábbi munkáikban (pl. Csíkos 2003a, 2003b, 2012; Kelemen, 2004; Kelemen és Csíkos, 2008; Steklács, 2009; Csíkos és Steklács, 2011; Csíkos, 2012, 2013). Fejben végzett szorzással, szöveges feladatokkal és adaptív stratégiahasználattal kapcsolatosan az első vizsgálat negyedikes tanulók (N = 13) körében zajlott a szemmozgás-elemzés módszerével, erről Vígh-Kiss, Csíkos és Steklács (2013, 2019) beszámolóiban olvashatunk. Kutatásainkat a fejben való szorzás során alkalmazott stratégiákra szeretnénk koncentrálni, az itt fellelhető problémákat megvilágítani, azokra megoldást találni, illetve javasolni.

Több éven át végeztek méréseket a matematika területén az alsó tagozatos tanulók körében is, és míg a magyar negyedik osztályosok teljesítményét a nemzetközi mérések szerint kiemelkedően magasabbnak találták a nemzetközi átlagnál, addig a felső tagozatos tanulók teljesítménye csökkenő tendenciát mutat. Az MTA A PISA vizsgálatok eredményeinek értelmezése az oktatás fejlesztését szolgáló kutatómunka kontextusában c. előadóülésén is elhangzott, hogy a magasabb évfolyamokon tanuló diákok teljesítménye messze alulmúlja a nemzetközi átlagot mind szövegértésből, mind matematikából; a természettudományos és szövegértési kompetenciák még a 2012-es PISA-mérések eredményeitől is gyengébbek (Csapó, 2017; Csíkos, 2017; Korom, 2017; Steklács, 2017).

1.6.2. A matematika szerepe az adaptív stratégiahasználat kialakításában

A tudásalapú társadalom a tanárok szerepének és a tanítási anyag körüli kérdések tucatját indikálta. Mi a tanárok feladata a XXI. század iskolájában? Milyen kulcskompetenciákat, ismereteket vár el a tudásalapú társadalom az iskolából a munka világába kilépő fiataloktól? Hogyan, milyen tanítási-tanulási és értékelési módszerek alkalmazásával készítsük fel a felnövekvő generációkat arra, hogy az egyelőre még ismeretlen kihívásokkal sikeresen szembenézhessenek? − szembesülnek a pedagógusok a kérdésekkel. Napjainkban szinte lehetetlen körül határolni azon ismeretek körét, amelyekre a következő nemzedékeknek szükségük lehet (Csapó, 1992). A SCANS csoport (The Secretary's Commission Achiering Necessary Skills, U.S. Department of Labor) −, írja Albert (2008), az USA Munkaügyi Minisztériumának megrendelésére 1994-ben „Amerika 2000" címmel kidolgozott egy oktatásfejlesztési stratégiát (Goals of 2000). A pedagógusok, vállalkozók, kormányhivatalnokok és szakszervezeti dolgozók alkotta csoport a következőket tartotta elengedhetetlenek a sikeres munkavállaláshoz:

- Alapvető készségek: olvasás, írás, matematika, megértés, elbeszélés
- Gondolkodási készségek: kreatív gondolkodás, döntések végrehajtása, problémamegoldás, tehetség, a tanulás művészete, indoklás
- Személyes kvalitások: felelősségtudat, önértékelés, társas készségek, önirányítás, becsületesség.

A SCANS csoport véleménye az adaptív stratégiahasználat kérdésének szempontjából azért érdekes, mert a matematikával kapcsolatosan nemcsak az alapműveletek elvégzésének képességét feltételezi, hanem gyakorlati problémák megoldását, a megfelelő matematikai technikák kiválasztását. A döntések végrehajtásához szükséges gondolkodásbeli rugalmasság, hiszen az alternatív megoldások kidolgozása, a kockázatok figyelembevétele, értékelése után kell kiválasztani a legoptimálisabb megoldást. Sőt még a társas kapcsolatokban is szükségünk van alkalmazkodó-képességre, egyfajta rugalmasságra. Az adaptív stratégiahasználat és annak tanítása, fejlesztése tehát nem csak a matematikatanításban (lenne) fontos.

Egy 2001-ben Szlovákiában végzett kutatás eredményei szerint a munkáltatók leendő alkalmazottjuktól az idegen nyelv, a személyi számítógép ismerete és egyebek mellett a flexibilitást is elvárják (a hirdetések 14,83%-a), írja *Albert* (2008). „Tehát pontosan azt keresik, amit a mai iskolában, amely főleg az átvett tananyag ismétléssel történő elsajátítására épül, egyáltalán nem tanítanak" −, hangsúlyozza Albert (2008, 82.o.). A Microsoft támogatásával hét ország részvételével zajlott vizsgálat során a kutatók arra a kérdésre keresték a választ, melyek azok a képességek, amelyek a 21. században elvárnak a munkaadók a leendő munkavállalóktól (ITL Research, 2011). A kutatás során hat képességet azonosítottak: az együttműködés, a tudásépítés, az IKT használat, valós problémák megoldása és innováció, hatékony kommunikáció, valamint önszabályozás. A munkavállalótól a munkaadók rugalmasságot és a 21. századi képességek magas szintű használatát várják el, ez igen nagy felelősséget ró a tanárokra (Prievara, 2015). Mivel egyre kevésbé definiálható a későbbi munkahelyen, az életben való boldoguláshoz szükséges ismeretek, készségek és képességek köre, előtérbe kerül a kognitív és metakognitív stratégiák, önszabályozott tanulás szerepe; az adaptív stratégiahasználat az élet minden területén korparanccsá válik. Az adaptív stratégiahasználatot és iskolai fejleszthetőségének, fejlesztésének kérdését tehát nem önmagában és önmagáért tekintjük fontosnak, hanem a társadalom részéről megfogalmazott elvárások miatt.

Rocard, Csermely, Jorde, Lenzen, Walberg-Heriksson és Hemmo (2010) hangsúlyozzák, hogy az Európai Unióban aggasztó módon visszaesett az ifjúság érdeklődése a természettudományok és a matematika iránt. Pedig napjainkban egyre inkább előtérbe kerül a természettudományos gondolkodás, a társadalomban a matematikatudás változatlanul fontos, s ezért ezeken a területeken a tanításnak hatékonyabbá, vonzóbbá kell(ene) válnia. Ezért is kiemelt feladat a tanítás során az egyéni különbségekre alapozott differenciálás, a fejlesztés különleges területei az egyéni különbségek figyelembevételével: a tehetséggondozás és a sajátos nevelés igényű gyermekekkel való foglalkozás.

Az adaptív stratégiahasználat kérdését külföldön már az 1980-as években is vizsgálták, (pl. Payne, Bettman & Johnson, 1988; Dehaene, Bossini & Giraux, (1993). *A stratégia* megállapításának vizsgálata alapvetően többféleképpen történhet. Lemaire és Siegler (1995) szerint: (1) A retrospektív módszer alkalmazása során a feladat megoldása után rákérdezünk, hogy a vizsgált személy hogyan oldotta meg a feladatot. (2) Minden emberre jellemző, hogy egy feladat megoldása során milyen hibákat ejt. A hibázási mintázatok, illetve a reakcióidő alapján vonhatunk le következtetéseket. (3) A kétféle módszer együttesen is alkalmazható.

Számos kutató (Kilpatrik, Swafford & Findell, 2001; Baroody, Wilkins &Tiilikainen, 2003; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007; Verschaffel, Greer & Torbeyns, 2006) az adaptív stratégiahasználat fejlesztését − kiskortól és matematikában gyenge teljesítményt nyújtó tanulók esetén is − feladatnak tekintik, ám e tárgykörben még kevés empirikus kutatás zajlott. A múlt század végén több nyugat-európai ország (pl. Hollandia, az Egyesült Királyság) és az Amerikai Egyesült Államok reformtantervében már megjelenik a stratégiarugalmasság fejlesztése (Verschaffel, Torbeyns, Luwel, van Dooren & De Smedt, 2007a).

A magyar közoktatásban is időszerű kérdés és égető probléma tanítványaink rugalmas gondolkodásának fejlesztése. Lépéshátrányban vagyunk. Míg a fejlettebb nyugaton már reformtanterveket írnak és használnak, mindössze néhány éve zajlottak az első hazai pilot vizsgálatok, fejlesztő kísérletek. Így azokra a kérdésekre is keresnünk kell a választ, hogy milyen tanítási-tanulási stratégiák és módszerek alkalmazása jellemzi, és mi segíti a tanulók fejlődését.

1.6.3. Adaptív stratégiahasználat vizsgálata összeadásos feladatok során

Már az óvodáskorúak is több számolási stratégiát megtanulnak (pl. egyszerűbb összeadást végeznek el az ujjaikon), majd az iskolában pl. a szorzótábla tanulásakor több szorzási stratégia elsajátítására kerül sor. A gyermek eleinte valamilyen külső tárgy segítségével végzi a számlálást. Az összeadási stratégia több fejlődési folyamaton megy végbe (Cooney, Swanson & Ladd, 1988), ezek a fejlődési lépések szerintük a következő 4 fontosabb állomást jelentik: (1) *Counting All stratégia* (vagyis *rekurzív módszer*): 3-4 évesek stratégiája, melyre az jellemző, hogy a kisgyermek egyesével megfelelteti egymásnak a tárgyakat és a számneveket, majd az egész halmazt újra leszámolja. (2) *Counting On stratégia*: A gyermek ujjai segítségével számolja ki az összeget. Ha az a feladat, hogy mennyi 2 + 3 = ?, akkor kinyitja két ujját, majd azok visszacsukása nélkül, továbbszámolva hozzáad hármat. Eközben azt is számolja, hogy mennyit számolt tovább. Ennek a stratégiának az alkalmazása nehéz, és gyakran sikertelen. (3) *Counting on from the large* (vagyis *minimum stratégia*): rendszerint 5-6 éves korban jelenik meg. Jellemzője, hogy a gyermek a nagyobb számtól indul, tehát a 3 + 5 = ? művelet elvégzése során a számokat felcseréli, és a nagyobb számtól kezdi a számolást: 5 + 6… 7…8. A minimum stratégia elsajátítását követően a gyermek már nem érzi szükségét annak, hogy az ujjain számoljon. Ugyanezt a stratégiát már szóban is el tudják végezni a gyerekek. (4) *Verbális asszociációs tanulás*: a stratégiahasználat adaptivitása során ez minőségi ugrást jelent, ilyenkor az összeadás végeredményét, az összeget emlékezetből idézi fel a gyerek.

Több kutatás vonatkozik arra, hogy már az alsó tagozatos gyermekek is alkalmaznak stratégiákat, és azok fejleszthetők, ahogy pl. Csíkos (2007) kutatásaiban olvashatjuk. Az iskola alsó tagozatán a gyermekek gondolkodása nem fejlődik kellőképpen (De Corte, 2001). A problémamegoldás során a tanítók, tanárok egy része gyakran csupán néhány gondolkodási stratégia használatát ösztönzi és tanítja. Egyre több kutatás fókuszál a stratégiai gondolkodás fejlesztésére. A metakogníciora alapozott iskolai fejlesztés sikeresen zajlott már le hazánkban is. A negyedikes tanulók körében végrehajtott matematikai és olvasásfejlesztő program egyidejű alkalmazásáról Csíkos és Steklács (2006) számoltak be. Az egyhónapos fejlesztés hatása egy évvel a fejlesztés után is szignifikánsan kimutatható volt. A fejszámolással kapcsolatos stratégiákról szóló tanulmányok általában az általános iskolai tanulókkal végzett vizsgálatokról szólnak, a középiskolások gondolkodása még kevéssé kutatott terület. A fejszámolást rendszerint a természetes számok körében vizsgálják, alsó tagozaton két- illetve háromjegyű számok körében végzett összeadás és kivonást kérnek a gyerekektől.

Az adaptív stratégiahasználat kutatásával kapcsolatosan Siegler (1989) kétjegyű számok összeadása vizsgálatakor különböző stratégiák használatáról számol be. Ezek: *stepwise, split, compensation, simplifying stratégia és indirect addition stratégia.*

Az egyes stratégiák közötti különbséget példák segítségével érzékeltethetjük.

- *stepwise stratégia (lépésenkénti)*: 35 + 13 = 48 kiszámításakor először 10-et adunk a 35-höz, majd ezután még hármat és így kapjuk meg az összeget. (35 + 10) + 3 = 48
- *split stratégia (helyiérték szerinti, azaz tízeseket a tízesekhez, egyeseket az egyesekhez):* 35 + 13 = 48 kiszámításakor először a tízesek helyén levő számokat adjuk össze, majd az egyesek helyén levő számokat, végül a két részösszeget adjuk össze (30 + 10) + (5 + 3) = 48
- *compensation stratégia (indirekt összeadás, azaz kompenzáló):* pl. 35 + 19 = 54 kiszámításakor 35 + 20 = 55, de mivel eggyel többet adtunk hozzá, mint kellett volna, így a részösszegből egyet le kell vonni, s így kapjuk a végeredményt: 54.
- *simplifying stratégia (egyszerűsítő):* akkor alkalmazható hatékonyan, ha olyan számokat adunk össze, amelyek tízestől való eltérése ugyanannyi, csak ellentétes irányban. Pl.: 69 + 21 = 70 + 20 = 90.
- *indirect addition stratégia (indirekt összeadás vagy kivonásos):*Pl. 43 - 39 = 4. A gondolkodás menete: Mennyit adjunk 39-hez, hogy 43-at kapjunk?

De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére és Verschaffel (2010) az indirekt összeadást (*indirect addition*) mint a többjegyű számok kivonására alkalmas stratégiát és annak használatával kapcsolatos kutatásokat mutatja be 35 belga harmadikos vizsgálata során. *Rezat* (2009) a racionális számok körében az összeadás és kivonás során alkalmazott stratégiákat vizsgálja, tanulmányában nyolc 8. osztályos tanulót említ. A vizsgálat során nem találtak különbséget a természetes számok körében és a racionális számok körében alkalmazott stratégiák között. A tanulók a használt stratégiát a feladat igényeihez igazították. Azonban megfigyelhető volt a stepwise (lépésenkénti) és a split (helyiérték szerinti) stratégia gyakoribb alkalmazása.

Csíkos (2012, 2013) 78 negyedikes stratégiahasználatáról számol be nyolc darab, háromjegyű számokkal végzett fejszámolós összeadási feladat megoldása során. A teljesítmény és stratégiák összefüggéseinek vizsgálata során *Csíkos* a következőket találta: A kódolás során a megoldások 1,3-13,3%-a bizonytalan besorolású volt, a gyerekek hangfájlokban rögzített válaszaiból a két független szakértő nem tudta egyértelműen megállapítani, hogy milyen stratégiát használtak. A tanulók leggyakrabban két stratégiát használtak: a lépésenkénti, ill. a helyiérték szerinti stratégiákat választották. A *helyiérték szerinti* stratégiát használták leggyakrabban a gyerekek, attól függetlenül, hogy az mennyire bizonyult hatékonynak. Vagyis pl. a 45 + 12 = 57 összeadás során a tízeseket, majd az egyeseket adják össze a gyerekek. Háromjegyű számok esetén a százasok, tízesek, egyesek a sorrend. Pl.: 143 + 456 = (100 + 400) + (40 + 50) + (3 + 6). A tanulók 47%-a mind a nyolc feladat esetén ugyanazt a stratégiát használta. Az egyszerűsítő stratégiát használták a gyerekek közül a legkevesebben, és csak a 6. feladat megoldása során. Az indirekt összeadást az utolsó két feladat kiszámításakor használta a gyerekek kevesebb, mint tizede. Az első hat feladat esetében azonos stratégiát választók aránya 72%-ra növekszik. Megfigyelték, hogy a megoldási idő függ a választott stratégiától, viszont az elkövetett hiba független a választott stratégiától (Csíkos, 2012, 2013).

A stratégiahasználat vizsgálata szemmozgás-követés segítségével

Számos vizsgálat tanulsága szerint a tanulók metakognitív készségei és az iskolai teljesítménye között szoros összefüggés mutatható ki. A kogníció kutatásának egyik fontos módszere a szemmozgás-követéses vizsgálat. A vizsgálatot ún. eye-tracker segítségével végzik, és műszerhez tartozó szoftver segít az eredmények elemzésében. A vizsgálat során figyelik a vizsgált személy szemmozgását, melyet idegen szóval *szakkád*nak nevezünk. Ezt a rendkívül gyors, rángatózásszerű mozgást *fixáció* követi. A szem 2 századmásodperc alatt ér egyik fixációs pontról a másikra, ez a leggyorsabb mozgás, melyre tudomásunk szerint az emberi szervezet képes (Steklács, 2013). Az olvasás során mért fixációs idő egyénenként változó, hossza függ az olvasott szöveg típusától, az olvasó gyakorlottságától. A fixációs idő átlagosan 250 ezredmásodperc, melynek során mintegy 6-9 karakternyi szöveget fixálunk. Olvasás közben időnként visszaugrik a szemünk a már olvasott szövegrészekre, ezt a jelenséget *regresszió*nak nevezzük. A regresszió száma is több tényezőtől függ: az olvasó olvasási képességétől, pillanatnyi állapotától, motiváltságától, illetve a szöveg nehézségi szintjétől (Steklács, 2013).

Az ún. *online fixációs elmélet* szerint a fixált információk dekódolása a fixációs idő alatt történik. Ennek teljesen ellentmond a másik, ún. *posztfixációs elmélet*, mely szerint a dekódolást a fixációt követően végzi az agyunk. Gyakorlatlan olvasó szeme szeriálisan, azaz betűről betűről kódolja a szöveget, míg az ismerős szavakat globálisan kódoljuk (Cs. Czachesz, 1998) A szemmozgás műszeres vizsgálata nemcsak a reklámiparban, közvéleménykutatásban hasznos, egyre elterjedtebbé válik a pedagógiai kutatásokban is. Segítségével az emberi gondolkodás és a metakognitív gondolkodás könnyebben megfigyelhető.

A metakognitív gondolkodás egész életünket beszövi, így a zenetanulás egyik fontos része. A szolfézs és az ének-zene területén Buzás (2016) vizsgálta zeneművészeti képzésben résztvevő 12-18 éves tanulók kottaolvasási stratégiáit kérdőíves és szemmozgás-követéses módszerrel. A szemmozgás követéses módszert sikeresen alkalmazták más kutatási területeken is, beleértve a már említett olvasást (Paulson & Jenry, 2002, Rayner, Chace, Slattery & Ashby, 2006); számos kutatás vizsgálta az információfeldolgozást (Rayner, 1998; Radach & Kennedy, 2004; Jacob & Karn, 2003), aritmetikai problémamegoldást (Hegarty, Mayer & Greer, 1992; Verschaffel, De Corte & Pauwels, 1992). Ezek a tanulmányok azt vizsgálják, hogyan gondolkodnak a diákok problémamegoldás közben.

A matematikai gondolkodással kapcsolatos korábbi szemmozgás-követéses vizsgálatok a problémamegoldásra fókuszáltak. *Hegarty, Meyer és Greer* szemmozgás-követéses vizsgálatot végeztek a megértési folyamatra és a matematikai szöveges feladatok megoldásának stratégiáira vonatkozóan (Hegarty Mayer & Greer, 1992; Hegarty, Mayer & Monk, 1995). A feladatok megoldása során a kulcsfontosságú információkra, mint például a számnevek, a vizsgált személyek hosszabban fókuszáltak. Megfigyelték továbbá, hogy a kevésbé sikeres feladatmegoldókhoz képest a sikeresebb tanulók több időt szántak a nehezebb problémákra a problémamegoldás integrációs és tervezési fázisaiban.

A mérőeszközök elkészítésekor érdemes arra is figyelnünk, hogy a tanulók feladatmegoldására hogyan hat a feladat modalitása. Wiley és Rayner (2000) három, amerikai egyetemi hallgatókkal folytatott kísérletről számolnak be. Vizsgálataik eredményei szerint a címek megléte esetén sikeresebbek a vizsgált személyek a szövegértési és szöveg memorizálási feladatokban. A korábbi kutatásokkal (Bransford & Johnson, 1972; Dooling & Lachman, 1971; Smith & Swinney, 1992) összhangban Wiley és Rayner azt találták, hogy a kísérleti személyek jobban emlékeztek a címmel ellátott szövegekre. Az 1. kísérletben (N = 32) a címek jelenléte kevesebb regresszív szemmozgást eredményezett, a mondatvégi szavakra rövidebb fixációs idő esett, és a fontosabb főnevekre kisebb ideig fixáltak. A 2. és 3. kísérletben (N = 12 és N = 24) többjelentésű szavakat alkalmaztak, úgy látták, hogy a címek nagy hatással vannak a többjelentésű szavak értelmezésére. A címek jelenléte a szövegfeldolgozást megkönnyíti mikro-, és makrostrukturális szinten is (Kintsch, 1988; Thorndyke, 1977), egyértelművé teszik a szavak közötti kapcsolatokat (Smith & Swinney, 1992, St. George, Mannes & Hoffman, 1994). A korábbi kutatásokban az olvasási sebességet mérve nem sikerült világosan kimutatni, hogyan segítik az olvasási folyamatot. Wiley és Rayner (2000) szerint a címmel nem rendelkező szövegek esetén a hosszabb olvasási idő oka: több regresszív fixáció a szavak azonosítása miatt, a teljes szöveg megértése nehezebb, különösen a nehezen értelmezhető mondatok esetén, hiszem az olvasónak újra kell teremtenie a szöveget. A két kutató a többjelentésű szavakon hosszabb fixációs időt és gyakoribb regresszív szemmozgást mért, szerkezetileg nem összefüggő szöveg esetén még nagyobb értékeket kapott. Azt tapasztalták, hogy a cím nélküli szöveg olvasásakor a vizsgált személyek mondat végén tovább fixálnak, mint a mondat belsejében, tehát a címet mintegy beintegrálják a szövegbe. A három kísérlet eredményei arra utalnak, hogy a címek érintik a szövegfeldolgozást az olvasás integratív és lexikai szakaszában is, tehát vizsgálatunkban célszerű a mérőeszközökben címmel ellátott feladatokat kitűzni.

A szemmozgásos vizsgálatok más tanulsággal is szolgálnak. A sikeresebb feladatmegoldó diákok jobban használják a problémamodell-stratégiát (pl. nagyobb hangsúlyt fektetnek a változók nevére), és a kevésbé sikeres feladatmegoldók ügyesebben használják a közvetlen fordítási stratégiát (pl. relációs szavak, mint például többé-kevésbé). Verschaffel, De Corte és Pauwels (1992) szintén használták a szemmozgás-követéses módszert a diákok gondolkodásának vizsgálatára szöveges feladatok megoldása közben. A fenti tanulmányok szerint a releváns információk felismerése, kiválasztása és feldolgozása elengedhetetlen a matematikai szöveges feladatok sikeres megoldásához.

A stratégiahasználat rugalmasságának fejlesztése

Az alsó tagozatos órákon elterjedt a szorzótábla játékos gyakoroltatása, ennek már régóta van szakirodalma, pl. Esztergályos: Oktatójátékok kisiskolásoknak c. könyve (1987). A gyakorló tanítók ma is szívesen alkalmaznak játékokat, azonban ezeknek a játékoknak nagy része versenyhelyzetet teremt, ami egy diszkalkuliás gyerek számára további stressz és kudarcélmény forrása lehet.

Külföldön egyre több reformtanterv és fejlesztő tananyag készül az eddigi kutatások alapján. Több ország, így az Egyesült Királyság (DfEE,1999), Kanada, Hollandia (Treffers, De Moor & Feijs, 1990) és az Amerikai Egyesült Államok (NTCM, 1989) reformtantervében már megjelenik a stratégiarugalmasság, a belgiumi flandriai (Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, 1998), a flamand (Menne, 2001), a nagy-britanniai (QCA, 2008; QCDA, 2009) és az ausztrál (Australian Education Council, 1991) tantervnek is része. A külföldön beiktatott tantervi reformok egyik fő célja, hogy segítse a tanulókat abban, hogy megértsék a matematikai struktúrákat (Lambdin & Walcott, 2007). A tantervi dokumentumok alapján a tanárok nagyobb hangsúlyt fektetnek a különféle megoldási stratégiák tanítására, a tanulók additív és multiplikatív gondolkodásának fejlesztésére. A tanítás során a pedagógusok megbeszélik a tanulókkal az egyes számolási stratégiák tulajdonságait, felhasználhatóságát.

A nyugat-európai oktatásirányítók előtt nem kétséges, hogy az adaptív stratégiahasználat fejleszthető és fejlesztendő. Ugyanakkor még mindig kevés kutatás (pl.: Carr, Alexander & Folds-Bennett, 1994; Geary, 2003; Verschaffel, Greer & De Corte, 2007c,) számol be ezeknek a fejlesztő kísérleteknek a hatásairól. Felvetődik tehát a kérdés: melyik életkorban célszerű elkezdeni a gyerekek fejlesztését, és kik profitálhatnak belőle, a matematikában tehetséges, a többségi gyerekek vagy a diszkalkuliások segítségére is lehet? Több kutató végez szívesen vizsgálatot egyetemistákkal kapcsolatosan. Ugyanakkor számos kutató érvel amellett, hogy a fejlesztés kezdetekor az optimális életkor a kisiskoláskor. Minél korábban kezdődik az adaptív stratégiahasználat fejlesztése, annál jobb eredményeket érhetünk el (Wittmann & Müller, 1990-1992; Gravemejer, 1994; Selter, 1998; Bransford, 2001; Baroody, 2003).

Az utóbbi évtizedekben az oktatáskutatók intenzíven foglalkoznak azzal a problémával, hogyan lehetne fejleszteni a tanulók szöveges feladatmegoldó-képességét, különös tekintettel a szorzással megoldható feladatokra (Mulligan & Mitchelmore, 1997, 2009; Mulligan, Mitchelmore & Presscott, 2005; Nunes, Bryant & Watson, 2009; Shrager & Siegler, 1998; Siegler & Araya, 2005). Több kutató figyelme a tanulók multiplikatív gondolkodására irányul (Siemon, Beswick, Brady, Clark, Faragher, & Warren, 2011; Booker, Bond, Sparow & Swan, 2010). Az óvodáskorú és alsó tagozatos gyermekek körében végzett külföldi fejlesztő programok tapasztalatai (pl. Count Me In Too fejlesztő program, 2002; Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAP, Mitchelmore & Mulligan, 2016; Mulligan, Mitchelmore, Kemp, Martson & Highfield, 2008) a hazai kutatók érdeklődésére is számot tarthatnak. A szintén óvodásokkal és kisiskolásokkal végzett flamand, spanyol és ausztrál kísérletek közül kiemelendők az ausztrál kutatók eredményei. Mulligan és Mitchelmore (2009), Mulligan, Mitchelmore és Presscott (2005) szerint már az óvodások is képesek szorozni, második és harmadik osztályosoknál a CO (számlálás) és a BF (tényeken alapuló) stratégia használata a gyakoribb. A 2005-ben kezdett kétéves longitudinális vizsgálat során 103 elsős vett részt a fejlesztő kísérletben. A kutatás során összefüggést találtak a matematikai stratégia percepció és a gyermek fejlesztése között. Siegler kísérleteinek tapasztalatai szerint az új stratégiák létrejötte metakognitív és asszociációs tanulási folyamatok eredménye, az új stratégia gyakoribb használata gyorsabb és pontosabb választ eredményez, a tanulás szimultán megy végbe, és a választás probléma- és szituációfüggő (Siegler, 2000). Célszerű egyszerre több stratégiát tanítani a gyerekeknek (Shrager & Siegler, 1998; Siegler & Araya, 2005; Wong & Evans, 2007), a stratégiák előnyeinek és hátrányainak bemutatásával (Siegler, 1989).

Az adaptív stratégiahasználat fejlesztése Hill és Ball (2004) szerint a tanároktól is más attitűdöt kíván: A leendő matematikatanároknak ki kell fejleszteniük és igazolniuk is kell saját stratégiáikat. Szerintük a matematikatanároknak kétféle tudásra van szükségük: (1) common knowledge, azaz mindennapi matematikatudás, pl. hogyan kell megoldani egy adott matematikai problémát, (2) ún. specializált matematikatudásra, hogy miért működik az adott módszer és általánosítható-e más problémákra is.

Lo, Grant és Flowers (2008) a Midwestern University első és másodéves egyetemista hallgatóinak gondolkodási stratégiáit vizsgálták. A 15 hetes fejlesztő kísérlet számos tanulsággal szolgált. A foglalkozások az egyes csoportokban hetente kétszer, 100-100 percig tartottak. A 38 kísérleti személy kiscsoportokban dolgozott, kétjegyű egész számok szorzásával foglalkoztak. A fejlesztés során pl. a $18 \cdot 26$ kiszámítására a $25 \cdot 36$ és $50 \cdot 18$, azaz az egyik szorzótényező duplázásán alapuló stratégiát is tanították. A kísérletek során a foglalkozásokról videófelvételeket készítettek, és a hallgatók írásbeli munkáit is elemezték. A kísérlet során azt tapasztalták, hogy a leendő általános iskolai tanárokban nem kifejlődött ki a szorzás fogalma és a szorzási struktúra (multiplicative structure). Pl. típushiba volt a $18 \cdot 26$ szorzás során a $18 \cdot 26 = 10 \cdot 20 + 8 \cdot 6$ válasz, mert az összeadás (stepwise, lépésenkénti stratégia) hibás analógiája alapján számoltak. A $36 \cdot 17$ kiszámításakor a hallgatók egy része a következőképpen számolt: $40 \cdot 20 = 800$, $4 \cdot 17 = 68$, $3 \cdot 40 = 120$, $800 - 120 = 692$ -t kaptak számolási eredményként, szemben a helyes válasszal, a 612-vel.

A metakogníció és az adaptív stratégiahasználat

A kognitív stratégiák közül az egyik leginkább kutatott terület a metakogníció. Az adaptív stratégiahasználat vizsgálatában ez az egyik kulcsfogalom. A metakognícióról Csíkos tollából több cikk és egy monográfia is megjelent (Csíkos, 2004a, 2004b, 2007). A metakogníció definícióját Flavellnek köszönhetik az oktatás szereplői, szerinte a metakogníció fogalma a tudásra vonatkozó tudást jelenti (*cognition about cognition*). Ha metakognícióra gondolunk, akkor az emberi gondolkodás két, hierarchikusan egymásra épülő szintjét képzeljük el: az alsó tárgyi szintet és a felső metaszintet (Nelson, 1996).

A metakogníció vizsgálatával kapcsolatosan két további fogalmat kell kialakítanunk, ez a *deklaratív és a procedurális metakogníció* fogalma (Csíkos, 2007). A metakogníció azon részeit, melyek a tudásra vonatkozó ismereteket tartalmazzák, deklaratív metakogníciónak nevezzük (Csíkos, 2007). A deklaratív metatudás legfőbb jellemzői: csak funkcionálisan kötődik a metakognícióhoz, ismeret alapú: egy speciális objektumra, a tudásra vonatkozó ismereteket takar (Csíkos, 2007). A deklaratív metatudás az egyénre jellemző ismeretegyüttes, pl. hasznos, ha valaki tudja magáról, hogy gyorsan és pontosan tud fejben ötre végződő számokat négyzetre emelni, míg mások számára hatékonyabb lehet, ha a hasonló jellegű hatványozási feladatot írásban vagy számológép segítségével oldja meg (Csíkos, 2007).

A metakogníció másik fajtája a procedurális metakogníció szintje, melyen a tudás alkalmazásának kontrollját értjük (Csíkos, 2007). A procedurális metatudás lakmuszpapírként jelzi gondolkodásunk jellemzőit, irányítja problémamegoldásunkat, három fő összetevője: a *tervezés (planning*), *a nyomon követés (monitoring)* és az *ellenőrzés (evaluation*) (Csíkos, 2007). A tervezés, monitorozás, ellenőrzés gondolkodásunk része (Steklács, 2014). A kutatók egyre többet foglalkoznak a procedurális metatudás vizsgálatával (Csíkos, 2004a, 2004b). A metakogníció fejlődése és fejleszthetősége több tudományterülettel is összefügg, a széles körben kutatott kérdésekhez tartozik. A deklaratív metatudás vizsgálatát különböző, „a tanulás tanulásával" kapcsolatos kutatások, fejlesztések tűzik ki célul.

Hazánkban egyre több kutató foglalkozik a metakognitív stratégiák vizsgálatával, fejlesztésével. A kutatások közül kiemelkednek Csíkos és Steklács (2011, 2016) szöveganticipációs, számítási és olvasási stratégiák fejlesztésére vonatkozó kísérletei; Csíkos, Kelemen és Steklács (2008) olvasási és matematikai, metakognitív stratégiákra alapozott kéttényezős fejlesztő kísérlete; Molitorisz (2012a, 2012b, 2011a, 2011b) az olvasási stratégiákról alkotott tanulói meggyőződésekre vonatkozó vizsgálatai. Jelentős eredményeket ért el Csíkos, Szitányi és Kelemen (2010, 2012) a 3. osztályosok körében végzett kísérletében, melynek során a tanulói és tanári rajzok szöveges feladatok megoldásában segítő szerepét vizsgálták. A fejben számolás során alkalmazható összeadási stratégiák fejlesztése után Csíkos (2016) kis kísérleti hatásról számol be 4. osztályosok körében végzett kutatásáról írva.

Desoete, Roeyers és De Clercq (2003) megállapították, hogy a 227 harmadik osztályos tanuló közül a metakognitív fejlesztési programban részt vevő diákok jobb teljesítményt mutattak matematikából, mint a kontrollcsoport. Fontos, hogy mind a tanár, mind a diák ismerje a metakognitív folyamatokat és módszereket, ugyanis a tudatosság pozitívan befolyásolja a diákok matematikai teljesítményét (Carrier, 2010).

Egy adott készség fejlődése során a készség működésében egyre csökken a metakogníció szerepe. Viszont ennek következtében előfordulhat, hogy egyjegyű számok szorzását már a metaszint használata nélkül végző tanuló egy szöveges feladatban pl. két számot és a „kétszer nagyobb" kifejezést megpillantva azok feladatbeli kontextusának végiggondolása nélkül automatikusan a két szám szorzatát adja eredményül (Csíkos, 2007). Reusser és Stebler (1997) leír néhány, a stratégiahasználattal kapcsolatos tévhitet. Ezek egyike: hogy minden matematikai szöveges feladatnak van megoldása. Ezt a problémát azóta többen is vizsgálták, többek között Verschaffel, Torbeyns, De Smedt és Van Dooren (2007), hazánkban Csíkos (2003b) és Kelemen (2004).

Sok diák küszködik számolási nehézségekkel, a gondolkodásuk és a diszkalkulia jellemzőit Márkus (2003) foglalja össze. A diszkalkulia számolási zavart jelent, mely lehet fejlődési vagy szerzett. A diszkalkuliás gyermekek nehezen tudnak számokat összehasonlítani, gyakran számolnak az ujjukon, rossz az időérzékük, iránytévesztők, egyik napról a másik napra elfelejtik a szabályokat (Márkus, 2003). Az adaptív stratégiahasználat oktatása a diszkalkuliás gyerekeknek is segíthet. A tanítás során a megszokottól eltérő tanítási stílust érdemes alkalmazni. Reusser (2000) úgy véli, hogy az adaptív tanítás során a tanárnak célszerű beépítenie a diákok hibáit (*errors*) a tanulás folyamatába, egyfajta „pozitív hibakultúra" kialakítását tartja kívánatosnak. Így a tanulók hibás gondolkodási stratégiáikból sokat tanulhatnak. Reusser ebben a tanulási folyamatban hasznosnak tekinti a számítógép használatát.

A tanulók számolási stratégiáinak kutatása az önszabályozott tanulás elmélete felől is megközelíthető. Ebben a komplex rendszerben a tanulók a tanulás irányítóiként szerepelnek, képesek szabályozni viselkedésüket, kitűzni újabb tanulási célokat (D. Molnár, 2013). A kognitív és metakognitív stratégiák segítségével megtanulnak tanulni. Ezáltal képessé válnak az egyre változó világ kihívásaihoz való alkalmazkodásra.

1.7. Az arányossági gondolkodás kialakulása és főbb jellemzői

Piaget és Inhelder (1958) szerint az arányossági gondolkodás formális műveletekből áll. Úgy vélik, ezek a formális műveletek elvont gondolkodáson és elméleti következtetések levonásán alapulnak, és a középiskolai évek végére fejlődnek ki teljesen. Piaget kísérleteiben kimutatta, hogy 9 éves kortól a gyerekek képesek egyenes arányosság felismerésére (térfogat és tömeg, távolság és sebesség kapcsolatában), továbbá 14 éves kortól fordított arányosság felismerésére és megmagyarázására. A Piaget által végzett kísérletek azt támasztják alá, hogy az arányossági gondolkodási folyamatok az additív és a multiplikatív stratégiákon alapulnak. Karplus és több más kutató (Karplus, Pulos, & Stage, 1983a; 1983b) arra figyelt fel, hogy a főiskolai hallgatók jelentős részénél nem alakult ki arányossági gondolkodás.

Alatorre és Figueras (2005) 9-65 éves emberek arányossági gondolkodását vizsgálta. 23 fős mintájuk iskolázatlan embereket és PhD fokozattal rendelkező embereket is tartalmazott. A 60-90 perces interjúk során a vizsgált személyek tízféle problémát oldottak meg. A feladatok közül négy arányosságra vonatkozott, kettő vegyes, kettő valószínűségi, kettő eloszlással kapcsolatos probléma volt, melyek egyike törtrész-számítással, a másik pedig részekre osztással volt könnyen megoldható. A vizsgált alanyoknak 15 kérdést tettek fel az interjú során három nehézségi szintre vonatkozóan. A vizsgált személyek a nem arányossági összefüggéseket tartalmazó szöveges feladatokat nagyobb arányban oldották meg, mint az arányossági feladatokat.

Az arányossági gondolkodást az élet számos területén használjuk: algebra, geometria, mértékegység-átváltás, statisztikai számítások, valószínűség-számítás, társadalom- és természettudomány. (Pl. mérkőzések eredményei, kördiagram készítése, térképészeti számítások, szerencsejáték tipp, festékkeverés.) Kasten szerint gyakran megtörténik, hogy a tanárok nem mutatnak rá a stratégiák közötti kapcsolatokra (Kasten, 2002). Úgy véli, ha a feladat megoldásakor egyetlen stratégiát ismer a diák, sok helyzetben nem lesz tudatában annak, hogy a feladat megoldásához arányossági gondolkodás szükséges, és annak sem, hogy még számos további stratégia közül választhat. Középiskolában már komplex feladat részeként kell tudniuk használni az arányossági gondolkodást (Kasten, 2002). Az arányossági feladatok megoldásának vizsgálata során sokféle gondolkodási folyamat térképezhető fel.

1.8. A szöveges feladatok szerepe az adaptív stratégiahasználat mérése során

Az adaptív stratégiahasználat vizsgálata során a kutatók leggyakrabban fejben végezhető alapműveletek, illetve egyszerű szöveges feladatok megoldását kérik a gyerekektől, mert ezek segítségével jól mérhető a konstruktum. A konstruktum mérése során így számos információt gyűjthetünk a tanulók matematikai képességeiről. A szöveges feladatok közül erre a szerepre többek között azok a feladatok a legalkalmasabbak, amelyek szorzást igényelnek, arányossági következtetésre, mértékegységátváltásra, százalékszámításra, kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámításra vonatkoznak.

Szöveges feladat sikeres megoldása elképzelhetetlen a megfelelő matematikai alapkészségek (pl. számolási készség) optimális begyakorlottsága nélkül (Nagy, 2007). De Corte, Op't Eynde, Verschaffel (2001), valamint Mayer és Hegarty (1998) szerint hasonlóképp elengedhetetlen a megfelelő problémaprezentáció, továbbá a szóolvasás, szövegértés megfelelő fejlettségi szintje (Józsa, 2000). Az első nagymintás hazai vizsgálatok ezen a területen Nagy (1973) nevéhez fűződnek, aki egy szöveges feladatbankot is létrehozott. 15 év múlva egy 3300 fős, település és iskolatípus szerinti országos reprezentatív mérés során a szöveges feladat megoldásához szükséges részképességek között a Szegedi Neveléstudományi Műhely kutatói ezeket sorolják fel: (1) tartalommegértés, (2) mértékváltás, rejtett vagy felesleges adat, (3) műveletkijelölés, (4) műveletsorrendiség (Vidákovich & Csapó, 1998). Az egyszerű, egy vagy több alapművelettel megoldható szöveges feladatokkal kapcsolatos vizsgálatokkal hazánkban újabban Csíkos és Kelemen foglalkozik (Csíkos, 2004b). Kelemen szerint (2010) az olvasási képesség és a feladatmegoldó képesség összefüggenek.

A matematika tanulásának kiemelt céljai közé tartozik a tanulók számolási, modellezési, problémamegoldó és döntési képességének fejlesztése; logikus, pontos, kreatív, mérlegelő, stratégiai és rendszerező gondolkodás kialakítása (Nemzeti alaptanterv, 2020). Az általános iskola első négy évfolyamán folyik a matematika műveléséhez szükséges ismeretek, alapkészségek kialakítása. Az 5-8 évfolyamon zajlik ezen készségek további fejlesztése, a felfedeztetés, a konkrét tevékenység, játék, hétköznapi szituációk segítségével. Elvárásként fogalmazódik meg, hogy a tanulók adott feladatok megoldására képi és szimbolikus modelleket hozzanak létre, stratégiákat alkalmazzanak, alkossanak. A NAT (2012) és a módosított NAT (2020) matematikából átfogó eredménycélként írta le, hogy a diákok a 4. évfolyam végére jártasak legyenek az alapműveletek elvégzésére fejben, írásban; alkalmazzák a számolást könnyítő eljárásokat; pontosan számoljanak fejben a 10000-es számkörben a 100-as számkörben végzett műveletekkel analóg esetekben. Az alsó tagozat végére elvárható, hogy a tanulók értsék a helyiértékes számrendszert, a számolás során alkalmazzák a legfontosabb műveleti tulajdonságokat; emlékezetből ismerjék a kis szorzótáblát. Szintén elvárás a 10-zel, 100-zal, 1000-rel való szorzás, osztás kapcsolata a helyiérték-táblázatban való jobbra, illetve balra tolódással; a fejben pontosan számolás képessége a 10 000-es számkörben a számok 10-zel, 100-zal, 1000-rel történő szorzásakor; a tanuló teljes kétjegyűek két- és egyjegyűvel való szorzatát megbecsüli, mérlegeli a becslés során kapott eredményt.

A számolási képesség a tudásszerző képességek részeként fontos szerepet tölt be a megismerési folyamatban. A szorzási stratégiák, a fejben számolás, fejben szorzás a matematikai műveltség, tudás részét képezik. A mértékegységátváltás, kerület-, terület-, felszín- és térfogatszámítás, arány- és törtbővítés és a szöveges feladatok megoldása során gyakran végzünk szorzást, alkalmazunk fejben szorzási stratégiát. Fontos, hogy többet megtudjuk erről a konstruktumról és tanítványaink gondolkodási képességéről, stratégiahasználatáról.

Összegezve, a jelen kutatás az általában vett neveléstudomány számára azért fontos, mert az egyik alapkészség, a számolási készség, azon belül a fejben szorzási stratégiák vizsgálatával foglalkozik. A mindennapi életben gyakran kényszerülünk arra, hogy kiszámítsuk, mennyit fogunk fizetni a vásárolt áruért. Gyors döntéshozatalunkat segíti, ha jól tudunk fejben számolni, szorozni. A számolási készséget a természettudományi tantárgyakon kívül az ének-zene, a technika, a testnevelés, a történelem és a földrajz is igényli (pl. a térképek léptéke, statisztikai számítások). A társadalom számára is hasznos, ha tagjai funkcionális írástudók (Gray, 1956; Toffler, 1970); a mai munkavállalókkal szembeni elvárás, hogy képesek legyenek saját tudásukra vonatkozó ismeretekre szert tenni, a munkaadók flexibilitást várnak tőlük a gondolkodásban (Albert, 2008). Egyre kevésbé definiálható az életben való boldoguláshoz szükséges ismeretek, készségek és képességek köre, így előtérbe kerül a kognitív és metakognitív stratégiák, önszabályozott tanulás, az adaptív stratégiahasználat szerepe.

Az adaptív stratégiahasználat és iskolai fejleszthetőségének, fejlesztésének kérdését tehát nem önmagában és önmagáért tekintjük fontosnak, hanem a társadalom részéről megfogalmazott elvárások okán. A számolási stratégiák vizsgálata közben feltárt hibák feltérképezése, rendszerezése segíthet majd abban, hogy olyan tanítási módszereket, stratégiákat alakítsunk ki, amelyek segítségével diákjaink eredményesebbek lesznek az aritmetikai feladatok, s ezáltal a szöveges feladatok megoldása során, a többi tantárgyi órán, a nemzetközi mérések alkalmával, valamint a gyakorlati életben.

2. KUTATÁSI EREDMÉNYEK

2.1. A tanulói hibák

Az iskolai matematikatanításban az 1890-es években több nyugat-európai országban reformmozgalom indult, melynek Felix Klein volt az egyik kulcsfigurája. Hazánkban Beke Manó foglalkozott a matematikatanítás megújításával. Beke Manó pedagógiai írásai ma is korszerűek, azon kevés szakember közé tartozott, aki felhívta a figyelmet a tanulói hibák jelentőségére a matematikatanulási folyamatban. Beke Manó (1900) kiemelte, hogy nagyon sok tanulónál és sok matematikai területen megfigyelhetőek bizonyos hibák, ezeket tipikus hibáknak nevezte. Beke a hibák három forrását különbözteti meg: (1) Hamis vagy elhamarkodott analógia, amikor a feltételekkel történő részleges egyezés alapján vonunk hasonlóságot, (2) Következtetési hiba és a tételek pontatlan megfordításából származó hiba, (3) A szemlélet hiányosságából származó hiba. Ezzel feltárta az alapvető gondolkodási hibákat (Majoros, é.n.). Korát megelőzve, kiváló szakemberként felismerte, hogy az értelem nélküli mechanikus gyakorlás is hibák kialakulását eredményezheti; vizsgálta, hogyan lehetne ezek számát csökkenteni.

A pedagógus eredményesebb oktatómunkát képes végezni, ha ismeri a tanulók által elkövetett hibák jellegét, eredetét, fajtáit. Ebből a szempontból példamutatóak Beke Manó (1900, 530.o.) a Magyar Pedagógiai Társaság székfoglaló beszédében megfogalmazott gondolatai: „A hibák elkerülésének vagy azok minimumra való szállításának legfontosabb kelléke az, hogy a tanár a hibákat 'ismerje, felismerje, és azok okait türelmesen keresse. E keresésnél én mindig azt az elvet követtem, hogy először a magam eljárásában, aztán a tárgy természetében és csak harmadsorban kerestem a növendékben a hibát. Azt hiszem ez a legjobb eljárás nemcsak a gondolkodásbeli, hanem egyéb hibák felismerésére és orvoslására is."

Beke Manó mellett a tanulói hibák csökkentéséért több tanár tevékenykedett. Kiemelkedő munkát végzett e téren Pólya György és Dienes Zoltán Pál. Az 1950-as években Cser Andor (Cser, 1952), Lénárd Ferenc (Lénárd, 1963) és Faragó László (1958, 1959, 1961) hangsúlyozták a formalizmusnak a hibák keletkezésében betöltött negatív hatását. Beke Manó javasolta, hogy az analógiákra alapozó tanításkor a feladat megoldás során a tanárok hívják fel a tanulók figyelmét a különböző feltételek közötti különbségekre. Pólya egyik alapgondolata az analógián alapuló tanulás (Pólya, 1945/1969). Hozzá hasonlóan Faragó úgy véli, matematikatanítás során támaszkodnunk kell az analógiákra.

Fettweiss (1929) felhívta a figyelmet arra, hogy a pszichológia a tanulók dolgozataiban előforduló tipikus hibák rendszerezésével segíthet a matematikaoktatásban. Szenes Adolf Beke Manóhoz hasonlóan a matematikai hibák évről évre történő megjelenését hangsúlyozza (Szenes, 1934). Szeliánszky (1938) részletesen foglalkozott azokkal a pszichológiai és lelki tényezőkkel, tanítási körülményekkel, amelyek a tanuló munkájában hibát eredményezhetnek.

Mosonyi az általános iskolai matematikaórákon megfigyelt gondolkodási hibákat a hibákat hat típusba osztotta (Mosonyi, 1972): (1) Helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák, (2) Formalizmuson alapuló hibák, (3) Megszokáson alapuló hibák, (4) A fogalmak, jelölések tisztázatlan voltából eredő hibák, (5) Hiányos előismereteken alapuló hibák, (6) Matematikai műszavakból, szakkifejezésekből eredő hibák.

A helytelenül feltételezett vagy hamis analógián alapuló hibák akkor jönnek létre, amikor a tanuló az analógiát olyan helyzetre alkalmazza, amikor az analógia nem áll fenn (Szendrei, 2005), pl. ilyen a nagyobb számok szóbeli szorzása során megfigyelhető hibák egy része. A formalizmuson alapuló hibák forrása a tanár munkája, a fogalomalkotási folyamat siettetése, a jelölésekre, formalizmusra való korai, gyors áttérés által. Erre példa a nulla kihagyása többjegyű számok osztásának leírásánál, így a tanuló a 145656 : 357 = 408 helyett 48-at kap hányadosként. Megszokáson alapuló hibák egyike pl. „a szorzás növel, osztás csökkent", ez az alsó tagozaton tapasztalt igazság megdől, amikor egynél kisebb számmal szorzunk vagy osztunk. A fogalmak, jelölések tisztázatlan voltából eredő hibákra példák: a tört szorzása helyett annak bővítése vagy a „3x-x értéke egyenlő 3-mal" típusú hibák algebrai kifejezések összevonása, egyenletmegoldás során. Bár ezek a hibák a tanuló hiányos ismeretén alapulnak, a hibázás gyökere mégis a fogalom meg nem értése. Hiányos előismereteken alapuló hibákra példák: a többjegyű számmal történő szorzás során az algoritmus hibás sorrendben történő végrehajtása (Szendrei, 2005), vagy ilyen hiba az összeadás és szorzás hibás sorrendben történő elvégzése. A matematikai műszavakból, szakkifejezésekből eredő hibák esetén is felvetődik a tanár felelőssége. Ugyanakkor a hibák forrása gyakran a tanuló figyelmetlensége, a köznyelv és a szaknyelv eltérő szóhasználata (Szendrei, 2005). A szakszavak szokatlansága (pl. hányados, különbség, arányosság, szinusz, logaritmus) megzavarhatja a tanulót, másrészt a hibák oka lehet a köznyelvi és szaktudományi használatbeli különbség (pl. a „hasonló" szó esetén).

2.2.1. Tévhitek, tévképzetek

Tudásunk részét képezik a különböző tévhitek, amik tudományosan hamis ismeretek. A mindennapi megismerés során számos tényező segítheti egy tévhit létrejöttét, pl. túláltalánosítás, szelektív észlelés, pontatlan megfigyelés, kódolási hibák. A természettudományos tárgyakat tanító tanárok gyakran szembesülhetnek tévhitekkel, finomabban fogalmazva tévképzetekkel, ez a kutatók egyik kedvelt területe az 1970-es évek óta. „A tévképzetek (misconceptions) a gyerekek vagy akár felnőttek tudásába tartósan beépülő hibás elképzelések, a jelenleg elfogadott tudományos nézetekkel össze nem egyeztethető fogalmak, fogalomrendszerek, a környezet egyes jelenségeiről alkotott modellek, amelyek mélyen gyökereznek, és a tanításnak is ellenállnak" (Korom, 1998, 149. o.). Napjainkra többszáz publikáció jelent már meg e témában; a mérések lefedik a természettudományok főbb témaköreit (Korom, 1997., 22.o.)"

A tévhitek tanulmányozása önmagában véve is érdekes, ugyanakkor vizsgálatunk szempontjából kiemelném, hogy a matematikában is gyakran megfigyelhetők olyan hibák, amelyek a megismerés során keletkeznek túláltalánosítás, szelektív észlelés, pontatlan megfigyelés révén. Ezek a hibák fogalmakhoz is köthetők (pl. számfogalom). Harmadrészt szükségesnek tartjuk, hogy a matematikatanárok ezeket a hibákat feltérképezzék, hogy azután kijavíthassák. Ily módon a tanulók által a fejben végzett szorzás során ejtett hibák bizonyos szempontból a tévképzetek fogalmával is párhuzamba állíthatók.

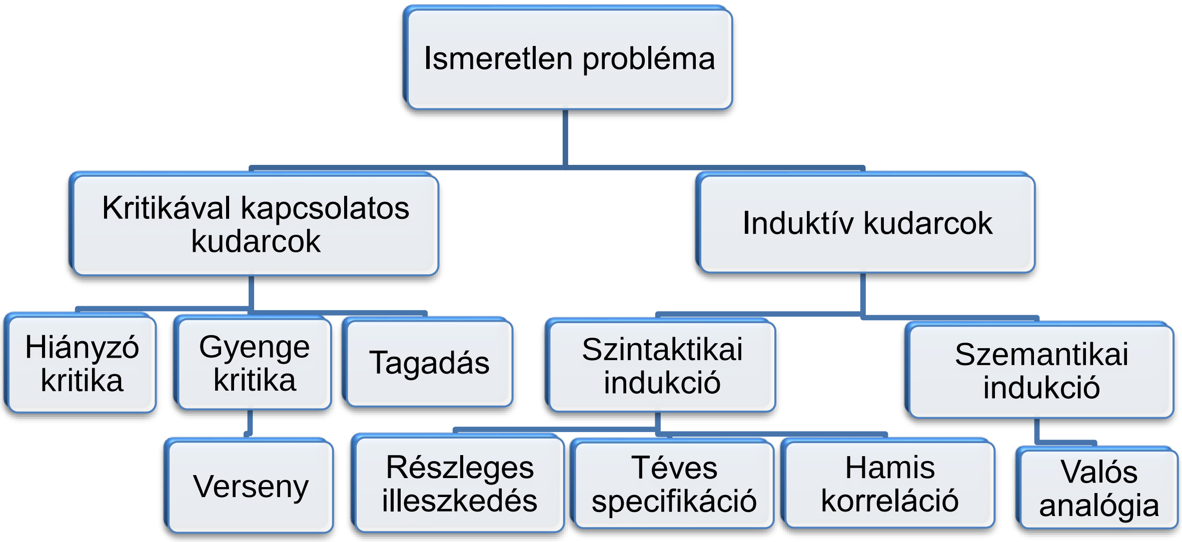
2.2.2. Racionális hibák a matematikai gondolkodásban

Amikor ismeretlen problémával találkozunk, akkor megpróbálunk szabályokat, stratégiákat alkotni (Ashlock, 1976; Brown & VanLehn, 1980; Buswell, 1926; Cox, 1975; Lankford, 1972; VanLehn, 1983). Ezek a stratégiák nem véletlenszerűen jönnek létre, létrehozójuk számára világos a logikájuk, ugyanakkor mégis félreértésen alapulnak, és gyakran tévútra vezetnek. Ezeket Ben-Zeev (1996) szabály alapú vagy „racionális hibáknak" nevezi. Ismert a Van Lehn (1986) által közölt, kivonás során elkövetett hiba: 23 – 7 = 24, mikor a diák azt jegyezte meg, hogy a nagyobb számból vonjuk ki a kisebbet, a szám helyére viszont nem figyelt. Ez a stratégia egy racionális hiba, és a tanuló számára logikusnak, jól működőnek tűnik.

A matematikai racionális hibák csoportosítása, taxonómiája

A matematikai hibák vizsgálata lehetőséget teremt a matematikával kapcsolatos mentális reprezentációk vizsgálatára. Nyilvánvalónak tűnik azzal a kérdéssel foglalkozni, hogy a hibák kategorizálhatók-e, mert ha igen, akkor a megoldások során ejtett hibák néhány elv segítségével megmagyarázhatóvá válnak (Ben-Zeev, 1998). Ben-Zeev úgy véli, számtalan különböző hiba hátterében alapvető mentális folyamatokat találunk. A matematikai racionális hibák csoportosítása a matematika ágaihoz kapcsolódik, ugyanakkor fontos következtetések vonhatók le a kogníciókutatás számára is. A gyermek a számolás elsajátítása közben gyorsan megtanulhatja, hogyan lehet egyesével növelni a számokat, ugyanakkor, ha 29-hez kell adni egyet, sokszor a 25-öt mondják válaszul, ami racionális hiba. A matematikai megismerés során elkövetett hibák közül több, mint 140 leírása köthető VanLehn (1990) nevéhez. Bár munkái óriási segítséget jelentenek a racionális hibák keletkezésének feltérképezésében, csupán azok egy részét, és egy szegmensén (az összeadás és kivonás során előforduló hibákat) magyarázzák.

A racionális hibák létrejöhetnek indukció útján, de végrehajtás, kódolás, eljárás elsajátítása során is (lásd Sleeman, 1984). Így a problémamegoldók megalkotnak valamilyen szabályt, majd végrehajtják ez alapján a számítást. Jól megfigyelhető az 5. ábrán, hányféleképpen jöhet létre racionális hiba a matematika tanulása során. Az ismeretlen probléma megoldásakor alkotott szabályok erősségét elsősorban a korábbi problémamegoldások során történt alkalmazások tapasztalatai, sikerei befolyásolják (Anderson, 1993; Holland, Holyoak, Nisbett & Thagard, 1986). Az új szabály megfelelő kialakulását akadályozza valamilyen részleges tudás, melyet ugyan megfelelően alkalmaznak, ám ésszerű hibát eredményez a megfigyelési mechanizmus hiányosságai miatt (Ben-Zeev, 1998). Ben-Zeev kifejti, hogy az ismeretlen probléma megoldásakor megeshet, hogy a problémamegoldóban ugyan felmerül az előzetes tudása alapján valamilyen (belső) kritika, ám a régi tudás hatása erősebb. Szerinte az is előfordulhat, hogy a problémamegoldó észre sem veszi az ütközést, fel sem merül benne a kritika, vagy úgy átfogalmazza a feladatot, hogy ezáltal mintegy tagadja a probléma meglétét. Előfordulhat, hogy egy kritika verseng egy másik tudásterületről származó szabállyal. A szabályalkotás induktív következtetések során történő létrejötte akadályokba ütközhet. Az analógiás gondolkodás eredményezhet racionális hibát, a szintaktikus indukció gazdag hibaforrás (Ben-Zeev, 1996). Az indukció eredményezhet hamis korrelációkat, pl. egy probléma irreleváns tulajdonságai és egy ehhez kapcsolódó szabály révén a tanuló hibás következtetést vonhat le.



5. ábra A racionális hibák taxonómiája

(forrás: Ben-Zeev, 1998, 371.o. alapján)

A szintaktikai indukció során az ember túlságosan általánosítja vagy túl specializálja az algoritmusokat: részleges illeszkedés, téves specifikáció vagy rosszul értelmezett korreláció alapján is születhetnek racionális hibák (Ben-Zeev, 1998). VanLehn (1986) rájött, hogy a racionális hibáknak csak 33% -a az ilyen szintaktikával magyarázható indukció. Ugyanakkor a való életből vett analógiák alapján is levonhatunk helytelen következtetéseket, amelyek azután szintén racionális hibákat eredményeznek.

Anderson (1989) szerint a racionális hibák oka kétféle lehet: (1) származhatnak a deklaratív struktúrában rögzült hibás kategóriából (pl. a 2 szerepeltetése egész szám helyett), (2) a hibák forrása lehet maga a leképezési folyamat (pl. bármilyen szám helytelen leképezése egy egész számra). Úgy tűnik, hogy az emberek rendelkeznek matematikai intuícióval, amely hasonlóan a fizikai intuícióhoz, a tanulókban téves analógiával tévképzetek sorát hozzák létre (Chi & Slotta, 1993; diSessa, 1982, 1993; McCloskey, Caramazza & Green, 1980).

Néhány hasznos recept a hibák kiküszöbölésére

Ben-Zeev (1998) összefoglalt néhány jó tanácsot a tanárok számára a tanulói hibák kiküszöbölésére. A racionális hibák csökkentésére jó ötlet lehet a tanulók számára minta, algoritmus mutatása (Shaughnessy, 1985), ugyanakkor a túl speciális példák megkönnyíthetik a racionális hibák létrejöttét. A matematikai problémamegoldás során célszerű pozitív hangulatú osztálytermi környezetet kialakítani, ahol a tanulók párbeszédet folytatnak a tanárral (Schoenfeld, 1991). Ben-Zeev (1998) említi Brown és Walter (1993) what-if-not (WIN) technikáját. A WIN úgy közelíti meg a probléma megoldását, hogy átalakítja egy másikká, hasonlóvá, pl. térbeli problémát síkbelivé fogalmaz át, a síkban ezt megoldja a tanulókkal, majd visszatérnek a háromdimenziós térbe. Ben-Zeev (1998) fontosnak tartja annak tisztázását adott racionális hiba esetén, hogy az kódolásból származik-e vagy pedig a végrehajtási szakasz során keletkezett. Fuson (1992) rámutatott arra, hogy Taiwantól, Koreától kezdve a Szovjetunión és Japánon át az Egyesült Államokig számos országban különféle hibákat ejtettek a tanulók. Stigler, Fernandez és Yoshida (1996) említi, hogy a japán tanárok az oktatás során felhasználják a tanulók hibáit.

A kutatók véleménye megoszlik abban a kérdésben, mi igényel a problémamegoldótól nagyobb kreativitást. Sternberg és Ben-Zeev (1998) szerint a problémamegoldás során a legnagyobb kreativitást a megoldási terv megalkotása jelenti. Mayer és Hegarty (1998) ezt vitatva kijelenti, hogy a megértés igényli a megoldótól a legnagyobb kreativitást, a megoldás ez alapján már gyerekjáték. Mayer és Hegarty két megértési stratégiát vázoltak fel: (1) A közvetlen transzlációs stratégia szerint gondolkodó kulcsszavakat keres a szövegben és azt fordítja le az elvégzendő matematikai műveletekre, (2) A problémamodellező stratégiát alkalmazó megpróbálja értelmezni a feladatot. Mayer és Hegarty három hibaforrást különített el: (1) Szövegértelmezési nehézség, erre tipikus példa a hajó méretének megadása és az alapján annak kiderítése, hány éves a kapitány, (2) Túláltalánosítás (racionális hibák), (3) Különböző kultúrák ─ különböző hibák: a nyelvi nehézségek, pl. a 80 franciául négyszer húsz segíti a tájékozódást, de az angol tizenegy nem.

A modern pszichológiai kutatások fókuszában áll az egyes agyi területekhez kapcsolódó funkciók (disszociációk) elkülönülésének vizsgálata. A kutatások alapján háromféle hibacsoport különíthető el: (1) A műveleti jelek értelmezésének zavara: a leggyakoribb a szorzás és az összeadás felcserélése, vagy hibás műveleti jellel rögzítés, de helyesen végzett számítás, (2) Lexikai és szemantikai hiba: arab számjegyek felcserélése, ill. a helyiérték hibás használata, (3) Műveletek közötti disszociáció: az összeadás és szorzás műveleteket nem képes elvégezni a tanuló, csupán a ténybeli ismeretei helyesek (Márkus, 2007).

Összegezve: a racionális hibákra a matematikatanulás során nem akadályozó tényezőkként, hanem a tanulássegítőként kellene tekintenünk (Ben-Zeev, 1998; Smith, diSessa & Roschelle, 1993). A hibakeresés, a tanulói hibák eredetének vizsgálata, azok tanulókkal való megbeszélése a matematika mélyebb megértéséhez járulhat hozzá. Ehhez másféle tanári attitűdre van szükség. A diákok tanulási kedve „és tudásuk minősége is javulhatna, ha tudományos igényű, de a gyakorlathoz kissé közelibb, hétköznapokhoz könnyebben kapcsolható lenne a természettudományos tananyag" (Korom, 1998., 173. o.). Hanczár (2007) megjegyzi, ha a tanárok nem lezárt, minden kétség és kérdés nélküli tudományként deklarálnák a természettudományokat, az változtatna a tanulók világképén. Úgy véljük, a racionális hibák közös megbeszélése segítheti a tanulókat saját gondolkodásuk megismerésében, és megélhetnék a gondolkodás, a matematika megalkotásának örömét. A hibák tanulmányozása a tanárok számára is tanulsággal szolgálhat, segíti őket abban, hogy megismerjék tanítványaik gondolkodásfejlődését, ami egyúttal a tanítási módszertan, osztálytermi kultúra megújulását is katalizálhatja. Bár vizsgálatunk matematikai tartalmakra vonatkozott, úgy véljük, a gondolkodási folyamatok vizsgálatában leszűrhető következtetések nemcsak a matematikatanárok számára lesznek hasznosak.

2.2.2. A fejben szorzás során ejtett hibák, a kezdők és a szakértők stratégiái

A kezdő fejszámolók stratégihasználatára vonatkozó megállapításokat olvashatunk Dowker, Lemaire és Siegler tanulmányaiban. A tanulás korai fázisaiban az emlékezeti előhívás stratégia használatával kapott számítási eredmények inkább becslésnek, találgatásnak tűnnek, ugyanis a tanulók fogalmi, műveletek és ténybeli ismereteinek hálója a kis számokkal végzett számláláson alapul, s éppen ezért pontatlan, rugalmatlan (Dowker, 2005). Lemaire és Siegler (1995) és Siegler (1988) számítógépes szimulációk segítségével megfigyelték, hogy néhány kivételtől eltekintve a gyerekek a tanulás korai fázisában megfigyelhető fejszámolási hibáit az összeadásra vonatkozó ismeretek hibás visszakeresése okozza. A kivonás során a kutatásokban a különféle fejlettségű tanulók különböző (helyes eredményre vezető és helytelen eredményre vezető) stratégiákat használtak (Siegler, 1987).

A fejszámolásra vonatkozó vizsgálatok során a kutatók arra jutottak, hogy jól megkülönböztethető egymástól a kezdők és a szakértők stratégiahasználata. Az adatok alapján kimutatható, hogy fejszámolás során a kezdők (vagyis a számlálás alapú stratégiát használók) általában kevés fajta válaszból álló, de jól körülhatárolható válaszkészletet alkalmaznak (Baroody, 1999a, 1999b). Ez a válaszkészlet az írásbeli számításokhoz hasonlóan tartalmaz hibákat (Brown & Burton, 1978). VanLehn (1983) úgy véli, könnyű azonosítani a hibázási mintázatokat, mert a hibákat a tanulók következetesen ejtik a viszonylag rugalmatlan becslési stratégiáik miatt. VanLehn által megfigyelt hibás stratégiák: Kétjegyű számok szorzata a két számjegyből álló kétjegyű szám, így $3 \cdot 5 = 35$; összeadáshoz hasonló stratégia, az egyik tényezőt szorozza egy ott nem szereplő számmal, így $5 \cdot 3 = 12$; $4 \cdot 6 = 20$; illetve ezen stratégiák valamilyen kombinációja, így $8 \cdot 3 = 25$. Baroody (1993, 1999b) megfigyelései szerint előfordul, hogy a szorzat a helyes eredményhez közeli valamilyen szomszédos szám, így $3 \cdot 5 = 13$, vagy az egyik szorzandó szám valamelyik másik számmal vett szorzata, így $4 \cdot 7 = 14$, vagy a végeredményben az egyik számjegy egyenlő az egyik szorzótényezővel, így $7 \cdot 3 = 13$; $9 \cdot 4 = 14$, vagy az egyik tényezőnek a tízszerese $3 \cdot 5 = 30$; $4 \cdot 7 = 70$, vagy a két szám szorzata a helyes végeredményhez álló legközelebbi kerek tízes, így $7 \cdot 3 = 20$.

Kezdő fejszámolók esetén megfigyelték, hogy a meglévő tudás időnként blokkoló hatást fejt ki a tanulás során. AZ ASCM modellhez (Siegler, 1988) végzett kísérletekben úgy találták, hogy a már meglévő megfelelő asszociációkkal nem tudnak összekapcsolódni az új asszociációk. Mivel a szorzás az összeadáshoz kapcsolható, az addíció itt kétféle típushibát eredményezhet: (1) művelethez fűződő hibák (related-operation errors), pl. $8 \cdot 3 = 11$, a két szám összege az eredmény, (2) összeadásszerű, paritással kapcsolatos hibák (addition-like odd-even errors), pl. $5 \cdot 3 = 12$, $4 \cdot 6 = 20$, $8 \cdot 3 = 25$. A DOAM model (distributions of association model) alapfeltételezése, hogy a tanuló a saját maga által adott választ (legyen az helyes vagy helytelen) társítja annak indoklásával (Siegler, 1988). Minden válasz nyomot hagy a hosszú távú memóriában (Siegler & Jenkins, 1989). Ha a szám beépül a hosszú távú memóriába, akkor az asszociáció kiépül a válasz és a feladat megoldási útja között. A hibák általi tanulás (error-learning) hipotézis logikus következménye: minden számolási hiba a gyakorlás idejére tárolódik a memóriában és befolyással bír a későbbi számolási hibák gyakoriságára (Siegler & Jenkins, 1989). Siegler (1988) megfigyelte, hogy a gyerekek kétféle típusú számolási hibát ejtenek, mikor a biztonsági mentés (backup) stratégiát alkalmazzák (1) számlálási hibák átugrás (skip-cunting errors), pl. $8 \cdot 3$ az 3, 6, 9, 12, 15, tehát 21, (2) kisebb hozzáadási hiba (monor addition errors), pl. $3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 = 14 + 7 = 20$. E két számolási hiba magas előfordulási aránya összefügg a tényezővel kapcsolatos (factor-related) és a közeli számok hibával (close-miss errors), és mind a gyerekeknél, mind a felnőttek körében megfigyelhető (Siegler, 1988).

A tanulás során a gyerekek egyre komplexebb tudáshálót építenek ki a műveletekről, egyre pontosabban és rugalmasabban alkalmaznak számolási stratégiákat. A kutatások szerint valószínűleg számos feltérképezetlen stratégiát is alkalmaznak (LeFevre, Smith-Chant, Hischock, Daley & Morris, 2013). A szakértővé válás kétféle módjáról írnak Baroody és munkatársai (Baroody, 1985; Baroody & Ginsburg, 1986, 1991): (1) A séma-alapú nézőpont szerint a verbális megértés által a két adat és a köztük levő reláció analógia segítségével összekapcsolódik a memóriahálóban; (2) A szorzás kommutativitásának (a tényezők felcserélhetősége) felfedezésével a tudásháló azonnal átrendeződik; ez utóbbit mások is megfigyelték (Butterworth, Marschesini & Girelli, 2013). Amint a reláció alapú szabályok (relation-based rules) begyakorlódnak, használatuk automatikussá válik, a memorizálási folyamatba a tényezőkre és a relációkra vonatkozó ismeretek is bekapcsolódnak. Néhány felnőtt számára azonban a relációkra vonatkozó ismeretek nem válnak automatikussá, viszonylag gyorsan számolnak a kutatók megfigyelései szerint, valószínűleg a memóriájuknak köszönhetően (Baroody, 2013).

Molnár (2006, 17.o.) szerint a különböző tudástranszfer „definíciókban közös, hogy az egyik feladattal, vagy szituációval kapcsolatban megtanultak befolyásolják a későbbi feladatok megoldását, a későbbi szituációkban való tanulást. Ez utóbbi meghatározás alapján minden tanulásban jelen van a transzfer, mert ahogyan „nem léphetünk bele kétszer ugyanabba a folyóba”, nem is találkozhatunk kétszer ugyanazzal a helyzettel, csak hasonlóval. Ha ebben a hasonló szituációban azonosítjuk és alkalmazzuk a korábban tanultakat, akkor voltaképpen „transzferáljuk” ismereteinket.”

A relációkra vonatkozó ismeretek elsajátítása és tudástranszfere alapvetően kétféleképpen történik (Baroody, 2013). (1) A gyerekek megfigyelik a 0-val történő szorzás szabályát (Ha nullával szorzunk, a szorzat értéke 0), és az 1-gyel való szorzás szabályát (Ha egy adott számot eggyel szorzunk, a végeredmény maga az adott szám). Ezek a szabályok általános szabályként rögzülnek a hosszú távú memóriában, használatuk egyre inkább automatikussá válik egyjegyű számmal, illetve többjegyű számmal való szorzás esetén is (Baroody, 2013). Ezen szabályok használatát felnőttek körében is megfigyelték (pl. Lemaire & Siegler, 1995; Aschraft, 1992). Baroody (1994) ismertet egy lehetséges sémát, amely alapján szerinte a szakértő szinten levő ember számolhat fejben szorzás során.

1. Ha az egyik szorzótényező 10, akkor a tényezők sorrendje nem fontos, figyeld a helyiértéküket (kommutativitás).
2. Ha nullával szorzunk, akkor a szorzat értéke 0 ($0 \cdot n$ vagy $n \cdot 0 = 0$ szabály).
3. Ha egy adott számot eggyel szorzunk, akkor a szorzat értéke maga az adott szám ($1 \cdot n$ vagy $n \cdot 1 = n$ szabály).
4. Ha egy számot kettővel szorzunk, akkor a szorzatot úgy kapjuk, hogy a számhoz önmagát még egyszer hozzáadjuk ($2 \cdot n$ vagy $n \cdot 2 = n + n$ szabály).
5. Ha egy nagyobb számot önmagával szorzunk, akkor a szorzótábla mintájára gondolunk, a számítást az asszociatív háló segítségével oldjuk meg.
6. Ha egy nagyobb számot egy kisebb számmal szorzunk, akkor is az asszociatív háló segít.
7. Ha egy nagyobb számot egy kisebb számmal szorzunk, akkor alakítsuk át az egyik tényezőt, majd az asszociatív háló segít.

Baroody (2013) szerint a relációkra vonatkozó ismeretek elsajátításának és tudástranszferének másik módja (2): A gyerekek az aritmetikai relációkat összevetik a már meglévő ismereteikkel. A memorizálandó szorzások számát jelentősen tudják csökkenteni (Trivett, 1980). A szorzás kommutativitását felismerve a $3 \cdot 8$ kiszámítása helyett a $8 \cdot 3$-at számítják ki (Baroody, 1985, 1994). A szorzótábla alapján felismerhető összefüggések újabb szabályok felfedezését segítik.

A stratégia-választó modell jelentősen különbözik a séma-alapú nézettől, Baroody (2013) szerint:

1) A gyermek informális stratégiái használata során aritmetikai mintázatokat, relációkat vesz észre, és a szabályokból stratégiákat épít magának.

2) Kezdetben a kommutativitás épül ki, relatíve lassan, majd gyakorlással automatizálódik (Jerman, 1970). A felnőttek már jóval több stratégiát használnak (LeFevre, 2013). A stratégiaválasztás modellben a szakértői tudás egy stratégia használatát, az emlékezeti előhívás stratégiát jelenti.

3) Bár a gyakorlás fontos szerepet játszik az adatok hosszú távú memóriában történő raktározásában, egyrészt új stratégiák felfedezéshez vezethet, másrészt segítheti a sémák használatának automatizálását (Baroody, 2013).

4) A szorzótábla (alapvető számkombinációk és mentális reprezentációik) memorizálása bonyolult agyi folyamat (Campbell, 1995). Egy autonóm egységet képezve az agyban az adatok hálójában, a tudáshálóbeli adatok és a köztük levő relációk segítségével bővülhet a tudásháló (Baroody, 2013).

5) A számok közötti kapcsolatok mentális reprezentációinak kiépülése dinamikus tanulási folyamat, amely hasonló lehet matematikai és nem matematikai tudás esetén. A szabályok összegzése, feldolgozása, egymáshoz kapcsolása lehetővé teszi, hogy a komplex tudáshálóban bekövetkező kvantitatív változások kvalitatív változásokat eredményezzenek egy vagy több sémában. Butterworth és munkatársai szerint (2013) ezek a változások ezek a változások okozhatják egy vagy több séma változását, vagy a közöttük levő kapcsolat változását; lehetnek kis, helyi hatásúak, de akár széleskörű változásokat is eredményezhetnek (ahogy pl. a szorzás kommutativitása a számok kapcsolatára vonatkozó tudásban is változást eredményez).

A mindennapok során ritkán találkozunk olyan teljesítményű fejszámolóművészekkel, mint amilyen Pataki Ferenc volt. Gyakorlás és „számolási trükkök" segítségével a mai gyerekek is kiváló teljesítményre képesek. 2019-ben a szegedi Szin Jázmin ötödik helyezett lett a Mentális matematika junior Európa-bajnokságon, ahol két óra alatt 3000 darab számolási feladatot végeznek el, pl. 12-jegyű számból kell hatodik gyököt vonniuk a versenyzőknek (Szalma, 2019). Szenes Adolf Gyakorlati gyorsszámolója (1904) még ismertetett olyan számolási stratégiákat, amelyek pl. 11-gyel, 111-gyel 25-tel szorzást segíthetik. Fejben számolást kér ugyan több jelenleg használatos matematika tankönyv (pl. természetes számok összeadása vagy szorzása 10-zel, 100-zal, 1000-rel, 2-vel stb.), de a számolási stratégiák bemutatására ritkán vagy nem vállalkozik. A hazai matematikakönyvekben napjainkban elvétve szerepelnek olyan feladatok, amelyek a felső tagozatos vagy középiskolás tanulók fejben számolási stratégiáit fejlesztené, ez alól néhány kivétel az algebrai azonosságok tanításához kapcsolódva: Halmos és Pósa (1990); Pósa, (1990); Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán, Vincze (2015, 2019) munkái. Napjainkban egyre több olyan ismeretterjesztő könyv jelenik meg, itthon és külföldön is, amely segítheti a tanárokat abban, hogy a tanítványaik fejszámoló készségét fejleszthessék (pl. Benjamin & Shermer, 2006; Fábosné Zách, 1999; Lange, 2014; Mittring, 2013), ugyanakkor e kiadványok hiátusául róható fel, hogy a bemutatott számolási eljárásokat leírják, de nem magyarázzák. Úgy gondoljuk, hasznos lehet olyan tanítási segédanyag létrehozása, amelynek segítségével a tanulók fejben számolás során használható számolási stratégiákat ismerhetnének meg, gyakorolhatnának. Ha nem is lesz minden gyermekből fejszámolóművész, a számolási hibáik száma vélhetően csökkenne. Gondolkodásuk, metakognitív stratégiáik fejlődnének, memóriájuk szintén edződne, s ezeket a képességeket, készségeket a transzferhatás miatt a természettudományos és társadalomtudományi tantárgyakban, de a mindennapokban is hasznosíthatnák.

2.3. A szóbeli szorzási stratégiák vizsgálata

A fejben végzett szorzás során alkalmazott stratégiákra vonatkozó kutatások nagy része alsó tagozatos tanulókkal végzett vizsgálatokról számol be; kutatásunk szempontjából ezek marginális vizsgálatok, mert főleg egyjegyű számok szorzására vonatkoznak (pl. Mulligan & Mitchelmore, 1997) 70 második és harmadik osztályos lánnyal készített interjúról számolt be szöveges feladatok megoldása kapcsán. A vizsgálat tartalmi keretét egy háromdimenziós, intuitív modell alkotta, melyben a a direkt számlálás, az ismételt összeadás és a multiplikatív operációk szerepeltek. Kuoba (1989) első, második és harmadik osztályosokat vizsgált. Anghileri (1989) 4-12 éves korú gyermekek körében végzett vizsgálata során 6 feladatot oldottak meg, a szerző szorzási sémákat ír le a számlálási stratégiákkal kapcsolatos cikkében. Lemaire és Siegler (1995) 2. osztályos francia kisdiákokkal folytatott longitudinális vizsgálatról számolt be. Vizsgálódásának fókuszában a tanulók stratégiaváltása állt. Siegler (1988) harmadik osztályos tanulókat kért m x n típusú feladatok megoldására, ezzel az asszociáció disztribúciója modellt akarta tesztelni. Cooney, Swanson és Ladd (1988) tíz harmadikos és negyedikes tanulót kértek arra, hogy számoljon ki 100 darab m x n típusú szorzást. A mérés során interjút is készítettek a tanulókkal, miközben a tanulók papírt, ceruzát nem használhattak a fejben végzett szorzások során. Felnőttek körében folyt több kutatás, pl. Le Fevre, Bisanz, Daley, Buffone, Greenham & Sadesky (1996) 18-45 éves főiskolásokat kért arra, hogy oldjanak meg fejben m x n típusú feladatokat, egyenként 5-10 másodperc alatt.

A fejben végzett szorzást kérő feladatokat többnyire ún. emlékezeti előhívás segítségével oldjuk meg (Lemaire, & Siegler, 1995). Úgy vélik, ilyenkor a megtanult szorzótáblára emlékszünk vissza, ez egy adaptív stratégia. De a gyerekek nem így szoroznak, megtanulják a szorzótáblát mint egy verset, és a számra vonatkozó összes szorzást végigmondják. Azonban léteznek az emlékezeti előhívás stratégiáját megelőző, tipikusan kisgyermekekre jellemző, elsősorban egyjegyű számok esetében működő stratégiák is (pl. az összeadás mint stratégia, $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$) (Lemaire & Siegler, 1995).

A szorzások között sokaknak legnehezebb pl. a hetes és a kilences szorzótábla. A $7 \cdot 8$ vagy $8 \cdot 9$ kiszámítása akár több mint két másodpercbe is telhet, és a hibázás valószínűsége magas, 25%. (Lemaire & Siegler, 1995). A szorzás kommutatív művelet, azaz a szorzótényezők a szorzás során felcserélhetőek, így elegendő lenne 45 összeadást és 36 szorzást előhívnunk. Lemaire és Siegler (1995) szerint ezek fejben tartása azért nehéz, mert összefüggenek. Úgy vélik, a szorzótábla tanulásakor esetlegesen rögzült rosszul felismert szabályosságok, és ugyanazon elemek ismétlődése miatt nehézséget jelenthet a szorzási feladat. Egy újabb hibaforrást jelent, hogy a szorzás során aktiválódnak az egymást részben átfedő neuronhálózatok is, vagyis az, hogy a különböző műveletek milyen eredményre vezetnek. Ennek magyarázata az emberi emlékezet asszociatív voltában rejlik: az emberi agy a különböző adatok között többszörös kapcsolatot épít ki, így információtöredékek alapján is történik az előhívás, véli Lemaire és Siegler (1995). Így fals eredményeket kapunk, de azok ugyanakkor benne vannak a szorzótáblában. Az agy eme általában hasznos működési elve a szorzótáblánál olyan tipikus hibákhoz vezethet, mint pl.: összekeverjük a 7 · 6 eredményét a 7 + 6-éval, vagy helyette az asszociáció miatt szintén aktiválódott 7 · 5 számítást végezzük el. Pl.: 7 · 8-ra a gyerekek jellemző hibás válasza nem az 56-tól 1 egységre levő 55, hanem a 7-es vagy 8-as szorzótáblában szereplő számok. Pl. a 48 vagy a 63 rossz válaszként előfordulhat, hiszen a lehetséges hibák általában ugyanabból a sorból vagy oszlopból származnak, amelyben a kérdéses szorzás is van (Lemaire & Siegler, 1995).

A szorzás során alkalmazott kisiskolásokra jellemző szorzási stratégiákat látjuk a 3. táblázatban. Amint a táblázatból látható, a fejben végzett szorzások vizsgálata során Cooper, Heirdsfield, Mulligan és Irons (1999) ötféle stratégiát figyeltek meg a gyermekeknél. Az elnevezéseknek magyar megfelelője, mivel vizsgálat még nem folyt hazánkban, nincsen. Az általam javasolt magyar elnevezések: Counting (CO) vagy *számlálás stratégia*, Basic fact (BF) vagyis *tényeken alapuló stratégia*, RL separated (RLS), azaz *helyiérték szerinti jobbról balra stratégia*, LR separated (LRS) *helyiérték szerinti balról jobbra stratégia*, Wholistic (WH) *holisztikus stratégia*. A táblázatban mindegyik stratégia alkalmazására találunk egy példát. *Heirdsfield és munkatársai* hasonló stratégiaelnevezéseket alkalmaztak az osztás vizsgálata során, ahogy az 1.sz mellékletben található táblázatban láthatjuk.

2. táblázat. A fejben végzett szorzás során alkalmazott stratégiák

(forrás: Heirdsfield, Cooper, Mulligan & *Irons,* 1999. 91.o.*)*

Kategóriák	A stratégia leírása	Példák
Counting (CO) *Számlálás*	A számlálás formái, előre, hátra, összeadás, kivonás, felezés, duplázás	7 · 8: 7, 14, 21, … 7 · 8: 7 duplája, 14 duplája, …+ 8
Basic fact (BF) *Tényeken alapuló*	Szorzótábla ismeretén alapuló	7 · 8: 5 · 8 = 40, 2 · 8 = 16, és 7 · 8 = 56
RL separated (RLS) *Jobbról balra*	Helyiérték szerint elválasztva, jobbról balra	5 · 17: 5 · 7 = 35 = 30 + 5, 5 · 10 = 50, 30 + 50 = 80, 85
LR separated (LRS) *Balról jobbra*	Helyiérték szerint elválasztva, balról jobbra	5 · 17: 5 · 10 = 50, 5 · 7 = 35, 50 + 35 = 85
Wholistic (WH) *Holisztikus*	Kerek egészként értelmezi a számot	7 · 19: 7 · 20 - 7 = 140 - 7 = 133

Hope és Sherill (1987) 11. és 12. évfolyamos diákok (N = 286) körében folytatott kutatásokat. A szorzási stratégiák használatát vizsgálva négy megoldási módszert és 12 stratégiát különítettek el. Ez a négy megoldási módszer (1) „Elképzelem fejben leírva” (pencil-and- paper mental analogue), (2) Elosztás (distribution), (3) Tényezőkre bontás (factoring): felezés, hatványozás, pl.: $5 \cdot 48 = 5 \cdot 40 + 5 \cdot 8$, (4) Előhívás (retrieval of a numerical equivalent). Az első három módszeren belül ír le négy-négy stratégiát, ezeket a 3. táblázatban részletesen bemutatjuk. A szakirodalom a fejben szorzási stratégiák leírása során még nem egységes. Ez adódhat abból, hogy a különböző életkorú tanulókat vizsgáló kutatók más jelenségeket figyelnek meg, pl. 11. évfolyamos diákok már ritkán használják a számlálás stratégiát, főleg többjegyű számok szorzásakor.

A múlt század vége óta számos tanulmány jelent meg a fejben végzett szorzás során alkalmazott stratégiákra vonatkozóan. A matematika feladatok többféleképpen oldhatók meg, ahogy a fejben végzett szorzások kiszámítására is többféle stratégia áll rendelkezésünkre. A következő fejezetekben megvizsgáljuk, hogyan szoroznak fejben a 10-18 éves magyar tanulók.

2.3. A stratégiahasználat mérésére alkalmazott mérőeszközök főbb jellemzői

A tesztek viselkedését három jóságmutatóval szokás jellemezni. Ezek a kulcsfontosságú tesztjellemzők: az objektivitás (tárgyszerűség), reliabilitás (megbízhatóság) és validitás (érvényesség) (Nagy, 1975; Csapó, 2004). Papír-ceruza alapú mérések esetén az adatfelvételi objektivitás biztosítása érdekében a kutatók adatfelvételi útmutatót készítenek, és küldenek el a felmérésben részt vevő iskolába. Ebben leírják a mérőbiztosok számára azokat az információkat, amelyek szükségesek a méréshez: az adatfelvétel módját, körülményeit, a tesztíráskor használható segédeszközöket. Az értékelési objektivitást pontos megoldó-és javítókulcs összeállítása biztosítja. Az értelmezési objektivitás céljából útmutatót készíthetünk, ha az a célunk, hogy a teszt eredményeinek érdemjegyekre váltása a célunk.

A teszten elért eredmények általánosíthatóságát, a mérés pontosságát a reliabilitás hivatott biztosítani. A teszt reliabilitását leggyakrabban a Cronbach-α segítségével becsülik az oktatáskutatók. A Cronbach-alfa értéke általában 0 és 1 közötti szám, és a 0,8 fölötti értéket tekintjük elég magasnak s elfogadottnak mérőeszközök esetén (Csapó, 2004). A teszt megbízhatóságára több tényezőtől függ, így (1) az itemek számától, minőségétől, és (2) a csoport összetételétől. A nagyobb itemszám növeli a teszt reliabilitását, egy jól mérő teszt általában 25-30 itemből áll. A tesztek megbízhatóságát növeli az itemek függetlensége. A heterogén csoportokban figyelhető meg magasabb reliabilitás. Homogén csoportokban a teszt kevésbé képes pontosan kimutatni a tanulók közötti teljesítménybeli különbségeket. Ilyenkor a teszt túlságosan könnyűnek vagy túl nehéznek mutatkozik a tanulók számára.

A tesztek harmadik fontos jóságmutatója a validitás, amelyet a teszt készítésekor biztosíthatunk a mérési célok, követelmények és mérendő tartalom meghatározásával. Ezek alapján és a célokkal összhangban történik a tesztfeladatok megalkotása, az értékelési eljárások kidolgozása. Validitásnak nevezzük a teszt azon tulajdonságát, amely arra világít rá, valóban azt méri-e, amit mérni akartunk vele (Nagy, 1975). A validitás biztosítása érdekében törekszünk arra, hogy a feladatok utasítása, szövege ne legyen túlhosszú és bonyolult, és igyekszünk a gyerekek életkori sajátosságaihoz, érdeklődési köréhez igazítani. A tartalmi validitás biztosítása érdekében a mérőeszköz készítésekor áttanulmányozzuk az aktuális kerettantervet, a használatban lévő matematika tankönyvcsaládokat, a mérésmódszertani könyveket, írásokat.

Így a tesztfeladatok összhangban vannak a tudomány eredményeivel (szakmai validitás). Az elkészült feladatokból azután azokat választjuk ki, amelyek az adott konstruktum mérésére legalkalmasabbaknak találtunk (mintavételi validitás). Úgy véljük, a kiválasztott feladatok segítségével képesek leszünk a mérendő konstruktum (jelen esetben szorzási stratégiák vizsgálata, illetve matematikai tudás, azon belül az arányossági gondolkodás) mérésére (funkcionális validitás). A megoldó-és javítókulcs elkészítésekor törekszünk arra, hogy a feladatokat nehézségi szintjüknek megfelelően pontozzuk, a tovább már nem bontható feladatrészeket, itemeket egy ponttal értékeljük (skálázási validitás).

A tesztek jóságmutatói mellett fontosak a tesztet alkotó itemcsoportok, szubtesztek és az itemek jellemzői. Az item nehézsége azt mutatja meg, hogy egy tetszőleges vizsgált személy milyen valószínűséggel oldja meg az adott itemet. Az item nehézségi indexe a jó megoldások számának és a feladatot megoldó tanulók számának aránya (Csapó, 1987). Minél kisebb ez a 0 és 1 közé eső szám, annál nehezebb az item. Az item differenciáló ereje azt mutatja meg, hogy az item mennyire élesen különíti el egymástól a különböző tudásszintű tanulókat (Csapó, 2004). Minél közelebb van az itemnehézség-mutató értéke az egyhez, annál többen oldották meg jól, vagyis annál könnyeb az item. Bár az 50 %-os megoldottságú (vagyis 0,5-es nehézségű) itemek mérnek a legjobban, a tartalmi validitás megőrzése érdekében megszokott, hogy a tesztbe nem csak kb. 50%-os nehézségű itemeket teszünk, mert a különféle nehézségű itemek pontosabban tudnak differenciálni a gyengébb és jobb képességű tanulók között.

A Szegedi Műhely általános gyakorlatától eltérően a stratégiahasználatra vonatkozó külföldi kutatásokban ritkán találunk a tesztek jóságmutatóira vonatkozó megállapításokat, leginkább a tesztek megbízhatóságára vonatkozó adatokat közölnek. A külföldi mérésekben használt mérőeszközök itemszáma 8 és többszáz között mozog. Liu, R.-D. & Ding, Y. & Gao, B.-C. & Zhang, D. (2014) 18 feladatot tartalmazó tesztjének reliabilitása (Cronbach-α) 0,84. Liu és munkatársai néhány item reliabilitását is publikálták, az itemek reliabilitása 0,62-0,84 közötti értékek (pl. $14 \cdot 35$ item reliabilitása 0,78, a $13 \cdot 4 \cdot 8$ itemé 0,62, a $25 \cdot 12$ itemé pedig 0,84).

A következő fejezetben az általunk végzett kutatást mutatjuk be.

3. A KUTATÁS CÉLJA, KÉRDÉSEI ÉS HIPOTÉZISEI

3.1. A kutatás célja és relevanciája

A szakirodalmat áttanulmányozva felmerül bennünk a kérdés, hogy vajon vannak-e egyéni különbségek a magyar tanulók stratégiahasználatában fejben szorzás során. Ha vannak, akkor milyenek; hogyan fejlődik ez a számolási készség; mikorra érhető el az optimális fejlettségi szint; és melyik a legérzékenyebb időszak, amikor egy intenzív fejlesztéssel segíteni tudunk a tanulók közötti különbségek csökkentésében. Kutatásunk célja, hogy megvizsgáljuk, mennyire eredményesek a magyar diákok egy- és kétjegyű számok fejben szorzásában, az egyes feladatok kiszámításakor milyen stratégiát alkalmaznak, és a fejben számolás eredményessége mennyiben az alkalmazott stratégia függvénye.

Az értekezésben bemutatott vizsgálatok során egy saját papír-ceruza alapú mérőeszköz létrehozását céloztuk meg, melynek segítségével feltérképezhető a 10-12 éves tanulók számolási készségének fejlettsége fejben végezhető szorzást igénylő feladatok megoldása során. Értekezésünkben ismertetjük a tesztfejlesztés menetét. Elemzéseink során részletesen bemutatjuk a teszt működését, jóságmutatóit, megvizsgáljuk a teszteredményeket. Kutatásunk eredményeképpen a matematikát tanítók által széles körben alkalmazható tesztet szeretnénk létrehozni, melynek segítségével kiszűrhetőek a tanulók számolási hibái fejben szorzás során, és a hibázási mintázatokra alapozva tervezhető a tanulók számolási készségének további fejlesztése.

A kutatás során hat vizsgálatot folytattunk: három pilotmérést, két keresztmetszeti mérést és az 5. vizsgálat során egy egyhónapos fejlesztést végeztünk. Az első vizsgálat során adatokat gyűjtöttünk egy kecskeméti általános iskola negyedik évfolyamos tanulóinak stratégiahasználatáról egyszerű, fejben elvégezhető szorzásra vonatkozó szöveges megoldása kapcsán (Vígh-Kiss, Csíkos és Steklács, 2013). Kutatásunk célja volt, hogy megvizsgáljuk, mennyire eredményesek a magyar diákok egy- és kétjegyű számok fejben szorzásában, az egyes feladatok kiszámításakor milyen stratégiát alkalmaznak, és a fejben számolás eredményessége mennyiben az alkalmazott stratégia függvénye. Vizsgálatainkat 10-18 éves tanulók körében végeztük, budapesti és vidéki 4.-12. évfolyamos tanulók képezték az egyes vizsgálatokban a mintánkat. A legtöbb információt 4., 5. és 6. évfolyamos tanulókról gyűjtöttük, a többi évfolyamon a kis elemszám miatt korlátozott érvényességű megállapításokat tehetünk.

A kutatás során elvégzett vizsgálatok legfőbb jellemzői:
vizsgálatunk során 2013 áprilisában 4. osztályos tanulókat vizsgáltunk (N=13). A 2. vizsgálat során keresztmetszeti vizsgálatot folytattunk, melyre 2014 tavaszán került sor. A vizsgálatba két iskola 5 osztálya (egy általános iskola és egy szakközépiskola) kapcsolódott be (N=120). A 3. vizsgálatban 2015 szeptemberében egy általános iskola 61 hetedikes tanulója vett részt. A 4. vizsgálatra 2015 áprilisában került sor, ebbe 6. évfolyamos általános iskolai és nyolvévfolyamos gimnazista tanulók kapcsolódtak be: 3 iskola 6 osztálya (N=154). Az 5. vizsgálatra 2015 tavaszán került sor, 5 iskola 10 osztálya vett részt benne (N=270). A központi, kerezstmetszeti vizsgálatot 2019 tavaszán bonyolítottuk le. 11 iskola 4., 5. és 6. évfolyamos tanulói kapcsolódtak be (N=850).

A mérések során alkalmazott mérőeszközök fontosabb jellemzőit a 3. táblázatban foglaltuk össze.

3. táblázat. A vizsgálatok során alkalmazott mérőeszközök fajtája, itemszáma

Alkalmazott mérőeszközök	1.	2.	4.	5.	6.	Központi
Szorzási Str. Teszt itemszám	8	10	60	40	35 és 40	40
Matematika Tudásszintmérő Teszt		x		x	x	x
Matematikai Meggyőződések Kérdőív	x	x	x	x		
Háttérkérdőív	x	x	x	x	x	x

Az első próbamérést 2013. április végén egy vidéki városi iskolában, 4. osztályos tanulókkal végeztük el, egy n = 13 fős mintán (7 fiú, 6 lány). A szemmozgásos vizsgálat céljaira nyolc feladatból álló, egy lépésben megoldható szöveges feladatsort alkalmaztunk. Erről videofelvétel is készült, majd hangosan gondolkodtatás által számoltak be a gyerekek az alkalmazott szorzási stratégiáról. A vizsgálat során egy háttérkérdőívet, továbbá Kelecsényi és Csíkos (2013) által adaptált Matematikai Meggyőződések Kérdőívet vettük fel. A Matematikai Meggyőződések Kérdőív főbb jellemzői: 34 darab, ötfokozatú Likert-skálás kérdőívtételt tartalmaz. A kérdőívtételek négy főbb csoportba sorolhatók: Matematikafeladat megoldása (6 item), A matematikatanár, matematikaóra (13 item), Matematikai szöveges feladatok megoldása (4 item), Matematika, más tantárgyak, szülői elvárások (11 item). A mérőeszközt 2012-ben egy 476 fős Csongrád megyei hetedikes tanulókból álló mintán bemérték, s azt tanulással kapcsolatos meggyőződések vizsgálatára alkalmasnak találták, mivel reliabilitása 0,75 volt, a Kaiser-Meyer-Olkin mutató értéke pedig 0,83. A kérdőívben 9 faktor sajátértéke 1 fölötti volt.

A második vizsgálat során egy budapesti általános iskola 8.-os és egy humán szakközépiskola 9-12. évfolyamos tanulóinak szorzási stratégiahasználatát vizsgáltuk, ezt a keresztmetszeti vizsgálatot egy pilotmérés követte, hetedik osztályos tanulók kisebb mintája segítségével fejlesztettük ki a későbbi vizsgálatok során alkalmazott teszteket. Ezt követően két vizsgálatot végeztünk hatodik évfolyamosok körében, az ötödik vizsgálat folyamán egyhónapos fejlesztő kísérletet végeztünk. Végül 850 fős negyedik, ötödik és hatodik évfolyamos tanulókból álló mintán vizsgáltuk a szorzási stratégiák fejlettségét.

3.2. Kutatási kérdések

Az eddig áttanulmányozott szakirodalom és több, mint 25 éves tanítási tapasztalat alapján a következő kérdések fogalmazódtak meg bennünk:

1. Hogyan, milyen eszközökkel célszerű – pedagógiai szempontból releváns módon – mérni a stratégiahasználat rugalmasságát fejben végzett szorzás kapcsán? Hogyan mérhető az elméleti áttekintésben említett stratégiahasználati rugalmasság, vagyis az, hogy az egyén akkor és azt a stratégiát tudja-e alkalmazni, amikor és amelyikre szükség van?

2. Milyen stratégiát használnak a 10-18 éves tanulók az egyes szorzási feladatok megoldásakor a fejben számolás során?

3. Milyen háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a fejben végzett szorzáskor alkalmazott stratégia?

4. A fejben végzett szorzás során melyek a leggyakrabban alkalmazott stratégiák az egyes évfolyamokon?

5. Az egyes évfolyamokon hogyan változik a tanulók által alkalmazott szorzási stratégiák száma?

6. Mi jellemzi a Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb eredményt elérő gyerekek stratégiahasználatát? Adaptív-e a stratégiahasználatuk minden esetben? Hányféle stratégiát használnak?

7. Mi jellemzi a tanulási nehézségekkel küzdő ill. a sajátos nevelési igényű gyerekek stratégiahasználatát? Hogyan segíthetnénk rugalmasságuk fejlődését a stratégiahasználat terén? Létezik-e az egyes gyermekcsoportok – matematikában tehetséges gyermek, többségi, tanulási nehézségekkel küzdő, SNI-s tanulók – számára egységesen jó stratégia?

8. A gyermekek matematikai tudásszintje mennyire függ össze az adaptív stratégiahasználattal?

9. Milyen matematikai feladatok segíthetik az adaptív stratégiahasználat fejlesztését?

Összegezve: Kutatásunk tehát arra irányul, hogy milyen kölcsönhatás figyelhető meg a matematika mint iskolai tantárgy és a fejben végzett szorzás során alkalmazott stratégiák között; ezen belül milyen fejben megoldható arányossági, százalékszámítási feladatok, milyen tanítási stílusok és módszerek segítik az adaptív stratégiahasználat fejlődését, és az elsajátított stratégiák rugalmas használatát.

3.3. Hipotézisek

Az áttanulmányozott szakirodalom és tanári tapasztalataink alapján a következő hipotézisek fogalmazhatók meg:

H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.
H1b: A Matematika Tudásszintmérő Stratégiák Teszt megbízhatóan méri a diákok matematika tudásszintjét.
H2a: A fejszámolással megoldható szorzási feladatokban 10-18 évesek legalább ötféle különböző stratégiát alkalmaznak (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999).
H2b: A gyerekek fejlettségi szintje a stratégiahasználat rugalmassága terén eltérő, az egyes gyermekek – matematikában tehetséges gyermek, többségi, SNI-s tanulók – stratégiahasználata között szignifikáns a különbség. (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999)
H2c: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző iskolák között.
H2d: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző osztályok között.
H2e: A vizsgált tanulók körében megfigyelhetők racionális hibák (vö. Ben-Zeev, 1998).
H3: Az alábbi háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a megoldáskor alkalmazott szorzási stratégia és annak adaptivitása (vö. B. Németh, 2002, 2003; Csapó, 2002a, 2002b):

a) az anya iskolai végzettsége,
b) a tanuló neme,
c) a tanuló tanulási eredménye,
d) tanulási nehézségek és zavarok.

H4: A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazzák: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö. Hope & Sherrill, 1987).

H5a: A szorzási feladatok megoldása során a 4. évfolyamos tanulók gyengébb eredményt érnek el, mint a magasabb évfolyamok tanulói.

H5b: A szorzási feladatok megoldása során az alacsonyabb évfolyamos tanulók gyengébb eredményt érnek el, mint a magasabb évfolyamok tanulói.

H5c: A magasabb évfolyamokon a tanulók által használt stratégiák száma csökkenő tendenciát mutat (vö. Siegler & Lin (2010) „egymást átfedő hullámok" modellje).

H6: A Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb teljesítményt elérő gyerekek stratégiahasználatát kettősség jellemzi: egyrészt rugalmasabb, és többféle stratégiát alkalmaznak, mint a Matematika Tudásszintmérő Teszten gyengébb teljesítményt nyújtó diákok; másrészt stratégiahasználatuk nem minden esetben adaptív (vö. de Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére & Verchaffel, 2010).
H7: A sajátos nevelési igényű gyerekek stratégiahasználatát nagyfokú rugalmatlanság jellemzi. Ugyanakkor azzal az egy-két ismert stratégiával – szorgalmuk, precizitásra törekvésük miatt –

sokszor jobban boldogulnak, mint a Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb teljesítményt elérő tanulótársaik.
H8a: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredménnyel.

H8b: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény szerint szignifikáns a különbség

(vö. Hermann, 2019)

1) a mérésben részt vevő iskolák,
2) a mérésben részt vevő osztályok,
3) a fiúk és a lányok között.

H8c: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat (vö. Hermann, 2019)

1) a szülők iskolai végzettségével,
2) az iskolai teljesítménnyel való elégedettséggel,
3) a gyermek továbbtanulási terveivel,
4) a gyermek félévi matematika osztályzatával.

H9a: A szorzási stratégiák explicit tanításában részt vevő tanulók jobb eredményeket érnek el a Szorzási Stratégiák utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Mulligan & Mitchelmore, 2009).
H9b: A fejlesztésben részt vett tanulók jobb eredményeket érnek el a Matematika Tudásszintmérő utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Csíkos, 2007).
H9c: A fejlesztés hatása a késleltetett utóteszt során is kimutatható (vö. Csíkos, 2007).

4. MÓDSZEREK

A vizsgálatunk keretében lezajlott hat vizsgálat során főleg papír-ceruza alapú mérőeszközöket alkalmaztunk. A Szorzási Stratégiák Teszt egyes változatai mellett Matematika Tudásszintmérő Tesztet és háttérkérdőíveket vettünk fel a tanulókkal. Az adatfelvételi objektivitás biztosítása érdekében adatfelvételi útmutatót készítettünk, és küldtünk el a felmérésben részt vevő iskolába, melyhez hasonlót a központi vizsgálat során is alkalmaztunk. A Szorzási Stratégiák Tesztet és a Matematika Tudásszintmérő Tesztet A és B változatban készítettük el. A kétféle változat elkészítésének részben pragmatikai okai voltak, szerettük volna, ha a padszomszédok nem figyelik a másik munkáját. Másrészt szerettük volna elkerülni, hogy a lassabb diákok miatt kevesebb információt kapjunk a teszt végén található itemekről. Arra is kíváncsiak voltunk, vajon az itemek sorrendje mennyiben befolyásolja a teszten elért eredményt. Az értékelési objektivitás biztosítására megoldó-és javítókulcsot állítottunk össze, a javítást ez alapján végeztük. Szintén ezt a célt szolgálta a teszt kipróbálása az előmérések során. Az értelmezési objektivitás céljából útmutatót készíthetünk, de mivel a teszt eredményeinek átváltása érdemjegyekre nem volt célunk, ezért ezzel a vizsgálat során nem foglalkoztunk.

A következőkben az egyes vizsgálatok során alkalmazott módszerek részletes ismertetése következik.

4.1. Első vizsgálat

A szemkamerás vizsgálat lehetőséget nyújt arra, hogy megtudjuk, mit figyelnek a tanulók a szöveges feladatok olvasása, értelmezése során, hogyan gondolkodnak, hogyan választják ki az alkalmazott szorzási stratégiát. Erre vonatkozó kutatás eddig nem folyt hazánkban.

A vizsgálat során a következő kutatási kérdésekre kerestük a választ: Mérőeszközónk alkalmas-e a szorzási stratégiák mérésére fejben végzett szorzás során? Milyen szorzási stratégiákat használnak a negyedikes tanulók az egyszerű szöveges feladatok megoldásakor? Mely háttérváltozók függenek össze a számolási stratégiával?

Vizsgálatunk a következő hipotézisek alátámasztására szolgált:

H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.
H2a: A negyedikesek legalább ötféle stratégiát alkalmaznak a fejben végzett szorzások során.
H2e: A vizsgált tanulók körében megfigyelhetők racionális hibák (vö.: Ben-Zeev, 1998).
H4: A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazzák: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö. Hope & Sherrill, 1987).

4.1.1. Minta

A vizsgálatra 2013 áprilisában került sor, mintánkat 13 kisvárosi negyedik osztályos tanuló (8 fiú, 5 lány) alkotta, akik a mérésben önként vettek részt. A szemmozgásos vizsgálathoz kapcsolódva a gyerekekkel felvettünk egy háttérkérdőívet, és egy matematikai meggyőződéseket vizsgáló kérdőívet is. Ez után került sor a szemmozgásos vizsgálatokra. A szorzási stratégia mérésére szolgáló feladatok szövegét 26-os betűmérettel olvashatták a tanulók. A vizsgálat során Tobii T120 eye-trackert használtunk, a vizsgálat során video, hangfájl is készült. Az eredményeket TobiiStudio 2.2.7. szoftver és SPSS szoftverek segítségével elemeztük. A válaszadásuk közben rögzítettük, majd 20 perces interjút készítettünk velük a feladatok megoldás során alkalmazott stratégiáról.

A szemmozgásos vizsgálat során a tanulókat egyesével vizsgáltuk, egy eye-trackerrel felszerelt helyiségben. A helyiségben a vizsgált gyermek és a három mérőbiztos tartózkodott. A szöveges feladatokat word formátumban tártuk a gyermekek elé, a feladatok szövegét nem olvassuk fel nekik. Az egyes cím nélküli feladatok előtt a következő szöveg áll: Oldd meg a következő feladatot!

Az egyes feladatokat követő interjúkérdések a következők voltak:

Mondd el, hogyan gondolkodtál!

Hogyan számítottad ki az eredményt?

Milyen számítást végeztél?

Meséld el, hogyan számoltál!

A feladatok megoldása során a mérőbiztosok a gyermeknek nem segíthettek.

Mielőtt a gyermek kiment a helyiségből, megkérdeztük, hogy szerinte hány feladatra adott helyes választ. A vizsgálat után megköszöntük a gyermekeknek a közreműködést.

4.1.2. Mérőeszközök

A vizsgálat során nyolc szöveges feladatot alkalmaztunk, melyek mélystruktúrájukban szorzásra vonatkozó egyszerű szöveges feladatok voltak. Ezen kívül felvettük a Kérdőívet a matematikatanulásról (Kelecsényi & Csíkos, 2013). A vizsgálat során egy Háttérkérdőívet is felvettünk (többek között a tantárgyi jegyekre, tantárgyak iránti attitűdre, tervekre, szabad idő eltöltésre, tanulási időre, olvasásra vonatkozó kérdésekkel).

A 4. táblázat az 1. vizsgálatban szereplő feladatokra vonatkozó adatokat tartalmaz. A feladatok közül az első kettő egyjegyű számok szorzására, kettő feladat egyjegyű szám kétjegyű számmal való szorzására, a többi négy pedig kétjegyű számok szorzására vonatkozik. Mivel egyszerű szöveges feladatokról van szó és az ezres számkörben vagyunk, a feladatok megoldása fejben is elvégezhető. A feladatok szövege közel van a gyerekek mindennapi életéhez, közös bennük, hogy a szabadidő eltöltésével kapcsolatosak: locsolkodás, számítógépes játékok, farsangi bál, filmélmény, vásárlás, sportverseny, osztálykirándulás, barátok.

4. táblázat. Az első vizsgálatban alkalmazott feladatok kontextusa, elvégzendő művelet és modalitás

A feladat sorszáma	A feladat kontextusa	Elvégzendő művelet	Megjegyzés
1.	Locsolkodás	$5 \cdot 7$	Egyjegyű szorzása egyjegyűvel A számjegy kiírása betűvel történt
2.	Diáknap	$7 \cdot 8$	Egyjegyű szorzása egyjegyűvel A számjegy kiírása arab számjegyekkel történt
3.	Számítógépes játékok	$6 \cdot 19$	Egyjegyű szorzása kétjegyűvel A számjegy kiírása arab számjegyekkel történt
4.	Sportverseny	$5 \cdot 15$	Egyjegyű szorzása kétjegyűvel A számjegy kiírása betűvel történt
5.	Farsangi bál	$10 \cdot 19$	Kétegyű szorzása kétjegyűvel A számjegy kiírása betűvel történt
6.	Vásárlás	$10 \cdot 42$	Kétjegyű szorzása kétjegyűvel A számjegy kiírása arab számjegyekkel történt
7.	Táborozás	$12 \cdot 11$	Kétjegyű szorzása kétjegyűvel A számjegy kiírása betűvel történt
8.	Barátság	$11 \cdot 13$	Kétjegyű szorzása kétjegyűvel A számjegy kiírása arab számjegyekkel történt

A feladatok szövege

1. Péter húsvétkor öt lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja hét-hét festett tojást adott a fiúnak. Összesen hány hímes tojást vihetett haza Péter?

2. A júniusi Diáknapon a felső tagozat minden osztályát 7-7 fős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Hány tanuló vett részt a versenyen, ha 8 osztály működik a felső tagozaton?

3. Gabi a számítógépén 6 játékot játszik. Ezek mindegyike 19 megabájt helyet foglal el a gép memóriájából. Összesen hány megabájtnyi helyet foglalnak el Gabi kedvenc játékai?

4. Az idei megyei sportversenyben ötfős csapatok versenyeztek egymással, melyek tizenöt iskolából érkeztek. Hány gyerekről gondoskodtak a szervezők, ha minden diák kapott frissítőt?

5. A farsangi jelmezversenybe a tizenkét osztályból átlagosan tizenkilenc gyerek nevezett be. Hány ajándékot osztott szét a zsűri a jelmezesek között, ha mindenki kapott valami apróságot?

6. Húsvét előtt az üzletben a tojásokat tízesével csomagolják, és tojástartó dobozokban árulják. Mennyibe kerül 10 darab tojás, ha egy darab ára 42 Ft?

7. A nyári szünetben az iskola mind a tizenkét osztályából tizenegy-tizenegy gyerek vesz részt a balatoni táborozáson. Az iskola hány tanulója vesz részt a nyári balatoni táborozáson?

8. Az egyik nemzetközi projektbe 11 ország kapcsolódott be. Egyik nap angolul szkájpoltak egymással, és iskolánként 13 gyerek vett részt ebben a beszélgetésben. Hány gyerek szkájpolt összesen?

Az 5. táblázat a mérőeszközben szereplő szavak és karakterek számát tartalmazza.

5. táblázat. Az első vizsgálatban alkalmazott szöveges feladatokban szereplő szavak száma feladatonként.

Feladatpárok	A számnév betűvel írva		A számnév arab számokkal írva		Összesen	
	szavak száma	karakterek száma	szavak száma	karakterek száma	szavak száma	karakterek száma
1.pár	25	152	28	151	53	303
2.pár	22	157	25	154	47	311
3.pár	23	154	27	151	50	305
4.pár	26	155	24	155	50	310
Összesen	96	618	104	611	200	1229

A mérőeszköz készítéskor törekedtünk arra, hogy az egyes feladatpárokban szereplő feladatok szövege ne legyen szignifikánsan hosszabb. Egy-egy feladatban átlagosan 25 szó szerepelt, az egyes feladatok átlagosan 153,63 karaktert tartalmaztak.

4.2. Második vizsgálat A szorzási stratégiák vizsgálata 14-18 éves tanulók körében

A 8-12. évfolyamos tanulók körében végzett keresztmetszeti vizsgálat során a következő kérdésekre kerestük a választ:

1) Hogyan mérhető a fejben számolás során a szorzási stratégiák használata? Milyen stratégiákat használnak a 10-18 éves tanulók?
2) Milyen háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a fejben végzett szorzás során alkalmazott stratégia.

Hipotéziseink közül a következőket vizsgáltuk:

H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.

H2a: A fejszámolással megoldható szorzási feladatokban 10-18 évesek legalább ötféle különböző stratégiát alkalmaznak (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999).
H2d: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző osztályok között.
H2e: A vizsgált tanulók körében megfigyelhetők racionális hibák (vö. Ben-Zeev, 1998).
H3: Az alábbi háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a megoldáskor alkalmazott szorzási stratégia és annak adaptivitása (vö. B. Németh, 2002, 2003; Csapó, 2002a, 2002b):

a) az anya iskolai végzettsége,
b) a tanuló neme,
c) a tanuló tanulási eredménye,
d) tanulási nehézségek és zavarok.

H4: A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazzák: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö. Hope & Sherrill, 1987).

H5b: A szorzási feladatok megoldása során az alacsonyabb évfolyamos tanulók gyengébb eredményt érnek el, mint a magasabb évfolyamok tanulói.

4.2.1. Minta

A vizsgálat mintáját 120 fő budapesti diák alkotta, ebből 23 fő nyolcadik évfolyamos, 97 fő pedig humán középiskolai tanuló volt. A vizsgálatban a tanulók önként vettek részt.

4.2.2. Mérőeszközök

A szorzási stratégiák mérésére alkalmazott teszt itemeit a 6. táblázat tartalmazza.

6. táblázat. A második vizsgálat során a szorzási stratégiák mérésére használt mérőeszköz

Sorszám	Elvégzendő szorzás	Megjegyzés
1. item	$5 \cdot 8$	
2. item	$6 \cdot 9$	
3. item	$8 \cdot 10$	
4. item	$11 \cdot 12$	Az első vizsgálatban szerepelt
5. item	$13 \cdot 11$	
6. item	$15 \cdot 12$	
7. item	$25 \cdot 17$	
8. item	$40 \cdot 13$	
9. item	$8 \cdot 29$	
10. item	$6 \cdot 19$	Az első vizsgálatban szerepelt

A szorzási stratégiák vizsgálata során felvettünk a tanulókkal egy Matematika Tudásszintmérő Tesztet, mely 11 feladatot tartalmazott, fejben megoldható feladatokkal. Ezen kívül a

Kelecsényi és Csíkos (2013) által adaptált Matematikai Meggyőződések Kérdőívet vettük fel a vizsgált tanulókkal, illetve egy háttérkérdőívet, mely a tanulók nemére, egyes tantárgyak iránti attitűdjére, a szabad idő eltöltésére, tanulási szokásaikra vonatkoztak.

4.3. Harmadik vizsgálat Pilotmérés 7. évfolyamos tanulók körében

A vizsgálat során a következő kérdésekre kerestük a választ:

1) Hogyan mérhető a fejben számolás során a szorzási stratégiák használata?
2) Milyen stratégiákat használnak a vizsgált tanulók?
3) Milyen háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a fejben végzett szorzás során alkalmazott stratégia?

Hipotéziseink közül a következőket vizsgáltuk:
H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.
H1b: A Matematika Tudásszintmérő Stratégiák Teszt megbízhatóan méri a diákok matematika tudásszintjét.

A harmadik vizsgálat során célunk a további, nagymintás vizsgálatokhoz szükséges mérőeszközök kifejlesztése volt. Ahhoz, hogy jó tudásszintmérő tesztet készítsünk, több feltételnek eleget kell tennünk. Ezek a kulcsfontosságú tesztjellemzők az objektivitás (tárgyszerűség), reliabilitás (megbízhatóság) és validitás (érvényesség) (Nagy, 1975; Csapó, 2004b).

4.3.1. Minta

2015 szeptember elején egy kismintás előmérés során próbáltuk ki a Szorzási Stratégiák Tesztet és a Matematika Tudásszintmérő Tesztet egy budapesti általános iskola két hetedik osztályában (N = 61 fő). A tanulók részvétele a vizsgélatban önkéntes volt, és előzőleg nem ismételték át a témakört. A tanulók 30 perc tiszta időt kaptak a Szorzási Stratégiák Tesztfeladatsor megoldására.

4.3.2. Mérőeszközök

A Szorzási Stratégiák Teszt fejlesztése

A Szorzási Stratégiák Teszt esetén az volt célunk, hogy egy jól használható mérőeszközt fejlesszünk ki. A szorzásteszt két változata ugyanazokat a szorzásokat tartalmazta, más sorrendben. Mindkét tesztváltozat 60 itemet tartalmazott. A teszt részben a hasonló kutatásokban már használt és saját készítésű szorzásokat is tartalmazott, méghozzá a következőképpen: egyjegyű szám kétjegyű számmal való szorzása (9 item), egyjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (5 item), egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal (1 item), kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal (34 item), kétjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (10 item), háromjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (1 item).

Matematika tudásszintmérő teszt fejlesztése

Vizsgálatunk célja szintén az volt, hogy megvizsgáljuk a tudásszintmérő tesztváltozatok reliabilitását, és itemkihagyásos reliabilitás vizsgálatával, az elkülönítésmutatók segítségével összeállítsunk egy jól működő mérőeszközt.

4.4. Negyedik vizsgálat A szorzási stratégiák vizsgálata 6. évfolyamos tanulók körében

A vizsgálat során azt szerettük volna megtudni, milyen stratégiát használnak a hatodikos tanulók az fejben végzett szorzás során? Milyen háttérváltozókkal hozható összefüggésbe ez stratégia?

A következő hipotéziseket vizsgáltuk:

H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.
H1b: A Matematika Tudásszintmérő Stratégiák Teszt megbízhatóan méri a diákok matematika tudásszintjét.
H2a: A fejszámolással megoldható szorzási feladatokban 10-18 évesek legalább ötféle különböző stratégiát alkalmaznak (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999).
H2c: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző iskolák között.
H2d: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző osztályok között.
H2e: A vizsgált tanulók körében megfigyelhetők racionális hibák (vö.: Ben-Zeev, 1998).
H3: Az alábbi háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a megoldáskor alkalmazott szorzási stratégia és annak adaptivitása (vö. B. Németh, 2002, 2003; Csapó, 2002a, 2002b):

a) az anya iskolai végzettsége,
b) a tanuló neme,
c) a tanuló tanulási eredménye,
d) tanulási nehézségek és zavarok.

H4: A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazzák: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö: Hope & Sherrill, 1987).

H8a: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredménnyel.

H8b: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény szerint szignifikáns a különbség

(vö. Hermann, 2019)

1) a mérésben részt vevő iskolák,
2) a mérésben részt vevő osztályok,

3) a fiúk és a lányok között.

H8c: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat (vö. Hermann, 2019)

1) a szülők iskolai végzettségével,
2) az iskolai teljesítménnyel való elégedettséggel,
3) a gyermek továbbtanulási terveivel,
4) a gyermek félévi matematika osztályzatával.

4.4.1. Minta

A vizsgált személyek Budapest két különböző kerületének három iskolájából kerülnek ki. Az utóbbi években végzett Országos Kompetenciamérések eredményei szerint a mintában szereplő tanulók két iskolában magasan az országos átlag felett teljesítenek mind matematikából, mind szövegértésből, közöttük nincsen szignifikáns különbség, míg a 3. iskola átlagos teljesítményű. Az egyik iskola tanulói között ritka (1-2%) a hátrányos helyzetű, tanulászavarral rendelkező tanuló, míg a másik két iskolában a tanulók mintegy 10 %-a hátrányos helyzetű és szintén kb. 10%-uk rendelkezik valamilyen zavarral (pl. diszlexia, diszgráfia, diszkalkulia).

A minta összetételének jellemzése

A vizsgálatban részt vevő iskolákat személyesen megkerestük, és szívesen részt vettek a vizsgálatban. A minta elemszámának választásakor figyelembe vettük, hogy a pedagógiai empirikus kutatások esetén a mintanagyságot érdemes legalább 100-200 fő közöttinek választani (Csíkos, 2009), mert ez lehetővé teszi a kutatásunkhoz szükséges vizsgálatok és a megfelelő általánosítások elvégzését. Így a 154 fős minta ezen kívánalmaknak megfelel. A minta iskolánkénti és osztályonkénti összetételét a 7. táblázat mutatja.

7. táblázat. A negyedik vizsgálatban részt vett tanulók száma, iskolánkénti, osztályonkénti összetétele

Iskola	Osztály	Létszám	Fiú	Lány	A résztvevők között a lányok aránya (%)
1.	6.b	29	16	13	44,8
	6.c	32	17	15	46,9
	6.a	17	8	9	52,9
2.	6.b	24	12	12	50,0
	6.c	27	15	12	46,9
3.	6.b	25	5	20	80,0
Összesen		154	73	81	52,6

Az 1. iskolából két osztály (61 fő), a második iskolából három osztály (68 fő), a harmadik iskolából egy osztály (25 fő) vett részt a vizsgálatban. 154 fős mintában közel egyforma arányban vannak fiúk és lányok. Az 1. iskola *b* és *c* osztályában a fiúk vannak többen. Míg a második iskolában a nemek aránya még inkább kiegyenlített, a lányok a *c* osztályban kisebbségben vannak. A 3. iskolában az osztály négy ötöd része lány.

4.4.2. Mérőeszközök

A vizsgálat során háromféle saját készítésű mérőeszközt használtunk: egy az előző pilotmérés során kifejlesztett Szorzási Stratégiák Tesztet, egy Matematika Tudásszintmérő Tesztet és Háttérkérdőívet. A kiválasztott mérőeszközrendszer alkalmazásától azt reméljük, hogy hiteles képet kaphatunk a tanulók matematika tudásáról, azon belül megismerhetjük a hatodikos tanulók szorzási stratégiát, arányossági gondolkodását, és a feladatok megoldása során vétett hibák rámutatnak a további fejlesztési lehetőségekre. Azt reméljük, hogy a mérőeszközök által kapott adatokból levonható következtetések útmutatásul szolgálhatnak a matematikatanároknak abban, hogy a számolási stratégiákat, az arányossági gondolkodást még hatékonyabban taníthassák. Úgy gondoltuk, hogy ezek a mérőeszközök alkalmasak lesznek arra, hogy segítségükkel a vizsgált kérdésekre választ kapjunk, és hipotéziseinket igazolni tudjuk. Ugyanis a Matematika Tudásszintmérő Teszt olyan arányossági feladatokat is tartalmaz, amelyek a hatodikos matematika tananyagara épülnek, így a tudásszintmérő segítségével megtudhatjuk, mennyire képesek a hatodikos tanulók az ilyen jellegű feladatokat megoldani. A Szorzási Stratégiák Teszt tételei fejben végezhető szorzási feladatokat tartalmaznak. A háttérkérdőívek a matematikai attitűdre, matematikaórával, matematikatanulással kapcsolatos vélekedésre kérdeznek rá, míg a másik Háttérkérdőív segítségével megismerhetünk néhány adatot, amelyek összefüggésbe hozhatók a matematika teszten elért eredménnyel.

A vizsgált személyek három tanítási órán át vettek részt a vizsgálatban. A vizsgálatban részt vevő alanyok azt az utasítást kapták, hogy minden kérdőívet, tesztet önállóan oldjanak meg, semmilyen segítséget ne kérjenek, ne fogadjanak el senkitől, még a kérdés, feladat esetleges értelmezésére sem. A matematika teszt írása alatt tollon, ceruzán kívül egyéb segédeszközt (pl. számológépet) nem használhattak. A vizsgálatban részt vevő tanulók nem kaptak jutalmat a részvételért, ebből semmilyen előnyük nem származott. Az eredményeket az SPSS 16.0 program segítségével értékeltük.

Szorzási Stratégiák Teszt

A tesztfejlesztés során létrehozott képességmérő teszt 40 itemet tartalmaz, mindegyik item nyílt végű, teljes, rövid választ igényel. A tesztben találhatók a hasonló kutatásokban (*Hope és Sherrill*, 1987) már használt és saját készítésű szorzások is. A teszt itemei a következőképpen csoportosíthatók: egyjegyű szám kétjegyű számmal való szorzása (2 item), egyjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (3 item), egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal (1 item), kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal (28 item), kétjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (3 item), háromjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (1 item).
A Szorzási Stratégiák Teszt feladatai közül 13 item már szerepelt Hope és Sherrill vizsgálataiban (1987), ezeket ismerteti a 8. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt megoldókulcsa a 2.sz. mellékletben található.

8. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt feladatai a 4. vizsgálat során

Item	Feladat	Külföldi vizsgálatok
1.	25 · 48	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
2.	25 · 120	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
3.	31 · 32	
4.	8 · 99	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
5.	49 · 51	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
6.	12 · 250	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
7.	8 · 4211	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
8.	15 · 48	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
9.	12 · 16	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
10.	32 · 32	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
11.	25 · 25	
12.	17 · 99	
13.	12 · 15	
14.	20 · 30	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
15.	8 · 999	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
16.	23 · 27	
17.	25 · 32	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
18.	25 · 65	
19.	13 · 13	
20.	15 · 15	
21.	16 · 16	
22.	24 · 24	*Hope*, & *Sherrill*, 1987
23.	9 · 742	
24.	15 · 16	
25.	25 · 50	
26.	18 · 16	
27.	25 · 35	
28.	9 · 888	
29.	150 · 6	
30.	50 · 50	
31.	19 · 19	
32.	77 · 8	
33.	9 · 652	
34.	12 · 11	
35.	11 · 11	
36.	19 · 21	
37.	45 · 45	
38.	77 · 99	
39.	10 · 690	
40.	500 · 500	

Matematika Tudásszintmérő Teszt

A tesztfejlesztés során létrehozott Matematika Tudásszintmérő Teszt 69 itemet tartalmaz. A teszt lefedi a hatodikos tananyagot, különös tekintettel az arány, arányosság témakörére, viszont a legegyszerűbb követelményeket mellőzi. A teszt alkotásakor törekedtünk arra, hogy a tesztfeladatok többféle feladattípust tartalmazzanak, és a tantervi követelményeknek megfelelően a nyitott végű feladatok aránya magasabb legyen. A teszt főleg alacsonyabb szintű alkalmazási feladatokat tartalmaz, mivel a mérni kívánt minta többnyire átlagos képességű gyerekekből áll. Két feladat zárt végű a tesztben: ez az első feladatban 5 item, alternatív választást igényel (az összes item 5,8 %-a), és a 4. feladat, mely igaz, hamis állításokat tartalmaz (ez a feleletválasztásos 4 item az összes item 7,2 %-a). A többi feladat nyíltvégű (az összes item 87 %-a), három közülük (5. feladat első 4 iteme, 3. feladat 3 iteme és a 12. feladat 3 iteme, vagyis az összes item 14,5 %-a) kéri a számítás levezetését is. A teszt illeszkedik a tananyag struktúrájához.

Az első feladatban (5 item) szögek többszörösének kiszámítását kérjük a tanulóktól, kétjegyű számokat kell szorozniuk egy- vagy kétjegyű számokkal, ezek akár fejben is elvégezhetők. Majd a kapott nagyságú szögről kell eldönteniük, hogy a felsoroltak közül milyen fajta szög. Ez az első feladatban 5 item, illesztést igényel. A második feladat 10 itemes, törtek (6 item), illetve arányok (4 item) bővítését kéri kétjegyű számokkal. Azt vizsgáljuk, tudják-e, mi a különbség a tört szorzása és bővítése között. Előfordulnak-e a tanulóknál hibás analógiák, mint pl. úgy bővít törteket, hogy csak a számlálót szorozza, vagy mind a számlálóhoz, mind a nevezőhöz hozzáadja a bővítendő számot. Kialakult-e az arány fogalma, tudja-e, hogy ugyanolyan analógia szerint történik az arány bővítése, mint a törteké. A harmadik feladat (6 item) a mennyiség törtrészével, az egész rész kiszámításával kapcsolatos. Előfordul-e a tanulók gondolkodásában hibás analógia, mint pl. mennyiség tört részét úgy akarja kiszámolni, hogy osztja a mennyiséget a törttel. Le tudja-e írni a megfelelő egyenletet, amelynek segítségével ezt kiszámolhatná. A negyedik feladat kétjegyű egész számok szorzására vonatkozó igaz, hamis állításokat tartalmaz (4 item). Ezzel is mérni tudjuk a számolási képességet, illetve azt is, jól tudja-e alkalmazni az előjelszabályokat. Az ötödik feladat egyenes arányosságra vonatkozik, az első 4 iteme indoklást is kér. Mértékegységátváltást (1 item) is igényel a feladat. További 8 iteme kétjegyű szám két- vagy háromjegyű számmal való szorzását kéri, és két iteme pedig négy darab legfeljebb négyjegyű szám összeadására vonatkozik. A hatodik feladat 4 itemes, fordított arányosság alkalmazását igényli. Azt vizsgáljuk, felismeri-e, milyen arányosságról van szó és helyesen alkalmazza-e a szokásos következtetési módszereket. A hetedik feladatban egyenes arányosság (1 item), törtrész kiszámítása (2 item), természetes számok kivonása (1 item) szerepel. Azt is vizsgáljuk, helyesen értelmezi-e a feladat szövegét. A 8. feladat összetettebb, egyenes arányosságra (1 item), törtrész kiszámítására vonatkozó (1 item), százalékérték számításra vonatkozó (1 item) részei vannak. A 9. feladatban egyenes arányosságra vonatkozik 3 item, a százalékláb kiszámítására (A, csoport) illetve a százalékalap kiszámítása (B csoport) 1 item. Azt vizsgáljuk, felismeri-e, melyik az ismeretlen adat a három közül (százalékalap, százalékláb, százalékérték). A 10. feladat egyenes arányosság alkalmazását igényli (4 item), két- és háromjegyű számok szorzását kell végezniük a tanulóknak. A 11. feladat egyenes arányosságra vonatkozik, kétjegyű számok szorzását igényli (3 item). A 12. feladat kockákból álló test térfogatának kiszámítását kéri. A tanulótól a számítás indoklását is várjuk. Azt vizsgáljuk, tud-e mértékegységet váltani (1 item), ismeri a kocka térfogatának képletét (1 item), s az jól tudja-e alkalmazni (1 item).

Háttérkérdőívek

A vizsgálatban részt vevő tanulók a tesztek mellett háttérkérdőíveket is kitöltöttek. Az így nyert információk segíthetnek abban, hogy összefüggéseket találhassunk a háttértényezők és a teszteken elért teljesítmények között. Régóta tudjuk, hogy az iskolai teljesítményre, a tudás létrejöttére számos tényező hatással bír, így pl. az iskolához való viszony, a tantárgyak iránti attitűd, a szociális körülmények, az anya és az apa iskolai végzettsége (B. Németh, 2002, 2003; Csapó, 2002a, 2002b). Kutatásunk egyik célja, hogy összefüggést találjunk a Matematika Tudásszintmérő Teszten, Szorzási Stratégiák Teszten elért tanulói eredmények és az egyes háttérváltozók között, feltárjuk, mi magyarázhatja az esetleges gyengébb tesztteljesítményt.
A vizsgálat során felhasználtuk a „Matematikatanulásra vonatkozó meggyőződések" (Kelecsényi & Csíkos, 2013) című kérdőívet.

A vizsgálathoz egy saját szerkesztésű háttérkérdőívet is felvettünk, ezt tartalmazza az 3.sz. melléklet. A 95 itemes kérdőív a szülők iskolai végzettségére, a tanuló tantárgyi eredményeire, tantárgyakhoz való attitűdjeire, saját teljesítményével való elégedettségre, tanulási, azon belül matematika tanulási szokásaira kérdez rá. Ezen kívül tartalmaz még néhány kérdést a szabad idő eltöltésére vonatkozóan. Vizsgáljuk, hogyan viszonyulnak a matematika egyes ágaihoz, azokat mennyire tartják fontosnak további életükre vonatkozóan. A háttérkérdőív a kiegészítendő kérdőívtételek mellett 81 darab ötfokozatú és 6 darab hatfokozatú Likert-skálás kérdőívtételt is tartalmaz. A háttérkérdőív matematikatanulásra vonatkozó kérdőívtételei három főbb csoportba sorolhatók: Matematika szeretete, tervek (24 item), A matematikatanulás fontossága (8 item), Matematika tanulási szokások (15 item).

A vizsgálatban a vizsgált tanulók önkéntesen vettek részt. Az adatfelvételre 2016. április utolsó hetében került sor mindhárom iskolában. A vizsgálatban felhasznált mérőeszközök papír-ceruza alapúak voltak. A háttérkérdőíveket a tanulók osztályfőnöki órán töltötték ki, a matematika teszteket pedig matematikaórán, a szakos tanár felügyeletével. Az egyes kérdőívek kitöltéséhez szükséges időt mutatja a 9. táblázat.

9. táblázat. A negyedik vizsgálat során alkalmazott mérőeszközök

Sorszám	A kérdőív neve	Készítette	Itemszám	Kitöltési idő
1.	„Matematikatanulásra vonatkozó meggyőződések"	Kelecsényi és Csíkos, 2012	34	10 perc
2.	Háttérkérdőív	saját fejlesztésű	95	35 perc
3.	Matematika Tudásszintmérő Teszt	saját fejlesztésű	69	45 perc
4.	Szorzási Stratégiák Teszt	saját fejlesztésű	40	20 perc
	Összesen			105 perc

4.5. Ötödik vizsgálat A szorzási stratégiák vizsgálata és fejlesztése 6. évfolyamos tanulók körében

A kutatás során célunk volt annak vizsgálata, mennyire sikeresek a hatodik osztályos tanulók két- és háromjegyű számokkal fejben végzett szorzás során és a szorzással megoldható szöveges feladatok megoldásában. A következő kutatási kérdéseinkre kerestük a választ:
1. Milyen stratégiát használnak a 10-18 éves tanulók az egyes szorzási feladatok megoldásakor a fejben számolás során?

2. Milyen háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a fejben végzett szorzáskor alkalmazott stratégia?

3. Mi jellemzi a Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb eredményt elérő gyerekek stratégiahasználatát? Adaptív-e a stratégiahasználatuk minden esetben? Hányféle stratégiát használnak?

4. Mi jellemzi a tanulási nehézségekkel küzdő ill. a sajátos nevelési igényű gyerekek stratégiahasználatát? Hogyan segíthetnénk rugalmasságuk fejlődését a stratégiahasználat terén? Létezik-e az egyes gyermekcsoportok – matematikában tehetséges gyermek, többségi, tanulási nehézségekkel küzdő, SNI-s tanulók – számára egységesen jó stratégia?

5. A gyermekek matematikai tudásszintje mennyire függ össze az adaptív stratégiahasználattal?

6. Milyen matematikai feladatok segíthetik az adaptív stratégiahasználat fejlesztését?

Hipotéziseink a következők voltak:

H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.
H1b: A Matematika Tudásszintmérő Stratégiák Teszt megbízhatóan méri a diákok matematika tudásszintjét.
H2a: A fejszámolással megoldható szorzási feladatokban 10-18 évesek legalább ötféle különböző stratégiát alkalmaznak (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999).
H2b: A gyerekek fejlettségi szintje a stratégiahasználat rugalmassága terén eltérő, az egyes gyermekek – matematikában tehetséges gyermek, többségi, SNI-s tanulók – stratégiahasználata között szignifikáns a különbség. (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999)
H2c: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző iskolák között.
H2d: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző osztályok között.
H2e: A vizsgált tanulók körében megfigyelhetők racionális hibák (vö. Ben-Zeev, 1998).
H3: Az alábbi háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a megoldáskor alkalmazott szorzási stratégia és annak adaptivitása (vö. B. Németh, 2002, 2003; Csapó, 2002a, 2002b):

- H3a) az anya iskolai végzettsége,
- H3b) a tanuló neme,
- H3c) a tanuló tanulási eredménye,
- H3d) tanulási nehézségek és zavarok.

H4: A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazzák: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö. Hope & Sherrill, 1987).

H8a: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredménnyel.

H8b: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény szerint szignifikáns a különbség

(vö. Hermann, 2019)

a) a mérésben részt vevő iskolák,
b) a mérésben részt vevő osztályok,
c) a fiúk és a lányok között.

H8c: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat (vö.: Hermann, 2019)

1) a szülők iskolai végzettségével,
2) az iskolai teljesítménnyel való elégedettséggel,
3) a gyermek továbbtanulási terveivel,
4) a gyermek félévi matematika osztályzatával.

H9a: A szorzási stratégiák explicit tanításában részt vevő tanulók jobb eredményeket érnek el a Szorzási Stratégiák utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Mulligan & Mitchelmore, 2009).
H9b: A fejlesztésben részt vett tanulók jobb eredményeket érnek el a Matematika Tudásszintmérő utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Csíkos, 2007).
H9c: A fejlesztés hatása a késleltetett utóteszt során is kimutatható (vö. Csíkos, 2007).

4.5.1. Minta

A 2016 tavaszán végzett, egy hónapig tartó fejlesztő kísérletbe budapesti hatodikos tanulók (N = 270) közül két osztályt vontunk be. A mintát 5 budapesti iskola 10 osztálya alkotta. A fejlesztésben egy osztály vett részt, egy nyolcévfolyamos gimnáziumban, a kontrollcsoportot egy másik nyolcévfolyamos gimnázium hatodik évfolyamos osztálya képezte. Matematikából a heti óraszám 4 (legfeljebb 5) óra volt. A tartalomba ágyazott fejlesztés egy 32 fős osztályban történt, 20 alkalommal, a matematikaóra második felében (Vígh-Kiss, 2016a). A kísérlet szempontjából „ideális mintanagyságként 50-100 közötti létszámot jelöl meg a statisztikai szempontú megközelítés” (Csíkos, 2007, 136.), több szorzási stratégia fejlesztő kísérlet is hasonló mintanagyságról számolt be. A metakogníció, a hangosan gondolkodtatás vizsgálatunkban fontos szerepet töltött be az egyes szorzási stratégiák előnyeinek, hátrányainak megbeszélésekor.

4.5.2. Kísérleti elrendezés és mérőeszközök

A vizsgálat során Csíkos 2004 tavaszán (Csíkos, 2007) folytatott kísérletének tapasztalatait szem előtt tartva igyekeztünk a vizsgálatot lefolytatni. Fejlesztő kísérletünk céljául a 6. évfolyamos tanulók matematika területén használható metakognitív stratégiáinak tanítását, fejlesztését tűztük ki magunk elé. A nemzetközi szakirodalomban leírt fejlesztő kísérletek több évfolyamon zajlanak. Az ott leírtak alapján felttelezhető, hogy egy hatodikos már képes szavakba önteni a saját gondolkodásáról kialakított véleményét, könnyebben megérti az egyes stratégiák alkalmazhatóságának előnyeit, hátrányait, és tudatosan alkalmazza majd a kísérlet során a tanulási stratégiákat. Csíkos (2007) szerint felső tagozatos tanulók és idősebbek számára is érdemes, lehetséges fejlesztő tréningek szervezése.

Csíkos (2007) kísérletéhez hasonló elvek alapján dizájn kísérleti elrendezést alkalmaztunk, kvázikísérletet végeztünk. A tartalomba ágyazott, osztálytermi kísérlet a kvantitatív elemzés szempontjából egytényezős kísérlet volt. Független változóként szerepelt a szorzási stratégiák tanítása, metakognícióra alapozott fejlesztés. Függő változók voltak: a szorzás utóteszten megoldott feladatok száma, a számítások helyességének, pontosságának jóslása. Tanítási módszerünknek a hangosan gondolkodtatást választottuk, beszélgettünk a tanulókkal a különféle szorzási stratégiák előnyeiről és hátrányairól.

A feladatok ütemezését tartalmazza a 10. táblázat.

10. táblázat. A feladatok ütemezése az ötödik vizsgálatban

Feladat	Időpont
Fejlesztő kísérlethez előteszt felvétele	2015. március
A kísérletben részt vevő tanárok felkészítése	2015. március
Fejlesztő kísérlet végzése	2015. április-május
Utóteszt felvétele	2015. június
Késleltetett utóteszt felvétele	2015. szeptember
Az adatok feldolgozása	2015. május- szeptember

A kísérleti program megkezdése előtt a tanulók ugyanazon a héten írták meg az előteszteket. A tanárok visszajelzései alapján apróbb módosítások történtek a felvett utótesztben. A tesztek kidolgozásakor az érvényben levő Nemzeti alaptanterv (NAT, 2012) útmutatásaiból indultunk ki. Az adatfelvételi objektivitást a csupán egyes számadatokban eltérő A és B tesztvariánsokkal biztosítottuk. Az utótesztben nem szerepeltek olyan feladatok, amelyeket a fejlesztés során használtunk.

Az előmérés során 2016 tavaszán a következő mérőeszközöket alkalmaztuk:

1. Szorzási stratégiák előteszt
   2 feladat: egyjegyű számok szorzása
   3 feladat egyjegyű szám szorzása kétjegyű számmal
   15 feladat kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal
2. Matematikatanulásra vonatkozó tanulói nézetek kérdőív (Kelecsényi és Csíkos, 2013), Likert skálás
3. Tudásszintmérő (lefedő diagnosztikus teszt, A és B változat, 40 itemes feladatsor)
4. Háttérkérdőív (családi háttér, tantárgyi jegyek, tantárgyak iránti attitűd, tervek, szabad idő, tanulási idő, olvasás)

Az utómérés során pedig Matematikai Tudásszintmérő Tesztet (70 item), és Szorzási Stratégiák Tesztet vettünk fel (40 item). Az utómérésre 2016 május-júniusban került sor.

A késleltetett utóteszt (retention test) során használt mérőeszközök:

5. Szorzási stratégiák utóteszt (Choice-no-choice módszer), kérdőív és interjú (hangosan gondolkodtatás-think aloud)

6. Tanulási szokások kérdőív (B. Németh, Csíkos, Habók és Korom, 2005, idézi B. Németh és Habók, 2006, 49 item, Likert-skálás)

4.5.3. A fejlesztő program szerkezete

A program indítása előtt összegyűjtöttük a fejlesztendő metakognitív stratégiákat. Ebben útmutatásul szolgált Csíkos (2007) monográfiája és az ott leírt flamand fejlesztő kísérlet. A matematikában szétválasztható a procedurális és a deklaratív metatudás fejlesztése (Csíkos, 2007). A tervezés, nyomon követés, ellenőrzés metakognitív fázis, valamint a szorzási stratégiák fejlesztését tűztük ki célként.

A fejlesztő program szerkezetére vonatkozó részleteket tartalmaz a 11. táblázat.

11. táblázat. A fejlesztő program szerkezete

Óra	Metakognitív stratégia	A fejlesztés rövid tartalmi leírása
1-5.	A megoldás megtervezése	Szorzási és osztásai stratégiák tanítása, óránként egy-egy stratégia előnyeinek, hátrányainak megbeszélése
6-11.	A megoldás menetének nyomon követése	Szorzási és osztási stratégiák alkalmazása a különféle, a gyakorlati életből vett szöveges feladatokban (vásárlás, bankolás), realisztikus szöveges feladatokban
12-15.	Ellenőrzés	Hibakeresés Az újraszámolás szükségességének megítélése A becslés szerepe Realisztikus feladatok megoldása
16-20.	Integrálás	A különböző szorzási és osztási stratégiák használhatósága az egyes számítások során, rendszerezés

Fontosnak tartottuk, hogy a tanulókat megismertessük a következő metakognitív stratégiákkal: A megoldás megtervezése, a megoldás menetének nyomon követése, ellenőrzés, integrálás. A fejlesztés során többféle szorzási és osztási stratégiát mutattunk be a tanulóknak, megbeszéltük az egyes stratégiák előnyeit, hátrányait.

Az integrálás során összefoglalást adtunk a tanulóknak a tanult szorzási stratégiákról:

1. MINTA: Helyiérték szerint jobbról balra haladva

$7 \cdot 19$ kiszámítása $7 \cdot 9 = 63 = 60 + 3$, $7 \cdot 10 = 70$, $60 + 70 = 130$, $130 + 3 = 133$

2. MINTA: Helyiérték szerint balról jobbra haladva

$7 \cdot 19$ kiszámítása $7 \cdot 10 = 70$, $7 \cdot 9 = 63$, $70 + 63 = 133$

3. MINTA: holisztikus stratégia, a számot kiegészítjük olyan egészekre, amellyel könnyebb számolni, majd korrigálunk

$7 \cdot 19$ kiszámítása $7 \cdot 20 – 7 = 140 – 7 = 133$

$25 \cdot 17$ kiszámítása $4 \cdot 25 = 100$, $100 \cdot 17 = 1700$, így $(1700 : 2) : 2 = 425$

4. MINTA: számolási trükk: 5-re végződő számok négyzetre emelése

$3{,}5 \cdot 3{,}5$ kiszámítása

A $3 < 3{,}5 < 4$

$3 \cdot 4 \quad 5 \cdot 5$

$3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25$

5. MINTA: $(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - y \cdot y$

$21 \cdot 19$ kiszámítása: mindkét szám a 20-hoz van közel, egyik eggyel nagyobb, a másik eggyel kisebb, így $(20 + 1) \cdot (20 - 1) = 20 \cdot 20 - 1 \cdot 1 = 400 - 1 = 399$

$32 \cdot 28$ kiszámítása $(30 + 2) \cdot (30 - 2) = 30 \cdot 30 - 2 \cdot 2 = 900 - 4 = 896$

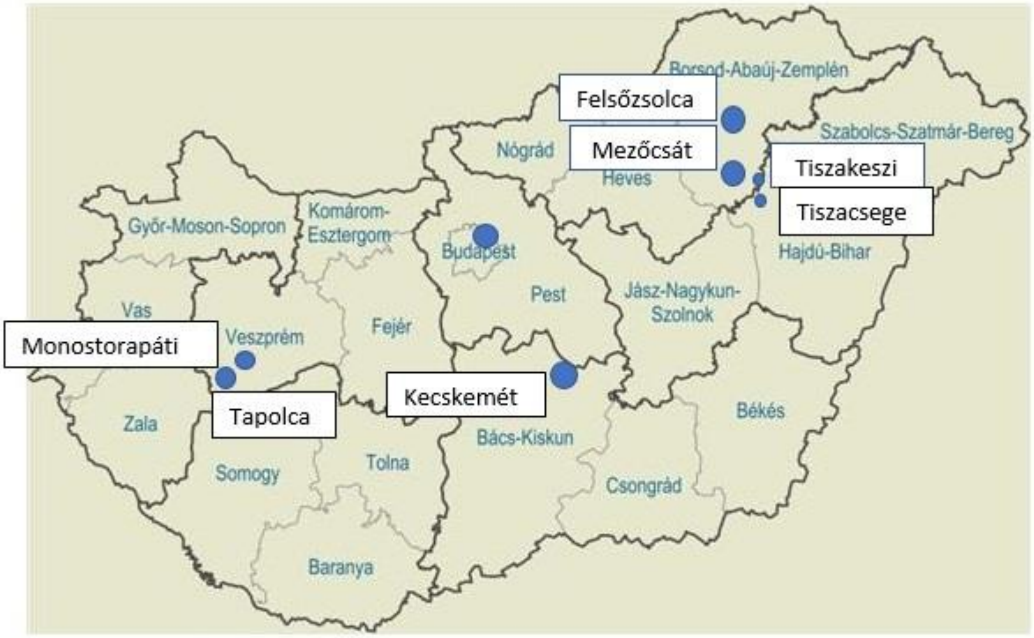
Az adatok elemzése SPSS 17 program segítségével történt. A kísérlet része volt a 2016 szeptemberében végzendő késleltetett utómérés, melynek során interjú módszerrel vizsgáltuk a legjobb teljesítményt nyújtó 10 és a leggyengébben teljesítő 10 gyerek stratégiahasználatát fejben végzett szorzás igénylő feladatok megoldása során.

4.6. Központi vizsgálat A szorzási stratégiák vizsgálata 4., 5. és 6. évfolyamos tanulók körében

A kutatás során célunk volt, hogy képet kapjunk arról, milyen szorzási stratégiát használnak a 10-12 éves tanulók a fejben végzett számolás során. A központi vizsgálat során az elméleti részben már leírt hipotéziseket tettük. A vizsgálat során három, saját fejlesztésű papír-ceruza alapú mérőeszközt alkalmaztunk.

4.6.1. Minta

A központi vizsgálatban való részvételre 20 iskolát kértünk fel, a mérésben való részvételt végül 11 iskola vállalta el. A részt vevő iskolák Magyarország öt megyéje iskolái közül kerülnek ki: Bács-Kiskun, Borsod-Abaúj- Zemplén, Hajdú-Bihar, Veszprém, Pest megye (ld. 6. ábra). A település típusa szerint a mintában szerepel község, kisváros, város, megyei jogú város és főváros. A vizsgálatban részt vevő iskolák Kecskemét, Mezőcsát, Tiszakeszi, Felsőzsolca, Tiszacsege, Monostorapáti, Tapolca és Budapest településeken találhatók. Mintánkban Közép-Dunántúlt két iskola, Észak-Magyarországot négy iskola, Észak-Alföldet és Dél-Alföldet egy-egy iskola, a fővárost három iskola reprezentálja. Az iskolák a fenntartók szerint csoportosításban: hat állami és öt egyházi fenntartású (ebből egy katolikus és négy református) iskola. Az iskolák típusuk szerint egy budapesti nyolcévfolyamos gimnázium kivételével általános iskolák. A Szorzási Stratégiák Tesztet Magyarország nyolc vidéki és három budapesti iskola 46 osztályában vettük fel. Az empirikus kutatások során célszerű legalább 100-200 főt bevonni a vizsgálatba (Csíkos, 2009).



6.. ábra A központi vizsgálatban részt vevő települések Magyarország térképén

(forrás: https://www.groomania.nl/magyarorszag-terkep-megyek-megyeszekhelyek.html ábrája alapján)

A vizsgálatban részt vevő iskolák tanulóinak száma a 4. évfolyamon 331 fő, az 5. évfolyamon 393 fő és 6. évfolyamon 423 fő, a kutatásban való részvételre felkért iskolákban a vizsgált három évfolyamon tanulók száma összesen 1147 fő. A mérésben való részvétel önkéntes volt. A mérési eredmények közül azon tanulók adatait, akik legalább az egyik matematikai tesztet kitöltötték, egy SPSS adatbázisba vittük fel. Az így kapott 850 fős minta lehetővé teszi, hogy a kutatásunkhoz szükséges vizsgálatokat elvégezzük, és abból megfelelő általánosításokat vonhassunk le.

A központi vizsgálat mintaösszetételének jellemzése

A vizsgálatban részt vevő iskolákat személyesen, illetve e-mailben kerestük meg, önként vállalták a részvételt. A vizsgált tanulók 32,2%-a a 4. évfolyamba, 31,1 %-a az 5. évfolyamba, 36,7%-a a 6. évfolyamba jár, így évfolyamonként közel azonos arányban szerepelnek tanulók a mintában. A 850 fős mintában 415 fő lány, ami 48,8%-ot tesz ki, tehát a vizsgált mintában majdnem egyforma arányban szerepelnek tanulók mindkét nemből.

A vizsgálatban részt vevő iskolák tanulóinak létszámadatait tartalmazza a 12. táblázat.

12. táblázat. A központi vizsgálatban részt vevő iskolák tanulóinak létszámadatai évfolyamonként

Iskola	Évfolyam			Összesen
	4.	5.	6.	
1.	79	82	99	260
2.	32	23	20	75
3.	25	42	38	105
4.	34	19	16	69
5.	9	12	14	35
6.	43	56	48	147
7.	18	18	26	62
8.	44	45	43	132
9.	0	32	32	64
10.	23	16	31	70
11.	24	48	56	128
Összesen	331	393	423	1147

A minta nemek szerinti megoszlását mutatja évfolyamonkénti bontásban a 13. táblázat.

13. táblázat. A központi vizsgálat mintája nemek szerinti megoszlása évfolyamonként

Nem	Évfolyam			Összesen
	4	5	6	
Fiú	147	136	152	435
Lány	127	128	160	415
Összesen	274	264	312	850

A 850 fős mintában 274 negyedik évfolyamos, 264 ötödik évfolyamos és 312 hatodik évfolyamos tanuló szerepel. Összesen 435 fiú vett részt a vizsgálatban, a fiúk a negyedik és ötödik évfolyamon nagyobb arányban képviseltetik magukat, míg a hatodik évfolyamos tanulók között a lányok vannak többen.

Mintánkat 11 iskola tanulói alkotják. 601 tanuló vidéki, 249 tanuló budapesti iskolába jár (a tanulók 70,6%-a, illetve 29,3%-a). Egyházi iskolába jár 513 fő, a tanulók 60,4%-a (ebből 65 fő katolikus, 448 fő református iskolába), állami fenntartású iskolába jár 337 tanuló (a tanulók 39,6%-a).

A minta nemek szerinti összetételét iskolánként a 14. táblázat mutatja.

A fiúk 72,6%-a vidéki (316 fő), 27,4%-a budapesti (119 fő), a lányok 68,7%-a vidéki (285 fő), 31,3%-a budapesti iskolás (130 fő). A minta legtöbb iskolájában a fiúk és a lányok aránya kiegyenlített. Az 5., 6., 7., 8. és a 9. iskolában a tanulók kevesebb, mint a fele lány, a 6. iskolában a tanulók alig több, mint negyede.

14. táblázat. A központi vizsgálatban a minta nemek szerinti összetétele iskolánként

Iskola	Létszám	Fiú	Lány	A részvevők között a lányok aránya (%)
1.	218	109	109	50,0
2.	65	30	35	53,8
3.	98	49	49	50,0
4.	66	32	34	51,5
5.	29	16	13	44,8
6.	43	32	11	26,6
7.	57	33	24	42,1
8.	25	15	10	40,0
9.	63	35	28	44,4
10.	66	32	34	51,5
11.	120	52	68	56,7
Összesen	850	435	415	48,8

A minta nemek szerinti összetételét iskolánként és évfolyamonként a 15. táblázat mutatja.

15. táblázat. A minta nemek szerinti összetétele iskolánként és évfolyamonként

Iskola	Évfolyam	Létszám	Fiú	Lány	A részvevők között a lányok aránya (%)
1.	4.	76	36	40	52,6
	5.	59	32	27	45,8
	6.	83	41	42	50,6
2.	4.	29	15	14	48,3
	5.	18	8	10	55,6
	6.	18	7	11	61,1
3.	4.	25	16	9	36,0
	5.	38	17	21	55,3
	6.	35	16	19	54,3
4.	4.	34	14	20	58,8
	5.	16	10	6	37,5
	6.	16	8	8	50,0
5.	4.	7	4	3	42,9
	5.	10	3	7	70,0
	6.	12	9	3	25,0
6.	4.	43	32	11	26,6
7.	4.	16	10	6	37,5
	5.	16	9	7	43,8
	6.	25	14	11	44,0
8.	5.	15	10	5	33,3
	6.	10	5	5	50,0
9.	5.	31	18	13	41,9
	6.	32	17	15	46,9
10.	4.	20	7	13	65,0
	5.	17	9	8	47,0
	6.	29	16	13	44,8

15. táblázat. A minta nemek szerinti összetétele iskolánként és évfolyamonként (folytatás)

11.	4.	24	13	11	45,8
	5.	44	20	24	54,5
	6.	52	19	33	63,5
Összesen		850	435	415	48,8

A 6. iskolából a 4. évfolyamon tanuló diákok töltötték ki legalább az egyik matematika tesztet. A 8. és a 9. iskolából 5. és 6. évfolyamos tanulók szerepelnek a mintában. A 2. iskola 5. és 6. évfolyamán a lányok vannak többen, a 3. iskola 4. évfolyamán a tanulók kb. harmada lány. A 4. iskola 4. évfolyamán a lányok, 5. évfolyamán a fiúk vannak többen. Az 5. iskola 5. évfolyamán a tanulók 70 %-a lány. A 8. iskola 5. évfolyamán a lányok a tanulók harmadát teszik ki.

A minta nemek szerinti összetételét iskolánként és osztályonként az 5. sz mellékletben található táblázat mutatja. Látható, hogy a mintát 11 iskola 46 osztálya képezi, 15 negyedik, 14 ötödik, 16 hatodik osztály. Mivel az 1. iskolában a négy hatodikos osztály tanulói 5 különböző csoportban tanulják a matematikát, így őket külön osztályként szerepeltetjük. Az egyes osztályokban a fiúk és a lányok aránya ritkán egyezik meg, kiugrónak tekinthető a 27.-es és 45.-ös osztály, ahol az osztály 70 %-a illetve 81,5%-a lány, illetve a 12. és a 28. osztály, ahol éppen fordított a helyzet, ott a lányok aránya jóval kisebb az osztályban, minden negyedik vagy ötödik gyermek lány.

A vizsgálatban részt vevő iskolákat felkértük, hogy adjanak meg néhány információt a tanulói összetételre vonatkozóan. A 6. sz. mellékletben található táblázatból kiolvashatjuk, hogy az egyes osztályokba, évfolyamokra hány hátrányos helyzetű (HH-s) tanuló jár. A megkérdezett 850 tanuló közül 40 fő hátrányos helyzetű, 79 fő halmozottan hátrányos helyzetű, 36 fő sajátos nevelési igényű tanuló és 71 fő beilleszkedési, tanulás és magatartási zavarokkal rendelkezik.

Az 1. iskola tanulói között hét fő sajátos nevelési igényű, nyolc BTMS-s tanuló. A 2. iskola negyedikes tanulóinak 82,8%-a halmozottan hátrányos helyzetű a szülők alacsony iskolai végzettsége, munkanélkülisége és a lakáskörülmények miatt. Az ötödik évfolyamra 17, a hatodik évfolyamra 19 halmozottan hátrányos helyzetű gyermek jár. A 3. iskola 4. és 5. évfolyamán tanul egy-egy tanulási nehézséggel küzdő tanuló. Az 5. iskola tanulói között 19 fő hátrányos helyzetű a szülők alacsony iskolai végzettsége miatt. Itt általában egy-egy sajátos nevelési igényű tanuló akad évfolyamonként. A 6. iskolában 17 hátrányos helyzetű, 14 gyermek halmozottan hátrányos helyzetű. A 7. iskolában évfolyamonkét egy-két gyermek rendelkezik tanulási zavarral. A 8. iskolában hátrányos helyzetű fiú, és SNI tanuló is akad. A 9. iskola mindkét évfolyamán találunk egy-egy BTM tanulót. A 10. iskolában SNI vagy BTM-es tanuló évfolyamonként 3-9 fő. A 11. iskola vizsgált tanulói között tíz BTM tanuló.

Az iskolák kompetenciaméréseken elért eredményei matematikából és szövegértésből a 6. évfolyamon

Az egyes iskolák kompetenciaeredményeinek vizsgálata hasznos információkkal szolgálhat az iskolák tanulói összetételéről, az intézmények tanulóinak teljesítményéről, akkor is, ha a legújabb kompetenciamérések adatai még az előző évfolyam diákjaira vonatkoznak, ezt figyelhetjük meg a 16. táblázatban.

16. táblázat. Az egyes iskolákra vonatkozó létszámadatok az országos kompetenciaméréseken matematikából 2014 és 2018 között

(forrás: Országos kompetenciamérés 2018, FIT-jelentés. Intézményi jelentés 6. évfolyam alapján)

Iskola	Tanulók száma a hatodik évfolyamon	SNI tanuló	Mentesült tanuló	BTM tanuló	HHH tanulók	A jelentésben szereplő tanulók hatodikos tanulók száma
1.	95	1	0	5	0	90
2.	59	1	4	3	34	50
3.	34	0	0	3	1	34
4.	22	1	0	1	1	21
5.	11	2	2	2	1	9
6.	42	4	1	0	18	37
7.	14	3	1	1	0	10
8.	43	7	1	2	1	35
9.	64	0	0	0	1	64
10.	29	3	1	3	3	26
11.	75	2	0	6	2	70

Érdemes megnézni az egyes iskolák eredményességét az Oktatási Hivatal által szervezett országos kompetenciaméréseken matematikából 6. évfolyamon, ezt láthatjuk 2014 és 2018 között a 21. táblázatban. Az országos tendenciákhoz hasonlóan a vizsgált iskolák esetében is az elmúlt öt évben a vizsgált iskolák eredményeinek kismértékű ingadozását követhetjük nyomon. Az adatok alapján egyik iskola esetében sem tapasztalhatunk számottevő változást a kiindulási 2014-es évben elért eredményekhez képest. A 2018-as felmérésben a mintában szereplő 11 iskola közül három iskola eredménye szignifikánsan magasabb, három iskola eredménye szignifikánsan alacsonyabb, mint az országos átlag, öt iskola eredménye nem különbözik szignifikánsan az országos átlagtól. Hasonló adatokat figyelhetünk meg a 6. évfolyamos tanulók szövegértési eredményeire vonatkozóan.

Területi különbségek

Az iskolák átlageredményit a telephelyük földrajzi elhelyezkedése alapján is csoportosíthatjuk (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász, Vadász, 2019). Jelentős területi egyenlőtlenségek figyelhetők meg a vizsgált megyék eredményeit tekintve. Szemmel láthatóan a Közép-Dunántúlt képviselő 7. és 8. iskola teljesítménye a 6. évfolyamos matematika kompetenciamérésben legalább olyan jó vagy jobb, mint az észak-magyarországi 2., 3., 4., 5. iskolák és az észak-alföldi 6. iskola teljesítménye. Két Borsod-Abaúj-Zemplén megyei és a Hajdú-Bihar megyei iskola eredménye szignifikánsan alacsonyabb, mint az országos átlag. Az országos átlagnál szignifikánsan magasabb teljesítményt a Dél-Alföldön található kecskeméti, valamint két középmagyarországi (budapesti) iskolában láthatunk. A legjobban teljesítő budapesti iskola és a leggyengébb eredményű borsodi iskola matematika felmérésben elért átlagpontszáma között 563 pont eltérés van, az egyes megyék iskolái közötti eltérések is 136 és 248 pont között váltakoznak.

A településtípus, képzési forma és nemek szerinti különbségek

Mivel a 6. évfolyamos tanulók nagy része még a lakóhelyén tanul, célszerű az eredmények összevetése településtípusok szerint is (Országos jelentés, 2019). Mintánkban a községeket a 4., 5. és 7. iskola képviseli, a 2. és a 3. iskola kisvárosban található, városi iskola a 6. és a 8. Megyei jogú városban található az 1. iskola, míg a 9., 10., és 11. iskola fővárosi. Az egyes településtípusok közti különbség matematikából 17,5 és 245,6 pont közötti, míg szövegértésből 43,5 és 315 pont között van. Az országosan megfigyelhető jelenség a minta kis száma miatt nem követhető le egy az egyben, mert nem községi iskolákhoz köthetők a leggyengébb eredmények, de a megyei jogú város és a főváros előnye vitathatatlan mindkét mérési területen.

A tanulók átlageredményei közötti különbségek az iskolatípus szerinti összehasonlításban is megfigyelhetők: a legjobb eredményt elérő nyolcévfolyamos 9. iskolával szemben az általános iskolák hátránya szemmel látható, ennek oka a 4. évfolyamban történő erős szelekció lehet, ahogy a kompetenciamérésről készült országos jelentésben is láthattuk.

Az országos kompetenciamérés a nemek szerinti különbségeket is vizsgálja, azonban az iskolák erre vonatkozó összesített adatot saját tanulóikra nem kapnak. Így ebből a szempontból az országos trendet írhatjuk le. A PISA és a TIMSS nemzetközi mérésekhez hasonlóan megfigyelhetünk teljesítménybeli különbségeket a hatodikos fiúk és a lányok között. A lányok jobb szövegértési képességgel rendelkeznek, míg matematikából a fiúk vannak előnyben (Lak, Szepesi, Takácsné Kárász & Vadász, 2019).

Az alapszint és a minimumszint alatti tanulók aránya

A kompetenciamérésen elért eredmények értelmezéséhez kidolgozott tartalmi keretben (Balázsi, Balkányi, Ostorics, Palincsár, Rábainé Szabó, Szepesi, Szipőcsné Krolopp és Vadász, 2014) a szerzők részletesen leírják mind a hét képességszinthez tartozó elvárásokat, jellemzőket. Az országos kompetenciamérések során az alapszint a 3. képességszintet jelenti. Matematikából „A tanulók meg tudnak oldani ismerős kontextusban megjelenő egy-két lépéses problémákat. Végre tudnak hajtani egyértelműen leírt matematikai eljárásokat, amelyek szekvenciális döntési pontokat is magukba foglalhatnak. Képesek egyszerű problémamegoldási stratégiák kiválasztására és alkalmazására. Értelmezni és alkalmazni tudnak különböző információforrásokon alapuló adatmegjelenítéseket, majd ezek alapján érveket tudnak megfogalmazni.” (Balázsi, Balkányi, Ostorics, Palincsár, Rábainé Szabó, Szepesi, Szipőcsné Krolopp & Vadász, 2014, 44. old.)

A minimumszintet a 2. képességszint jelenti, az itt található tanulókra jellemző: „ismerik a legalapvetőbb, közismert matematikai fogalmakat és eljárásokat. Értelmezni tudnak a kontextus alapján közvetlenül megérthető problémaszituációkat. Képesek egyetlen információforrásból megszerezni a szükséges információkat. Meg tudnak oldani egyszerű vagy szimplán matematikai kontextusban megjelenő, jól körülírt, egylépéses problémákat.

Alkalmazni tudnak egyszerű, jól begyakorolt algoritmusokat, képleteket, eljárásokat és megoldási technikákat. Tudnak egyszerűen érvelni és értelmezni az eredményeket.” (Balázsi, Balkányi, Ostorics, Palincsár, Rábainé Szabó, Szepesi, Szipőcsné Krolopp & Vadász, 2014, 44. old.)

Az 1. szinten „a tanulók képesek arra, hogy ismerős, főként matematikai szituációkban, gyakran, kontextus nélküli helyzetben feltett matematikai kérdésekre válaszoljanak. Meg tudnak oldani egyértelmű, jól körülírt és minden szükséges információt tartalmazó feladatokat. Képesek közvetlen utasításokat közvetve rutinszerű eljárásokat végrehajtani. El tudják végezni a feladat kontextusából nyilvánvalóan következő lépéseket.” (Balázsi, Balkányi, Ostorics, Palincsár, Rábainé Szabó, Szepesi, Szipőcsné Krolopp & Vadász, 2014, 45. old.)

A 17. táblázat a mérésben részt vett iskolák az alapszint, illetve minimumszint alatt teljesítő tanulóinak arányát mutatja a matematika kompetenciamérés eredményei alapján.

17. táblázat. Az alapszint és a minimumszint alatt teljesítők aránya az egyes iskolákban az országos kompetenciaméréseken matematikából 2018-ban. (forrás: Országos kompetenciamérés 2018, FIT-jelentés. Intézményi összefoglaló jelentések 6. évfolyam alapján, https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i)

Iskola	Alapszint alatt teljesítők aránya a telephelyen	Minimumszint alatt teljesítők aránya a telephelyen
1.	17,7	3,3
2.	100,0	96,0
3.	26,4	2,9
4.	42,8	23,8
5.	88,9	33,3
6.	91,8	51,0
7.	50,0	0,0
8.	42,8	11,1
9.	0,0	0,0
10.	50,0	7,7
11.	14,3	4,3
Országosan	37,6	13,2

A táblázat alapján látható, hogy a képességeloszlást illetően jelentős különbségek vannak a mintában. Míg a 9. iskolában sem a minimumszint, sem az alapszint alatt nincsenek tanulók, addig a többi iskolában vannak, minden hetedik tanuló az alapszint alatt teljesített a mérésben a 11. iskolában. Hét iskolában több, mint a tanulók 40%-a az alapszint alatt található. Különösen magas ez az arány a 2., 5., 6. iskolában, ahol az arány rendre 100%, 88% és 91 %. A minimumszint alatt teljesítők aránya is ez utóbbi három iskolában magas, a 2. iskolában a tanulók 96 %-a. Az iskolákra vonatkozó 2018-as és a korábbi kompetenciamérések, 2012-ig visszamenőleg, intézményi összefoglaló jelentései is (https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i) azt mutatják, hogy az 1. és a 4. iskolában a tanulók általában az 1.-től a 7. szintig szóródnak, a 3. és a 11. iskolában az 1. és a 6. szint között, a 7. iskola tanuló a 2-5. szint között, a 8. iskola diákjai az 1-5. szint között, a 10. iskola tanulói az 1-4. szint között. A leggyengébb eredményt elérő tanulók: 5. iskola 1-3. szint, 6. iskola 0-4. szint, a legrosszabb a helyzet a 2. iskolában, itt a tanulók a 0-2. szinten találhatók. A legjobb eredményt mutató 9. iskolában a leggyengébb eredmény a 3. szintet jelenti, a legjobb pedig a 7. szintet. (Intézményi összefoglalók, 2018)

Hasonló következtetések vonhatók le a tanulók szövegértési képességének képességszintek szerinti besorolása alapján. Szövegértésben a 3. képességszinten teljesítő tanulók többek között képesek explicit módon megfogalmazott, több feltételnek megfelelő információk visszakeresésére, egyszerű következtetések levonására (Balázsi, Balkányi, Ostorics, Palincsár, Rábainé Szabó, Szepesi, Szipőcsné Krolopp & Vadász, 2014). A 2. képességszinten levő tanulók képesek felismerni a szöveg elemei közötti különbséget, a szöveg és a mindennapi élet közötti kapcsolatot, illetve egy szövegrész témáját. Az 1. képességszinten levő diákok képesek a szövegben kiemelten vagy többször előforduló információk megtalálására, mikor, hol kérdésre választ adni a szöveg alapján, egyszerű kapcsolatok, szókapcsolatok felismerésére.

A táblázat alapján megfigyelhető, hogy képességeloszlást illetően jelentős különbségek vannak a tanulók között a szövegértésben. Három iskola kivételével mindegyikben találunk a szövegértésben minimumszint alatt teljesítő hatodikos gyermeket. A 9. iskolában sem a minimumszint, sem az alapszint alatt nincsenek tanulók. A budapesti iskolák szövegértésben elért teljesítménye jobb, mint a többi iskoláé. Ezen kívül még 10 % vagy az alatt van az alapszint alatt teljesítők aránya a vizsgált Bács-Kiskun megyei iskolában, az egyik Borsod-Abaúj-Zemplén megyei és az egyik Veszprém megyei iskolában. A 8. iskolában a tanulók mintegy ötöde, a 3. iskolában a tanulók közel 30%-a az alapszint alatt teljesít. Az 5. és 6. iskolában a tanulók több, mint fele található az alapszint alatt. Három iskolában a tanulók kb. tizede a minimumszint alatt teljesít. A legrosszabb a helyzet a 2. iskolában, ahol minden tanuló az alapszint alatt teljesített, és a tanulók több, mint három negyede a minimumszintet sem érte el.

A két utóbbi táblázat adatai is alátámasztják, hogy a tanulók szövegértési teljesítménye országosan és iskolánként is, általában jobb, mint a matematika felmérésben elért eredménye. Kivétel ez alól a 3. iskola, ahol a tanulók nagyobb arányban találhatók szövegértésből az alapszint vagy a minimumszint alatt, mint matematikából.

4.6.2. Mérőeszközök

A felmérésben a vizsgált személyek önkéntesen vettek részt. Az adatfelvételre 2019. áprilisa-júniusa között került sor mindegyik iskolában. A vizsgálatban felhasznált mérőeszközök papír-ceruza alapúak voltak. A háttérkérdőíveket a tanulók osztályfőnöki órán töltötték ki, a matematika teszteket pedig matematikaórán, a szakos tanár felügyeletével. Az egyes kérdőívek kitöltéséhez szükséges időt mutatja a 18. táblázat. A vizsgálatban mindhárom évfolyam tanulói számára ugyanazokat az itemeket tartalmazó szorzási stratégiákat mérő tesztfeladatsort adtuk.

18. táblázat. A központi vizsgálatban alkalmazott mérőeszközök

Sorszám	A kérdőív neve	Készítette	Itemszám	Kitöltési idő
1.	Szorzási Stratégiák Teszt	saját fejlesztésű	40	45 perc
2.	Matematika Tudásszintmérő Teszt	saját fejlesztésű	38/ 57/ 71	45 perc
3.	Háttérkérdőív	saját fejlesztésű	95	45 perc
	Összesen			135 perc

A Matematika Tudásszintmérő Tesztek feladatat itemjei között több horgonyitem is található, a 4. évfolyamosok minden feladata szerepel a magasabb évfolyamok feladatai között, hasonlóképpen az ötödikesek minden feladatát tartalmazzák a 6. évfolyamosok által oldott tesztek. A 4. évfolyamosok Matematika Tudásszintmérő Tesztje 38 itemet, az 5. évfolyamosoké 57 itemet, a 6. évfolyamosoké pedig 71 itemet tartalmazott. Mivel az előző vizsgálatok során azt láttuk, hogy a lassabban olvasó tanulók számára túl sok időt igényel kétféle háttérkérdőív kitöltése, ezért a központi vizsgálatban saját fejlesztésű háttérkérdőívet vettük fel a tanulókkal.

Az általunk alkalmazott mérőeszközrendszertől azt várjuk, hogy segít feltérképezni a 4-6. évfolyamos tanulók matematika tudását, és a tesztfeladatok megoldásakor elkövetett hibák a gyakorlati tanítás során is alkalmazható hasznos következtetéseket eredményeznek. Reméljük, hogy ezek a mérőeszközök segítenek megválaszolni kutatási kérdéseinket, segítségükkel igazolhatjuk feltevéseinket.

A tanulóktól a tesztek kitöltése három tanítási órát igényelt. A vizsgálatban részt vevő szakos tanárok véleményére is alapozva a gyengébb képességű tanulók miatt célszerűnek tartottuk a Szorzási Stratégiák Teszt kitöltési idejét 45 percre emelni, így várhatóan alkalmas lesz a különböző képességű gyerekek tudásszintjének mérésére. Ugyanakkor a többletidő használására jogosult SNI, BTM tanulóknak lehetőséget adtunk, hogy azt kihasználják. A vizsgálatban részt vevő gyermekektől az kértük, hogy minden kérdőív, teszt kitöltése során önállóan dolgozzanak. A matematika teszt írása alatt tollon, ceruzán kívül egyéb segédeszközt (pl. számológépet) nem használhattak. A vizsgálatban részt vevő tanulók nem kaptak jutalmat a részvételért, ebből semmilyen előnyük nem származott. Az eredményeket, összefüggéseket az SPSS 16.0 program segítségével értékeltük.

Szorzási Stratégiák Teszt

A központi vizsgálatban már az 5. vizsgálatban használt tesztet alkalmaztuk mindhárom évfolyamon. A teszt a már ismertetett 40 itemet tartalmazza. A tesztváltozatok a feladatok sorrendjében különböznek.

Matematika Tudásszintmérő Teszt

Az 5. vizsgálatban használt tudásszintmérő tesztet továbbfejlesztettük. Egyes feladatait a mérés előkészítésében részt vevő szakos kollégákkal egyeztetve kissé átfogalmaztuk, hogy a gyerekek számára kevesebb szokatlan szó szerepeljen benne. A mérési és értékelési útmutatót korrigáltuk, így a 6. évfolyamosok tesztjén az elérhető maximális pontszám 71-re nőtt. A 6. évfolyamosok esetén a teszt A és B változata között a fő különbség, hogy a B változatban megadtuk a d) itemben szereplő Süsü dédszüleinek számát (8). A 12 feladatból álló teszt A és B változatát a 7. és 8. melléklet tartalmazza.

Az 5. évfolyam mindkét tesztváltozata 57 itemes, 11 feladatot találunk benne. A 6. évfolyam feladatai közül kihagytuk a Törtek feladat aránybővítésre vonatkozó 4 itemét, a Tömeg és a Nyaralás című feladatokat. A teszt feladatait a 9. és 10. mellékletben találjuk.

A 4. évfolyamos tanulók mérésére egy szintén A és B változatot tartalmazó, 8 feladatból álló, 38 itemes tesztet alkalmaztunk. Az 5. évfolyamos teszthez képest ez a teszt nem tartalmazza a Sport című feladat c) itemét. A kockás feladat d) itemét is kihagytuk, illetve a feladat itt 12 kockából álló építmény magasságának kiszámítására vonatkozik. Az Állítások feladatban természetes számok szerepelnek, negatív számok nem. Továbbá a negyedikesek feladatai között nem szerepel a Szögek és a Törtek feladat.

A 4. évfolyamon alkalmazott kétféle tesztváltozat főként a Locsolkodás feladat szövegezésében tér el. A B tesztváltozatban hiányos szöveges feladat szerepel: a feladat szövege nem tartalmazza, hogy egy zacskóban hány darab csokitojás található. Az a tanuló, aki ezt a hiányt észreveszi és jelzi, maximális pontszámot kap a feladatra. Aki az a) itemre 7-tel osztható számmal válaszol, az kap érte pontot, ha pedig a továbbiakban ezzel a számmal jól dolgozik tovább, megkapja a további itemekért járó pontot. Mivel a tanulóktól ezen az évfolyamon még nem várható el, hogy tizedes törtekkel számoljanak, az országos központi matematika felvételi vizsga javítási útmutatásaihoz hasonlóan elfogadjuk az értelemszerűen kerekített természetes számokat is. A teszt feladatait a 11. és 12. mellékletben láthatjuk.

Háttérkérdőív

A központi vizsgálatban az 5. mérésben használt kérdőívet alkalmaztuk az 5-6. évfolyamon. A 4. évfolyamosok számára a kérdőív egyes tételeit átalakítottuk aszerint, milyen tantárgyakat tanulnak. A 4. évfolyamosok mérésekor alkalmazott kérdőívet a 13. mellékletben, az 5-6. évfolyamosok számára készítettet a 14. sz. mellékletben találjuk.

5. EREDMÉNYEK

Ebben a fejezetben az egyes vizsgálatok során kapott eredményekről számolunk be.

5.1. Az első vizsgálat eredményei

Az első vizsgálat mintáját alkotó 13 negyedik osztályos tanuló a legjobb tanulmányi eredményt testnevelésből érte el (4,77), matematikából pedig a leggyengébb tanulmányi átlagot (4,00). A többi tantárgyból tanulmányi eredményük a következő volt: olvasás 4,46, nyelvtan 4,15, környezetismeret 4,62, idegen nyelv 4,54, ének-zene 4,54, rajz 4,62. A vizsgált tanulók közül öt közepes, három jó és öt jeles eredményt ért el matematikából az előző félévben.

A Szöveges feladatok mérőeszköz reliabilitása elfogadható volt (Cronbach-α = 0,68). A tanulók által sikeresen megoldott feladatok átlagpontszáma 3,46 (szórás 1,76), átlagos teljesítményük 43,25%pont (szórás 22%pont).

A tanulók által alkalmazott stratégiák gyakoriságát mutatja a 19. táblázat.

19. táblázat. A szemmozgás-követéses vizsgálatban a tanulók által alkalmazott stratégiák gyakorisága

Stratégia	Alkalmazott stratégiák		Helyes stratégiák	
	száma	relatív gyakorisága (%)	száma	relatív gyakorisága (%)
Számlálás	7	6,73	3	6,67
Tények	29	27,88	25	55,56
Helyiérték szerint jobbról balra	7	6,73	3	6,67
Helyiérték szerint balról jobbra	25	24,04	11	24,44
Holisztikus	5	4,81	3	6,67
Elképzelem fejben leírva	2	1,92		
Racionális hiba	24	23,08		
Félreérti a feladatot	2	1,92		
Nem emlékszik	2	1,92		
Nem oldja meg	2	1,92		
Összesen	104		45	

Megfigyelhetjük, hogy a 104 számítás során a negyedikes tanulók az esetek 27,9 %-ában a tényeken alapuló stratégiát, mintegy 24%-ában a helyiérték szerinti balról jobbra stratégiát alkalmazták a fejben végzett szorzások során (pl. $6 \cdot 19 = 6 \cdot 10 + 6 \cdot 9$), a helyiérték szerinti jobbról balra stratégia alkalmazása ritkábban volt megfigyelhető (Vígh-Kiss, Csíkos és Steklács, 2013). A gyengébb matematika osztályzatú tanulók alkalmazták a számlálás, illetve az elképzelem fejben leírva stratégiát. A matematikában jobb teljesítményt elérő tanulók között megfigyelhettük a holisztikus stratégia alkalmazását is. Ugyanakkor elmondhatjuk, hogy az alkalmazott stratégiák eredményessége a következőképpen alakult: számlálás 42,9%, tények

86,2%, helyiérték szerint jobbról balra stratégia 42,9 %, helyiérték szerint jobbról balra stratégia 44%, holisztikus stratégia 60%. A tanulók magas arányban (23%) ejtettek valamilyen racionális hibát. Erre tipikus példa a 12 · 19 kiszámításakor, hogy először a tízeseket összeszorozták a tízesekkel, majd az egyeseket az egyesekkel, végül a két részletszorzatot összeadták, mintha összeadást végeztek volna. Ez azt mutatja, hogy sem az összeadás, sem a kétjegyű számok szorzásának tulajdonságaival nem voltak teljesen tisztában.

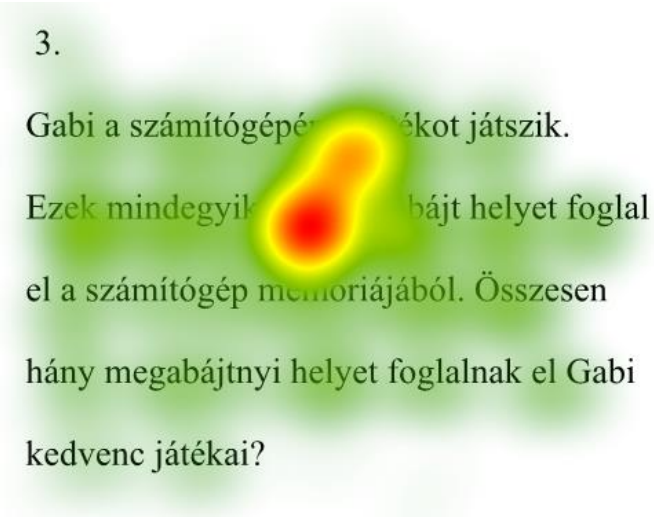
Előfordult a feladatok félreértelmezése is, pl. az első és a második feladat során azt, hogy „A megöntözésért minden lány családja hét-hét festett tojást adott a fiúnak" úgy értelmezték, hogy mindegyik fiúk kétszer hét tojást kapott, így 7 · 8 kiszámítását így oldották meg: (7 + 7) · 8. Illetve annak ellenére, hogy az interjú rögtön a feladat megoldását követően zajlott, két esetben nem emlékeztek, hogyan oldották meg a feladatot. Az egyjegyű számok szorzására vonatkozó feladatokat a jól oldotta meg a tanulók 69%-a, illetve 76,9 %-a, nagyrészt a tényeken alapuló stratégiát alkalmazva, vagyis a szorzótáblát elég magabiztosan tudták. Emellett még az a feladat ment jól, amelyben az egyik szorzótényező a 10 volt. A 5·15 kiszámítása kevesebb, mint a tanulók felének (46,1%-ának) sikerült. A többi feladat már nehézséget okozott a tanulók számára. Az utolsó három feladatot már csupán egy-egy tanuló tudta helyesen kiszámolni. Ennél a három feladatnál volt leginkább megfigyelhető 8 tanuló (a minta 61,5 %-a) esetében a már említett racionális hiba elkövetése. A 20. táblázat a vizsgálat során megfigyelt stratégiákat mutatja.

20. táblázat. A Szemmozgás-követéses vizsgálat során megfigyelt stratégiák.

	Alkalmazott stratégia											
Fela-dat	Szám-lálás	Té-nyek	Jobb-ról	Bal-ról	Holisz-tikus	Elkép-zelem	TT EE	+	Hibás értel-mezés	Nem tudom	Nem ad vá-laszt	Ösz-sze-sen
7·8	2	10							1			
jól	1	8										9 fő
5·7	1	11							1			
jól	1	9										10
6·19			2	7	3		1					
jól			1	4	3							8
5·15	3		2	8								
jól	1		1	4								6
10·49		1	8	1	1		1					
jól			8	1	1							10
12·19			1	1	1		7			1	2	
jól				1								1
11·13				5		1	7			1		
jól				1								1
12·11			1	3		1	8					
jól				1								1
Össze-sen	7	29	7	25	5	2	24		2	2	2	45
Ebből jól	3	25	3	11	3							

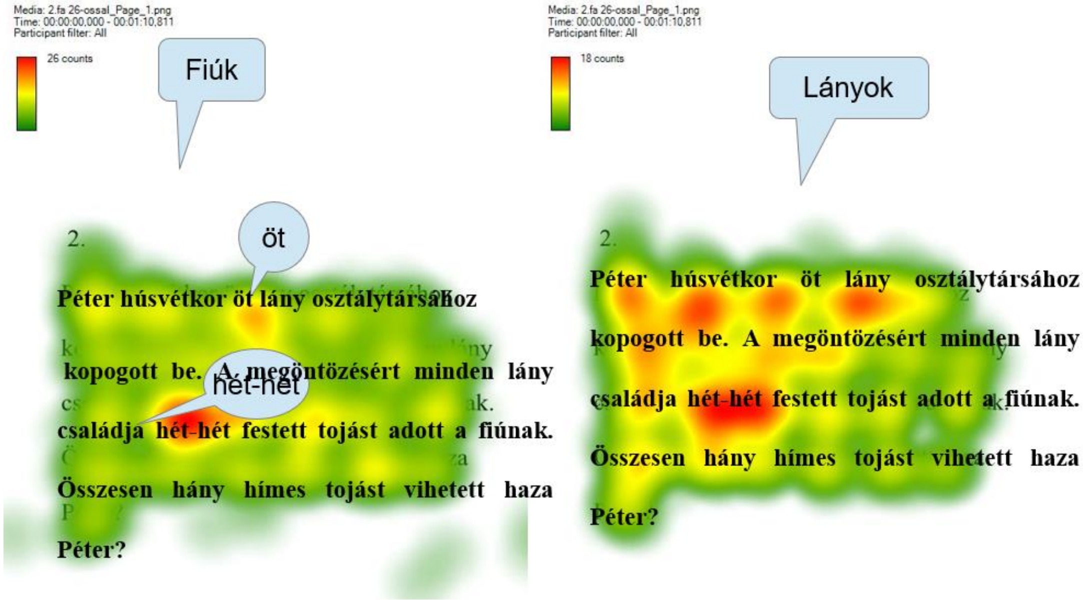
A szöveges feladat modalitása is szerepet játszott a megoldás sikerességében. Ha a számot számnévvel (betűkkel leírva) látták, akkor átlagosan 1,3 feladatot, szórás: 1,76 (16,25%pont, szórás 22%pont) oldottak meg jól a vizsgált negyedikes tanulók. Arab számokkal írva pedig átlagosan 2,15 feladatot oldottak meg, szórás: 1,76 (26,89%pont, szórás 22%pont). Kimutatható összefüggés, közepesen magas korreláció van a feladat modalitása és a megoldottsága között ($r = 0,67$, $t = -3,81$, $p < 0,05$). Ezt más kutatók is kimutatták már szöveges feladatok vizsgálata során.

Az összes vizsgált tanuló szemmozgási adatait összegző ún. hőtérképek a feladat megoldása közben mért fixációk idejét ábrázolja, ahogy a 7. ábrán láthatjuk. Amint láthatjuk, a tanulók a legtovább a fontos adatokra fixáltak, a feladat szövegében szereplő számokat figyelték leginkább. Minden feladat megoldása során a feladatban szereplő adatokat figyelték a legtovább a tanulók, ide esett a legtöbb fixáció, a feladat modalitását függetlenül.



7. ábra A 2. feladat megoldása során mért fixációs idő alapján készült hőtérkép

A szöveges feladatok olvasása, értelmezése során megfigyelhető volt a nemek közötti eltérés. Erre tipikus példa a második feladat, mely a locsolkodásra vonatkozik. 2. feladat szövege így hangzott: „Péter húsvétkor öt lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja hét-hét festett tojást adott a fiúnak. Összesen hány hímes tojást vihetett haza Péter?" A feladat szövegét olvasva a fiúk főleg csak a fontos információkra, a számokra figyeltek, figyelhetjük meg a 10. ábrán. Ezzel szemben a lányok tüzetesen átolvasták a feladat szövegét. A fiúk és a lányok fixációját hasonlítja össze ugyanezen a feladaton a 8. ábra.

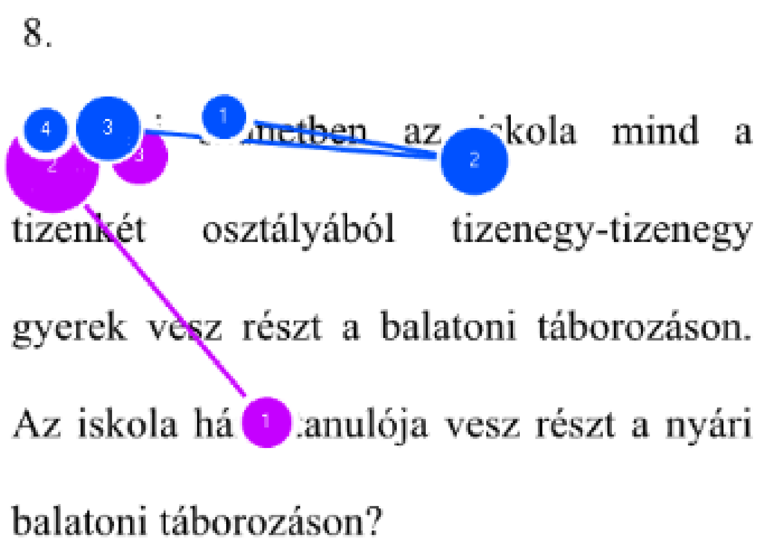


8. ábra A fiúk és a lányok fixációjának összehasonlítása a 2. feladat szövege esetén

Ennek éppen fordítottja volt érvényes a sportversennyel kapcsolatos 4. feladatra, itt a fiúk fixáltak tovább, mint a lányok. Összességében úgy láttuk, hogy a 3-as, 4-es matematika osztályzattal rendelkező tanulók hőtérképe színesebb volt, míg az 5-ös osztályzatúak hőtérképén kevesebb fixáció látható.

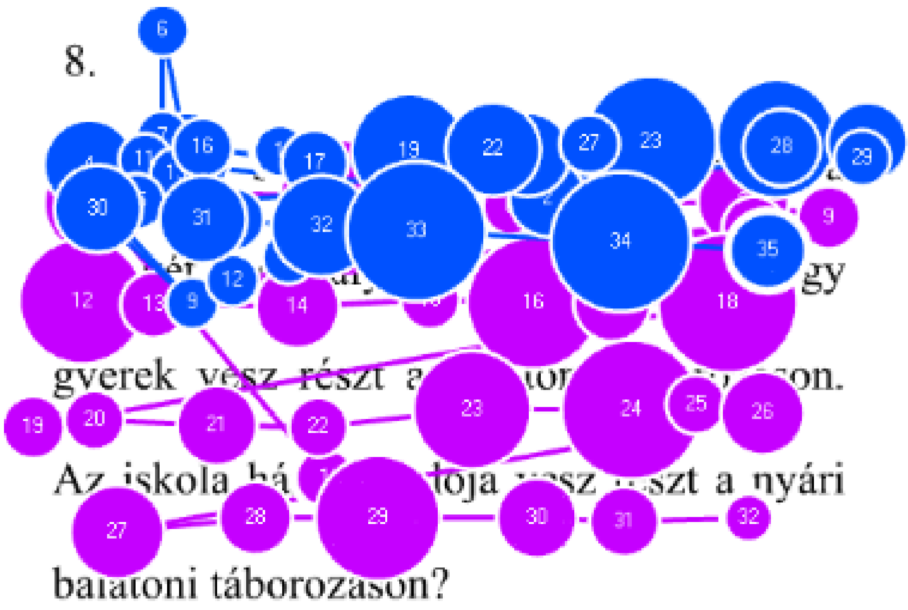
A 8. feladat megoldásáról készült animált videó pillanatfelvételei segítségével két tanuló szemmozgását követhetjük nyomon a 12., a 13., és a 14. ábrákon. Mindkét tanuló közepes osztályzatot kapott félévkor matematikából és jó osztályzatot olvasásból. A lila színnel jelölt gyermek lány, az olvasás szeretetére 5-öst jelölt be a kérdőíven, a kék színnel jelölt fiú pedig 4-est. A lány tervei között egyetem szerepel a továbbtanulásban, a fiút ez még egyáltalán nem foglalkoztatja, az iskolába járás szeretetében is különbözőek, a lány szeret iskolába járni (5), a fiú nem (1).

Látható, hogy a gyorsabban olvasó gyermek gyakran feleannyi ideig fixál egy-egy szóra, köztük a lényeges információt hordozó, betűvel kiírt számnévre is. A gyorsabban olvasó tanuló először azt is megnézi, milyen kérdésre kell majd válaszolnia, ezt látjuk a 9. ábrán. A gyorsabban olvasó tanulót lila, a lassabban olvasót pedig kék színnel jelöltük.



9. ábra A 8. feladat megoldása, egy fiú és egy lány szemmozgásának összehasonlítása

A gyorsabban olvasó gyermek szemmozgását mutató lila és a lassabban olvasó gyermek szemmozgását jelentő kék vonalak mutatják, hogy a vizsgált tanulók vissza-visszaugranak egy-egy szóra olvasás közben, ezt mutatja a 10. ábra.

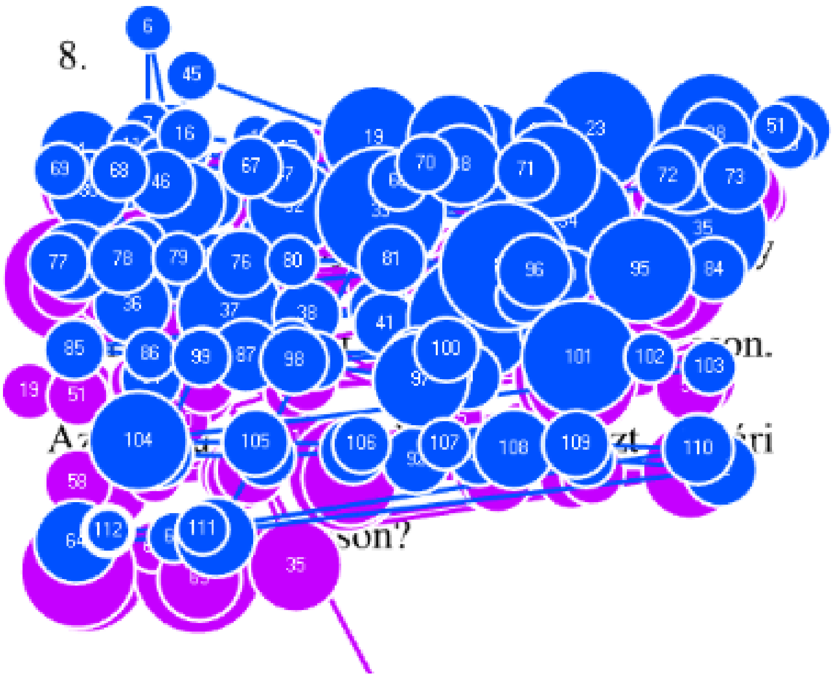


10. ábra A fixációs idők a 8. feladat megoldása közben

A tanulók olvasási folyamatának tipikus esetét láthatjuk a videófelvételeket végignézve. Megfigyelhetjük, hogy a lila színnel jelölt tanuló először végigolvassa a szöveget, de olvasás közben rövidebb és hosszabb időre visszaugrik a már elolvasott szövegre, ún. regressziós szakkádokat alkalmazva. A *hány* és a *tizenkét*, valamint a *tizenegy-tizenegy* szavakra ismételten visszatér. A tanuló rövidebb szakkádokat alkalmaz, mintha nehéz szöveget olvasna, ugyanakkor a gyakoribb és hosszabb a fixációk alapján feltételezhetjük, hogy az átlagosnál lassabban olvas (az olvasás osztályzata alapján ez valószínűleg igaz is). Hasonló megállapítás igaz a kék színnel jelölt gyermek olvasására.

A gyorsabban olvasó gyermek 20 másodperc alatt elolvasta a 8. feladat szövegét, majd újra kezdte, a feladat elejére mutató lila vonalak jelzik ezt. A lassabban olvasó tanulónak 35 másodpercébe telt a szöveg elolvasása, ő ugyanis az első két sor után újra kezdte olvasni a feladat szövegét. Ez a gyermek még kevésbé gyakorlott olvasó, a hangos olvasás jellemzőivel olvas, mintha magában szótagolná, vagy hangoztatná az olvasottakat a mélyebb megértés érdekében. A feladat szövegének második olvasásakor ez a hangoshoz hasonlatos olvasási mód eltűnik, helyét gyorsabb szemmozgások veszik át. A tanuló végig pásztázza a feladat szövegét, többször visszatérve a kulcsszavakra.
A kék színnel jelölt tanuló tovább keresi a szövegben az első olvasás során hiányzó, fontos információkat. Többször elkezdi újraolvasni a szöveget, majd végül többször hosszasan fixál a számnevekre. Mindkét tanuló esetén tapasztalhatjuk azt a jelenséget, amit felnőttek vizsgálatakor. A megoldás megadása előtti pillanatokban megfigyelt, az átlagoshoz képest jóval hosszabb fixáció Steklács (2014) szerint arra utal, hogy ekkor a gondolkodási folyamat mellett nem folyik információfelvétel. Ez az óriásfixáció mindkét tanulónál már azt jelzi, hogy a gondolkodási folyamatokban az információfelvétel lezárult, helyét átvette az információfeldolgozás.

50 másodperc eltelte után a gyorsabb tanuló megoldotta a feladatot, és a lap alján látható lila vonal mutatja, hogy már kinézett a szövegből, ezt figyelhetjük meg a 11. ábrán. A lassabban olvasónak a feladat megoldása 1 perc 38 másodpercébe került.



11. ábra A gyorsabb olvasó befejezte a feladat megoldását

A feladatok szövegére hosszabban fixáltak a tanulók, ha az kétjegyű számot tartalmazott. Az egyjegyű és kétjegyű számokat tartalmazó feladatokra vonatkozó statisztikát tartalmaz a 21. táblázat. Megfigyelhetjük, hogy a kétjegyű számokat tartalmazó feladatok esetén a fixációs idő átlagosan négyszer-hatszor nagyobb, mint egyjegyű számok esetén. A fixációk száma átlagosan négyszer több kétjegyű számokat tartalmazó feladatok esetén, a szakkádok száma pedig háromszorosa.

21. táblázat. Az átlagos fixációs idő, fixációszám, a szakkádok átlagos száma

Statisztika		Feladatra összesen	Egyjegyű számot tartalmazó	Kétjegyű számot tartalmazó
Fixációs idő	Átlag	313,99	63,63	250,36
	Szórás	132,99	20,02	119,00
	Minimum	135,15	52,50	98,43
	Maximum	587,24	105,56	481,68
Fixációk száma	Átlag	650,46	130,54	519,92
	Szórás	201,13	20,86	195,26
	Minimum	434	100	318
	Maximum	968	164	916
Szakkádok száma	Átlag	21,38	5,54	15,85
	Szórás	7,72	2,26	6,43
	Minimum	15	3	9
	Maximum	41	10	31

Nagyon érdekes eredményeket kapunk, ha a különböző modalitású feladatok esetén a fixációs időket hasonlítjuk össze, ezt mutatja a 22. táblázat.

22. táblázat. A fixációs idők összehasonlítása

Statisztika	Modalitás	Részminták					
		Matematika osztályzat				Olvasás	
		3-as vagy 4-es	5-ös	Fiúk	Lányok	4-es	5-ös
Átlag	Arab számmal	40,68	44,09	37,15	49,74	41,89	42,1
	Betűvel	59,50	77	53,75	86,2	59,57	74
Maximum	Arab számmal	99,17	81,26	99,17	81,26	99,17	81,26
	Betűvel	77	129	77	129	77	129
Minimum	Arab számmal	18,72	13,06	13,06	22	18,72	13,06
	Betűvel	44	45	45	44	44	45
Összes	Arab számmal	325,43	220,44	297,16	248,7	293,26	252,61
	Betűvel	476	385	430	431	417	444
Szórás	Arab számmal	26,58	33,97	28,64	29,02	28,47	30,77
	Betűvel	13,49	39,87	10,51	33,77	14,57	36,41

A feladat szövegében arab számmal írt szám mind a matematikából és olvasásból gyengébb és a jobb osztályzatú diákoknak is egyaránt könnyebbséget jelentett, a fiúk és lányok esetében is ezt tapasztalhattuk. A betűvel való leírás gyakran másfélszerannyi fixációs időt jelentett. Ha a szám arab számmal volt írva, akkor a matematikából, illetve olvasásból 5-ös osztályzattal rendelkező tanulók átlagosan kevesebb ideig fixáltak a számokra, mint gyengébb osztályzattal bíró társaik. Megfigyelhettük azt is, hogy ez esetben a lányok kevesebb ideig fixáltak egy-egy számra, mint a fiúk. Ugyanakkor, ha betűvel volt írva a szám, akkor az a matematikából és olvasásból 5-ös osztályzatúaknak, továbbá a lányok számára jelentett nagyobb kihívást, eredményezett hosszabb fixációs időt. A fixációs idők összehasonlítását tartalmazza a 27. táblázat. A fixációk időkkel kapcsolatosan megfigyelhető volt az, is, hogy az 5-ös matematika és olvasás osztályzattal bíró tanulók, illetve a lányok esetén a fixációs idejére vonatkozóan a szórás nagyobb volt mind az arab számmal írt számok, mind a betűvel írt számok esetén (Vígh -Kiss, Csíkos és Steklács, 2019).

Vizsgálatunk során számos szignifikáns korrelációt találtunk a háttérkérdőívvel kapcsolatosan. Amit kiemelnénk, a félévi matematika osztályzat és a 4. feladat megoldása 0,70 ($p < 0,01$), illetve az 5. feladat megoldása szorosabb kapcsolatot mutattak 0,62 ($p < 0,05$).

Összefoglalás

A H1a hipotézisünk igazolódott. Az alkalmazott mérőeszköz reliabilitása megfelelő volt.
Az alkalmazott stratégiák számára vonatkozó H2a hipotézis igazolódott, a negyedik osztályosok legalább ötféle stratégiát alkalmaztak a fejben végzett szorzások során. A számlálás, a tények, a jobbról balra és a balról jobbra, valamint a holisztikus stratégia mellett megfigyelhető volt az elképzelem fejben leírva stratégia alkalmazása.
Az alkalmazott stratégiákra vonatkozó H4 hipotézisünk igazolódott. Az egyjegyű számok szorzására vonatkozó feladatokat a negyedikes tanulók emlékezeti előhívás segítségével oldják meg (ld. Lemaire, & Siegler, 1995), a szorzótáblából ismert tényként elevenítik fel; ugyanakkor a számlálás stratégiát is alkalmazták a gyengébb matematika osztályzattal bíró tanulók. A 3-8. feladat megoldása során a helyiérték szerinti balról jobbra stratégia használata volt a leggyakoribb. Emellett különbségeket tapasztaltunk a matematikában tehetséges és többségi gyerekek stratégiahasználatában (ld. Thomas, 2002). A kétjegyű számok szorzásakor általában a helyiérték szerinti balról jobbra, ritkábban a jobbról balra stratégiát alkalmazták a negyedikes tanulók, míg a matematikában tehetséges gyerekek (a felnőttekhez hasonlóan) a holisztikus stratégiát. A gyengébb tanulók alkalmazták az elképzelem fejben leírva stratégiát (ld. Csíkos, 2013). Ugyanakkor az alkalmazott stratégiák sikeressége csak a tények stratégia esetében érte el a 80 %-ot, a holisztikus stratégia esetén 60% volt, de a többi stratégia kevesebb, mint az esetek felében volt sikeres (Vígh-Kiss, Csíkos & Steklács, 2019).

H2e hipotézisünk igazolódott. Megfigyelhető volt néhány hibás stratégia alkalmazása (v.ö.: De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére, & Verschaffel, 2010 definíciója). „A gyermekek által alkalmazott stratégiák sok esetben nem tudatosak, többször is tapasztaltuk a felmérések közben, hogy a tanulók beszámoltak olyan stratégiákról, amelyeket nem alkalmaztak, és ennek ellentétjét is láttuk: alkalmaztak bizonyos adaptív stratégiákat, de nem voltak tudatában ennek" (Steklács, 2014). A tanítás sikeressége érdekében érdemes lenne jobban megismerni ezeket a gondolkodási struktúrákat, ezzel együtt fejleszteni a gyermekek metakognitív tudását is (Csíkos 2007).
A

Az oktatási rendszer hatékonyságát növelheti, ha információkat szerzünk a tanulók gondolkodási, tanulási, olvasási, információfeldolgozási, feladatmegoldási stratégiáiról. A szemkamerás vizsgálatok segíthetik a tanulók stratégiahasználatának megismerését. A kutatási eljárás kvalitatív és kvantitatív vizsgálatok foglal magában, így segítségével könnyebben diagnosztizálhatók az adott számolási képességek közötti különbségek.

Ez a kutatás hasznos és érdekes eredményeket hozott, mivel hazánkban szorzási stratégiák használatára vonatkozó szemmozgás követésen alapuló kutatások még nem folytak. A vizsgálat tapasztalatait az eDia feladatbankba írt matematikafeladatok írása során, és a későbbi vizsgálatok előkészítésekor a mérőeszközök kialakítása során is figyelembe vettük. A jövőre nézve kutatási feladatként fogalmaztuk meg további keresztmetszeti és longitudinális vizsgálatok végzését, mérőeszközök kidolgozását, majd fejlesztő kísérlet végzését.

5.2. A második vizsgálat eredményei

A szorzási stratégiák vizsgálata 14-18 éves tanulók körében

Keresztmetszeti vizsgálat során 23 nyolcadikos és 97 szakközépiskolás szorzási stratégiáit vizsgáltuk. A mintában szereplő diákokra vonatkozó statisztikai adatokat a 23. táblázat tartalmazza.

23. táblázat. A második vizsgálat mintájára vonatkozó statisztika

Évfolyam	Átlag-életkor (év)	Összesen (fő)	Fiú (fő)	Lány (fő)	Évfolyam-ismétlő (fő)	Matematika Átlag (fő)	Felmentett (fő)	Tárgyismétlő (fő)
8.	14,26	23	9	14	0	4,61	0	0
9.	14,50	45	8	37	13	2,24	3	8
10.	17,04	27	12	15	10	2,61	4	3
12.	18,21	25	15	10	5	3,45	4	0
Összesen	16,00	120	44	76	18	3,23	11	11

Szorzástesztet kitöltő diákok (N = 120) átlagéletkora 16 év volt. A vizsgált tanulók 36,70%-a fiú volt. A középiskolás diákok 18,56%-a évfolyamismétlő volt, matematikából felmentett 11,30%-uk, illetve 11,30%-uk felmentett matematikából, ők mindannyian a 9-10. évfolyamra jártak.

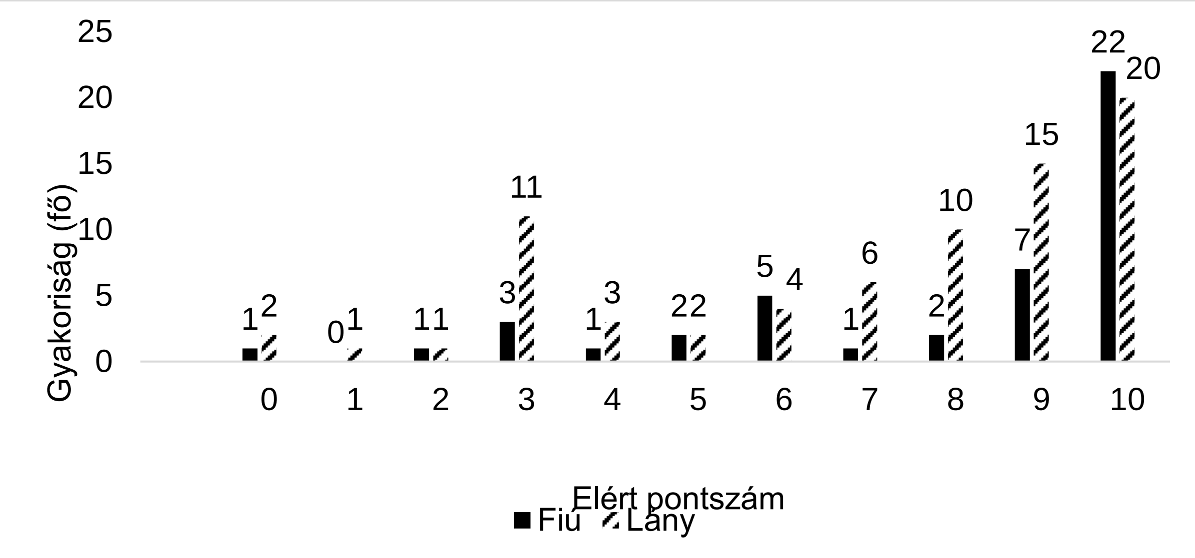
A Szorzási Stratégiák Teszt reliabilitása a teljes mintán megfelelő volt (Cronbach-α = 0,877). A teszt megoldottságára vonatkozó adatokat a 24. táblázatban találjuk.

24. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt megoldottsága a második vizsgálat során

Évfolyam	Összesen (%pont)	A osztály (%pont)	B osztály (%pont)	C osztály (%pont)
8.	93,00	92,00	95,00	
9.	66,30	89,40	52,90	55,00
10.	75,40	66,30	84,50	
12.	85,80		93,60	78,00
Átlag	80,10			

A 120 fős mintán a teszten az évfolyamok által elért átlagteljesítmény 80,1%pont volt, összességében 55%pont és 95%pont között mozgott. A legjobb teljesítményt a 8. évfolyamos tanulók, illetve az egyik végzős osztály hozta, míg a 9. évfolyamon két osztály tanulói alig több, mint 50%pontot értek el a tesztben, ez a matematika osztályzatukkal függ össze.

A 12. ábra a 14-18 évesek által elért eredményeket mutatja fejben szorzás során. Mind a 10 feladatot 42 fő oldotta meg jól, a fiúk 48,9%-a (20 fő), a lányok 28,94%-a (22 fő).



12. ábra A 14-18 évesek eredménye fejben szorzás során

Az itemek átlagpontszámát, szórását és egyéb statisztikai mutatóit foglalja össze a 25. táblázat.

25. táblázat. A második vizsgálatban elért eredmény itemenként

Item	Átlag	Szórás	Cron-bach-alfa	Fiúk helyesen (%)	Lányok helyesen (%)	Szórás Szign.	Megoldottság szign.
5 · 8	0,97	0,18	0,88	97,80	96,00	n.s.	n.s.
6 · 9	0,89	0,31	0,89	84,40	92,00	p < 0 ,02	n.s.
8 · 10	0,97	0,18	0,88	97,80	96,00	n.s.	n.s.
11· 12	0,71	0,46	0,86	75,60	68,00	n.s.	n.s.
13 · 11	0,71	0,46	0,86	80,00	65,30	p < 0,001	n.s.
15 · 12	0,71	0,46	0,85	77,80	66,70	n.s.	n.s.
25 · 17	0,61	0,49	0,86	73,30	53,30	p < 0,001	p < 0 ,05
40 · 13	0,70	0,46	0,85	71,10	69,30	n.s.	n.s.
8 · 29	0,60	0,49	0,86	73,30	52,00	p < 0,001	p < 0,03
6 · 19	0,63	0,48	0,86	71,10	58,70	p = 0,005	n.s.
Fiúk	8,02	2,72	0,88				
Lányok	7,17	2,91	0,88				
Összesen	7,49	2,86	0,88	48,90	26,70	n.s.	n.s.

A tanulók átlagosan 7,49 feladatot oldottak meg a tízből. A 45 fő fiú átlagosan 8,02 feladatot, a 75 fő lány átlagosan 7,17 feladat. Az első három itemet a jobb matematika eredményt elérő tanulók a tények, illetve a holisztikus stratégia segítségével, a számolásban gyenge tanulók a számlálás, a többségi tanulók pedig a tények stratégia segítségével oldották meg. A többi itemnél a jobb képességű tanulók a helyiérték szerinti, illetve a holisztikus stratégiákat alkalmazták. A többségi tanulók a helyiérték szerinti stratégiákat, a számolásban gyenge tanulók között pedig inkább a helyiérték szerinti balról jobbra és az elképzelem fejben leírva stratégiák használata volt gyakoribb.

A tanulóknak tíz szorzást kellett elvégezniük fejben. Eredményeink szerint több helyes és hibás stratégia is megfigyelhető volt a gyereknél (*Vígh-Kiss*, 2014e). Néhány példát mutat a tanulók által használt stratégiákra a 26. táblázat.

26. táblázat. A fejben szorzás során alkalmazott stratégiák, második vizsgálat

Feladat	Helyes eredményre vezető stratégiák	Hibás eredményre vezető stratégiák
5 · 8	Tények, 10 · 5 – 5 – 5, 10 · 8 : 2, Számlálás	
6 · 9	Tények, 10 · 6 – 6, 10 · 9 : 2 + 9	
8 · 10	Tények, 5 · 10 + 3 · 10	
11 · 12	12 · 10 + 12 · 1, 10 · 12 + 12, 11 · 10 + 11 · 2, 12 · 12 - 12, 11 · 2 + 11 · 10 Számlálás, Fejben elképzelem leírva	TT + EE = 10 · 10 + 1 · 2, 11 · 10 + 1 · 12, 11 ·10 · 2 10 · 10 + 2 · 10
13 · 11	13 · 10 + 13 · 1 10 · 13 + 13, 12 · 11 + 11, 13 · 1+13 ·10, Számlálás, Fejben elképzelem leírva	TT + EE, 13 · 10 +1 · 11, 13 · 10 + 10 · 10, 10 · 10 · 3
15 · 12	15 · 10 + 15 · 2, 10 · 12 : 2 · 3, 15 · 2 + 15 ·10, 10 · 12 · 1,5, Számlálás, Fejben elképzelem leírva	TT + EE, 15 · 10 + 1 · 12, 15 · 10 · 12, 10 · 10 · 2 · 5
25 · 17	25 · 10 + 25 · 7, 10 · 25 + 5 · 25 +2 · 25 10 · 17 + 10 · 17 + 5 · 17 25 · 10 + 25 · 4 + 25 · 3 100 · 17 : 4 + 100 : 4 · 7 25 · 20 – 3 · 25 10 · 17 : 2 · 5 25 · 10 + 20 · 7 + 5 · 7 25 · 7 + 25 · 10 Számlálás, Fejben elképzelem leírva	10 · 25 + 10 · 17 10 · 17 · 2 · 5, 20 · 10 · 35, 25 · 10 · 5 · 2, 25 · 10 · 7

26. táblázat. A fejben szorzás során alkalmazott stratégiák, második vizsgálat (folytatás)

Feladat	Helyes eredményre vezető stratégiák	Hibás eredményre vezető stratégiák
$40 \cdot 13$	$40 \cdot 10 + 40 \cdot 3$, $10 \cdot 40 + 3 \cdot 40$ $(4 \cdot 10 + 4 \cdot 13) \cdot 10$ $13 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 2$, $10 \cdot 13 \cdot 4$, $10 \cdot 4 \cdot 13$ $10 \cdot 13 + 10 \cdot 13 + 10 \cdot 13 + 10 \cdot 13$ Számlálás, Fejben elképzelem leírva	$40 \cdot 10 +12$, $40 \cdot 10 + 3$ $40 \cdot 10 + 10 \cdot 13$ $40 \cdot 10 + 1 \cdot 13$ $40 \cdot 10 \cdot 3$
$8 \cdot 29$	$8 \cdot 20 + 8 \cdot 9$, $20 \cdot 8 + 9 \cdot 8$ $8 \cdot 30 – 8$, $8 \cdot 10 \cdot 2 + 8 \cdot 9$, $2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 10$, $80 \cdot 2 + 8 \cdot 9$, $8 \cdot 9 + 8 \cdot 20$ $29 \cdot 5 + 29 \cdot 3$, Számlálás, Fejben elképzelem leírva	$8 \cdot 9 + 8 \cdot 2$, $8 \cdot 2 + 8 \cdot 9$, $20 + 8 \cdot 9$, $8 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$6 \cdot 19$	$6 \cdot 10 + 6 \cdot 9$, $10 \cdot 6 + 9 \cdot 6$, $6 \cdot 9 + 6 \cdot 10$, $6 \cdot 20 – 6$, $6 \cdot 10 \cdot 2 – 6$, $19 \cdot 2 \cdot 3$, $19 \cdot 5+19$, Számlálás, Tények, Fejben elképzelem leírva	$6 \cdot 9 + 6$, $6 \cdot 1 + 6 \cdot 9$ $6 \cdot 9 + 10$, $6 \cdot 10 + 9$ $6 \cdot 9 \cdot 10$

A hibás eredményre vezető stratégiák közül némelyik az összeadási stratégiák között fellelhető stepwise (lépésenkénti) stratégia hibás analógiájára jöhetett létre, ezt jelöli a táblázat TT + EE rövidítéssel. Itt a tanuló a tízeseket a tízesekkel szorozza, az egyeseket pedig az egyesekkel, majd a kétszorzatot összeadja, ami hibás stratégia. Megfigyelhető, hogy néhány tanuló a második szorzótényező tízesek helyiértékén álló számmal szorozza a szorzandót, majd a szorzandó egyesek helyiértékén álló számmal a szorzót, vagy a szorzandót szorozza a szorzóban levő számjegyek valódi értékeinek szorzatával.

A táblázatból látható, hogy a magyar tanulók egy része számos szorzási stratégiát ismer és helyesen használ. Kutatásunk szerint a matematikából gyengébb tanulók gyakrabban folyamodnak felsőbb évfolyamokon is a (CO) számlálás stratégiához, a stratégia használatáról a megkérdezett tanulók 5%-a (6 fő középiskolás) számolt be az egyjegyű számok szorzásával kapcsolatosan. A matematikából jeles eredményű tanulók közül többek számára akár kétjegyű szám kétjegyű számmal történő szorzása is ismert tényként jelent meg (BF), mintha már megtanulta volna, mint a szorzótáblát. Ennek a stratégiának a használatáról a tanulók 10%-a számolt be, ők mind nyolcadikos tanulók voltak. A tanulók túlnyomórészt (az esetek 47,5%-ában) a helyiérték szerinti balról jobba (LR) stratégiát használták a kétjegyű számok szorzására. A helyiérték szerinti jobbról balra (RL) stratégiát a tanulók 2,5%-a alkalmazta. A gyengébb képességű magyar tanulók is alkalmazzák Hope és Sherrill (1987) által megfigyelt „fejben elképzelem leírva" startégiát, ennek a stratégiának az alkalmazásáról a tanulók 3%-a számolt be. A tanulók egy kis része (5%-a) a számokat mint egy egészet fogja fel (WH, holisztikus stratégia), és azzal számol, a megfelelő mértékben csökkenti vagy növeli a szorzatot. Ezeken kívül még egyéni stratégiák alkalmazása is megfigyelhető volt. A többi tanuló hibás eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Ugyanakkor a helyes eredményre vezető stratégiák alkalmazása során is sok számolási hibát ejtettek a diákok.

A Szorzási Stratégiák Teszt itemeinek egymással vett korrelációját vizsgálva többnyire közepesen erős, szignifikáns korrelációt figyeltünk meg. A legerősebb korrelációt az 1. és 3. item, 4. és 6. item, 6. és 8. item között figyeltük meg, a korrelációk rendre 0,74; 0,76; 0,70 ($p < 0,01$).

Összegzés

H1a hipotézisünk igazolódott, a Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.

H2a: A fejszámolással megoldható szorzási feladatokban 10-18 évesek legalább ötféle különböző stratégiát alkalmaznak (vö.: Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999). Ez a hipotézisünk igazolódott.

H2d: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző osztályok között. Ez a hipotézisünk igazolódott.

H2e: A vizsgált tanulók körében megfigyelhetők racionális hibák (vö.: Ben-Zeev, 1998). Ez a hipotézisünk igazolódott, számos esetben találkoztunk racionális hibákkal a vizsgálat során.

H3 hipotézisünk részben igazolódott, a megoldáskor alkalmazott szorzási stratégia és annak adaptivitása összefüggésbe hozható a tanuló nemével, tanulmányi eredményével, valamint a tanulási nehézségekkel és zavarokkal.

H4 hipotézisünk igazolódott. A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazták: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö: Hope & Sherrill, 1987).

H5b: A szorzási feladatok megoldása során az alacsonyabb évfolyamos tanulók gyengébb eredményt érnek el, mint a magasabb évfolyamok tanulói. Ez a hipotézisünk nem igazolódott, a nyolcadikos diákok teljesítménye magasabb volt a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során, mint a 9. és 10. évfolyamosoké.

A Szorzási Stratégiák Teszten tapasztalt igen gyenge eredmények alapján úgy gondoljuk, szükséges lenne a középiskolában is folytatni a fejben számolást, a számolási stratégiák tanítását. A minta elemszáma miatt célszerűnek találtuk további kutatások végzését, és a további vizsgálatokban alkalmazható Szorzási Stratégiák Teszt és Matematika Tudásszintmérő Teszt fejlesztését.

5.3. A harmadik vizsgálat eredményei

Pilotmérés 7. évfolyamos tanulók körében

2015 szeptember elején egy kismintás előmérés során próbáltuk ki a Szorzási Stratégiák Tesztet és a Matematika Tudásszintmérő Tesztet egy budapesti általános iskola két hetedik osztályában (N = 61 fő).

5.3.1. A Szorzási Stratégiák Teszt fejlesztése

A Szorzási Stratégiák Teszt esetén az volt célunk, hogy egy jól használható mérőeszközt fejlesszünk ki. A szorzásteszt két változata ugyanazokat a szorzásokat tartalmazta, más sorrendben. Mindkét tesztváltozat 60 itemet tartalmazott. A teszt részben a hasonló kutatásokban már használt és saját készítésű szorzásokat is tartalmazott, méghozzá a következőképpen: egyjegyű szám kétjegyű számmal való szorzása (9 item), egyjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (5 item), egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal (1 item), kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal (34 item), kétjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (10 item), háromjegyű szám szorzása háromjegyű számmal (1 item).

A tanulók 30 perc tiszta időt kaptak a feladatsor megoldására. A Cronbach-α 0,90 lett, ami számolási képességmérő teszt esetén elfogadható érték. A teszt itemeinek elkülönítésmutatóit az 1., 2. és 3.sz. függelék tartalmazza. A 60 itemes teszt 9 iteme zéró varianciájú volt, (vagy túl könnyűek voltak, és szinte mindenki helyesen megoldotta, vagy valószínűleg idő híján senki sem oldotta meg,) így ezeket a további teszt összeállításakor kihagytuk, és a maradék 51 itemet vizsgáltuk hasonlóképpen, ahogy a tudásszintmérő tesztet. A Szorzási Stratégiák Teszt itemeit is lépésenkénti lineáris regressziószámításnak vetettük alá. Mindkét tesztváltozat esetében itt is 8-8 item bírt a legnagyobb magyarázó erővel, 95,4%, 28 item adta a megmagyarázott variancia 99,5 %-át. Mivel nyolc itemet kevésnek tartottuk a teszt itemszámára, ezért itt is az elkülönítésmutatókat használtuk fel a további vizsgálathoz szükséges nagyobb reliabilitású teszt elkészítésére. A szakirodalom (Falus & Ollé, 2008) szerint a 61 fős minta esetén az elkülönítésmutatónak legalább 0,2500-nak kell lennie 95%-os szignifikancia esetén. Az itemmutatók nagyság szerinti csökkenő sorrendbe állítása után a negatív és 0,15 alatti értékűeket a tesztfejlesztés során elhagytuk. Mivel a hasonló, szorzásra vonatkozó nemzetközi felmérésekben is szerepeltek nagyobb mintás vizsgálatokban olyan itemek, amelyek a mi mérésünknél 0,15 és 0,25 itemmutatóval rendelkeztek, ezért ezeket az itemeket végül mégis benne hagytuk a tesztben, remélve, hogy a nagyobb mintás vizsgálat során már nem fogják rontani a reliabilitást. Így az első 10 item és utolsó 10 item kikerült a tesztből, a későbbi nagymintás vizsgálat során egy 40 itemes tesztet alkalmaztunk.

5.3.2. Matematika Tudásszintmérő Teszt fejlesztése

A vizsgálat előtt a tanulók előzőleg nem ismételték át a témakört. Kutatásunk célja az volt, hogy megvizsgáljuk a tudásszintmérő tesztváltozatok reliabilitását, és itemkihagyásos reliabilitás vizsgálatával, az elkülönítésmutatók segítségével összeállítsunk az arányosság témaköréből egy jól működő mérőeszközt, hiszen az arányossági feladatok megoldása során gyakran végzünk szorzást. Az A tesztváltozatot 31 fő, a B változatot 30 fő oldotta meg. Tesztünk megbízhatóságának jellemzésére a Cronbach-α-t választottuk. Mindkét tesztváltozat esetén a Cronbach- α 0,93 volt.

Az elkülönítésmutató vizsgálata azért fontos, mert megmutatja az item viselkedését, az item és a teszt összpontszáma közötti korreláció (Hajtman, 1968). Az elkülönítésmutató megmutatja azt, hogy egy-egy item ugyanazt méri-e, mint a teszt egésze, elkülöníti a jól működő itemeket a rosszul mérőktől. Tehát azt mutatja meg, hogy a teszttel azonos módon különíti-e el egymástól a különböző tudásszintű tanulókat, mennyire hasonlóan differenciál, mint a teszt. A plusz egyhez közeli korrelációs együttható igen szoros kapcsolatot jelez, a 0-hoz közeli érték pedig nem kimutatható kapcsolatot jelent az item és a teszt között (bár lehet, hogy van összefüggés az adatsorok között). Negatív elkülönítésmutatójú item ellentétesen differenciál, mint maga a teszt, ezért ezeket és az alacsony (0,3 alatti) korrelációjú itemeket a tesztfejlesztés során érdemes elhagyni (Kontra, 2011).

Az itemmutatókat nagyság szerint csökkenő sorrendbe állítottuk, és a negatív és 0 közeli értékűeket a tesztfejlesztés során elhagytuk. Így a későbbi nagymintás vizsgálat során az A tesztváltozat első és utolsó két feladatát, a B változat utolsó három feladatát már nem alkalmaztuk. Azért, hogy a tartalmi validitást ne sértsük, a tesztben hagytunk olyan itemeket is, amelyek mutatója alacsonyabb volt. A nagymintás vizsgálat elemzésekor érdemes visszatérni arra a kérdésre, hogy szükséges-e mindegyik item, nem lehet-e még tovább rövidíteni a tesztet.

Az itemnehézség egy másik itemmutató, értéke minél közelebb van az egyhez, annál többen oldották meg jól, vagyis annál könnyeb az item. Ezzel szemben a 0-hoz közeli érték azt jelzi, hogy nehéz az item, a tanulók többsége nem tudta megoldani. A normaorientált értékelés szempontjából a 0 és az 1 itemnehézségű itemek nem differenciálnak kellőképpen a tanulók között, csak a helyet foglalják a tesztben. Bár az 50 %-os megoldottságú (vagyis 0,5-es nehézségű) itemek mérnek a legjobban, a tartalmi validitás megőrzése érdekében a tesztbe nem csak kb. 50%-os nehézségű itemeket teszünk, mert a különféle nehézségű itemek pontosabban tudnak differenciálni a gyengébb és jobb képességű tanulók között.

Validitásnak nevezzük a teszt azon tulajdonságát, amely arra világít rá, valóban azt méri-e, amit mérni akartunk vele (Nagy, 1975). A validitás biztosítása érdekében törekedtünk arra, hogy a feladatok utasítása, szövege ne legyen túlhosszú és bonyolult, és igyekeztünk a gyerekek életkori sajátosságaihoz, érdeklődési köréhez igazítani. A tartalmi validitás biztosítása érdekében áttanulmányoztuk az aktuális kerettantervet, a használatban lévő felső tagozatos matematika tankönyvcsaládokat, a mérésmódszertani könyveket, írásokat. Így a tesztfeladatok összhangban vannak a tudomány eredményeivel (szakmai validitás). Az elkészült feladatokból azután azokat választottuk ki, amelyek az arányossági gondolkodás mérésére legalkalmasabbaknak találtunk (mintavételi validitás). Úgy véljük, a kiválasztott feladatok segítségével képesek leszünk az arányossági gondolkodás mérésére (funkcionális validitás). A megoldó-és javítókulcs elkészítésekor törekedtünk arra, hogy a feladatokat nehézségi szintjüknek megfelelően pontozzuk, a tovább már nem bontható feladatrészeket, itemeket egy ponttal értékeljük (skálázási validitás).

Az összes tartalmi terület lefedéséhez szükséges feladatmennyiség nem fért bele egy tesztbe, illetve a tanulók egymás munkájának felhasználásának kizárására egy A és egy B tesztváltozatot készítettünk. A két változat kisebb része kiegészítette egymást, nagyobb része pedig izomorf volt. Mindkét tesztváltozat 80 itemet tartalmazott. A tanulók 60 perc tiszta időt kaptak a feladatsor megoldására. Mivel az itemek nemcsak az algebra témaköréből valók, hanem szerepel bennünk geometriai ismeretekre kérdező is, előfordulhat, hogy egy adott feladatot azért nem tudja teljes sikerrel megoldani a tanuló, mert hiányosak a geometriai ismeretei. Ugyanakkor a gyermek teljes matematikatudásáról sem kaphatunk átfogó képet. Azonban mégis azt reméljük, hogy ez a teszt árnyaltabb képet adhat, mint egy csak algebrai ismereteket mérő teszt.

A teszt itemeit lépésenkénti lineáris regressziószámításnak vetettük alá, hogy megtudjuk, mely itemek magyarázzák legnagyobb mértékben a teszten kapott összpontszámot. Mindkét tesztváltozat esetében 8-8 item bír a legnagyobb magyarázó erővel, 94,9%, 22 item adja a megmagyarázott variancia 99,3%-át. 8 item kevés egy teszthez, ahogy 22 is. Mivel ennyire nem akartuk lerövidíteni a tesztet, ezért az elkülönítésmutatókat használtuk fel a további vizsgálatok elvégzéséhez szükséges nagyobb reliabilitású teszt elkészítésére.

Összefoglalás

H1a és H1b hipotézisünk igazolódott. A pilotmérés során sikerült kifejlesztenünk további vizsgálatainkhoz két mérőeszközt. Mind a Szorzási Stratégiák Teszt, mind a Matematika Tudásszintmérő Teszt megfelelő reliabilitású volt.

5.4. A negyedik vizsgálat eredményei

A szorzási stratégiák vizsgálata 6. évfolyamos tanulók körében

A negyedik vizsgálat során szerettünk volna megismerni az általunk kifejlesztett tesztek viselkedését, ezért azt statisztikai módszerekkel vizsgáltuk. További célunk volt a fejszámolás során alkalmazott szorzási stratégiák vizsgálata, a részminták közötti különbségek megelétének vizsgálat és a szorzási stratégiák használatának összefüggései néhány háttérváltozóval.

A Szorzási Stratégiák Teszt jóságmutatói

A harmadik vizsgálat során kifejlesztett, szorzási stratégiák alkalmazását mérő papír-ceruza alapú teszt mindkét változata 40 itemet tartalmazott. Ugyanazokat az itemeket tartalmazta mindkét változat, más sorrendben. A tesztet három budapesti iskola hat osztályában használtuk fel. A tesztet 154 tanuló töltötte ki. Mivel a minta nem reprezentatív, így a mérési eredmények csak a mintára érvényesek. A teszt megbízhatóan mér (Cronbach-α = 0,95, átlag 26,16, szórás: 11,11).

A nemek szerint részmintákon is megfelelő a teszt reliabilitása (81 lány esetén Cronbach-α = 0,95, a 73 fiúk esetén pedig Cronbach-α = 0,96). A lányok átlaga 24,8 (szórás 11,00), a fiúk átlaga 27,66 (szórás 11,13). A reliabilitás értéke iskolánként más, de legalább 0,91, mindhárom iskola tanulóinak teljesítményét jól méri a teszt, a H1a hipotézisünk igazolódott.

A Szorzási Stratégiák Teszt elemzése

A Szorzási Stratégiák Teszt főbb jellemzőit foglaljuk most össze. Egyik item törlésével sem változna pár századnál többet a teszt reliabilitása. A legkönnyebb itemnek a 14. item bizonyult, megoldottsága 86%-os. Könnyű itemek voltak a vizsgált hatodikosok számára a 4., 29. és a 30. item. A legnehezebb itemnek a 3. item bizonyult, a vizsgált tanulók mintegy fele oldotta meg, ez az item jól differenciálja a hatodikosokat. Kevésbé sikerült még megoldani a 16., 31., 36. és 38. itemeket. A leggyengébb teljesítményt a teszten a 38. itemen tapasztaltuk, megoldottsága 50,1%. Egyik itemet sem oldotta meg mindenki hibátlanul, de olyan sem volt, amelyiket senki sem tudta volna kiszámolni.

Az egyes tesztrészek közötti korreláció mindenütt pozitív, szignifikáns kapcsolatot mutatott. Kétjegyű szám háromjegyű számmal és a kétjegyű szám kétjegyű számmal való szorzásakor láttuk a legmagasabb, de még közepesen erős korrelációt (r=0,65). Szintén közepes korrelációt találtunk egyjegyű szám kétjegyű számmal és kétjegyű szám háromjegyű számmal való szorzásánál (r=0,51), valamint egyjegyű szám kétjegyű számmal és egyjegyű szám háromjegyű számmal való szorzása esetén (r=0,57). A kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal szorzástípus, a háromjegyű szám szorzása háromjegyű számmal gyenge kapcsolatot (r=0,20), és mindegyik másik szorzástípussal közepesen erős kapcsolatot mutatott ($p < 0{,}02$).

A 27. táblázat az egyes szorzástípusok során elért átlagpontszámot, a megoldottság mértékét és a szórást mutatja.

27. táblázat. Az egyes szorzástípusok során elért átlagpontszám, a megoldottság mértéke és a szórás, Szorzási Stratégiák Teszt, negyedik vizsgálat

Feladattípus	Átlagpontszám	Megoldottság	Szórás
Egyjegyű kétjegyűvel	1,49	74,50%	0,70
Egyjegyű háromjegyűvel	2,73	68,25%	1,36
Egyjegyű négyjegyűvel	1,53	76,50%	0,69
Kétjegyű kétjegyűvel	17,37	62,04%	8,78
Kétjegyű háromjegyűvel	2,23	74,33%	0,91
Háromjegyű háromjegyűvel	0,68	68,00%	0,47
Szorzási Stratégiák Teszt	26,02	65,05%	11,08

Láthatjuk, hogy mindegyik típus megoldottsága 60% fölötti, ami egy képességtesztnél jó eredmény. A legkönnyebb a tanulók számára az egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal, illetve kétjegyű számmal volt (75% körüli megoldottság). A legnehezebben a kétjegyű szám szorzása volt kétjegyű számmal, itt a megoldottság alig több, mint 62% és nagy a szórás.

A Szorzási Stratégiák Teszt szerkezetének vizsgálata

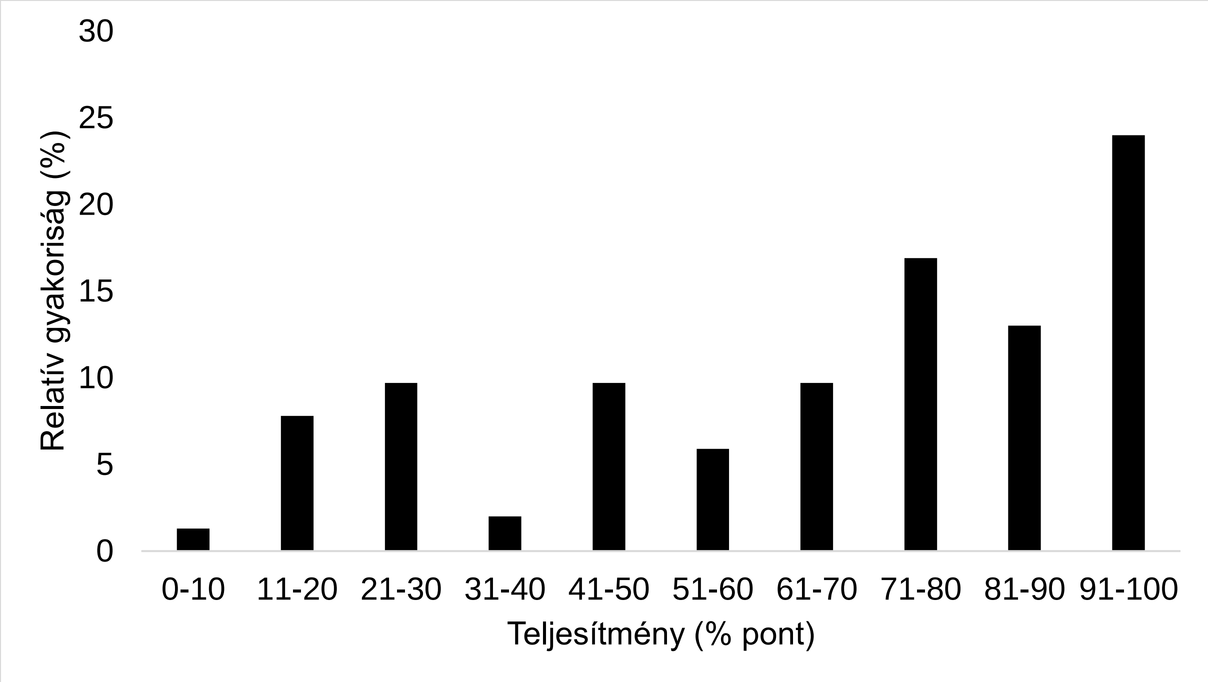
Szerettünk volna választ kapni arra, hogy milyen szerepe van az egyes tesztrészeknek a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredményekre. Kíváncsiak voltunk arra, hogyan kapcsolódnak egymáshoz az egyes szorzástípusok. A szorzástípusokra végzett klaszteranalízissel (a csoportok közötti távolság távolságszámítási elv és az euklideszi számítási eljárás alapján) kapott koefficiensek (7,4; 13,1; 19,0; 33,1; 221,7) alapján az egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal és a háromjegyű szám szorzása háromjegyű számmal feladattípus szorosan összekapcsolható. Az egyjegyű szám szorzása kétjegyű számmal ezután kapcsolódik hozzájuk egy kisebb hasonlósági csoportot alkotva, majd a következő lépésben kapcsolódik be a fürtalkotásba a kétjegyű szám szorzása háromjegyű számmal, ezt követően hozzájuk kapcsolódik az egyjegyű szám szorzása háromjegyű számmal feladattípus. Végül a kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal szorzására vonatkozó feladattípus egészíti ki a klasztert.

A teszt szerkezetének feltárására lépésenkénti regresszióanalízist végeztünk. A vizsgálat eredményeképp megtudtuk, mely itemek bírnak az egész teszten elért teljesítménynél a legnagyobb magyarázó erővel. A Szorzási Stratégiák Teszt szerkezetének lépésenkénti regresszióanalízissel történő vizsgálata során a függő változó a teszt pontszáma, a független változók pedig az egyes itemek lesznek. A vizsgálat eredményei szerint a 40 itemes teszt 26. iteme adja a megmagyarázott variancia 58,7%-át, a 13. és 37. itemmel együtt három item már a megmagyarázott variancia 79,5%-át adják. A teszt 10 iteme adja a megmagyarázott variancia 95%-át, egy további vizsgálatban ezeket az itemeket mindenképpen felhasználnánk a vizsgálat során. Egy további item már nem sokkal (0,7%-kal) növeli a variancia magyarázó erejét. 25 item már a variancia 99%-át megmagyarázza. Ha a teszt rövidítését tűznénk ki célul, akkor ezt a 25 itemet választanánk.

Megvizsgáljuk, hogy a teszt megmagyarázott varianciájának 95,7%-át eredményező itemek milyen szorzástípusú feladatokat jelentenek. Megfigyelhetjük, hogy a 25 item között szerepel egyjegyű szám szorzása kétjegyűvel (2 item), egyjegyű szorzása háromjegyűvel (3 item), egyjegyű szorzása négyjegyűvel (1 item), kétjegyű szorzása háromjegyű számmal (3 item), a többi 16 item kétjegyű szám kétjegyű számmal való szorzását kéri. Egy másik lehetséges tesztrövidítés egy másik lineáris regressziószámítás eredményeképp kapható. Ennél a lépésenkénti regresszióanalízisszámításnál a függő változó a teszt pontszáma, a független változók pedig az egyes szorzástípusok lesznek. A lineáris regresszió eredménye szerint a kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal típusú 24 item a megmagyarázott variancia 95,2%-át adja. Ha rövidíteni szeretnénk a tesztet, akkor csak ezeket az itemeket használnánk fel.

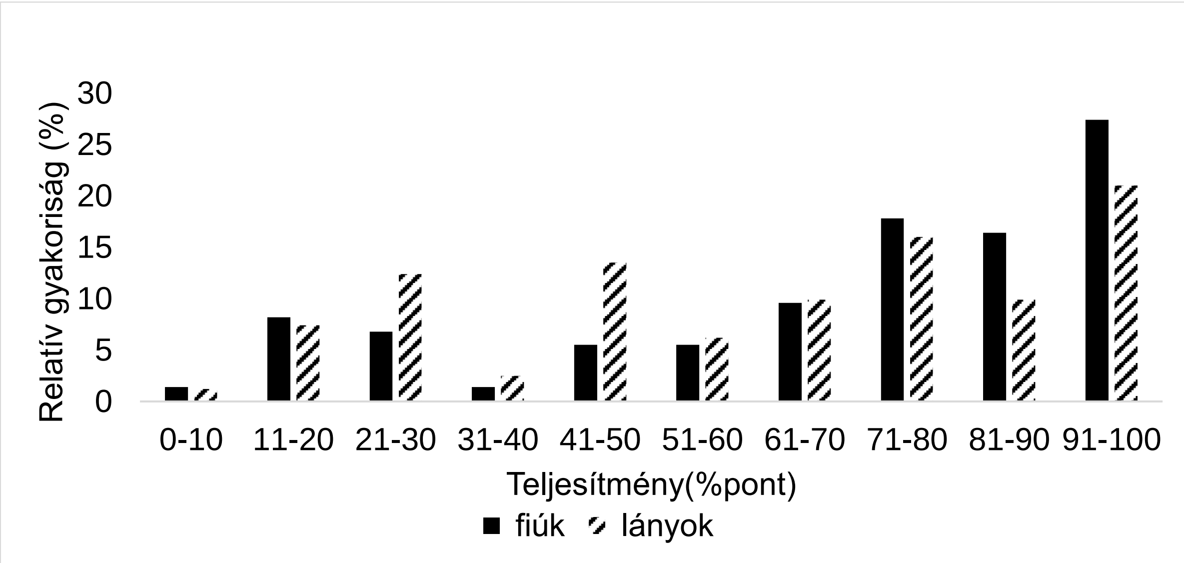
A Szorzási Stratégiák Teszt megoldottsága

A 154 fős mintában a tanulók átlageredménye 26,02 pont volt (65,50 %), módusz 35 pont, medián: 29,29 pont. A teljesítmények átlagpontszáma kisebb a mediánnál és a módusznál, ezért az eloszlás jobbra tolódó eloszlás. A teljesítmények szórása 11,08 pont. A Szorzási Stratégiák Teszt megoldottságának relatív gyakoriságát ábrázoló diagram a 13. ábrán látható. A diákok teszten elért pontszámainak eloszlását tekintve megállapíthatjuk, hogy az egymóduszú. A leggyakrabban elért pontszám a 35 pont volt, ezt 11 tanuló érte el. 20% alatt teljesített 14 tanuló, a teljes minta 9,1%-a, 90% fölött pedig 37 tanuló, a minta 24%-a. A tanulók 54,5%-a ért el a 65,5%-os átlagteljesítménynél jobb eredményt.



13. ábra A teljes minta Szorzási Stratégiák Teszten elért eredményének eloszlása, harmadik vizsgálat

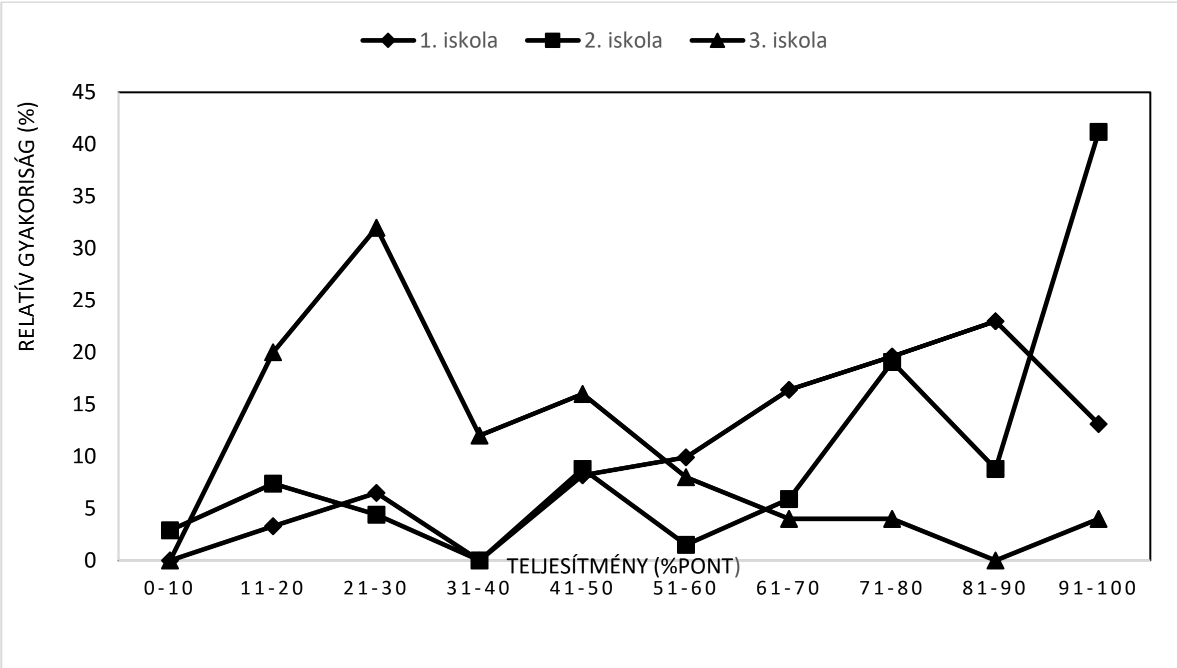
A lányok által elért átlagpontszám (81 fő) 24,8 (szórás 11,00), a fiúk (74 fő) átlaga 27,66 pont (szórás 11,13). A lányoknál a legkisebb pontszám 1, a fiúknál 0 pont volt, a maximumpontszámot mindkét nemből elérték. A fiúk átlagosan jobb eredményt értek el a szorzásteszt során, de ez nem szignifikáns. A fiúk és a lányok Szorzási Stratégiák Teszten elért teljesítményének összehasonlítását mutatja a 14. ábra. Az ábrán látható, hogy a fiúk 9,6%-a és a lányok 8,6%-a ért el 20%-osnál gyengébb teljesítményt a Szorzási Stratégiák Teszten. A fiúk átlagteljesítménye 68,97% volt, a lányoké pedig ettől 7,46%-kal kevesebb, 61,51%. A fiúk 27,4%-a, míg a lányok 21%-a ért el legalább 90%-os teljesítményt.



14. ábra A Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények nemek szerinti összehasonlítása, negyedik vizsgálat

Iskolák és osztályok közötti különbségek

A H2c hipotézisünk szerint: A vizsgált iskolák tanulóinak Szorzási Stratégiák Teszten nyújtott teljesítménye szignifikánsan különbözik. Ez a hipotézis beigazolódott. A 154 fős mintában a tanulók átlageredménye 26,02 pont volt (65,50 %), módusz 35 pont, medián: 29,29 pont. Az egyes iskolák között nagy teljesítményszintbeli eltéréseket figyelhetünk meg. A 15. ábrán látható, hogy az első és a harmadik iskola tanulói között senki sem teljesített 10 % alatt, míg a 2. iskolában az iskola tanulóinak 2,9%-a ez alatt teljesített. Az első iskolában az iskola tanulóinak 13,1%-a, a második iskolában az iskola tanulóinak 41,2%-a, a harmadik iskolában pedig az iskola tanulóinak 4%-a nyújtott legalább 90%-os teljesítményt. Az első iskolában az átlagteljesítmény 69,4% volt, a második iskolában 71,7%, míg a harmadik iskolában 36,1%. Ez a különbség az ábrán is látható, az első és a második iskola eloszlása jobbra szimmetrikus, míg a harmadik iskoláé balra tolódó eloszlású. Ugyanakkor a három iskola közül a második átlagteljesítménye volt magasabb, mint a teljes minta átlaga.



15. ábra A negyedik vizsgálatban részt vevő iskolák teljesítménye a Szorzási Stratégiák Teszten

A 28. táblázatban az iskolák Szorzási stratégiák teszten elért eredményét látjuk.

28. táblázat. Az iskolák Szorzási stratégiák teszten elért eredménye a negyedik vizsgálat során

Iskola	1.	2.	3.	Összesen
Átlag	27,77	28,71	14,44	26,02
Szórás	8,62	11,35	8,26	11,08

Az iskolák közötti különbségeket a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével állapíthatjuk meg. A Levene-féle próba esetén F = 2,87, p = 0,06-t kaptuk, amire p > 0,05 teljesül, vagyis a a részminták által reprezentált populációkban a szórások megegyeznek. Az ANOVA Fischer-féle F értéke 20,65, $p < 0,001$, tehát különbség figyelhető meg az egyes iskolák átlagai között. Mivel a a részminták által reprezentált populációkban a szórások között nincsen szignifikáns különbség, így a post-hoc elemzések közül ismét a Tukey'b –teszt mutatja, hogy az egyes iskolák közötti különbség szignifikáns. Az iskolák két csoportra oszthatók, a 3. iskola teljesítménye szignifikánsan gyengébb, mint a másik csoportot alkotó 1. és 2. iskoláké.

Az egyes osztályokban mért pontértékek eltérnek az egész minta átlagától, ahogy a 29. táblázatban láthatjuk. A teszten elért eredmény iskolánként és osztályonként változó. A szignifikánsan leggyengébb 35,9%-os eredményt a szorzástesztben a 3. iskola tanulói érték el (6. osztály). A legjobban a 2. iskola 5. osztálya és az első iskola 2. osztálya teljesített, 75,55%-os, illetve 75,08%-os teljesítményt értek el. Az első iskolában (61 fő) az elért pontszám átlaga 27,77 (szórás 8,62), a második iskolában (68 fő) az elért pontszám átlaga 28,71 (szórás 11,35) a harmadik iskolában pedig (25 fő) 14,36 (szórás 8,32).

29. táblázat. A szorzásteszt-eredmények osztályonként, negyedik vizsgálat

Iskola	1.			2.		3.	Összesen
Osztály	1.	2.	3.	4.	5.	6.	
Átlag	25,55	30,03	23,35	29,17	30,22	14,36	26,02
Szórás	9,12	7,71	13,79	11,84	7,56	8,32	11,08
Módusz	26	35	37	39	36	5	35
Medián	26	32	25	33	35	11	29,29
Minimum	6	8	0	1	5	0	0
Maximum	40	40	40	40	36	40	40

Az első és a 3. iskolában a fiúk teljesítettek jobban (29,18 átlagpont a 26,11 átlagponttal szemben, illetve 15,8 átlagpont a 14,10 átlagponttal szemben, míg a 2. iskolában a lányok eredményei voltak jobbak (29,70 átlagpont a fiúk 27,77 átlagpontjával szemben), a szignifikanciaszint $p < 0,001$.

Az osztályok közötti különbségeket a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével állapítottuk meg. A Levene-féle próba esetén $F = 4,47$, $p = 0,001$-t kaptuk, amire $p < 0,05$ teljesül, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások között szignifikáns különbség van. Az ANOVA Fischer-féle F értéke 11,098, $p < 0,001$, azaz különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között. Mivel a részminták által reprezentált populációkban a szórások között szignifikáns a különbség, így a post-hoc elemzések közül a Dunnett T3–teszt eredményei mutatják, hogy szignifikáns különbség van az egyes osztályok teszten elért eredményei között. Az osztályokat két csoportra oszthatjuk, a 3. és 6. osztály tartoznak egy csoportba. Egy másik csoportot alkot a többi négy osztály (az 1., 2., 4. és 5.).

A Szorzási Stratégiák Teszten 20%-nál gyengébb teljesítményt ért el az 1. osztály tanulóinak 3,4 %-a, a 2. osztály tanulóinak 3,1 %-a, a 3. osztály tanulóinak 23,5 %-a, a negyedik osztály tanulóinak 8,3 %-a, az ötödik osztály tanulóinak 3,7 %-a és a hatodik osztály tanulóinak ötöde. A 90 %-ot elért tanulók a legnagyobb arányban a második iskola tanulói közül kerültek ki, a harmadik osztályból 29,4 %, a negyedik osztályból 41,7 %, az ötödik osztályból 48,1%. A legkisebb arányban a harmadik iskolából kerültek ki ezt a teljesítményszintet elért tanulók (a hatodik osztály tanulóinak a 4 %-a). Míg az első iskola első és második osztályában ez az arány 10,3 % és 15,6 %. A H2d hipotézisünk beigazolódott.

5.4.1. A hatodikos tanulók által alkalmazott szorzási stratégiák

A vizsgálat során további két hipotézisünk a hatodikos tanulók által alkalmazott szorzási stratégiákra vonatkozott.

H4 hipotézisünk szerint a vizsgált tanulók körében megfigyelhető racionális hibák elkövetése. Ez a hipotézisünk beigazolódott, számos hibás stratégia használatát megfigyeltük (vö. De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére & Verschaffel, 2010), ezt mutatja a 30. táblázat.

30. táblázat. A fejben szorzás során alkalmazott stratégiák, negyedik vizsgálat

Feladat	Helyes eredményre vezető stratégiák	Hibás eredményre vezető stratégiák
13 · 13	13 · 10 + 13 · 3, 10 · 13 + 3 · 13, 13 · 10 + 3 · 13, 15 · 13 – 2 · 13, Számlálás, Tények, Fejben elképzelem leírva	TT + EE = 10 · 10 + 3 · 3, 13 • 10 + 1 • 13, 13 ·10 · 3 10 · 10 + 3 · 10
25 · 32	25 · 30 + 25 · 2, 10 · 25 · 3 + 2 · 25 20 · 32 + 5 · 32 20 · 32 + 10 · 32 :2 100 · 32 : 4 Számlálás, Tények, Fejben elképzelem leírva	10 · 25 + 10 · 17 10 · 32 · 2 · 5, 20 · 30 · 5 · 2, 25 · 10 · 5 · 2, 25 · 10 · 7

A táblázatból látható, hogy a vizsgált hatodikos tanulók egy része számos szorzási stratégiát ismer és helyesen használ. Kutatásunk szerint a matematikából gyengébb tanulók gyakrabban alkalmazták a (CO) számlálás stratégiát. Míg az ügyesebb tanulók számára akár kétjegyű szám kétjegyű számmal történő szorzásának eredményét tudják a szorzótáblából (BF), a 15 · 15, 16 · 16, 24 · 24, 20 · 30 típusú szorzások kapcsán. Néhányan úgy nyilatkoztak a 20 · 30 szorzat kiszámításakor: 2 · 3 = 6 és mögé írunk két nullát, tehár tkp. egy ismert szabályt alkalmaztak (ez is BF stratégia). A tanulók számos esetben alkalmazták a helyiérték szerinti balról jobbra (LR) és a jobbról balra (RL) stratégiát, és annak számos, a szakirodalomban nem részletezett és emiatt nehezen tipizálható változatát. A gyengébb képességű magyar tanulók is alkalmazzák Hope és Sherrill (1987) által megfigyelt „fejben elképzelem leírva" stratégiát. A 2. iskola tanulói szemmel láthatóan is szignifikánsan többen alkalmazták ezt a stratégiát, volt, aki valóban le is írta a részletszámításokat, kvázi nem is fejben végezte a szorzásokat. Ezt figyelembe véve már nem mondhatjuk, hogy ebben az iskolában voltak legeredményesebbek a hatodikos tanulók a fejszámolásban.

A tanulók egy kis része a kerek tízesekhez, százasokhoz közeli számokat mint egy egészet fogja fel (WH, holisztikus stratégia), és azzal számol, a megfelelő mértékben csökkenti vagy növeli a szorzatot. Így a $8 \cdot 99$ kiszámítása történhet úgy, hogy először kiszámítja a $8 \cdot 100$ szorzatot, majd ebből kivon $1 \cdot 8$-at. A $17 \cdot 99$, $8 \cdot 999$ szorzások számításakor többen is alkalmazták ezt a stratégiát. Ezeken kívül még egyéni stratégiák alkalmazása is megfigyelhető.

A szorzáskor a gyenge matematikai osztályzattal rendelkező tanulók szignifikánsan többször hibáztak. A tanulók többsége mereven ragaszkodott egyetlen stratégia alkalmazásához, akkor is, ha az nem volt hatékony, azaz adaptív De Smedt és munkatársai (2010) definíciója szerint.

H2a hipotézisünk szerint a vizsgált diákok a fejben végzett szorzási feladatok megoldásakor legalább ötféle stratégiát alkalmaznak. Ez a hipotézisünk beigazolódott. A vizsgált tanulók sz egyjegyű számok fejben szorzására leggyakrabban az emlékezeti visszahívás stratégiát, a kétjegyű számokkal való szorzáskor pedig a helyi érték szerinti stratégiákat alkalmazták. Az egyjegyű számok szorzása: emlékezeti előhívás segítségével oldják meg (ld. Lemaire, & Siegler, 1995). A kétjegyű számok szorzásakor általában a helyiérték szerinti balról jobbra, vagy jobbról balra stratégiát alkalmazták, míg a jobb matematikaosztályzattal bíró gyerekek gyakrabban alkalmazták a holisztikus stratégiát. Úgy tűnik, magyar tanulókra is jellemző a „fejben elképzelem leírva” stratégia használata (v.ö.: Hope, & Sherill, 1987; Csíkos, 2013; Vígh-Kiss, Csíkos és Steklács, 2013). A gyengébb tanulók pedig a fejszámolás során is leírták a részeredményeket, ezt különösen a 2. iskola tanulói alkalmazták, őket a további vizsgálatból kivettük.

A pilotmérések során először Heirdsfield, Cooper, Mulligan és Irons (1999) által leírt stratégiák alapján kódoltuk a tanulók által használt stratégiákat. Ám a vizsgálatok során egyre nyilvánvalóbbá vált, hogy az általunk mért tanulók ezeken kívül is többféle stratégiát alkalmaznak a fejben szorzás során. Így a központi vizsgálat előtt a Hope és Sherrill (1987) tanulmányában leírt 12 stratégiát tartalmazó rendszert finomítottuk, és a Heirdsfield, Cooper, Mulligan és Irons által leírt ötféle stratégiával ötvözve, a tanulók által használt stratégiákat pilotméréseink tapasztalatai alapján 35 különböző stratégiába soroltuk be. A kódolás során az elkülönített stratégiákat mutatja be a 31. táblázat. Heirdsfield, Cooper, Mulligan és Irons (1999), illetve Hope és Sherrill (1987) által használt elnevezéseket a 3. táblázatban angolul feltüntettük. Vizsgálataink során Hope és Sherill 1987-ben publikált tanulmányában említett kutatásai során használt szorzásokat is vizsgáltunk.

31. táblázat. A vizsgálat során elkülönített szorzási stratégiák

Kód	Stratégia	Példa
0	Üresen hagyja	
99	Írásban számol	Szemmel láthatóak az erre utaló mellékszámítások
19	Számológéppel számol	A tanuló vagy tanára ezt jelzi
1	„Fejben történő írásbeli szorzás”	„Elképzelem fejben leírva”

31. táblázat. A vizsgálat során elkülönített szorzási stratégiák (folytatás)

Stratégia	Példa	
10	Minden részletszorzatot számjegyenként szoroz össze *(P&P0, Hope és Sherrill)*	$480 \cdot 25$ kiszámítása: $480 \cdot 5$ az $5 \cdot 0$, $5 \cdot 8 = 40$, leírom a 0-t, marad a 4, $5 \cdot 4 + 4 = 24$ $2 \cdot 480$ az $2 \cdot 0 = 0$, $2 \cdot 8 = 16$, leírom a 6-ot, marad az 1, $2 \cdot 4 + 1 = 9$, azaz 9600. $9600 + 2400 = 12000$
11	Egy részletszorzatot számjegyenként szoroz össze, egyet emlékezeti előhívással számol ki *(P&P1, Hope és Sherrill)*	$25 \cdot 48$ kiszámítása: $5 \cdot 48$ az $5 \cdot 8 = 40$, leírom a 0-t, marad a 4, $5 \cdot 4 + 4 = 24$, 240, $2 \cdot 48$ az 96, ezt már tudom fejből, $240 + 960 = 1200$
12	Két részletszorzatot emlékezeti előhívással számol ki *(P&P2, Hope és Sherrill)*	$12 \cdot 250$ kiszámítása: $2 \cdot 250$ az 500, $1 \cdot 250$ az 250, azaz $500 + 2500 = 3000$
13	Felhalmozás, egyjegyű szám többjegyű számmal történő szorzása során, a maradékot nem veszi figyelembe (*stacking, Hope, & Sherrill*)	$8 \cdot 999$ kiszámítása: $8 \cdot 9 = 72$, 72, 72, az eredmény 727272.
2	Additív disztribúció (*additive distribution, Hope, & Sherrill*)	$4211 \cdot 8 = 8 \cdot 4000 + 8 \cdot 200 + 8 \cdot 10 + 8 \cdot 1$
21	Kétjegyű számmal való szorzás során az egyesekkel kezd (*right to left separated strategy, Heirdsfield és mtársai)*	$5 \cdot 17 = 5 \cdot 7 + 5 \cdot 10$ $12 \cdot 15 = 2 \cdot 15 + 10 \cdot 15$ $12 \cdot 15 = 12 \cdot 5 + 12 \cdot 10$
22	Kétjegyű számmal való szorzás során a tízesekkel kezd (*left to right separated strategy, Heirdsfield és mtársai)*	$5 \cdot 17 = 5 \cdot 10 + 5 \cdot 7$ $12 \cdot 15 = 10 \cdot 15 + 2 \cdot 15$ $12 \cdot 15 = 12 \cdot 10 + 12 \cdot 5$
25	Összeadandókra tagolja az egyik tényezőt	$25 \cdot 120 = 25 \cdot 100 + 25 \cdot 20$
26	Mindkét tényezőt összeadandókra tagolja	$25 \cdot 35 = 20 \cdot 30 + 5 \cdot 30 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 5$ (bármilyen sorrendben)
3	Frakcionális disztribúció (*fractional distribution, Hope, & Sherrill*)	$15 \cdot 48$ kiszámítása $10 \cdot 48$, ennek fele az $5 \cdot 48$, a két részeredményt összeadjuk
33	Számlálás (Counting strategy, *Heirdsfield és mtársai)*	$19 \cdot 5 = 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19$
4	Szubsztraktív disztribúció (*subtractive distribution, Hope, & Sherrill; wholistic strategy, Heirdsfield és mtársai*)	$8 \cdot 999 = 8 \cdot (1000 - 1) = 8000 – 8 = 7992$
5	Kvadratikus disztribúció (*quadratic distribution, Hope, & Sherrill*)	$49 \cdot 51 = 50^2 - 1^2$
6	Általános faktorizálás, egyik vagy mindkét tényező szorzattá bontása (*general factoring, Hope, & Sherrill)*	$25 \cdot 48 = 5 \cdot 5 \cdot 48 = 5 \cdot 240 = 1200$ $25 \cdot 48 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 24$
7	Felezés-duplázás: az egyik tényezőt felezi, a másikat duplázza (*half-and-double, Hope, & Sherrill)*	$12 \cdot 16 = 6 \cdot 32 = 6 \cdot 30 + 6 \cdot 2$
74	Felezés-duplázás, szubsztrakcióval	$12 \cdot 16 = 6 \cdot 32 = 6 \cdot (40 - 8) = 6 \cdot 40 - 6 \cdot 8$
8	Maradék nélkül osztható részekre bontás (*aliquot parts, Hope, & Sherrill)*	$25 \cdot 48 = \frac{100}{4} \cdot 48 = 100 \cdot \frac{48}{4} = 1200$
81	Maradék nélkül osztható részekre bontás, az egyik tényező átalakítása	$12 \cdot 250 = 12 \cdot 500 : 2$ $150 \cdot 6 = 150 : 10 : 2 + 150$

31. táblázat. A vizsgálat során elkülönített szorzási stratégiák (folytatás)

Stratégia	Példa	
50	„Ismert szabály" alkalmazása	„Ha egész számot tízzel szorzunk, a szám mögé írunk egy nullát"
51	„Algebrai azonosság" alkalmazása, összeg négyzete	$11 \cdot 11 = (10 + 1) \cdot (10 + 1) = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 1 + 1^2$
52	„Algebrai átalakítás"	$12 \cdot 250 = 10 \cdot 200 + 20 \cdot 50$, mert $2 \cdot 200 = 8 \cdot 50$, ehhez a $12 \cdot 50$-et hozzáadjuk, az $20 \cdot 50$
55	Emlékezeti előhívás (*retrieval of a numerical equivalent, Hope, & Sherrill, Basic fact strategy Heirdsfield és mtársai))*	„Ezt már fejből tudom", „Erre emlékszem"
9	Exponenciális faktorizálás (*exponetial factoring, Hope. & Sherrill)*	$32 \cdot 32 = 2^5 \cdot 2^5 = 2^{10} = 1024$
91	„Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz az összeadás mintájára	$15 \cdot 16 = 10 \cdot 10 + 5 \cdot 6$
92	„Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz, majd hozzáadja még egyszer az egyik tényezőt	$15 \cdot 16 = 10 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 15$
93	Kétjegyű számmal való szorzás során a tízesekkel kezd, majd hozzáadja még egyszer az egyik tényezőt	$19 \cdot 21 = 19 \cdot 2 \cdot 10 + 21$
94	Kétjegyű számmal való szorzás során a tízesekkel kezd, majd ehhez hozzáadja az egyik tényező helyiérték szerinti felbontással kapott tagjainak szorzatát	$12 \cdot 15 = 12 \cdot 10 + 10 \cdot 5$
95	„Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz	$24 \cdot 24 = 25 \cdot 24 + 5 \cdot 25$
96	Szubsztraktív disztribúció 2. változat	$15 \cdot 48 = 15 \cdot 50 - 48 \cdot 2$
97	Az egyik tényező egyeseivel való részletszorzatok hiányoznak	$32 \cdot 32 = 32 \cdot 30 + 2 \cdot 30$
98	Helyiérték figyelembevétele nélkül számol	$52 \cdot 120 = 5 \cdot 120 + 2 \cdot 120$
100	Egyéb, az előzőektől különböző, helytelen eredményre vezető stratégia	$12 \cdot 16 = 12 + 16$ $19 \cdot 21 = 20 \cdot 20$ $8 \cdot 999 = 8 \cdot 99 + 8 \cdot 9$ $8 \cdot 999 = 8 \cdot 900 + 9 \cdot 3$ $8 \cdot 99 = 8 \cdot 90 + 9 \cdot 1$ $8 \cdot 4211 = 8 \cdot 4000 + 200 \cdot 11$

Az egyéb, az előzőektől különböző, helytelen eredményre vezető stratégiák közé sorolt összes esetet nem soroltuk fel a táblázatban, ide tartozott pl. a $25 \cdot 48 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 8$ számítási stratégia is.

A Matematika Tudásszintmérő Teszt jóságmutatói

A kulcsfontosságú tesztjellemzők biztosításáról a tesztfejlesztés részben már beszéltünk. Úgy véljük, a tesztre teljesül az objektivitás és validitása is megfelelő. A matematika tudásszintet mérő papír-ceruza alapú teszt mindkét változata 12 feladatot, 69 itemet tartalmazott. A tesztfejlesztést követően kapott tesztet 3 budapesti iskola hat osztályában használtuk fel. A mintából hatan hiányoztak a tudásszintmérő íratásakor, így a vizsgálat 148 tanuló eredményeit tükrözi. Az A változatot 73 fő oldotta meg, Cronbach-α = 0,94, átlag 34,14, szórás: 15,03. A B változatot 75 fő oldotta meg, Cronbach-α = 0,96, átlag 32,67, szórás: 17,16. A reliabilitás értéke mindkét tesztváltozat esetén magasabb, mint 0,90, vagyis a teszt megbízhatóan mér (*Nagy*, 1975). Lányok (77 fő) esetén a teszt reliabilitása Cronbach-α = 0,95, fiúk (71 fő) esetén pedig Cronbach-α = 0,96. A reliabilitás értéke minden osztályban jó volt (Cronbach-α értéke 0,87 és

0,97 közötti). Tehát a vizsgált iskolák tanulóinak teljesítményét jól méri a teszt, a H1b hipotézisünk beigazolódott.

A Matematika Tudásszintmérő Teszt elemzése

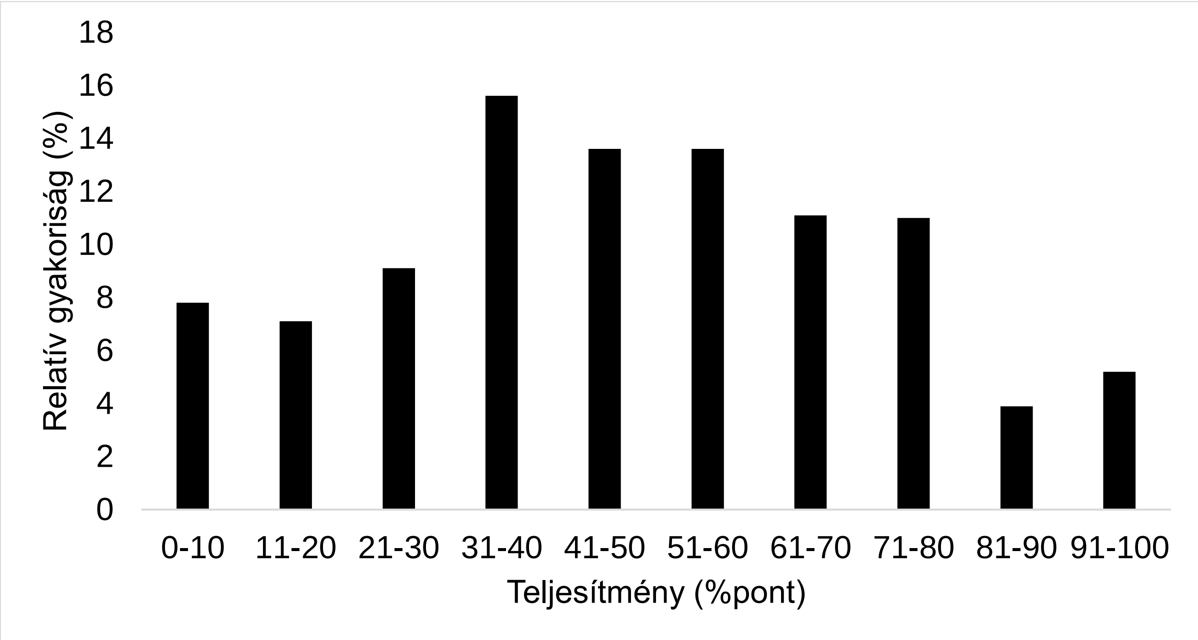
Megvizsgáltuk a Matematika Tudásszintmérő Teszt feladatait a mért tartalmak közötti korrelációk szerint. Majd klaszteranalízis segítségével azt figyeltük meg, hogyan kapcsolódnak egymáshoz az egyes mért tartalmak, ill. az egyes feladatok. A teszt feladatait a mért tartalom szerint 11 csoportra oszthatjuk. Minden csoport között pozitív korreláció van, ezek szinte mindegyike szignifikáns kapcsolatot fejez ki ($p < 0,05$). Magas korrelációt figyelhetünk meg a törtbővítés és az aránybővítés között ($r = 0,846$), az egyenes arányosság és a mértékegységátváltás között ($r = 0,743$). Közepes (0,4-0,7 közötti) korrelációt találunk a számok szorzása és az egyenes arányosság, a mértékegységátváltás, a szögfajták között. Szintén közepes a korreláció mértéke az aránybővítés és egyenes arányosság között, ugyanígy a törtrészszámítás és egyenes arányosság, mértékegységátváltás, fordított arányosság, százalékszámítás, szögfajták között, valamint az egyenes arányosság és az összeadás, százalékszámítás, kockatérfogat, szögfajták között, továbbá a mértékegységátváltás és az összeadás, a százalékszámítás, kockatérfogat, szögfajták között, a százalékszámítás és kockatérfogat, szögfajták között. Tehát a számok szorzása és az egyenes arányossági feladatok megoldása összefüggenek.

A feladattípusokra és a feladatokra is klaszteranalízist végeztünk, a legközelebbi szomszéd távolságszámítási elv és a négyzetes euklideszi távolság számítási eljárás alapján kapott eredmények szerint öt feladattípus kapcsolódik egybe szorosan: a százalékszámítás és a kockatérfogat számítása, majd a mértékegységátváltás, ezután a természetes számok összeadása, ezt követi a fordított arányosság. A kapott koefficiensek (118; 171; 220; 292; 418; 605; 1066; 1498; 2251; 6693) alapján az előbbi hasonlósági csoporthoz először az aránybővítés társul, majd a következő lépésben a törtbővítés az aránybővítéses fürthöz szorosan összekapcsolódik. Hozzájuk csatlakozik a szögfajták, majd a törtrész számítás feladattípus. Az egész számok szorzása az utolsó előtti lépésben kapcsolódik be a fürtalkotásba. Végül az egyenes arányossággal lesz teljes a klaszter.

A koefficiensek alapján (212; 218; 218; 249; 289; 427; 622; 1228; 2947; 3496; 4108) látható, a 8. és 9., illetve a 10. és 11. feladatok szorosan összekapcsolódnak egy-egy kisebb klaszterbe, majd a 8. feladathoz csatlakozik a 12. feladat, majd a 6. feladat. A 10. és 11. feladatot tartalmazó kis fürt összekapcsolódik a 6. feladat hasonlósági csoportjával. Majd ehhez a nagyobb hasonlósági csoporthoz kapcsolódik a 7. feladat. Majd az ezt követő lépésekben a következő feladatok kapcsolódnak be rendre a fürtalkotásba: a 4., 3., 2. feladat, majd végül az egész fürthöz társul a az 1. és 5. feladatból álló kis fürt. Lépésenkénti analízist is végeztünk a feladatokra. Az itemkihagyásos reliabilitás vizsgálata során azt tapasztaltuk, ha törlünk itemeket a tesztből, annak reliabilitása nem javulna, hanem romlana 0,003-0,005-del.

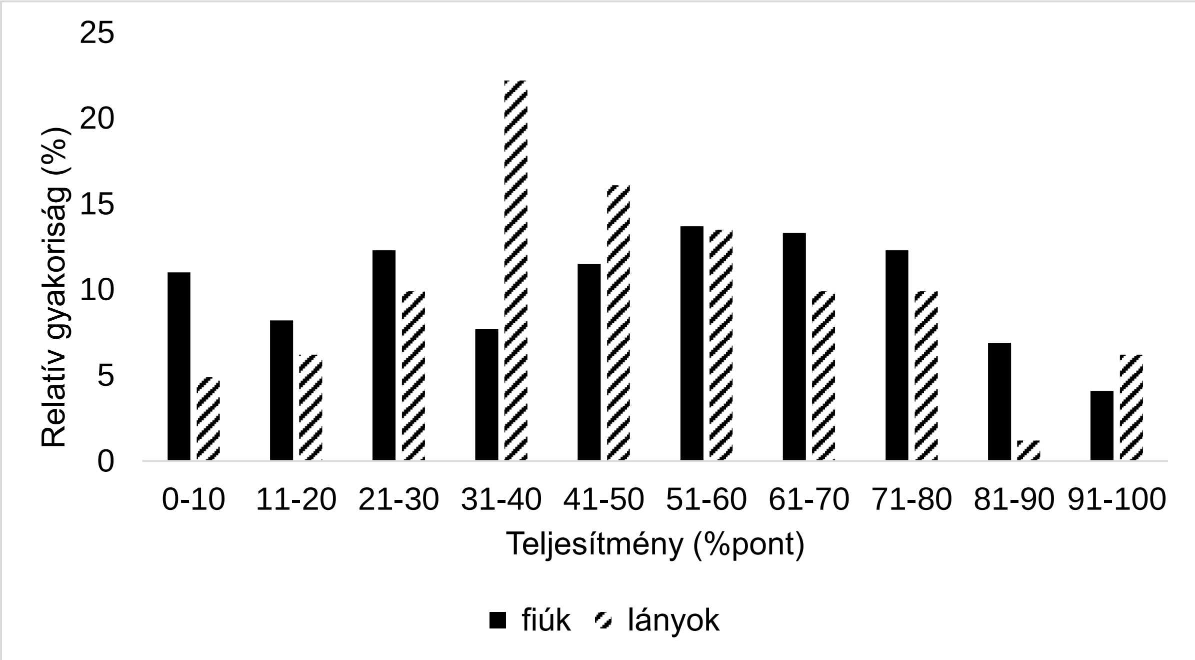
A matematika feladatok megoldottsága

A Matematika Tudásszintmérő Teszten a teljes mintán az átlag 32,15 pont volt (az átlagteljesítmény 46,59 %), módusz 27, medián 30. A teljesítmények mediánja nagyobb, mint a módusz, és kisebb, mint az átlag, ezért a 16. ábrán látható eloszlást figyelhetjük meg. A teljesítmények szórása 16,43. A 154 fős mintán elért pontszám relatív gyakoriságát vizsgálva megállapítható, hogy az eloszlás egymóduszú, azaz a mért tudást tekintve a minta homogénnek tekinthető. A leggyakoribb elért pontszám 27 pont, illetve az ehhez közeli 29 pont volt, ezeket hét-hét tanuló érte el. 20% alatt 23 tanuló, a teljes minta 14,9 százaléka, 90% fölött 8 tanuló teljesített.



16. ábra A teljes minta Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredményének eloszlása, negyedik vizsgálat

A 17. ábrán a Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények összehasonlítását láthatjuk nemek szerint bontásban. Az ábrán látható, hogy a fiúk 19,20 százaléka és a lányok 11,20 százaléka ért el 20%-osnál gyengébb teljesítményt a teszten. A fiúk átlagteljesítménye 47,09% volt, a lányoké pedig 46,14%. A fiúk 4,10 százaléka, míg a lányok 6,20 százaléka ért el legalább 90%-os teljesítményt.



17. ábra A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények összehasonlítása nemek szerint, negyedik vizsgálat

Iskolák és osztályok közötti különbségek

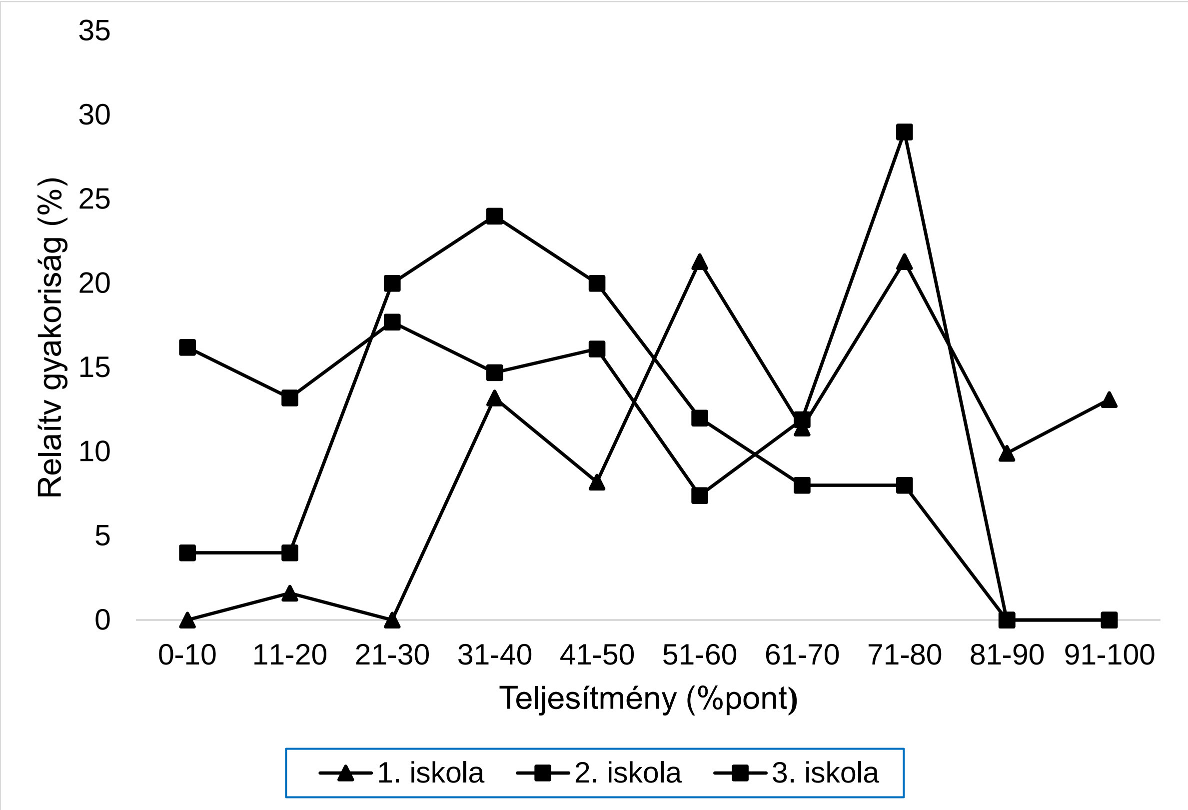
A H8b 1) hipotézis szerint a vizsgált iskolák tanulóinak a Matematika Tudásszintmérő Teszten nyújtott teljesítménye szignifikánsan egymástól. Ez a hipotézisünk beigazolódott.
Az egyes iskolákra jellemző adatok olvashatók ki a 32. táblázat adataiból.

32. táblázat. Az iskolák Matematika Tudásszintmérő Teszten nyújtott teljesítménye a negyedik vizsgálat során

Iskolák	1.	2.	3.	Összesen
átlag	44,08	22,91	28,16	32,15
szórás	13,39	13,79	11,18	16,43
minimum	12	0	0	0
maximum	67	52	53	67

Az iskolák közötti különbségekmegálapítására homogenitásvizsgálatot és a varianciaanalízist végeztünk. A Levene-féle próba esetén F = 1,89, p = 0,16-t kaptuk, amire p > 0,05 teljesül, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások megegyeznek. Az ANOVA Fischer-féle F értéke 42,59, p < 0,001, vagyis különbség figyelhető meg az egyes iskolák átlagai között. Mivel a részminták által reprezentált populációkban a szórások között nincsen szignifikáns különbség. Így a post-hoc elemzések során kapott Tukey'b –teszt eredményei szerint szignifikáns különbség van az iskolák tanulóinak teszten elért eredményei között. Az iskolák két csoportra oszthatók, a 2-es és a 3-as iskola teszteredménye szignifikánsan nem tér el egymástól, míg az első iskola eredménye ettől szignifikánsan magasabb.

A 18. ábrán látható, hogy az első iskola tanulói között senki sem teljesített 10% alatt, míg a 2. iskolában az iskola tanulóinak 16,2%-a, a harmadik iskola tanulóinak pedig 4%-a ez alatt teljesített. Az első iskolában az iskola tanulóinak 13,1%-a, a másik két iskolában egyetlen tanuló sem nyújtott legalább 90%-os teljesítményt. Az első iskolában volt a legmagasabb az átlagteljesítmény, ott 63,9% volt, a másik két iskolában pedig szemmel láthatóan is szignifikánsan alacsonyabb, a második iskolában 33,2 %, míg a harmadik iskolában 40,8%. Ez a különbség az ábrán is látható, az első és a második iskola eloszlása jobbra szimmetrikus, míg a harmadik iskoláé balra tolódó eloszlású. Ugyanakkor a három iskola közül az első iskola átlagteljesítménye volt magasabb, mint a teljes minta átlaga.



18. ábra A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmények összehasonlítása iskolánként, negyedik vizsgálat

Az egyes osztályok által elért eredmények terén megfigyelhető különbségeket mutatja a 33. táblázat. Az osztályok közötti különbségek végzett homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis során a Levene-féle próba esetén F = 1,69, p = 0,14-t kaptunk, amire p > 0,05 teljesül, vagyis a a részminták által reprezentált populációkban szórások megegyeznek.

33. táblázat. Matematika Tudásszintmérő Teszt, negyedikvizsgálat, osztályok közötti különbségek

Osztályok	1.	2	3	4	5	6	Összes
Átlag	39,55	48,19	22,47	29,33	17,48	28,16	32,15
Szórás	13,30	12,14	16,16	10,42	12,81	11,18	16,43
Módusz	29	52	13	23	17	20	27
Medián	37	50,50	16	29,50	17	27	30,25
Minimum	12	24	0	7	0	4	0
Maximum	63	67	52	48	45	53	67

Az ANOVA Fischer-féle F értéke 22,46, $p < 0,001$, vagyis különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között. A részminták által reprezentált populációkban a szórások között nincsen szignifikáns különbség, így a post-hoc elemzések közül ismét a Tukey’b –teszt mutatja, hogy szignifikáns különbség van az egyes osztályok teszten elért eredményei között. Az osztályokat három csoportra oszthatjuk, a 3. és a 5., a 4. és 6. osztály, valamint az 1. és 2. osztály tartoznak egy csoportba. Egy másik felosztás szerint az egyik csoportot a 3. osztály, a másik csoportot a 4., 5. és 6. osztály, míg a harmadik csoportot a legjobb teljesítményű 1. és 2. osztály alkothatja. 20 százaléknál gyengébb teljesítményt ért el az 1. osztály tanulóinak 3,4 százaléka, a 2. osztály tanulóinak 0 százaléka, a 3. osztály tanulóinak 47,1 százaléka, a negyedik osztály tanulóinak 8,3 százaléka, az ötödik osztály tanulóinak 37 százaléka és a hatodik osztály tanulóinak 8 százaléka. A 90 százalékot elért tanulók a legnagyobb arányban az első iskola tanulói közül kerültek ki, az első osztályból 10,3%, a második osztályból 15,6 %, a többi iskolából senki sem érte el ezt a teljesítményszintet, de még a 80 %-os szintet sem.

5.4.2. Az egyes tesztek összefüggései egymással és a háttérváltozókkal

A Matematika Tudásszintmérő Teszt és a Szorzási Stratégiák Teszt összefüggései

A H8a hipotézis szerint a vizsgált tanulók két teszten nyújtott teljesítménye közepesen korrelál egymással. Ez a hipotézis nem igazolódott be. A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények és a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények között gyenge ($r = 0,39$) korreláció áll fenn ($p < 0,001$). A Szorzási Stratégiák Teszt és a Matematika Tudásszintmérő Teszten minden feladattípusa között pozitív és legalább 0,05-os szinten szignifikáns a korreláció. A Szorzási Stratégiák Teszt eredménye a törtrészszámítással ($r = 0,33$) és az egyenes arányossággal ($r = 0,37$) korrelál a leginkább, de ezek is gyenge kapcsolatnak tekinthetők.

A Szorzási Stratégiák Teszt összefüggései a háttérváltozókkal

A háttérkérdőív egyik tétele a tanulók előző félévi matematika osztályzatára kérdezett rá, hogy összevethessük a tesztek eredményeivel.
A 34. táblázatban a matematika osztályzatok százalékos megoszlását láthatjuk iskolánként.

34. táblázat. A matematika osztályzatok százalékos megoszlása iskolánként, negyedik vizsgálat

Iskolák	Matematika félévi osztályzatok					
	Felmentett	1	2	3	4	5	Átlaga (szórás)
1.	0 fő	0 fő	1 fő	5 fő	30 fő	25 fő	4,3
	0 %	0 %	1,6 %	8,2 %	49,2 %	41 %	(0,69)
2.	3 fő	0 fő	2 fő	22 fő	27 fő	14 fő	3,65
	4,4 %	0%	2,9 %	32,4%	39,7 %	20,6%	(1,12)
3.	0 fő	0 fő	1 fő	0 fő	13 fő	11 fő	4,36
	0 %	0 %	4 %	0 %	52 %	44 %	(0,96)
Összesen	3 fő	0 fő	4 fő	37 fő	70 fő	50 fő	4,02
	1,9 %	0 %	2,6 %	17,5 %	45,5 %	32,5 %	(0,96)

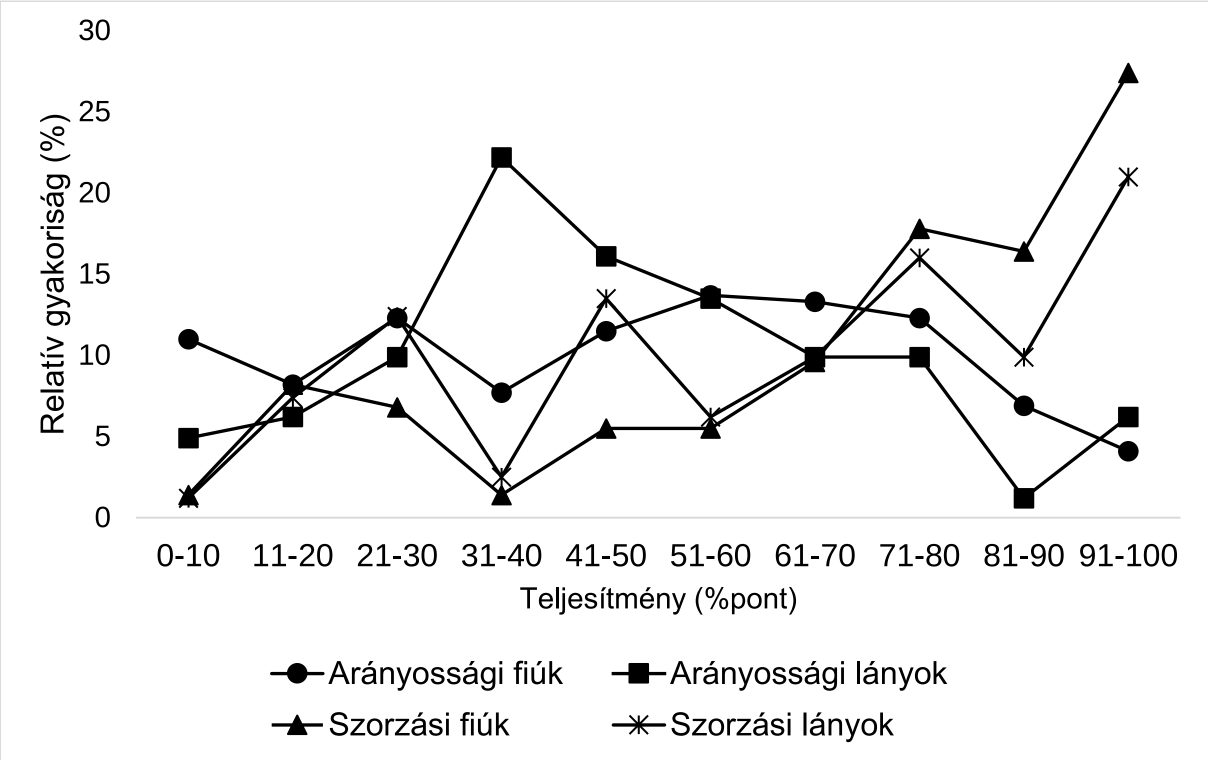
Az iskolák közötti különbségek a varianciaanalízis segítségével állapítottuk meg (Levene-próba). A részletes vizsgálat, a Tukey'b –teszt eredményei szerint szignifikáns különbség van az iskolák tanulóinak osztályzatai között. A matematika átlag alapján végzett homogenitásvizsgálat itt azt mutatta, hogy az iskolák két csoportra oszthatók, a 2-es a matematikából kicsit gyengébb (3,65) átlagot elérő iskola ($p < 0,017$), míg a másik kettő átlaga szignifikánsan nem különbözik egymástól (4,30 és 4,36). A matematika jegyek szórása mindhárom iskolában egyhez közeli. Bukás egyik iskolában sem volt, és az elégséges osztályzatot is elenyésző számban szereztek matematikából a tanulók. A jobb eredmények magyarázhatók azzal is, hogy a hatodikos tananyag még nem szórja szét nagyon a gyerekeket tudásszint szerint. Hasonló adatokat kapunk a tanulmányi átlagokra is. A leggyengébb átlagot a 2. iskolában érték el a vizsgált osztályok (3,72) ($p < 0,001$), a másik két iskola nem különbözik egymástól szignifikánsan, a 3. iskolában 4,63, míg az 1. iskolában a tanulmányi átlag 4,70. A matematika osztályzatok eloszlása nem hasonló a normáleloszláshoz. A teljes minta átlaga matematikából 4,02, a teljes minta tanulmányi átlaga pedig 4,26.

Az 1. iskolában senki sem volt felmentett, elégtelen osztályzata sincs a vizsgált tanulóknak matematikából, 1 fő elégséges, 5 fő közepes osztályzatot szerzett. A matematika átlag 4,3, ez a 30 fő jó és 25 jeles osztályzatnak köszönhető. A 2. iskolában 3 fő volt felmentett, elégtelen osztályzata itt sincs a vizsgált tanulóknak matematikából, 2 fő elégséges, 22 fő közepes (a tanulók 8,2 százaléka) osztályzatot szerzett. A matematika átlag jóval kisebb, mint a másik két iskolában (3,65), mert arányaiban kevesebb jó (27 fő, ami a tanulók 39,2 százaléka) és jeles (14 fő, a tanulók mintegy ötöde) osztályzat született. A 3. iskolában senki sem volt felmentett, elégtelen osztályzata sincs a vizsgált tanulóknak matematikából, 1 fő elégséges, 0 fő közepes osztályzatot szerzett. A matematika átlag 4,36, ez a 13 fő jó (52%) és 11 fő (44%) jeles osztályzatot szerzett.

A H8b 3) hipotézis vizsgálatára kiszámítottuk a tanulók tanulmányi átlagát. A fiúk tanulmányi átlaga 4,21, a lányoké 4,30. A kétmintás t-próbával végzett vizsgálat azt mutatta, hogy ($F = 0,06$, $p = 0,808$, $t = -0,61$, $p = 0,544$) a fiúk és a lányok tanulmányi átlaga között nincsen szignifikáns különbség. A matematika osztályzatuk átlaga között sem találtunk szignifikáns különbséget (a fiúké 4,00, a lányoké 4,04, $F = 0,97$, $p = 0,326$, $t = -2,38$, $p = 0,812$). A fiúk átlagteljesítménye a Matematika Tudásszintmérő Teszten 32,49 (szórás 17,81), a lányok átlagteljesítménye pedig 31,84 (szórás 15,18). A Levene-féle teszt szerint a a részminták által reprezentált populációkban a szórások szignifikánsan különböznek ($F = 3,98$, $p = 0,048$), de a kétmintás t-próba szerint a fiúk és a lányok átlagteljesítménye között nincs szignifikáns különbség ($t = 0,25$, $p = 0,806$), ez a hipotézisünk nem igazolódott be.

A H3b hipotézis szerint a tanuló neme összefüggésbe hozható a szorzási stratégia használatával. A fiúk átlagteljesítménye a Szorzási Stratégiák Teszten 27,59 (szórás 11,07), a lányok átlagteljesítménye pedig 24,60 (szórás 10,95). A Levene-féle teszt szerint a a részminták által reprezentált populációkban a szórások szignifikánsan nem különbözőek ($F = 0,07$, $p = 0,79$), és a kétmintás t-próba szerint a fiúk és a lányok átlagteljesítménye között nincs szignifikáns különbség ($t = 1,68$, $p = 0,095$). Ez a hipotézisünk nem igazolódott be.

A 19. ábra a fiúk és a lányok által a teszteken elért eredményeket hasonlítja össze. (A Szorzási a Szorzási Stratégiák Tesztet, az Arányossági a Matematika Tudásszintmérő Tesztet jelöli.)



19. ábra A teszteken elért eredmények nemek szerinti összehasonlítása, negyedik vizsgálat

A 19. ábra alapján leolvasható, hogy a szöveges feladatok megoldásában a fiúk közül többen teljesítettek 20 % alatt, mégpedig a fiúk csaknem ötöde (19,8%), míg a lányoknál ez az arány kevesebb, mint feleannyi, 9,6%. Azt is láthatjuk, hogy ugyanakkor a Szorzási Stratégiák Teszten a 20% alatt teljesítők között is több a fiú, mint a lány, de itt a különbség csupán 2,5 %, mivel a fiúk 11,1 %-a és a lányok 8,6%-a ért el 20-%nál kisebb teljesítményt. A Matematika Tudásszintmérő Teszten a fiúk közül értek el többen legalább 80 %-os teljesítményt, 11 %-uk a lányok 7,4 %-ával szemben. A Szorzási Stratégiák Teszt során kapott adatok alapján a 80% fölött teljesítők között is több a fiú, mint a lány, de itt a különbség jóval több. A fiúk mintegy fele, 43,8%-a, míg a lányoknak kevesebb, mint a harmada, 30,9 %-a ért el legalább 80 %-os teljesítményt. Összességében a fiúk mindkét teszt során magasabb teljesítményt mutattak.

A Matematika Tudásszintmérő Teszt összefüggései a háttérváltozókkal

H8c 4) hipotézis szerint: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény közepes korrelációt mutat a félévi matematika osztályzattal. Ez a hipotézisünk beigazolódott, a korreláció mértéke közepes.

A Szorzási Stratégiák Teszt eredménye gyenge, pozitív korrelációban van az iskolába járás szeretetével ($r = 0{,}17$, $p < 0{,}04$) és az „Azért tanulom a matematikát, mert érdekes” vélekedéssel ($r = 0{,}21$, $p < 0{,}01$). Gyenge, negatív korrelációt figyelhetünk meg a Kérdőív a matematikatanulásról c. kérdőív néhány tételével, (szignifikanciaszint $p < 0{,}05$), ezek: „Ha nagyon könnyűnek tűnik egy matematika feladat, erős a gyanú, hogy elrontottam.” ($r = -0{,}22$), „Matematikaórán gyakran szorongok.” ($r = -0{,}16$), „A tanárom úgy gondolja, hogy mindent ő tud a legjobban.” ($r = -0{,}26$), „Szöveges feladat megoldásához elsőként a számokat kell megtalálni a feladat szövegében.” (r = -0,24), „A megoldáshoz a szöveges feladatban szereplő összes számot fel kell használni.” (r = -0,16), „Az okos tanuló jó matematikából.” (r = -0,19).

A H3c) hipotézisünk szerint: A Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmény korrelál a félévi matematika osztályzattal. Ez a hipotézisünk nem igazolódott be, a kettő között nem volt szignifikáns korreláció.

A H8c 1-3) hipotézisünk vizsgálatára felvett kérdőív kiértékelése során közepesen erős korrelációt találunk a Matematika Tudásszintmérő Teszt eredménye és a matematikaversenyen való részvétel gyakorisága, a napi otthoni tanulási idő, a matematika órára való készülés ideje, a matematikajegy, a saját matematika teljesítménnyel való elégedettség, a továbbtanulási tervek, valamint a szülők iskolai végzettsége között. A korrelációk rendre 0,63; 0,50; 0,45; 0,42; 0,51; apa esetén 0,49 és anya esetén 0,46 ($p < 0,001$). A többi háttérváltozóval gyenge kapcsolat mutatható ki.

H8c 4) hipotézis szerint: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény korrelációt mutat a félévi matematika osztályzattal. Ez a hipotézisünk beigazolódott, a korreláció mértéke közepes.

5.4.4. A vizsgálat eredményeinek összegzése

A vizsgálat eredményeit összegezve arra a következtetésre jutottunk, hogy az általunk fejlesztett mérőeszközök alkalmasak a szorzási stratégiák feltérképezésére, háttérváltozókkal kapcsolatos összefüggések kimondására. A Szorzási Stratégiák Teszt jóságmutatója megfelelő, Cronbach-α = 0,95, átlag 26,16, szórás: 11,11. A Szorzási Stratégiák Teszt mindegyik feladattípusának megoldottsága 60% fölötti. A legkönnyebb a tanulók számára az egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal, illetve kétjegyű számmal volt (75% körüli megoldottság). A legnehezebben a kétjegyű szám szorzása volt kétjegyű számmal, itt a megoldottság alig haladja meg a 62%-ot. A tanulók teljesítménye között szignifikáns különbségeket tapasztaltunk. Regresszióanalízissel megállapítottuk, hogy 25 item már a variancia 99%-át megmagyarázza. Mivel azonban kutatásunk során szeretnénk minél több információt megtudni a tanulók stratégiahasználatáról, ezért a további vizsgálatok során a mérőeszközrövidítést elvetettük.

A Szorzási Stratégiák tesztet kitöltő 154 fős budapesti mintában a tanulók átlageredménye 65,50 %, módusz 35 pont, medián: 29,29 pont volt. Jobbra tolódó eloszlást figyelhettünk meg. A teljesítmények szórása 11,08 pont. 20 % alatt teljesített a minta 9,1 %-a, 90 % fölött pedig a minta 24 %-a. A tanulók 54,5 %-a ért el a 65,5 %-os átlagteljesítménynél jobb eredményt. A nemek között eltérést tapasztaltunk a teljesítményben. A fiúk 9,6%-a és a lányok 8,6%-a ért el 20%-osnál gyengébb teljesítményt a Szorzási Stratégiák Teszten. A fiúk átlagteljesítménye 68,97% volt, a lányoké pedig ettől 7,46%-kal kevesebb, 61,51%. A fiúk 27,4%-a, míg a lányok 21%-a ért el legalább 90%-os teljesítményt.

Az egyes iskolák között viszont nagy teljesítményszintbeli eltéréseket figyelhettünk meg. Az első és a harmadik iskola tanulói között senki sem teljesített 10 % alatt, míg a 2. iskolában az iskola tanulóinak 2,9%-a ez alatt teljesített. Az első iskolában az iskola tanulóinak 13,1%-a, a második iskolában az iskola tanulóinak 41,2%-a, a harmadik iskolában pedig az iskola tanulóinak 4%-a nyújtott legalább 90%-os teljesítményt. Az első iskolában az átlagteljesítmény 69,4% volt, a második iskolában 71,7%, míg a harmadik iskolában 36,1%.

Az iskolák közötti különbségeket a varianciaanalízis segítségével vizsgáltuk. Megállapítottuk, hogy szignifikáns különbség van az iskolák tanulóinak osztályzatai között. A matematika átlag alapján végzett homogenitásvizsgálat itt azt mutatta, hogy a 2-es a matematikából kicsit gyengébb (3,65) átlagot elérő iskola ($p < 0,017$), míg a másik kettő átlaga szignifikánsan nem különbözik egymástól (4,30 és 4,36). A matematika jegyek szórása mindhárom iskolában egyhez közeli volt. Hasonló adatokat kaptunk a tanulmányi átlagokra is. A leggyengébb átlagot a 2. iskolában érték el a vizsgált osztályok (3,72) ($p < 0,001$), a másik két iskola nem különbözik egymástól szignifikánsan, a 3 iskolában 4,63, míg az 1. iskolában a tanulmányi átlag 4,70. A matematika osztályzatok eloszlása nem hasonló a normáleloszláshoz. A teljes minta átlaga matematikából 4,02, a teljes minta tanulmányi átlaga pedig 4,26.

A vizsgált tanulók szorzási teszten nyújtott teljesítménye közepesen korrelál az Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredménnyel. Ez a hipotézis nem igazolódott be. A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények és a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények között gyenge ($r = 0,39$) korrelációt találtunk ($p < 0,001$).

A fiúk átlagteljesítménye a Matematika Tudásszintmérő Teszten 32,49 (szórás 17,81), a lányok átlagteljesítménye pedig 31,84 (szórás 15,18). A fiúk és a lányok átlagteljesítménye között nincs szignifikáns különbség ($t = 0,25$, $p = 0,806$). A szöveges feladatok megoldásában a fiúk közül többen teljesítettek 20 % alatt, mégpedig a fiúk csaknem ötöde, míg a lányoknál ez az arány 9,6%. Ugyanakkor a Szorzási Stratégiák Teszten a 20% alatt teljesítők között is több a fiú, mint a lány, de itt a különbség csupán 2,5 %, mivel a fiúk 11,1 %-a és a lányok 8,6%-a ért el 20-%nál kisebb teljesítményt. A szöveges feladatok megoldásában is a fiúk közül értek el többen legalább 80 %-os teljesítményt, 11 %-uk a lányok 7,4 %-ával szemben. A Szorzási Stratégiák Teszt során kapott adatok alapján a 80% fölött teljesítők között is több a fiú, mint a lány, de itt a különbség jóval több. A fiúk csaknem fele, 43,8%-a, míg a lányoknak kevesebb, mint a harmada, csak 30,9 %-a ért el legalább 80 %-os teljesítményt. Összességében a fiúk mindkét teszt során magasabb teljesítményt mutattak.

A Szorzási stratégiák teszten elért eredmény korrelál a félévi matematika osztályzattal. Ez a hipotézisünk nem igazolódott be, a kettő között nem volt szignifikáns korreláció. Közepesen erős korrelációt találtunk a Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény és a matematikaversenyen való részvétel gyakorisága között. Közepesen korrelált ez a teszt még a napi otthoni tanulási idővel, a matematika órára való készülés idejével, a matematikajeggyel, a saját matematika teljesítménnyel való elégedettséggel, valamint a szülők iskolai végzettségével. A többi háttérváltozóval gyenge kapcsolat mutatható ki. Számos gyenge vagy közepesen erős korrelációt találhatunk a Kérdőív a matematikatanulásról c. kérdőív több háttérváltozója között.

A H6 c) hipotézis szerint: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény korrelációt mutat a félévi matematika osztályzattal. Ez a hipotézisünk beigazolódott, a korreláció mértéke közepes.

A vizsgálat során további két hipotézisünk a hatodikos tanulók által alkalmazott szorzási stratégiákra vonatkozott. A vizsgálat során azt szerettük volna megtudni, milyen stratégiákat használnak sikerrel a hatodikos tanulók a fejben végzett szorzásra vonatkozó feladatok megoldása során.

A H4 hipotézisünk így szólt: A szakirodalomban feltárt racionális hibákat elköveti a budapesti hatodikos tanulók egy része. Ez a hipotézisünk beigazolódott, számos hibás stratégia használatát megfigyeltük (vö. De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére & Verschaffel, 2010).

Hipotézisünk szerint a vizsgált hatodikos diákok a fejben végzett szorzási feladatok megoldásakor legalább ötféle stratégiát alkalmaznak. Ez a hipotézisünk beigazolódott. A mintában szereplő hatodikos tanulók egy része számos szorzási stratégiát ismer és helyesen használ. Kutatásunk szerint a matematikából gyengébb tanulók gyakrabban alkalmazták a (CO) számlálás stratégiát. Míg az ügyesebb tanulók számára akár kétjegyű szám kétjegyű számmal történő szorzásának eredményét tudják a szorzótáblából. A $20 \cdot 30$ szorzat kiszámításakor megfigyelhettük egy ismert szabályt alkalmazását. A tanulók számos esetben alkalmazták a helyiérték szerinti balról jobba és a jobbról balra stratégiát, és annak számos, a szakirodalomban nem részletezett és emiatt nehezen tipizálható változatát. A gyengébb képességű magyar tanulók is alkalmazzák Hope és Sherrill (1987) által megfigyelt „fejben elképzelem leírva" startégiát. A 2. iskola tanulói szemmel láthatóan is szignifikánsan többen alkalmazták ezt a stratégiát, volt, aki valóban le is írta a részletszámításokat. Ezt figyelembe véve már nem mondhatjuk, hogy ebben az iskolában voltak legeredményesebbek a hatodikos tanulók a fejszámolásban. Az így számolókat a vizsgálat során kivettük a mintából.

A tanulók egy kis része a kerek tízesekhez, százasokhoz közeli számokat mint egy egészet fogja fel, és azzal számol, a megfelelő mértékben csökkenti vagy növeli a szorzatot. Így a $8 \cdot 99$ kiszámítása történhet úgy, hogy először kiszámítja a $8 \cdot 100$ szorzatot, majd ebből kivon $1 \cdot 8$-at. A $17 \cdot 99$, $8 \cdot 999$ szorzások számításakor többen is alkalmazták ezt a stratégiát. Ezeken kívül még egyéni stratégiák alkalmazása is megfigyelhető.

A szorzáskor a gyenge matematikai osztályzattal rendelkező tanulók szignifikánsan többször hibáztak. A tanulók többsége mereven ragaszkodott egyetlen stratégia alkalmazásához, akkor is, ha az nem volt hatékony, azaz adaptív De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére és Verschaffel (2010) definíciója szerint.

5.5. Az ötödik vizsgálat eredményei

A szorzási stratégiák vizsgálata és fejlesztése 6. évfolyamos tanulók körében

A kutatás során célunk volt annak vizsgálata, mennyire sikeresek a hatodik osztályos tanulók két- és háromjegyű számokkal fejben végzett szorzás során és a szorzással megoldható szöveges feladatok megoldásában. A következő kérdésekre kerestük a választ: Milyen különbségek vannak az egyes tanulók gondolkodása között? Milyen típushibákat ejtenek a hatodikos tanulók fejben szorzás közben? Hogyan lehetne csökkenteni a tanulók eredménye közötti különbséget csökkenteni? Melyek a legeredményesebb szorzási stratégiák az egyes feladatok megoldása során? A fejlesztés során hogyan változik a fejben számolás és a szorzásra vonatkozó szöveges feladatok eredményessége? A különböző matematikai képességszinten levő tanulókra egyformán hat-e a fejlesztő program? A 2016 tavaszán végzett, egy hónapig tartó fejlesztő kísérletbe budapesti hatodikos tanulók (N = 270) közül két osztályt vontunk be, egyikben történt fejlesztés. Egy másik nyolcévfolyamos gimnázium egyik hatodikos osztálya jelentette a kontrollcsoportot. A tartalomba ágyazott fejlesztés osztálykeretek között, matematikaórákon történt, 20 alkalommal, a matematikaóra második felében (*Vígh-Kiss*, 2016c).

5.5.1. Az adatelemzés módszerei

Az adatok elemzése SPSS 17 program segítségével történt. A vizsgálat eredményeit statisztikai számításokkal támasztottuk alá. A mintában a fiúk és a lányok arányát a 35. táblázatban jegyeztük le.

35. táblázat. Az ötödik vizgálat mintájának összetétele

Iskola	Osztály	Összesen (fő)	Fiúk	Lányok	Fiúk aránya %
I.	1.	17	8	8	40,05
	2.	24	12	12	50,00
	3.	27	15	12	55,56
II.	4.	25	5	20	20,00
	5.	32	17	15	53,13
	6.	29	16	13	55,17
III.	7.	28	16	12	57,14
	8.	28	16	12	57,14
IV.	9.	30	19	11	63,33
V.	10.	30	17	13	56,67
Összesen (fő)		270	141	129	52,22

A 270 fős mintában 141 fő fiú volt, így a fiúk aránya 52,22%, a minta nemek szerinti eloszlása így majdnem kiegyenlített. Ez alól kivétel: a 4. osztályban a mérés felvételekor többen hiányoztak, így a fiúk ott 20%-ban képviseltették magukat.

A mintában szereplő tanulók életkorára, félévi matematika osztályzatára vonatkozó statisztikát tartalmaz a 36. táblázat.

36. táblázat. Az ötödik vizsgálatban részt vevő tanulók átlagéletkora, félévi matematika osztályzata

Osztály	Életkor		Matematika osztályzat	
	Átlag	Szórás	Átlag	Szórás
1.	12,85	0,56	3,71	0,99
2.	12,66	0,43	3,75	0,94
3.	12,39	0,53	3,52	1,34
4.	12,61	0,34	4,36	0,70
5.	12,30	0,41	4,06	0,79
6.	12,31	0,40	4,11	0,79
7.	12,73	0,55	3,61	0,92
8.	12,83	0,58	3,60	0,97
9.	12,77	0,56	3,57	0,63
10.	12,70	0,55	3,87	0,90
Összesen	12,60	0,53	3,84	0,90

A mintában szereplő tanulók átlagéletkora 12,60 év (szórás 0,53), a félévi matematika osztályzat átlaga 3,84 (szórás 0,90). A legjobb matematika átlagot elért osztályok a 4., 5. és a 6. osztály, míg a 3. és 9. osztály a leggyengébb.

Az előmérés során alkalmazott mérőeszközök reliabilitása megfelelő (Cronbach-α értéke 0,87 és 0,96 közötti) volt, H1a hipotézisünk beigazolódott, ahogy ezt a 37. táblázatban láthatjuk.

37. táblázat. Az előmérés során alkalmazott mérőeszközök reliabilitása

Mérőeszköz	Itemszám	Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
Szorzási stratégiák előteszt	20	0,92	0,92
Matematikatanulásra vonatkozó tanulói nézetek kérdőív	34	0,87	0,87
Tudásszintmérő Teszt	49	0,89	0,89
Háttérkérdőív	56	0,96	0,95

A mérőeszköz itemszáma befolyásolja a reliabilitást (Horváth, 1990), és ahogy a táblázatból láthatjuk, kisebb itemszám itt is általában alacsonyabb értékkel jár együtt. Ugyanakkor számottevő különbséget nem tapasztalunk az értékek között egyik vizsgált csoportban sem, azaz mérőeszközünk alkalmas a vizsgálandó konstruktum mérésére.

Az előteszten külön vizsgáltuk a fiúk és a lányok által elért eredményeket, ezt foglaltuk össze a 38. táblázatban.

38. táblázat. A Szorzási Stratégiák előteszten elért eredmények

Osztály	Fiúk		Lányok		Összesen	
Mutatók	Átlag (%pont)	Szórás	Átlag (%pont)	Szórás	Átlag (%pont)	Szórás
1.	15,24	7,00	15,36	5,82	15,29	6,33
2.	13,33	4,13	13,57	6,11	13,45	5,11
3.	32,14	43,82	42,48	40,00	37,88	42,53
4.	36,14	20,06	38,29	22,27	36,80	20,11
5.	37,14	34,02	31,43	22,78	34,11	28,84
6.	41,76	46,20	35,00	18,62	38,03	34,02
7.	49,52	22,71	47,50	26,62	48,37	24,67
8.	45,24	29,95	45,00	24,80	45,10	26,58
9.	48,05	20,24	44,81	24,42	46,00	22,88
10.	34,51	4,82	35,16	4,89	34,86	4,82
Összesen	35,86	36,20	36,43	33,22	36,16	34,11

Az 1. és a 2. osztály tanulói közül néhányan a szorzásokat írásban számolták a teljes teszt során, így ezt a 11 tanulót kivettük a további vizsgálatokból. Ezáltal ebben a két osztályban kaptuk e leggyengébb eredményeket a szorzási stratégiákat vizsgáló előteszten. A teszt nehéznek bizonyult a mintában szereplő tanulók számára, mert az elért teljesítmény kevesebb volt, mint 40 %pont. A legjobban a 7., 8. és 9. osztály teljesített, de ők sem érték el az 50%-os teljesítményt. H2c és H2d hipotéziseink beigazolódtak, szignifikáns különbséget találtunk az egyes iskolák, osztályok Szorzási Stratégtiák Teszten mért teljesítménye között.

A fejlesztő kísérletben való részvételre két tanárt kértünk fel, az 5. osztályban tanító vállalta el a fejlesztést, és a 10. osztály lett a kontrollcsoport.

A vizsgált tanulók a fejben végzett szorzási feladatok megoldásakor legalább ötféle, helyes eredményre vezető stratégiát alkalmaznak, erre vonatkozó H2a hipotézisünk beigazolódott.

A H4 hipotézisünk beigazolódott. A tanulók sikeresen alkalmazták a következő stratégiákat: az egyjegyű számok fejben szorzására leggyakrabban az emlékezeti előhívás (tények) stratégiát, a kétjegyű számokkal való szorzáskor pedig a helyi érték szerinti stratégiákat (ld. Lemaire & Siegler, 1995). A kétjegyű számok szorzásakor a 4-es és 5-ös matematikaosztályzattal bíró gyerekek alkalmazták a holisztikus stratégiát. A tanulók körében megfigyeltük a „fejben elképzelem leírva” stratégia használatát (vö. Hope & Sherill, 1987; Csíkos, 2013; Vígh-Kiss, Csíkos & Steklács, 2013). A gyengébb tanulók pedig a fejszámolás során is leírták a részeredményeket, őket a további vizsgálatból kizártuk.

Kutatásunk során vizsgáltuk a tesztek egymással vett korrelációját, valamint a háttérváltozókkal való kapcsolatának szorosságát. A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények és a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények között gyenge ($r = 0{,}33$) korreláció áll fenn ($p < 0{,}001$), H8a hipotézisünk beigazolódott.

A Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmény és a félévi matematika osztályzat között nem volt szignifikáns korreláció, a H3c hipotézisünk nem igazolódott be.

A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény közepesen erős (0,41) korrelációt mutat a félévi matematika osztályzattal, H8c 4) hipotézisünk beigazolódott.

Az utómérés során kétféle tesztet vettünk fel, a késleltetett utóteszt során pedig egy kérdőívet és egy háttérkérdőívet. A mérőeszközökre vonatkozó reliabilitás-mutató értékek megfelelők voltak, a Cronbach-α értékeket a 39. táblázatban találjuk.

39. táblázat. Az utótesztek és késleltetett utótesztek reliabilitás-mutatói

Mérőeszköz	Itemszám	Kísérleti csoport	Kontrollcsoport
Szorzási stratégiák utóteszt	40	0,94	0,94
Matematika Tudásszintmérő Teszt	69	0,95	0,94
Szorzási stratégiák késleltetett utóteszt	20	0,85	0,84
Tanulási szokások kérdőív	49	0,91	0,90

Amint a táblázatból kiolvasható, a nagyobb itemszámú mérőeszközeink reliabilitása magasabb, de mindegyik megfelelő jóságmutatóval rendelkezik. A Cronbach-α értéke 0,84 és 0,95 közötti a kísérleti és a kontrollcsoport esetében is.

A következők két táblázatban (40. táblázat és 41. táblázat) a két mérési pontban az egyes tesztek legfontosabb statisztikai mutatóit mutatjuk be.

40. táblázat. Az előtesztek fontosabb statisztikai mutatói

Mérőeszköz	Kísérleti csoport		Kontrollcsoport	
	Átlag (%pont)	Szórás (%pont)	Átlag (%pont)	Szórás (%pont)
Szorzási stratégiák előteszt	34,11	28,84	34,86	16,82
Tudásszintmérő Teszt	52,01	15,18	54,03	17,85

Az előteszt kétféle tesztváltozatán elért teljesítmény közötti különbség inszignifikáns volt, ezért a két tesztváltozatot egy mutató alatt szerepeltetjük. A Szorzási stratégiák előteszt 34,11%-pontos és 34,86%pontos átlagos megoldottsága azt jelzi, hogy a minta számára a teszt túl nehéznek tűnt, a szórások is viszonylag nagyok. Az 57. táblázatban az utóteszt fontosabb leíró statisztikai mutatóit találhatjuk. A tesztek megoldottsága 50%-nál nagyobb, ami a nagymintás vizsgálatoknál megszokott átlagokhoz hasonló (ld. pl. Csapó, 1998a). A szórásértékek viszonylag magasak. A kontrollcsoportban nagyobb a relatív szórások értéke: a szorzási stratégiák teszten 73,11 szemben a kísérleti csoport 57,38-os relatív szórásával. A matematika teszten a kísérleti csoport szórása 44,57, míg a kontrollcsoporté 76,55.

41. táblázat. Az utótesztek fontosabb statisztikai mutatói

Mérőeszköz	Kísérleti csoport		Kontrollcsoport	
	Átlag (%pont)	Szórás (%pont)	Átlag (%pont)	Szórás (%pont)
Szorzási stratégiák utóteszt	50,33	28,88	45,45	33,23
Matematika Tudásszintmérő Teszt	72,65	32,38	51,89	39,71

A kísérleti és a kontrollcsoport eredményeit hasonlítjuk össze a 42. táblázat alapján.

42. táblázat. A kísérleti és a kontrollcsoport összehasonlítása az előtesztek alapján

Mérőeszköz	Levene-próba		Kétmintás t-próba	
	F	p <	$\|t\|$	p <
Szorzási stratégiák előteszt	1,18	0,28	0,84	0,20
Tudásszintmérő Teszt	2,96	0,09	0,93	0,18

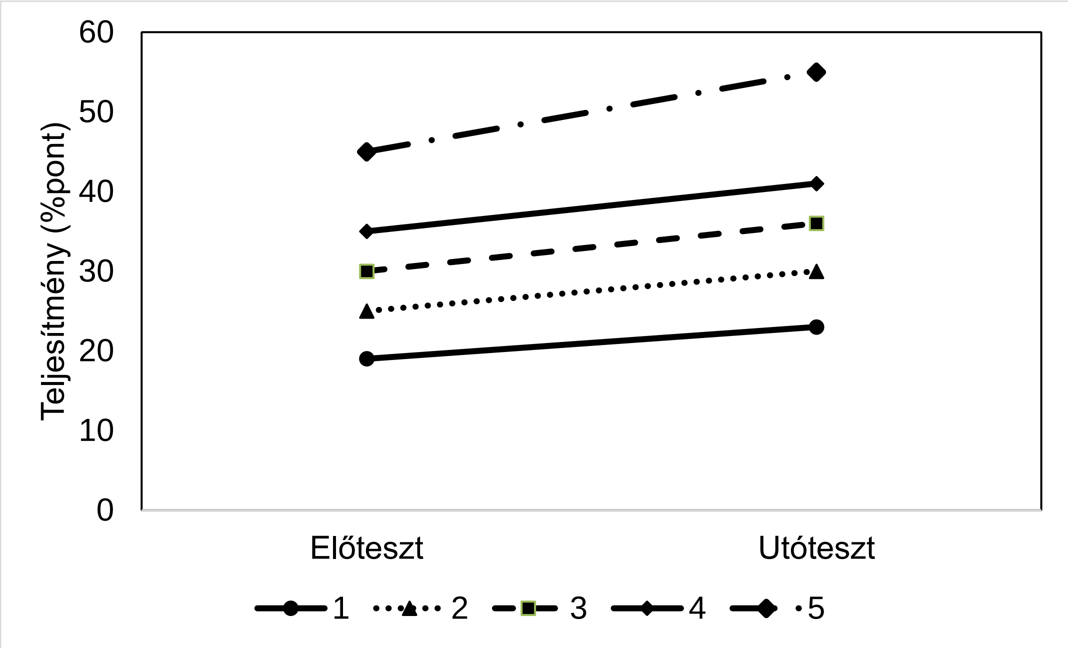
A kontrollcsoportot Csíkos (2007) által tanácsoltak szerint úgy választottuk ki, hogy a kísérleti csoport átlagától ne térjen el szignifikánsan. A szórásokat Levene-próba segítségével hasonlítottuk össze. Amint láthatjuk, a Levene-féle F -próba és a hozzá tartozó kétmintás t-próba eredményei arra utalnak, hogy a két csoport között nincs szignifikáns különbség. A kísérlet utáni adatokat találjuk a 43. táblázatban.

43. táblázat. A kísérleti és a kontrollcsoport összehasonlítása az utótesztek alapján

Mérőeszköz	Levene-próba		Kétmintás t-próba	
	F	p <	$\|t\|$	p <
Szorzási stratégiák utóteszt	6,39	0,02	25,09	0,001
Matematika Tudásszintmérő Teszt	4,01	0,05	27,35	0,001

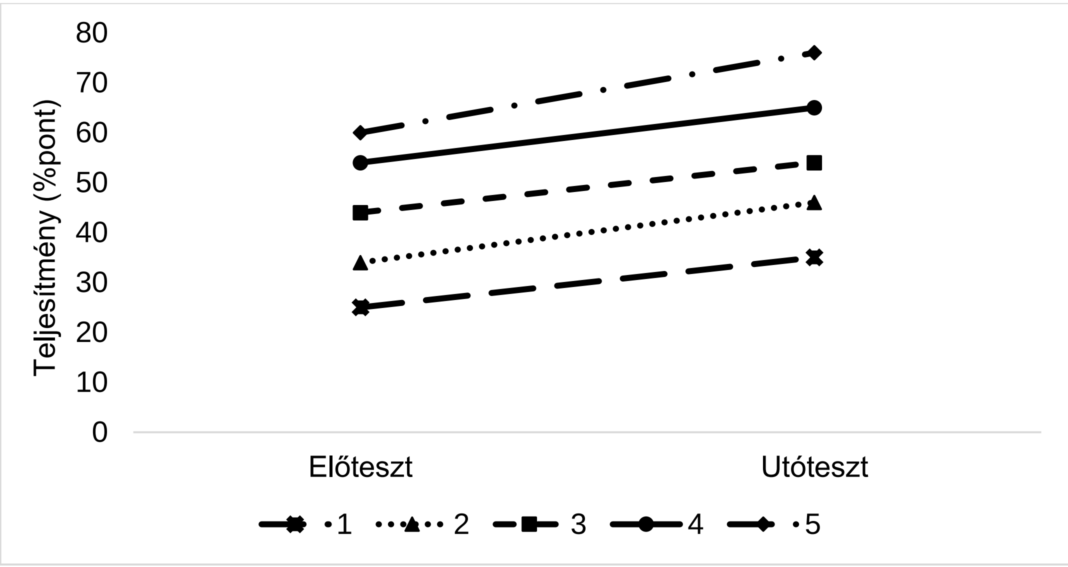
Az egyhónapos tartalomba illesztett fejlesztésnek köszönhetően szignifikáns különbség alakult ki a két csoport teljesítménye között. Ezt támasztják alá a táblázatból kiolvasható Levene-féle F -próba és a kétmintás próba értékei.

Szerettük volna megtudni, hogy a kísérlet melyik képességszinten található tanulókra hogyan hatott, ezért a tanulókat öt csoportra osztottuk (vö. Csíkos, 2007). A 20. ábrán a tanulók képességszintjének változását mutatjuk. (A leggyengébb teljesítményű jele 1-es, a legjobb teljesítményűé 5-ös.). Tapasztalataink alapján a fejlesztés minden tanulóra hatott, viszont az eleve jobb eredményű tanulókra hatott jobban, a tanulók teljesítményei közötti szóráskülönbség megmaradt. Az előteszt és az utóteszt megoldása során a tanulók az előző vizsgálatok során már feltárt hibás eredményre vezető stratégiákat követték el. A helyes eredményre vezető stratégiák fajtája és száma is a korábbi vizsgálatok során tapasztalt jellegzetességeket mutatta.



20. ábra A kísérleti csoport teljesítményének változása a Szorzási Stratégiák Teszten

A 21. ábra a kísérleti csoport matematikateszten megfigyelt teljesítményváltozását mutatja. A kísérleti hatás kiszámítására a Keppel (1991) által leírt képletet alkalmazzuk (Csíkos, 2007). $\omega^2 = \frac{(a-1)\cdot(F-1)}{(a-1)\cdot(F-1)+a\cdot n}$, ahol F a Fischer-féle F hányados, a a kísérletben részt vevő csoportok száma, n pedig az egy-egy kísérleti csoportban található személyek száma. A képlet feltételezi a kísérleti és a kontrollcsoport azonos számát, ez esetünkben teljesül. Az utótesztekre megállapított különbségek alapján a kísérleti hatás a szorzási stratégiák teszt esetén 10,73, azaz a kísérlet végén tapasztalt teljesítménykülönbségek 10,73%-át magyarázza a kísérlet. A matematikateszt esetén a számított $\omega^2 = 12{,}03$, amely értékek szintén közepes hatásméretet jelez. A fejlesztés végén mért tanulói teljesítménykülönbség 12,03%-át magyarázza a végzett kísérlet.



21. ábra A kísérleti csoport teljesítményének változása a Matematikateszten

A kísérlet része volt a 2016 szeptemberében végzett késleltetett utómérés, melynek során interjú módszerrel vizsgáltuk a legjobb teljesítményt nyújtó 5-5 és a leggyengébben teljesítő 5-5 gyerek stratégiahasználatát fejben végzett szorzás igénylő feladatok megoldása során. Az interjúk időigénye miatt választottuk ezt a módszert. A másik ok pedig az volt, hogy ősszel a kísérleti csoport két csoportra bomlott, és az emelt és alapcsoport tanulói két különböző tanárnál, más-más órai fejlesztésben vettek részt szeptembertől.

A késleltetett utómérés során a tanulóknak a Csíkos (2007) által leírt „Étlapok" szöveges feladatot adtunk, melynek során fejben végzendő szorzás volt a feladat mélystruktúrája. A feladat szövegét számítógépképernyőn tártuk a gyerekek elé. A kísérletvezető azt kérte a tanulóktól, hogy hangosan gondolkodva mondják el, hogyan oldanák meg a feladatot. Schoenfeld (1987) módszerét alkalmaztuk a tanulót jellemző viselkedésmintázat meghatározására. Az interjúk hanganyagát kielemezve azt találtuk, hogy a kísérleti csoport hatékonyabban használta ki a rendelkezésére álló 10 percet, nagyobb sikerrel oldották meg a feladatot. Emellett a felhasznált időkeret nagyobb hányadában figyelhettük meg metakognitív stratégiák alkalmazását. A kísérleti csoport esetében 54 : 46 arányt figyeltünk meg a metakognitív stratégiák javára, míg a kontrollcsoportban ez az arány 40 : 60 volt. A $p = 0,05$ szignifikancia szerint, feltételezve, hogy a két csoportot megfelelő módon reprezentálják az interjúvolt tanulók, 95% a valószínűsége, hogy a fejlesztő kísérlet után 3 hónappal jelentős a különbség a tanulók teljesítménye között.

Összegzés

Öt budapesti iskola hatodik évfolyamos tanulói között végeztünk vizsgálatot a fejben szorzás feladatok megoldottságával és az ezeket befolyásoló tényezőkkel kapcsolatosan. Vizsgálatunk célja az volt, hogy összefüggéseket keresünk a Szorzási Stratégiák Teszten és a Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény, valamint a tanulók háttérváltozói között. A tesztek, kérdőívek megbízhatóan mértek. A Szorzási Stratégiák Teszt és a Matematika Tudásszintmérő Teszt megbízhatóságára vonatkozó H1a és H2b hipotézis beigazolódott. Az alkalmazott szorzási stratégiák számára vonatkozó H2a hipotézis beigazolódott: a fejszámolással megoldható szorzási feladatokban a hatodikos tanulók legalább ötféle különböző stratégiát alkalmaztak (vö. Hope & Sherrill, 1987; Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999).

A leggyakrabban alkalmazott szorzási stratégiákra vonatkozó H4 hipotézisünk beigazolódott. A szorzási feladatok megoldása során a vizsgált tanulók leggyakrabban a következő stratégiákat alkalmazták: számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló (balról jobbra, illetve jobbról balra) és a holisztikus stratégiát (vö. Hope & Sherrill, 1987). Az egyjegyű számok szorzására a tények stratégiát alkalmazták a vizsgált tanulók. A kétjegyű számok szorzása során a helyiérték szerint balról jobbra szorzás használata volt a leggyakoribb. Ezt mindegyik osztályban megfigyeltük.

A fiúk és a lányok átlagteljesítménye között nem mutatható ki szignifikáns különbség, a H3b hipotézisünk nem igazolódott be. A vizsgált iskolák, osztályok teszteken elért eredménye, szorzási stratégiahasználata között szignifikáns különbséget figyeltünk meg, H2c és H2d hipotéziseink beigazolódtak.

H8a: hipotézisünk beigazolódott A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények és a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények között gyenge ($r = 0,33$) korreláció áll fenn ($p < 0,001$).

2016 tavaszán végzett tartalomba ágyazott fejlesztést végeztünk egy 32 fős osztályban, 20 alkalommal, a matematikaóra második felében. A tanulók metakognítív stratégiáját szöveges feladatok, hangosan gondolkodtatás segítségével fejlesztettük. Az órákon hangsúlyt fektettünk az egyes szorzási stratégiák előnyeinek, hátrányainak megbeszélésére.

A fejlesztésre vonatkozó hipotéziseink beigazolódtak. H9a: A szorzási stratégiák explicit tanításában részt vevő tanulók jobb eredményeket értek el a Szorzási Stratégiák utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (v.ö. Mulligan & Mitchelmore, 2009).
H9b: A fejlesztésben részt vett tanulók jobb eredményeket értek el a Matematika Tudásszintmérő utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Csíkos, 2007).
H9c: A fejlesztés hatása a késleltetett utóteszt során is kimutatható (vö. Csíkos, 2007).
A fejlesztés utótesztjein a kísérleti csoport nem minden tagja használt több stratégiát, mint a kontrollcsoport. Ugyanakkor a kísérleti csoport mind a szorzási feladatok, mind a szöveges feladatok megoldása során jobban teljesített az utótesztelés során.

Bár a kísérletben részt vevő csoportok száma, elemszáma nem engedi messzemenő következtetések levonását, a külföldi kutatók beszámolói alapján mégis úgy gondoljuk, hogy érdemes hasonló fejlesztéseket végezni. Szeretnénk ráirányítani a figyelmet a szorzási stratégiák, a metakognitív stratégiák tanításának fontosságára. Úgy véljük, változtatásokra lehet szükség a tankönyvekben is. A külföldi kísérletek eredményei (pl. Baroody, 2003) alapján célszerű lehet a fejlesztés időpontját korábbra tenni, mielőtt a tanulók a kétjegyű számok írásbeli szorzásával megismerkednének. korai fejlesztés hatékonyabb lehet. Ugyanakkor a fejlesztést célszerű lenne a felsőtagozaton és a középiskolában is folytani. Ezáltal a matematika még jobban segíthetné a természettudományos tantárgyak elsajátítását. Célszerűnek véljük további kutatások, fejlesztő kísérletek végzését. Ezért egy nagymintás vizsgálatot szerveztünk, melyről a következő részben számolunk be.

5.6. A központi vizsgálat eredményei

A szorzási stratégiák vizsgálata 4., 5. és 6. évfolyamos tanulók körében

A központi empirikus vizsgálatunk lefolytatásához a három saját fejlesztésű mérőeszközt alkalmaztuk. A vizsgálat az etikai normák figyelembevételével folyt. A tanulók a mérésben önkéntesen vettek részt, a szülők tájékoztatása és beleegyezésük megszerzése után. Az eredmények ismertetését a vizsgálatban részt vevő tanulókra vonatkozó statisztikai adatokkal kezdjük. Az adatok feldolgozásához SPSS 16 szoftvert alkalmaztunk, a leíró és matematikai statisztikai számítások elemzését a következőkben ismertetjük.

Az egyes mérőeszközök kitöltésére vonatkozó létszámokról kaphatunk adatokat a 44. táblázatból. A 800 fős mintaelemszám lehetővé teszi, hogy következtetéseket vonhassunk le a teljes populációra nézve.

44. táblázat. Az egyes mérőeszközöket kitöltött tanulók száma a központi vizsgálatban

Mérőeszköz	A változat (fő)	B változat (fő)	Hiányzó (fő)	Összesen (fő)
Szorzási Stratégiák Teszt	416	384	50	800
Matematika Tudásszintmérő Teszt	436	392	22	828
Háttérkérdőív			17	833

A Szorzási Stratégiák Tesztet kitöltő 800 fős mintából a tanulók 52 százaléka a teszt A változatát írta meg. A Matematika Tudásszintmérő Tesztet 828-an oldották meg, 52,66 százalékuk az A változatot írta. A Háttérkérdőívet pedig 17 fő nem töltötte ki. Mindhárom mérőeszközt 777 fő (399 fiú, 378 lány) töltötte ki.

5.6.1. A Szorzási Stratégiák Teszt elemzése

A teszt reliabilitása megfelelő, Cronbach-α = 0,96, az átlagpontszám 17,40 (szórás 12,42). Egy egészhez közeli, vagyis nagyon könnyű itemek nem voltak a tesztben, egyik item esetén sem találunk 100 %-os megoldottságot. Hasonlóan nem láthatunk 0 %-os megoldottságú itemet, azaz nem volt olyan item, amit a tanulók nagy része nem tudott megoldani. Nehéznek tekinthetjük a 20%-nál kisebb, könnyűnek a 80%- nál nagyobb megoldottságú itemeket, azonban ilyeneket sem találunk a tesztben. A legkönnyebb itemnek a 14. item bizonyult, megoldottsága 66%-os. Ezt a szorzást egy ismert szabály alapján is könnyen kiszámolhatjuk a kis szorzótáblabeli szorzás eredményeit ismerve. Könnyebb itemek voltak a vizsgált tanulók számára a 4., 29., 30. és a 39. itemek, megoldottságuk legalább 60%-os. Egyjegyű szám szorzása kétjegyű számmal, illetve háromjegyű számmal, egyszerűbb feladatot jelent a gyermekek számára, illetve az is, ha ismert szabályok alkalmazása segíthet a szorzás elvégzésében. A legnehezebbnek a 38. item bizonyult, a diákok 30%-a oldotta meg. Ennek oka a szorzásban szereplő kétjegyű számok nagysága lehet. Kevésbé sikerült még megoldani az 5., 10., 12., 16., 18., 22., 31., 36. és 37. itemeket, ezek a szorzások valószínűleg szokatlanok a tanulók számára. A leggyengébb teljesítményt a teszten a 38. itemen tapasztaltuk, megoldottsága 30 %. A 0,5-es nehézségű (50 % megoldottságú) itemek mérnek a legjobban.

Ehhez közeli értéket nyolc item esetén látunk, ezek az itemek differenciálják a különböző képességű tanulókat a leginkább.

A teszt és itemei viselkedésének vizsgálatához az elkülönítésmutatókat is kiszámítottuk. Mindegyik item elkülönítésmutatója 0,4 feletti, így egyik itemet sem célszerű elhagyni a tesztből a további vizsgálatok során.

5.6.2. Nemenkénti különbségek

A Szorzási Stratégiák Teszt reliabilitás értéke a teljes mintán magasabb, mint 0,9, vagyis a teszt megbízhatóan mér. A részmintákon mért reiabilitás is magas. Lányok (390 fő) és a fiúk esetén a teszt reliabilitása Cronbach-α = 0,96. A lányok által elért pontszám átlaga 17,73 (szórás 12,34), a fiúk átlaga 17,21 (szórás 12,50).

Az itemek nehézségéről elmondhatjuk, hogy sem 0 egész, sem 1 egész közeli értéket nem látunk, tehát a fiúk számára nagyon könnyű, illetve nehéz itemek nem voltak a tesztben. A fiúk esetén is a 14. item bizonyult legkönnyebb itemnek, 66%-uk jól kiszámolta a $20 \cdot 30$ szorzás eredményét. A teljes mintához hasonlóan a 4., 29., 29. itemeket a fiúk legalább 60%-a oldotta meg helyesen, 64%-os megoldottságú még a 30. item is. Egyjegyű számmal történő szorzás, illetve $50 \cdot 50$ kiszámítása könnyebben megy a fiúknak. Jól differenciálja a tanulók képességeit a 15., 25., 28., 32. és 40 item, ezen öt item megoldottsága 50%-hoz közeli érték. A fiúk számára is a 38. item bizonyult legnehezebbnek, 30 %-uk oldotta meg. A fiúk esetében is 30 %- közeli megoldottsága van a 10., 22., 31. és 37., továbbá az 5., 8., 12., 16. és 18. itemeknek.

A tesztitemek viselkedésének vizsgálatához az elkülönítésmutatókat a fiúk mintájára is kiszámítottuk. Hét item elkülönítésmutatója 0,7 fölötti, ezek a 17., 19., 11., 13., 9., 8. és 18. item. Nincs 0,3 alatti elkülönítésmutatójú item, vagyis minden item jól illeszkedik a tesztbe, a legkisebb érték 0,454 (40. item).

A lányok számára sem voltak nagyon könnyű, illetve nehéz itemek a tesztben. A lányok esetén is a 14. item bizonyult legkönnyebb itemnek, 67%-uk számolt jól. A teljes mintához és a fiúkhoz hasonlóan a 4. és 29. itemeket a lányok legalább 60%-a oldotta meg helyesen; 62%-os megoldottságú még a 39. item. Jól differenciálja a lányok képességeit a 28. és a 40. item, megoldottsága 50%, ez utóbbi egyezik a fiúknál felsorolt itemekkel. A lányok számára is a 38. item bizonyult az egyik legnehezebbnek, 29 %-uk oldotta meg, és problémát okozott a 31. és a 37. item kiszámítása is, a lányok 29%-a, illetve 31 %-a oldotta meg.

A lányok mintáján kiszámított elkülönítésmutatókat, az item törlése esetén kapható skálaátlagot, skálavarianciát, valamint az itemek elkülönítésmutatóit és az item elhagyása esetén kapott reliabilitás-mutatót megvizsgáltuk. A nagyság szerint csökkenő sorrendbe rakott elkülönítésmutatók között négy itemet találunk legalább 0,7-es értékkel, ezek a 17., 13., 36., 11. és 9. item. Mindkét nemű tanulók esetén a 9., 11., 13. és 17. item mér igen jól. A legkisebb értéket a fiúk mintájához hasonlóan a 30. item esetén látunk, de mivel ez is 0,3 feletti (0,44), így nem lóg ki a tesztből.

A tesztváltozatok nemenkénti reliabilitását külön is vizsgáltuk. A reliabilitás magas, 0,95 fölötti mindkét tesztváltozat esetén, hasonlóan magas megbízhatósági értékeket látunk, ha az egyes tesztváltozatokat író mintát nemek szerint bontjuk ketté. A 800 fős minta 52%-a az A tesztet írta meg, 48%-a pedig a B tesztet. Az A változatot író 416 tanuló 51,4%-a fiú és 48,6%-a lány. A B tesztváltozatot 384 fő írta meg, ennek 51%-a fiú, 49 %-a lány. A fiúk átlaga az A teszten 17,19 (szórás 12,55), a lányoké 17,71 (szórás 12,05), a minta átéaga 17,44 (szórás 12,30). A B teszten a fiúk átlaga 17,23 (szórás 12,479, a lányoké 17,74 (szórás 12,68), a minta átlaga 17,48 (szórás 12,56). Mindkét tesztváltozat írói között volt 0 pontos fiú és lány is. Az A tesztváltozat esetén mind a fiúk, mind a lányok között volt 40 pontos is. A B változat írásakor a fiúknál 40 pont, a lányoknál 39 pont volt a maximális pontszám.

Évfolyamonkénti, iskolánkénti, osztályonkénti különbségek

A reliabilitás mintafüggőségét bizonyítja az is, hogy az egyes évfolyamokon, iskolákban vagy osztályokban mért reliabilitás értékek eltérhetnek az egész minta reliabilitásától. A teszt reliabilitása évfolyamonként, iskolánként és osztályonként különböző értéket mutat vizsgálatunk során is. Ez az érték a mért csoportonként változó, a kisebb reliabilitás esetén a csoport valószínűleg homogénebb volt a mért teljesítmény szempontjából.

A reliabilitás-mutatók értéke évfolyamonként: a 4. évfolyamon (260 fő) 0,95, az ötödik évfolyamon (243fő) 0,96, a hatodik évfolyamon (297 fő) 0,97. Tehát a teszt mindhárom évfolyamon jól méri a tanulók teljesítményét. Negyedikesek esetén a legnagyobb elkülönítésmutatójú itemek: 8., 17., 21., 9., 11., 13. és 12. (mutatóik rendre 0,70; 0,70; 0,68; 0,68; 0,67; 0,67 és 0,67). A legnehezebb itemeken elért tanulói teljesítmények az itemsorrendet nézve 17% (38. item), 18% (37. item) és 20% (31. item). A legkönnyebb itemeken elért teljesítmények 60% (29. item), 56% (4., 14. és 39. item) A 32. item megoldottsága 0,5, ez jól differenciálja a különböző képességű negyedikes tanulókat. A legjobb elkülönítésmutatóval a 17. item rendelkezik (0,77), ezt követik a 36., 13. és 11. itemek, elkülönítésmutatóik rendre 0,71; 0,71 és 0,68. A legkisebb elkülönítésmutatója a 30. itemnek van, 0,37, de ezzel nem lóg ki a tesztből. A legnehezebb itemek a 10., 31. és 38., megoldottságuk 34%-os. A legkönnyebb itemnek a 14. bizonyult, a tanulók 73%-a oldotta meg, 65%-os megoldottságú a 30. item, 63%-os a 29. és a 39. item. Az ötödikes tanulók számára a legnehezebb itemeknek a 37., 38. és 10.itemek bizonyultak, megoldottságuk 34%. A tanulók fele oldotta meg a 24. itemet, 49 %-uk a 6., 7., 20., 34. itemet, 51 %-uk pedig a 28. itemet. A hatodik évfolyamon a legjobb elkülönítésmutatóval (0,78) a 17. item rendelkezik. Ezen kívül még 12 item rendelkezik 0,7 fölötti elkülönítésmutatóval, ezek a 8., 9., 11., 12., 13., 18., 19., 20., 21., 22., 26. és 36. itemek. A leggyengébben itt a 0,459 elkülönítésmutatójú 40. item mér. A tanulók 69%-a ki tudta számítani a 14. és 39. szorzást. 50%-os megoldottságú a 28. item, 49 %-os a 20. item, ezek az itemek jól differenciálják képesség szerint a tanulókat. A leggyengébb megoldottságú item a 37. (36 %).

A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóságára vonatkozó vizsgálatot iskolánként és osztályonként is elvégeztük. A teszt reliabilitása minden iskolában elfogadható értékű, 0,83 és 0,97 közötti. A legalacsonyabb a 9. iskolában (0,83), ennek oka a részminta homogenitása lehet. Az osztályokra bontott mintán végzett reliabilitás-vizsgálat rámutat arra, hogy a teljes minta reliabilitást mely csoportok rontják el leginkább. A legkisebb reliabilitást találjuk a 9. iskola 37. osztályában (Cronbach-α = 0,65), a 2. iskola 14. osztályában (Cronbach-α = 0,88), a 8. iskola 34. és 36. osztályában (Cronbach-α = 0,87), alacsonyabb még a 10. iskola 39. osztályában (Cronbach-α = 0,73). Ezekben az osztályokban a tanulók teljesítményszintje közötti különbség kisebb lehet, mint a többi osztályban, ahol a teszt magasabb reliabilitást ért el, a tanulók nagyobb része ezekben a csoportokban vagy közel azonosan gyenge vagy hasonló mértékben jó teljesítményt nyújtott. A legnagyobb reliabilitást a 4. iskola 23. és 25. osztályában, a 9. iskola 35. osztályában és a 11. iskola 45. osztályában tapasztaltuk, a mutató értéke rendre 0,97; 0,98; 0,97; 0,97.

5.6.3. A Szorzási Stratégiák Teszt itemei közötti kapcsolat

A Szorzási Stratégiák Tesztben levő itemek egymás közötti korrelációit is vizsgáltuk. Az itemek közötti korreláció átlaga 0,38 (minimum 0,13, maximum 0,72). A teszt itemeire végzett Pearson korrelációs elemzés alapján minden item között szignifikáns ($p < 0{,}001$), pozitív összefüggés található. A legerősebb kapcsolat a 13. és a 9. item között van (0,72), továbbá a 17. item és 3. item között (0,71). Számos esetben erős, 0,6 feletti az itemek közötti kapcsolat, pl. a 9. és a 8. item, 11. item és a 8., 9., 10. itemek között, a 13. és a 8., 9. itemek között, a 17. és a 8., 9., 10. itemek között, hogy néhány példát említsünk. gyenge kapcsolat mutatható ki az 1. és a 29., 30., 33., 39. és 40. item között.

A Szorzási Stratégiák Teszt altesztjei közötti kapcsolat

A Szorzási Stratégiák Teszt egyes itemeit tulajdonságaik szerint többféleképpen rendszerezhetjük. A csoportosítások alapján a teszt részeire a következő elnevezéseket vezetjük be:
Kétjegyű szorzása háromjegyű számmal: a 25 · 120; 12 · 250 és a 10 · 690 itemekre;
Egyjegyű szorzása négyjegyűvel: a 8 · 4211 és a 8 · 999 itemekre;
Egyjegyű szorzása háromjegyűvel: a 9 · 742; 9 · 888; 150 · 6 és a 9 · 652 itemekre;
Egyjegyű számok szorzása kétjegyűvel elnevezést kapják együtt a 8 · 99 és a 77 · 8 itemek.
Kétjegyű számok négyzete elnevezés fogja össze a 32 · 32; 25 · 25; 13 · 13; 15 · 15; 16 · 16; 24 · 24; 50 · 50; 19 · 19; 11 · 11; 45 · 45 itemeket;
Kétjegyűek szorzása, van benne 25 elnevezést alkalmazunk a következő szorzásokat tartalmazó itemek esetén: 25 · 48; 25 · 32; 25 · 65; 25 · 50; 25 · 35;
Valamilyen szabály alapján számolható elnevezést alkalmazzuk a 49 · 51; 19 · 21; 20 · 30; 17 · 99; 77 · 99 itemekre;
Többi kétjegyű szám szorzása a közös neve együtt a 31· 32; 15· 48; 12 · 16; 12 · 15; 23 · 27; 15 · 16; 18 · 16; 12 · 11 itemek csoportjának;

A 45. táblázatból a Szorzási Stratégiák Tesztben az egyes tesztrészek közötti korrelációt olvashatjuk le. A szorzásteszt összpontszámával mindegyik tesztrész közepes vagy erős korrelációban áll. A legszorosabb kapcsolat a teszt összpontszáma és azon tesztrészek között van, amelyek kétjegyű szám szorzására vonatkoznak. A kétjegyű szám kétjegyű számmal való szorzása korrelációja erős, 0,8 fölötti a következő tesztrészekkel: kétjegyű szám, van benne 25; szabály alapján; többi szorzás. A kétjegyű, van benne 25 és a többi szorzás, valamit a szabály alapján itemcsoportok szintén 0,8 közeli korrelációs kapcsolattal írhatók le, hasonlóan erős a kapcsolat a szabály alapján elvégezhető és a többi szorzás itemcsoportok között.

45. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt részeinek korrelációja, központi vizsgálat

Itemfajta	500.500	Kétjegyű háromjegyűvel	Egyjegyű négyjegyűvel	Egyjegyű háromjegyűvel	Egyjegyű kétjegyűvel	Kétjegyű számok négyzete	Kétjegyű, van benne 25	Szabály alapján	Többi szorzás
Kétjegyű három-jegyűvel	0,45								
Egyjegyű négy-jegyűvel	0,33	0,60							
Egyjegyű három-jegyűvel	0,45	0,58	0,63						
Egyjegyű két-jegyűvel	0,36	0,58	0.60	0,67					
Kétjegyű számok négyzete	0,41	0,67	0,51	0,57	0,55				
Kétjegyű, van benne 25	0,35	0,67	0,52	0,55	0,53	0,83			
Szabály alapján	0,41	0,68	0,60	0,57	0,57	0,82	0,81		
Többi szorzás	0,32	0,66	0,50	0,49	0,52	0,87	0,84	0,83	
Szorzás-teszt összpont-szám	0,48	0,79	0,67	0,71	0,67	0,94	0,90	0,91	0,92

Megjegyzés: a korrelációs mátrixban szereplő együtthatók mindegyike p = 0,001 szinten szignifikáns.

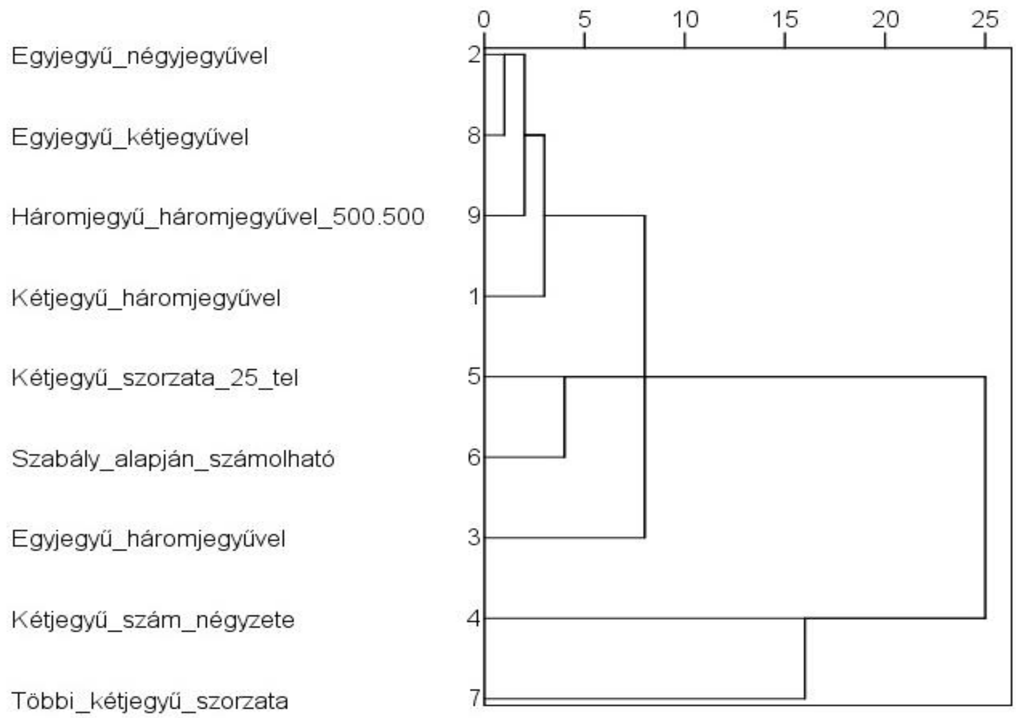
A 46. táblázat az egyes szorzástípusok során elért átlagpontszámot, a megoldottság mértékét és a szórást mutatja. Láthatjuk, hogy a legtöbb szorzástípus megoldottsága 40 % és 60% közötti. Képességtesztnél legalább 60% számítana jó eredménynek. A legkönnyebb a tanulók számára az egyjegyű szám szorzása kétjegyű számmal volt (56 % -os megoldottság). Az 500·500 item megoldottsága 52%-os, a háromjegyű szám szorzása egyjegyű számmal 49,25%-os megoldottságú, háromjegyű szám szorzása kétjegyű számmal 49%-os megoldottságú. A legnehezebben a kétjegyű számok négyzetének, valamint valamilyen szabály alapján számolható feladattípus megoldása ment, itt a megoldottság kevesebb, mint 40% (39,8%).

46. táblázat. Az egyes szorzástípusok során elért átlagpontszám, a megoldottság mértéke és a szórás, központi vizsgálat

Feladattípus	Itemszám	Átlagpontszám	Megoldottság	Szórás
500·500	1	0,52	52,00%	0,50
Kétjegyű háromjegyűvel	3	1,47	49,00%	1,13
Egyjegyű négyjegyűvel	2	0,93	46,50%	0,86
Egyjegyű háromjegyűvel	4	1,97	49,25%	1,55
Egyjegyű kétjegyűvel	2	1,12	56,00%	0,83
Kétjegyű számok négyzete	10	3,98	39,80%	3,40
Kétjegyű, van benne 25	5	2,07	41,40%	1,82
Szabály alapján számolható	5	2,04	40,80%	1,68
Többi szorzás	8	3,36	42,00%	2,94
Összesen	40	17,46	43,65%	12,42

A Szorzási Stratégiák Teszt szerkezetének vizsgálata

Szerettük volna megtudni, hogy milyen hatása van az egyes tesztrészeknek a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredményekre. Az egyes szorzástípusok egymáshoz kapcsolódását klaszteranalízissel vizsgáltuk. A klaszteranalízissel (a legközelebbi szomszéd módszere, négyzetes euklideszi távolság) kapott összefüggéseket mutatja a 22. ábra. Az ábra a kapott koefficiensek (494; 696; 800; 961; 1473; 1505; 2491; 3721) nélkül is könnyen értelmezhető. Amint látható, az egyjegyű szám szorzása négyjegyű számmal, illetve egyjegyű szám szorzása kétjegyű számmal feladattípus szorosan összekapcsolható. Ezekhez kapcsolódva az 500 · 500 item egy kisebb hasonlósági csoportot alkot, hozzájuk kapcsolódik később a kétjegyű szám szorzása háromjegyű számmal feladattípus. A szabály alapján összeszorozható kétjegyű számok szorzása és a 25-öt mint szorzótényezőt tartalmazó kétjegyű számok szorzása itemek tartoznak szorosan együvé; ezekkel az egyjegyű számok szorzású négyjegyű számmal itemeket tartalmazó hasonlósági csoport és az egyjegyű számok szorzása háromjegyű számmal itemcsoport egy nagyobb klaszterré kapcsolódik össze. A kétjegyű számok négyzete itemei és a többi kétjegyű szám szorzása itemek egy kisebb fürtöt alkotnak, végül ezzel a kis fürttel egészül ki a klaszter.



22. ábra A Szorzási Stratégiák Teszt altesztjeit ábrázoló dendrogram, központi vizsgálat

A teszt szerkezetének további vizsgálata segíthet annak megállapításában, mely itemeknek hatása a legnagyobb a teszt összpontszámára. Lépésenkénti regresszióanalízis segítségével kerestük azokat az itemeket, amelyek a legnagyobb magyarázó erejű itemek a teszteredmény értelmezésekor. A regresszióanalízis vizsgálat eredményét mutatja a 47. táblázat.

47. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt itemeire végzett lépésenkénti regresszióanalízis eredménye, központi vizsgálat

Lépés sorszáma	Belépő item	R^2
1.	A szorzásteszt 17. iteme 25· 32	0,60
2.	A szorzásteszt 34. iteme 12 · 11	0,75
3.	A szorzásteszt 32. iteme 77 · 8	0,82
4.	A szorzásteszt 9. iteme 12 · 16	0,86
5.	A szorzásteszt 2. iteme 25 · 120	0,88
6.	A szorzásteszt 28. iteme 9 · 888	0,90
7.	A szorzásteszt 18. iteme 25 · 65	0,92
8.	A szorzásteszt 37. iteme 45 · 45	0,93
9.	A szorzásteszt 39. iteme 10 · 690	0,94
10.	A szorzásteszt 12. iteme 17 · 99	0,95
11.	A szorzásteszt 21. iteme 16 · 16	0,95
	Összes megmagyarázott variancia	95,1%

A 40 itemes teszt lépésenkénti regresszióanalízissel történő vizsgálata során a függő változó szerepét a teszt összpontszáma töltötte be, a független változók pedig az egyes itemek voltak. Vizsgálatunk eredményei szerint a 17. iteme adja a megmagyarázott variancia 60,2%-át; a 34. és 32. itemmel együtt már a megmagyarázott variancia 81,9%-át adják. A teszt 11 iteme adja a megmagyarázott variancia 95,2%-át, így a további vizsgálatok során ezeket az itemeket célszerű beletenni a tesztbe. A következő lépésben a regresszióba lépő 25. szorzásitem csekély mértékben (0,4%-kal) növeli a variancia magyarázó erejét. A lineáris regresszióba lépett első 11 item a szorzásteszt a később bekerülő további 15 itemmel (11., 23., 31., 20., 5., 30., 4., 24., 7., 35., 16., 40., 3. és 27. item) együtt már a variancia 99%-át megmagyarázza. Ha tesztünket rövidíteni szeretnénk, akkor a későbbi vizsgálat során ezt a 26 itemet választanánk. A teszt megmagyarázott varianciájának 99%-át eredményező itemek az általunk már említett szorzástípusú feladatokkal leírhatók. A 26 item között szerepel egyjegyű szám szorzása kétjegyűvel (2 item), egyjegyű szorzása háromjegyűvel (2 item), egyjegyű szorzása négyjegyűvel (1 item), kétjegyű szorzása háromjegyű számmal (2 item), kétjegyű szám négyzete (6 item), 25-öt tartalmazó szorzás (3 item), valamilyen szabály alapján számítható szorzás (5 item), további 5 item egyéb kétjegyű szám kétjegyű számmal való szorzását kéri. Egy újabb lineáris regressziószámítás eredményeképp szintén rövidíthetnénk a tesztet, az első 5 lépésben szereplő 30 itemre, ezt látjuk a 48. táblázatban.

48. táblázat. A szorzástípusokra végzett lineáris regressziószámítás eredménye, központi vizsgálat

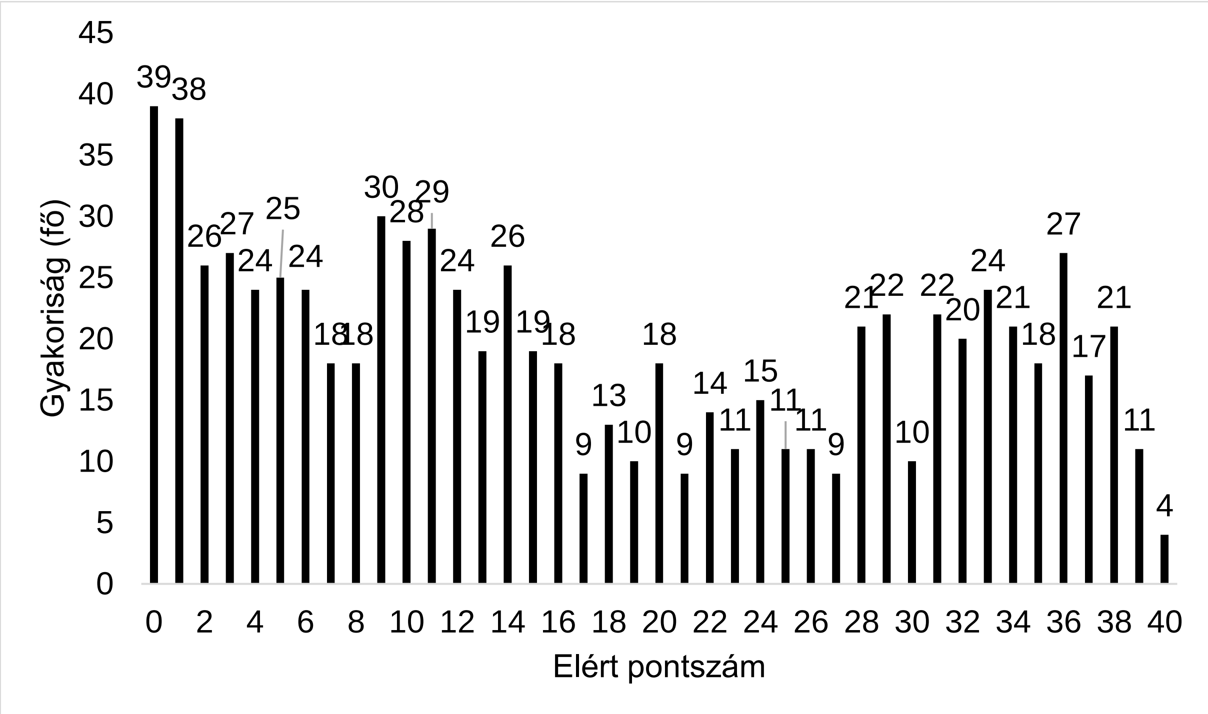
Lépés sorszáma	Belépő szorzástípus	R^2
1.	kétjegyű szám négyzete	0,88
2.	szabály alapján számolható	0,93
3.	egyjegyű háromjegyűvel	0,96
4.	többi kétjegyű szám szorzása kétjegyű számmal	0,98
5.	kétjegyű szám szorzása háromjegyűvel	0,99
6.	25-öt tartalmazó szorzás, kétjegyű kétjegyűvel	0,99
7.	egyjegyű négyjegyűvel	1,00
8.	egyjegyű kétjegyűvel	1,00
9.	$500 \cdot 500$	1,00
Összes megmagyarázott variancia 100%		

5.6.4. A Szorzási Stratégiák Teszt megoldottsága

A Szorzási Stratégiák Tesztet kitöltő személyekből álló minta jellemző létszámadatait láthatjuk a 15. sz. mellékletbeli táblázatban. A 850 fős mintában szereplő 5. iskola két osztályának tanulói ezt a tesztet egyáltalán nem töltötték ki, továbbá néhány osztályban hiányzók is voltak, ezért a minta lecsökkent 800 főre. Ugyanakkor a fiúk és a lányok aránya a teljes mintára nézve változatlan, a lányok aránya a mintában 48,7 % maradt (412 fiú, 391 lány). Az egyes osztályok összetételében 5%-osnál nagyobb eltérést a 4.-es számmal jelzett osztályban találtunk, itt a tesztet kitöltőknek közel a ¾ része lány.

A Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények

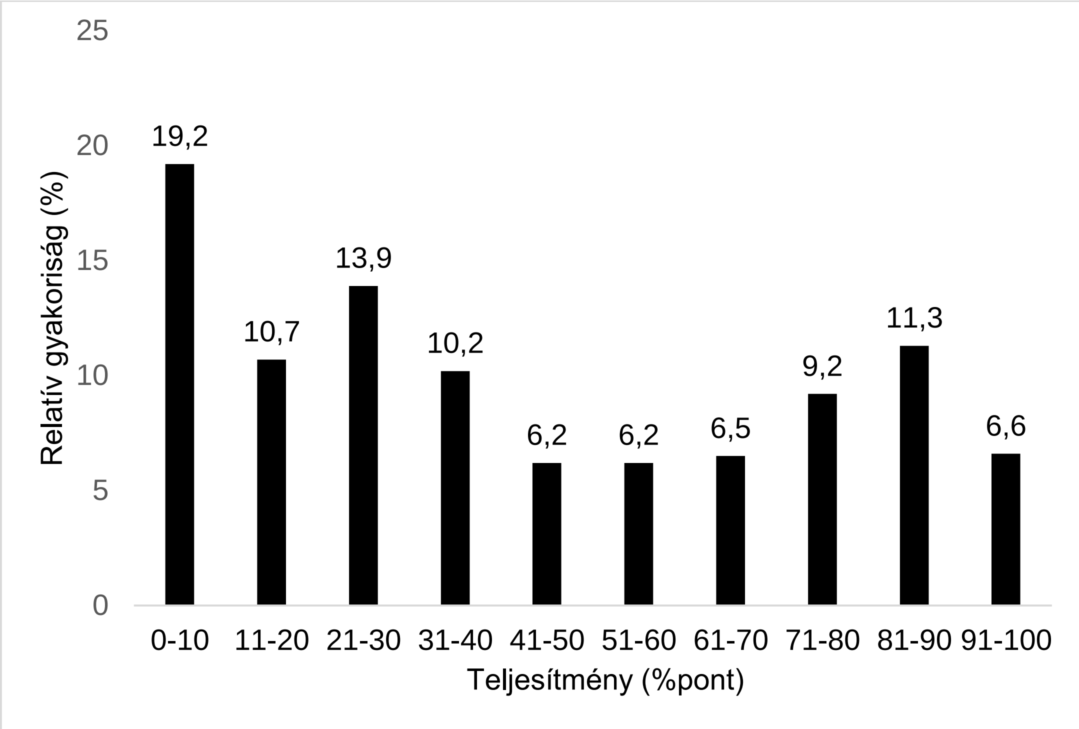
A Szorzási Stratégiák Teszt megoldottságának relatív gyakoriságát ábrázoló diagram a 23. ábrán látható. A diákok teszten elért pontszámainak eloszla egymóduszú. A leggyakrabban elért pontszám, így a módus 0 pont (39 tanuló), 38 tanuló pedig 1 pontot szerzett. A tanulók 25,38%-a legfeljebb 6 pontot (15%-os teljesítményt), 51,75%-a legfeljebb 15 pontot (ez 37,5%-os teljesítmény), 75,6%-a legfeljebb 29 pontot (72,5%-os teljesítményt) ért el. A tesztet író 800 gyermek tized része nyújtott legalább 90%-os teljesítményt, közülük négyen értek el maximális pontszámot.



23. ábra A Szorzási Stratégiák Teszten elért pontszám, központi vizsgálat

A normalitásvizsgálathoz végzett Kolmogorov-Szmirnov teszt eredményei szerint D(800) = 0,11, p < 0,001 az adatok eloszlása szignifikánsan eltér a normál eloszlástól. Az eloszlásjellemzőket megnézve a ferdeségi mutató (skewness) 0,24 (Std Error 0,09), $z_{skewness}$ = 2,76, a ferdeség szignifikánsan eltér a normálistól, a sűrűségfüggvény aszimmetrikus, s mivel ez pozitív, a csúcsot elől láthatjuk. A lapultság (kurtosis) értéke viszont -1,33 (Std Error 0,17), $z_{kurtosis}$ = -7,66, vagyis a sokaság eloszlásának sűrűségfüggvénye csúcsossága szignifikánsan eltér a normálistól, laposabb, mint a normális haranggörbéé. A minta tehát nem a szokásos normális eloszlást mutatja, ennek oka a részminták eltérő összetételéből eredhet.

10% pontonként csoportosítva az eredményeket, észrevehetjük, hogy a minta közel ötöd része kevesebb, mint 10%-os teljesítményt ért el. A tanulók 10,7 %-a 11-20%-os eredményt ért el, 13,9%-a pedig 21-30% közöttit. A gyermekek 60,2%-a legfeljebb a pontok 50%-át szerezte meg. Ezt láthatjuk a 24. ábrán.



24. ábra A teljes minta Szorzási Stratégiák Teszten elért eredményének eloszlása, központi vizsgálat

Iskolák közötti különbségek

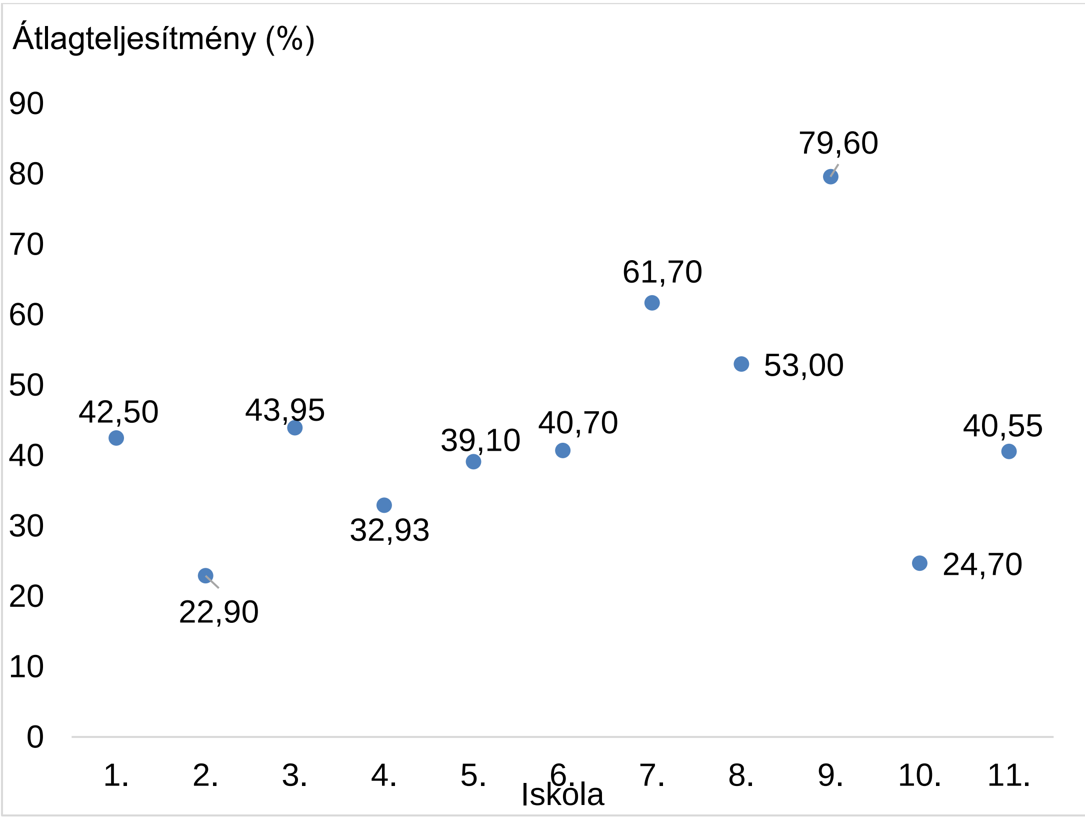
A Szorzási Stratégiák Tesztet kitöltő 800 fő eredményeit olvashatjuk ki a 49. táblázatból.

49. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmények iskolánként, központi vizsgálat

Iskola	Tesztkitöltők száma	Átlagpont-szám	Szórás	Minimum	Maximum	Medián
1.	209	17,71	11,01	1	40	15
2.	64	9,16	9,57	0	35	5,5
3.	88	17,58	11,97	0	39	16
4.	66	13,17	11,95	0	40	9
5.	11	15,64	13,48	0	39	14
6.	43	16,28	12,51	0	39	15
7.	56	24,68	12,47	0	40	30,5
8.	25	21,20	13,19	0	38	24
9.	63	31,84	5,68	10	39	33
10.	57	9,88	8,80	0	37	7
11.	118	16,22	12,25	0	40	13
Összesen	800	17,46	12,42	0	40	15

A tesztet 11 (8 vidéki és 3 budapesti) iskolában töltötték ki a tanulók. A vizsgálatban részt vett tanulók közül a következő létszámú csoportok írták meg a tesztet: Az 1. iskola 218 tanulójából 209, a 2. iskola 65 tanulójából 64, a 3. iskola 98 tanulójából 88, a 4. iskolából mind a 66, az 5. iskola 29 tanulójából 11, a 6. iskola mind a 43 tanulója. A 7. iskola 57 tanulója közül 1 hiányzott, a 8. iskola mind a 25 tanulója megírta a tesztet, a 9. iskola 63 tanulója szintén megírta a tesztet, végül a 11. iskola 120 tanulója közül 2 fő hiányzott. A 800 fős mintában a Szorzási Stratégiák Teszten elért pontszám átlaga 17,46 (szórás 12,42), medián 15 pont. Öt iskolában a tanulók magasabb átlagpontszámot értek el, mint a 11 iskola átlagpontszáma: ezek az 1., 3., 7., 8., és 9. iskola. A leggyengébb átlagteljesítményt a 2. iskolában mértünk, emlékszünk rá, hogy ebben a borsodi iskolában volt a legmagasabb a HH-s tanulók aránya. Szintén gyenge eredményt mutat a 10. iskola. A legkisebb szórást a budapesti nyolcévfolyamos gimnázium esetében látunk, míg a legnagyobbat egy borsodi községi iskolában, ahová szintén sok hátrányos helyzetű tanuló jár. Az 1. és a 9. iskola tanulóinak legkisebb elért pontszáma 1, illetve 10 volt, négy iskolában értek el a tanulók maximális pontszámot, de minden iskolában akadt olyan diák, akinek a teljesítménye legalább 87% volt. A legkisebb mediánt, ami 7, a 10. iskolában, a legnagyobbat (30,5) a 7. iskolában láthatjuk.

A Szorzási Stratégiák Teszten elért teljesítményt látjuk a 25. ábrán. Szemmel látható, mekkora teljesítménybeli különbség van a vizsgálatban részt vevő iskolák között. Míg két iskolában (2. és 10.) a tanulók teljesítményének átlaga a teszten 25% alatti (22,9% és 24,7%), a 7. és a 9. iskolában a tanulók teljesítménye nagyobb, mint 60% (61,7% és 79,6%). A többi iskola a két szélső érték között foglal helyet. Az iskolák közötti különbségeket a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével állapítottuk meg. A Levene -féle próba esetén $F = 9{,}06$, $p = 0{,}000$ kaptunk, amire $p < 0{,}001$, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások szignifikánsan különböznek. A Welch-próba értéke 47,167 ($df1 = 10$, $df2 = 161{,}67$, $p < 0{,}001$, vagyis szignifikáns különbség figyelhető meg az egyes iskolák átlagai között. A részminták által reprezentált populációk szignifikáns szóráskülönbségei miatt a post-hoc elemzések közül a a Dunnett T3 teszt mutatja meg, hogy az iskolák különbségei kimutathatóan eltérnek a többi iskoláétól.

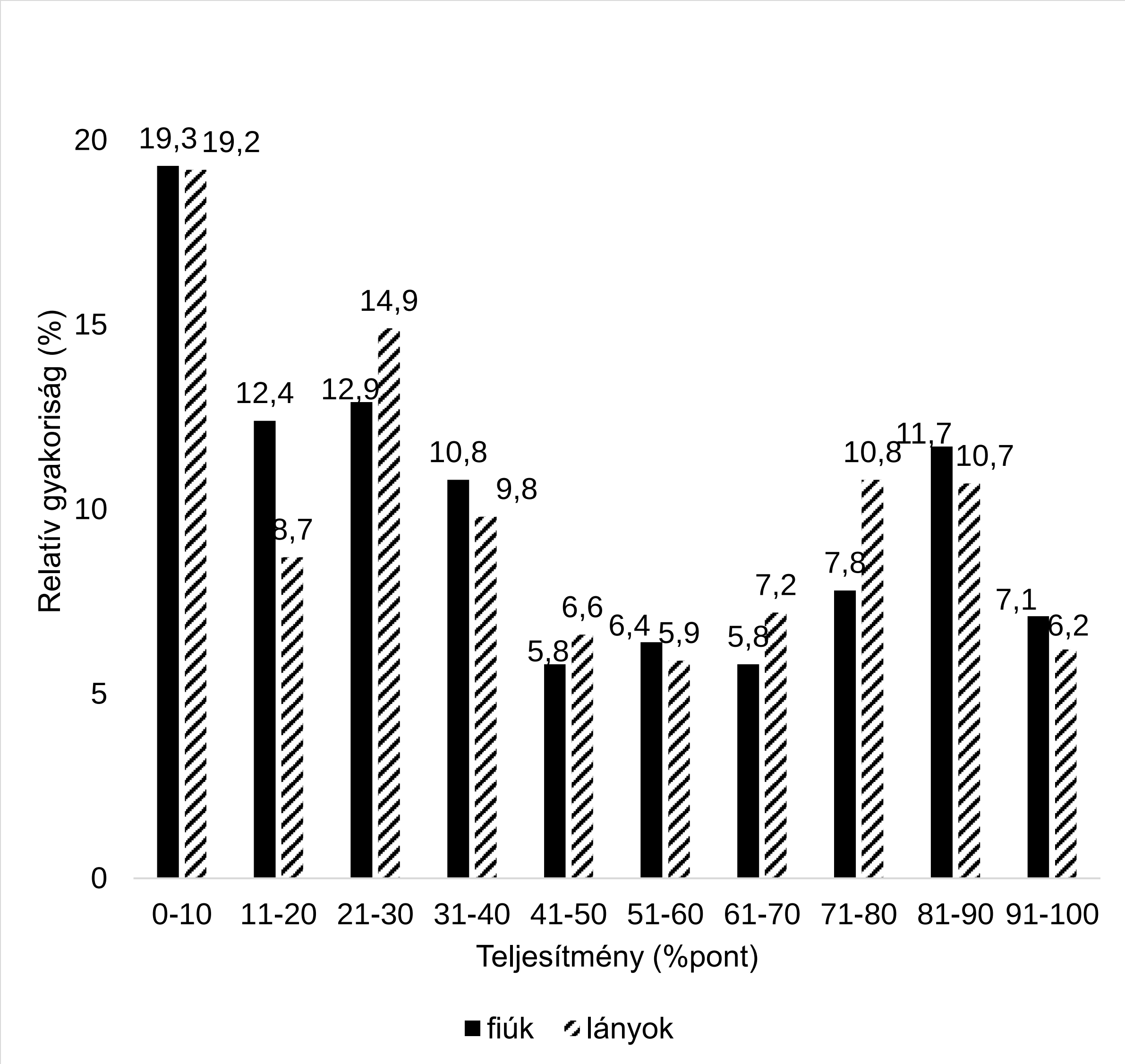


25. ábra Az iskolák Szorzási Stratégiák Teszten elért átlagteljesítménye %-ban, központi vizsgálat

9. iskola teljesítménye szignifikánsan magasabb, mint a többi iskoláé. Teljesítményük alapján a 7. és a 9. iskola magasabb teljesítményt mutat, mint a többi iskola, ugyanakkor a páros t-próba alapján a két iskola teljesítménye közötti különbség szignifikáns a 9. iskola javára ($t = 4,11$, $df = 117$, $p < 0,001$, sig: 1-tailed). A 7. és 8. iskola teljesítménye közötti különbség inszignifikáns ($t = 1,14$, $df = 79$, $p < 0,129$ 1-tailed), egy másik hasonlósági csoportot alkothatnak. A 2. és 10. iskola egy harmadik hasonlósági csoportba kerülhet ($t = -0,43$, $df = 119$, $p < 0,33$, 1-tailed), ezektől szignifikánsan magasabb teljesítményt nyújt a 4. iskola ($t = -2,11$, $df = 128$, $p < 0,019$ 1-tailed), vele egy negyedik hasonlósági csoportba sorolható az 1., 3., 4., 5., 6. és 11. iskola.

A nemek szerinti különbségek

A lányok átlagosan jobb eredményt értek el a szorzásteszt során, de ez nem szignifikáns. A 391 lány által elért átlagpontszám 17,73 (szórás 12,34), a fiúk (412 fő) átlaga 17,21 pont (szórás 12,50). A fiúk és lányok mintájára kiszámított relatív szórások: $RSD_{fiúk} = 72,60\%$, $RSD_{lányok} = 69,62\%$, vagyis a fiúk mintájának nagyobb a szórása. Mind a fiúk, mind a lányok között volt 0 pontos, a maximum pontszámot is mindkét nemből elérték. A medián értéke a fiúk esetén 14 pont, a lányoknál 15,5 pont, a minta mediánja 15 pont. A fiúk és a lányok Szorzási Stratégiák Teszten elért teljesítményének összehasonlítása látható a 26. ábrán. Az ábrán látható, hogy a fiúk 31,7 %-a és a lányok 27,9 %-a ért el 20 %-osnál gyengébb teljesítményt a Szorzási Stratégiák Teszten. A fiúk átlagteljesítménye 43,03% volt, a lányoké ettől 1,3 %-kal több, 44,33 %. A fiúk 7,1 %-a, míg a lányok 6,2 %-a ért el legalább 90%-os teljesítményt. A Kolmogorov-Szmirnov tesztre fiúk esetén $D(410) = 0,111$ értéket kaptunk, lányok esetén $D(390) = 0,107$, a szignifikanciaszint $p < 0,001$. A fiúk esetén a szorzásteszt ferdeségi mutatója 0,28 (Std Error 0,12), lapultság -1,31 (Std Error 0,24), $z_{skewness} = 0,23$; $z_{kurtosis} = -5,45$, míg a lányok esetén a ferdeségi mutató 0,19 (Std Error 0,12), a lapultság -1,34 (Std Error 0,25), $z_{skewness} = 0,76$; $z_{kurtosis} = -5,42$. A ferdeségi mutató pozitív volta mindkét nem esetén az eloszlásfüggvény asszimmetriájára utal, a csúcsot elől láthatjuk. A lapultság a fiúk és a lányok esetén negatív, vagyis a sokaság eloszlásának sűrűségfüggvénye laposabb, mint a normális haranggörbéé.



26. ábra A Szorzási Stratégiák Teszten elért teljesítmény nemek szerinti összehasonlítása, központi vizsgálat

Az egyes itemcsoportokat a fiúk és a lányok eltérő sikerrel oldották meg. Az egész teszten a lányok valamivel jobb teljesítményt mutattak. Hasonlóan kicsit ügyesebbek voltak az egyjegyű szám háromjegyű számmal való szorzásakor. A fiúk átlagpontszáma 1,9 volt (szórás 1,52, medián 2 pont). A lányok átlagpontszáma 2,04 pont (szórás 1,58, medián 2 pont), több lány ért el maximális pontot, mint fiú. A kétjegyű számok háromjegyű számmal történő szorzása viszont a fiúknak ment kicsit könnyebben. A fiúk által elért átlagpontszám 1,48 (szórás 1,13), a lányok átlagpontszáma 1,46 (szórás 1,14), a maximális pontszámot mindkét nembeli tanulók közül elérték. A többi szorzástípus szorzásakor mindkét nembeli tanulók közel azonos sikert értek el. A teszt 40. itemén a fiúk által elért átlagpontszám 0,52 (szórás 0,50, medián 1), a lányok által elért átlagpontszám 0,53 (szórás 0,50, medián 1). A fiúk közül 212 fő, a lányok közül 205 fő válaszolt helyesen, a fiúk és a lányok teljesítménye közötti különbség ezen az itemen minimális.

Az egyes itemek megoldottsága a fiúk és a lányok mintáján

Az egyes itemek megoldottságára vonatkozóan érdekes következtetésekre juthatunk. A megoldottságra vonatkozó adatokat az 50. és az 51. táblázatban foglaltuk össze. A Szorzási Stratégiák Teszt itemeinek megoldottsága nemek szerint.

50. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt itemeinek megoldottsága nemek szerint, központi vizsgálat, a lányok jobbak

Item		Megoldottság (%)		Elkülönítésmutató	
		Fiúk N = 412	Lányok N = 391	Fiúk N = 412	Lányok N = 391
1.	25·48	42	46	0,62	0,55
3.	31·32	40	41	0,66	0,64
4.	8·99	59	61	0,57	0,53
5.	49·51	32	37	0,60	0,66
8.	15·48	34	39	0,70	0,66
9.	12·16	42	43	0,72	0,69
10.	32·32	29	34	0,62	0,67
11.	25· 25	37	40	0,73	0,70
12.	17·99	34	35	0,67	0,64
13.	12·15	44	47	0,73	0,73
14.	20·30	66	67	0,54	0,45
15.	8·999	48	51	0,60	0,58
16.	23·27	34	36	0,67	0,64
17.	25·32	39	42	0,77	0,75
18.	25·65	34	37	0,70	0,67
23.	9·742	43	46	0,57	0,53
24.	15·16	45	49	0,64	0,56
26.	18·16	43	44	0,66	0,63
28.	9·888	46	50	0,58	0,53
32.	77· 8	50	56	0,57	0,55
33.	9·652	39	46	0,52	0,49
36.	19·21	38	41	0,69	0,72
40.	500·500	52	53	0,45	0,46

A Szorzási Stratégiák Tesztben szereplő 40 item közül nyolcnak egyforma a megoldottsága mindkét nem esetén. Így a 2. item megoldottsága 43%, ez az item 25-nek egy kerek tízesre végződő háromjegyű számmal való szorzását igényelte a tanulóktól. Szintén ennyi a megoldottsága a 7. itemnek (egyjegyű szám szorzása háromjegyű számmal). Közepesen nehéz itemek közé tartozott még a 19. és a 34. item (13 négyzete, illetve kisebb kétjegyű számok szorzata), megoldottságuk 46%-os. 41 %-os megoldottságot találunk a 6. item esetén ez pl. egy szabály alkalmazásával könnyebben kiszámolható. 38%-os megoldottságot látunk a 21. itemnél, 34%-os a megoldottság a 22. itemnél, 31%-os a 37. item megoldottsága, ezek az itemek kétjegyű számok négyzeteinek kiszámítását kérik, illetve szabály alkalmazásával is számíthatók. Az egyes itemek megoldottsága közötti különbség 7% a lányok javára a 33. item esetén, ez az item szabály alkalmazásával is kiszámolható.

A táblázat azon itemeket tartalmazza, amelyekben a fiúk értek el jobb eredményt.

51. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt itemeinek megoldottsága nemek szerint, központi vizsgálat, a fiúk jobbak

Item		Megoldottság (%)		Elkülönítésmutató	
		Fiúk N = 412	Lányok N = 391	Fiúk N = 412	Lányok N = 391
20.	15·15	44	43	0,68	0,68
25.	25·50	52	47	0,61	0,58
27.	25· 35	39	38	0,62	0,62
29.	150·6	63	62	0,55	0,54
30.	50·50	64	59	0,50	0,43
31.	19·19	33	29	0,60	0,64
35	11·11	44	42	0,63	0,58
38.	77·99	30	29	0,65	0,59
39.	10·690	64	62	0,55	0,50

7 item (a 20., 27., 29., 31., 35., 38. és a 39.) esetén a fiúk voltak sikeresebbek, az összes többi esetben pedig a lányok. A két nem közötti megoldottság-különbség 6% a lányok javára a 32. item esetén. A lányok számára a legkönnyebb itemnek a 14. mutatkozott, a fiúknak pedig a 30 (megoldottságaik rendre 67% és 64%). A stratégiafajtákkal kapcsolatos eredményelemzésben a megoldottság kérdésére még kitérünk. Fiúk és lányok esetén is hasonló értékű elkülönítésmutatókat találunk. Megfigyelhetjük, hogy a magasabb elkülönítésmutatóhoz általában alacsonyabb item-megoldottság tartozik. Minél magasabb arányban oldanak meg egy itemet a tanulók, az annál kevésbé képes különbséget tenni a képességszintjük között.

Évfolyamonkénti különbségek a Szorzási Stratégiák Teszten

A Szorzási Stratégiák Tesztet a mindhárom vizsgált évfolyamból több, mint 240 tanuló oldotta meg, így évfolyamonként is érdemes összehasonlítani a kapott eredményeket. Az 52. táblázatban a mintára vonatkozó adatokat találjuk.

52. táblázat. A Szorzási Stratégiák Tesztet kitöltő tanulók adatai, központi vizsgálat

Évfolyam	N	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
4.	260	13,40	10,79	0	40
5.	243	18,84	11,94	0	38
6.	297	19,89	13,25	0	40
Teljes minta	800	17,46	12,42	0	40

Az egyes évfolyamok átlagpontszáma között a különbség szignifikáns ($p < 0,001$). A szórások mindhárom évfolyamon szignifikánsan különböznek, a Levene-féle $F = 0,03$ ($p < 0,001$). A 4. évfolyamosok a teszten 33,50%-os eredményt értek el, ez szignifikánsan alacsonyabb, mint a magasabb évfolyamokon elért eredmény. Az évfolyamok t-próbával történő összehasonlítása után a 4. és 5. évfolyam esetén a Levene féle F értékére 12,53 ($p < 0,001$), $t = -5,36$ ($df = 487,17$) adódik, az 5. és a 6. évfolyam esetén a Levene-féle $F= 6,93$ ($p < 0,01$), $t = 0,97$ ($df = 532,973$), ($p < 0,17$, sig 1-tailed). Az ötödik évfolyamosok 47,10 %-os eredményt értek el, hatodikosok

49,73%-os eredményt, de a két évfolyam között a különbség inszignifikáns. A teljes minta által elért teljesítmény 43,65%. A teljesítmények szórása minden évfolyamon több, mint 10. A relatív szórás a 4. évfolyamon a legnagyobb (0,81), az 5. évfolyamon a legkisebb (0,63), a 6. évfolyamon pedig 0,67. Mindhárom évfolyam tanulói között volt olyan, aki egy pontot sem ért el a teszten. Maximális pontszámot elérő diákok a 4. és 6. évfolyamos tanulók között voltak.

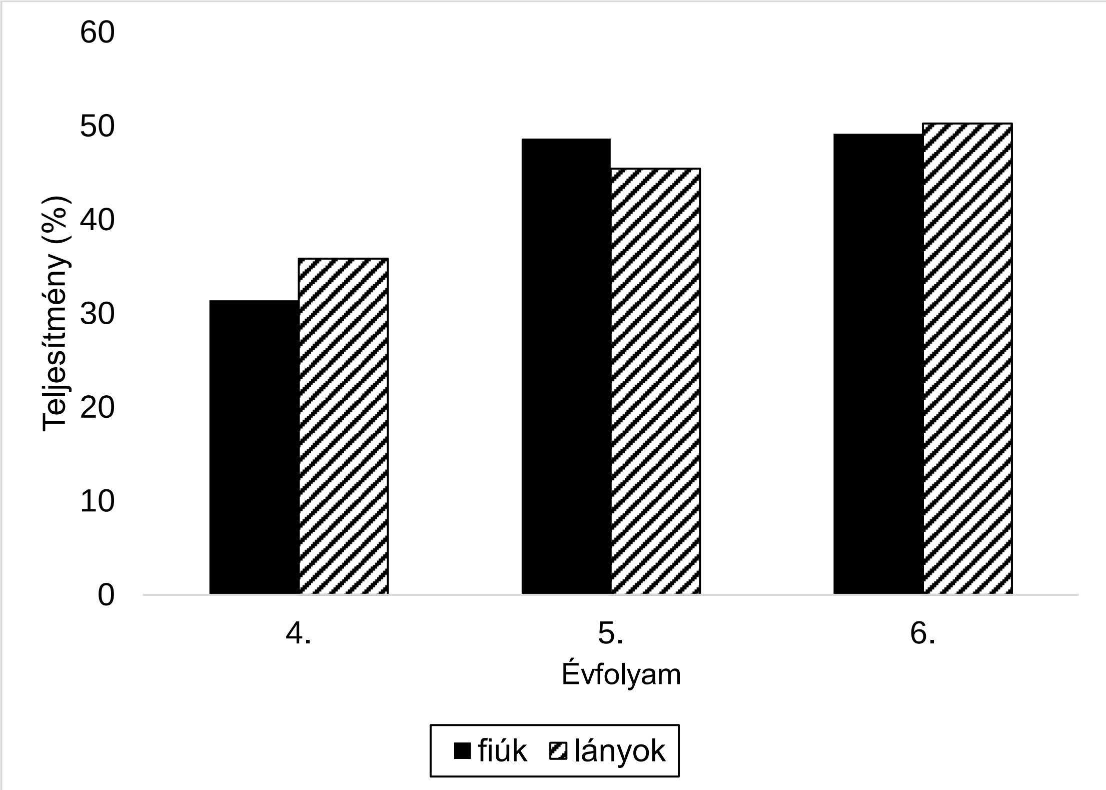
A 410 fiú és a 390 lány teszten elért évfolyamonkénti átlagát olvashatjuk ki az 53. táblázatból. A Szorzási Stratégiák Tesztet 138 negyedik évfolyamos fiú és 122 negyedikes lány írta meg. Az ötödik évfolyamon a fiúk száma 126 fő, a lányoké 117 fő. A legtöbb tanuló a 6. évfolyamra jár, 146 fiú és 151 lány. A fiúk mintáján végzett számításaink szerint a Levene-féle F értéke 13,49, a lányok mintáján ez az érték $F = 8{,}31$ ($p < 0{,}001$). A post hoc elemzések közül a Dunnett-próba mutatja meg, hogy a három évfolyamon szignifikáns a különbség a fiúk teljesítménye között ($p < 0{,}001$), a negyedikesek alacsonyabb teljesítményt nyújtottak, mint a két másik évfolyam. A lányok esetén is ugyanezt a megállapítást tehetjük, a két magasabb évfolyam teljesítménye szignifikánsan magasabb ($p < 0{,}001$), mint a negyedikes lányoké.

53. táblázat. A Szorzási Stratégiák Tesztet kitöltő tanulók adatai évfolyamonként, nemenként, központi vizsgálat

Nem	Évfolyam	Minta elemszám (fő)	Minta elemszám összesen	Átlag Évf.	Átlag A teljes mintán	Szórás Évf.	Szórás A teljes mintán
Fiú	4.	138	410	12,56	17,21	10,49	12,50
	5.	126		19,46		12,31	
	6.	146		19,67		13,22	
Lány	4.	122	390	14,34	17,73	11,09	12,34
	5.	117		18,18		11,55	
	6.	151		20,11		13,32	
Összesen			800		17,46		12,42

Az évfolyamok növekedésével a szórások is emelkednek. A fiúk között mindegyik évfolyamon volt 0 pontos eredményű, 4. évfolyamon a legnagyobb elért pontszám 39; 5. évfolyamon 38 pont; 6. évfolyamon 40 pont volt. A lányok között 5. évfolyamon a legkisebb pontszám 1 volt, a másik két évfolyamon 0 pont. A legmagasabb elért pontszám 5. évfolyamon 38 pont volt, a másik két évfolyamon volt maximális pontszámú lány.

A három évfolyam Szorzásteszten elért teljesítményét nemek szerinti összehasonlítva a 27. ábrához jutunk. A negyedik évfolyamos lányok teljesítménye a teszten 35,85 %pont volt, ami 4,45%-kal magasabb, mint a fiúké (31,40%). 5. évfolyamon a fiúk teljesítménye 48, 65%, magasabb a lányokénál (45,45%). A 6. évfolyamon ismét a lányok teljesítménye nagyobb, 50,28 %, míg a fiúké 49,18%. A nemek közti teljesítménykülönbségek nem jelentősek.



27. ábra A Szorzási Stratégiák Teszten elért teljesítmény évfolyamonként és nemek szerint, központi vizsgálat

Összehasonlításva az adatokat elmondható, hogy minden item megoldottsága a 4. évfolyamon a legkisebb, majd a következő évfolyamokon a tanulók jobb átlagot érnek el. A 19. és a 20. item megoldottsága az 5. és a 6. évfolyamon azonos (0,53, illetve 0,49). Néhány item esetén szembetűnik, hogy az 5. évfolyamos tanulók nagyobb sikerrel oldották meg, mint a 6. évfolyamos tanulók: ezek a 6., 7., 14.,15., 23., 27., 28., 36. és 37. itemek.

Az 54. táblázat a Szorzási Stratégiák Tesztre vonatkozó statisztikai mutatókat tartalmaz. A kétféle tesztváltozatot közel azonos számú tanuló oldotta meg. Az A tesztet író 4. és 6. osztályos tanulók, illetve a B változatot író 6. osztályosok között volt maximum pontot elérő diák. A B változatot író ötödikeseknél a minimumpontszám az 1 volt, minden más esetben 0 volt a minimumpontszám. Amint a táblázatból láthatjuk, a kétféle tesztváltozaton eltér a tanulók átlagpontszáma. A 4. és 5. évfolyamosok számára kicsit könnyebb volt az A tesztváltozat, míg a 6. évfolyamos tanulók a B tesztváltozaton szereztek magasabb pontszámot. A tesztváltozatokra kiszámított relatív szórások 0,71 és 0,72, vagyis a B teszt jobban szórja a tanulókat képességeik szerint.

54. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt elemzése tesztváltozatonként, évfolyamonként, központi vizsgálat

Teszt-változat	Évfolyam	Minta elemszám (fő)	Minta elemszám összesen	Átlag		Szórás	
				Évfolyam	A teljes mintán	Évfolyam	A teljes mintán
A	4.	128	416	14,23	17,44	10,92	12,30
	5.	133		18,99		11,95	
	6.	155		18,76		13,21	
B	4.	132	384	12,58	17,48	10,64	12,56
	5.	110		18,66		12,00	
	6.	142		21,13		13,23	
Összesen			800		17,46		12,42

Az egyes évfolyamok átlagpontszáma között a különbség szignifikáns ($p < 0,001$). A szórások mindhárom évfolyamon szignifikánsan különböznek, a Levene-féle $F = 7,77$ ($p < 0,001$). A Welch-próba szerinti $F = 7,28$ ($p < 0,001$) az A teszt esetén és $F = 11,18$ ($p < 0,001$) a B teszt esetén. A szóráskülönbség miatt mindkét esetben a Welch-próba segít ($F_{A\ teszt} = 7,28$, $p < 0,002$; $F_{B\ tesz\ t} = 19,23$, $p < 0,001$), a 4. évfolyamosok a teszt mindkét változatán elért átlagpontszáma szignifikánsan alacsonyabb, mint a másik két évfolyam teljesítménye. Az 5. és 6. évfolyamosok teljesítménye nem különbözik szignifikánsan egymástól. A 4. évfolyamosok teljesítménye 35,58%, illetve 31,45%; az 5. évfolyamosok teljesítménye 47,48%, illetve 46,65%; míg a 6. évfolyamosok teljesítménye 46,90%, illetve 52,83%.
Az 55. táblázatban foglaltuk össze a Szorzási Stratégiák Teszt statisztikáit tesztváltozatonként, nemek szerinti bontásban.

55. táblázat. A Szorzási Stratégiák Teszt elemzése tesztváltozatonként, nemek szerint, központi vizsgálat

Teszt-változat	Nem	Minta elemszám (fő)	Minta elemszám összesen	Átlag		Szórás	
				Évfolyam	A teljes mintán	Évfolyam	A teljes mintán
A	fiú	214	416	17,19	17,44	12,55	12,30
	lány	202		17,71		12,05	
B	fiú	196	384	17,23	17,48	12,47	12,56
	lány	188		17,74		12,68	
Összesen			800		17,46		12,42

A kétféle tesztváltozatot megírók száma közel egyforma. Mindkét nembeli diákok a B teszten értek el magasabb átlagpontszámot. Az A tesztre a Levene-féle $F = 1,04$ ($df1 = 1$, $df2 = 414$, $p > 0,05$), a B tesztre a Levene-féle $F = 0,50$, ($df1 = 1$, $df2 = 382$, $p > 0,05$). Így a szóráshomogenitás miatt az ANOVA teszt eredményét figyelve ($F_{A\ tesz\ t}= 0,18$, $p > 0,05$, illetve $F_{B\ teszt} = 0,69$, $p > 0,05$) kijelenthetjük, hogy bár mindkét tesztváltozatot a lányok írták meg jobban, de ez a pár tizednyi különbség nem szignifikáns.

Iskolák és osztályok közötti különbségek

A H2c hipotézisünk szerint: A vizsgált iskolák tanulóinak szorzási stratégiákat mérő teszten nyújtott teljesítménye szignifikánsan különbözik. Ez a hipotézis beigazolódott. A 800 fős mintában a tanulók átlageredménye 17,46 pont volt, 43,65%pont. Az egyes iskolák között nagy teljesítményszintbeli eltéréseket figyelhetünk meg. Az 56. táblázat az egyes iskolák teljesítményeloszlására vonatkozó adatokat tartalmazza 10%pontos intervallumonként.

56. táblázat. Az iskolák teljesítményeloszlása a Szorzási Stratégiák Teszten a központi vizsgálat során

Telje-sít-mény	Iskola										
(%)	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.
0-10	11,0	46,9	14,8	31,8	27,3	27,9	7,1	16	0,0	33,3	21,2
11-20	12,0	9,3	11,3	13,7	9,1	2,3	7,2	12	0,0	19,3	12,7
21-30	19,1	12,6	20,5	9,0	0,0	16,3	12,5	4,0	1,6	12,3	13,6
31-40	11,5	9,3	3,4	16,7	27,2	7,0	5,3	4,0	3,2	21,1	11,7
41-50	8,6	4,7	11,4	1,5	9,1	13,9	1,8	4,0	0,0	0,0	7,6
51-60	9,1	9,4	5,6	6,1	0,0	2,4	1,8	12,0	3,1	3,5	5,1
61-70	6,7	1,6	9,1	1,5	0,0	6,9	12,5	2,0	11,1	7,0	3,4
71-80	8,1	2,6	4,6	10,6	9,1	7,0	14,3	8,0	27,0	0,0	11,1
81-90	8,6	1,6	14,8	7,6	9,1	11,6	19,6	16,0	38,1	1,7	5,9
91-100	5,3	0,0	4,5	1,5	9,1	4,7	17,9	14,0	15,9	1,8	8,5
Átlag	42,5	22,9	44,0	32,9	39,1	40,7	61,7	53,0	79,6	24,7	40,6

A táblázatból kitűnik, hogy a 2. iskola tanulóinak 46,9%-a legfeljebb 10%pontot ért el, szintén sok gyengébben teljesítő tanulót találunk a 4., 5., 6., 10. és 11. iskolában. Míg az 1., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 11. iskolában a legfelső ötöd részben helyezkedik el több, mint a tanulók 20%-a, addig a 2. és a 10. iskolában alig akad olyan tanuló, aki ebbe a teljesítménysávba tartozna. Az 5. iskolában nincs olyan tanuló, aki 21-30, 51-60, 61-70%-nyi teljesítményt nyújtott volna. Hiányoznak a 41-50 és 71-80%-nyi teljesítményt nyújtók a 10. iskolából. A 9. iskolában tanulók esetén senkit sem találunk 20%-os teljesítményszint alatt. Az adatokból látható, hogy a 3., 7. 8. 9. és 10. iskola tanulóinak átlagteljesítménye magasabb volt, mint a teljes minta átlagteljesítménye. Az első iskolában az átlagteljesítmény 42,5% volt, a hatodik iskolában 40,7%, a többi iskola átlagteljesítménye pedig 40%-nál kevesebb. Balra tolódó eloszlást figyelhetünk meg az 1., 2., 3., 4. iskola esetén, a 9. iskola eloszlása pedig jobbra tolódó.

A 16. sz. mellékletbeli táblázat a Szorzási Stratégiák Teszt néhány adatát tartalmazza osztályonként. A 46 vizsgált osztályból 19 osztály a mintaátlagtól magasabb eredményt ért el. Az 1. iskola osztályainak felében, a 2., 6. és a 8. iskola egy-egy osztályában, a 7. és a 9. iskola két-két osztályában, a 3. és a 11. iskola három-három osztályában értek el a tanulók magasabb átlagpontszámot, mint a teljes minta átlaga. A teljes minta relatív szórása 0,71. Egy egésznél nagyobb relatív szórásokat találunk a 13., 14., 16., 25., 30., 35. és a 41. osztályokban, ezek heterogénebb összetételűek a többi osztályhoz képest. Míg a legkisebb relatív szórásokat a 34., 36. és 37. osztályokban találjuk (értékük rendre 0,24; 0,23 és 0,11), ezekben az osztályokban hasonló pontszámot értek el a tanulók. A legnagyobb minimumértékeket a 4., 12., 32., 34. és a 37. osztályokban érték el, a legalacsonyabb maximumpontszámot pedig a 14. és a 39. osztályban. Négy osztályban akadtak olyan tanulók, akik a maximális 40 pontot elérték. A módusz és medián értékekre pillantva is megállapíthatjuk, hogy akár egy iskola azonos évfolyamán levő osztályai között milyen nagy eltérések lehetnek. Érdemes vizsgálni ennek okait.

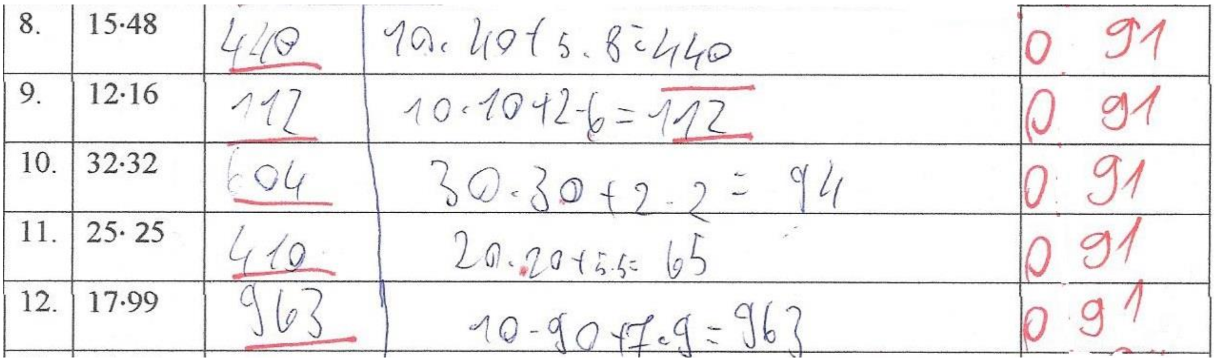
Az osztályok közötti különbségeket a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével állapíthatjuk meg. A Levene-féle próba esetén $F = 3{,}00$ ($df1 = 43$, $df2 = 756$), $p < 0{,}001$-t kaptuk, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások különböznek. A Welch-próba értéke $F = 27{,}66$, $p < 0{,}001$, vagyis különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között. Mivel a részminták által reprezentált populációkban a szórások között szignifikáns a különbség, így a post-hoc elemzések közül a Hochberg's GT2–teszt eredményei mutatják, hogy az egyes osztályok közötti különbség szignifikáns. A 46 osztály 11 homogén csoportra bontható.

5.6.5. A fejben szorzás eredményessége és a tanulók által elkövetett tipikus hibák

A hipotéziseink igazolására végzett felmérés adatainak feldolgozása során a tanulók által használt számolási stratégiák kódolására két független szakértőt kértünk fel. A kódolást a szakértők egy kódolási útmutató alapján végezték. Hope és Sherrill (1987) tanulmányában leírt 12 stratégiát tartalmazó rendszert finomítottuk, a tanulók által használt stratégiákat vizsgálataink tapasztalatai alapján 35 különböző stratégiába soroltuk be. Dolgozatunkat a a hibás stratégiák bemutatásával folytatjuk.

71 fő, a 800 fős minta 8,9%-a számolta egy vagy több itemet írásban: 0-11 item esetén 31 fő, 11-20 item esetén 7 fő, 21-30 item esetén 7 fő, 31-40 item esetén 26 fő, ebből 19 fő mind a 40 itemet ezzel a stratégiával számolt. Őket a további elemzésből kivettük.

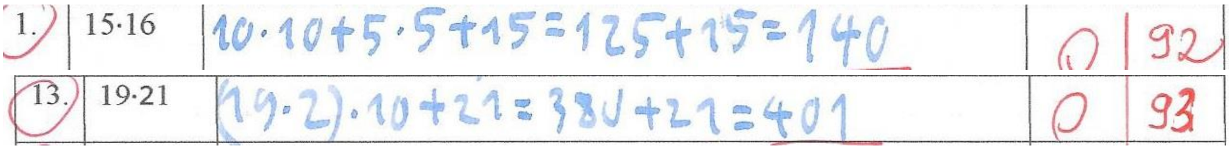
298 fő (a minta 37,25%-a) alkalmazta a 91-es kóddal jelölt stratégiát, ami az összeadás helytelen analógiájára elkövetett racionális hiba. 10 item esetén a minta 15,1%-a, 11-20 item esetén a 6,2%.-a, 21-30 item esetén a minta 15,5%-a, 31-40 item esetén a minta 0,4%.a, azaz 3 fő alkalmazta. A stratégia alkalmazására látunk példát egy Hajdú-Bihar megyei 4. osztályos lány tesztjében a 28. ábrán. E stratégia egy-egy válfajának tekinthető 92-98-as kódú stratégiákat kevesen (2-3 fő) és ritkán, 1-2 item esetén alkalmazták.



8.	15·48	440	10·10+5·8=440	0	91
9.	12·16	112	10·10+2·6=112	0	91
10.	32·32	604	30·30+2·2= 94	0	91
11.	25· 25	410	20·20+5·5= 65	0	91
12.	17·99	963	10·90+7·9=963	0	91

28. ábra A „Tízeseket a tízesekkel, az egyeseket az egyesekkel” szorzási stratégia alkalmazása

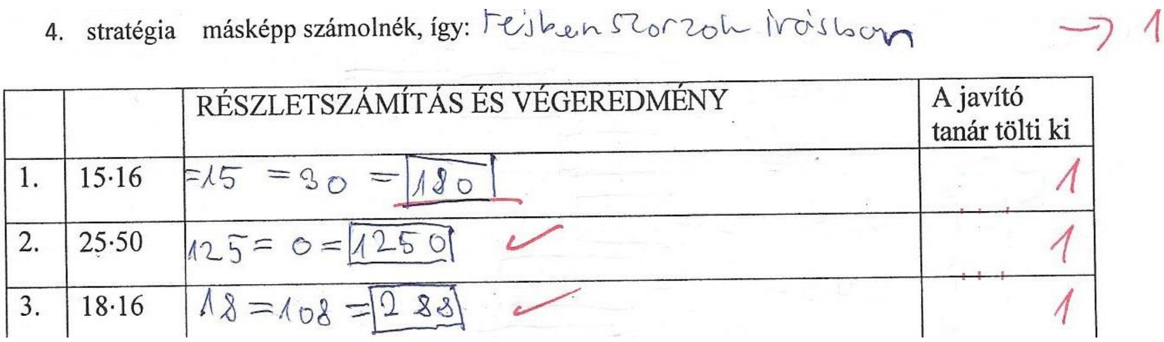
Példát látunk a 29. ábrán egy 6. osztályos budapesti fiú tesztjéből a 92-es és 93-as stratégia használatára. Egyéb, az előzőektől különböző, helytelen eredményre vezető stratégia a tanulók 49,2%-át érintette: 1-10 item esetén a 100-as kódú stratégiával számolt a minta 40,2%-a (ebből 1 itemnél 116 fő, 2 itemnél 80 fő), 11-20 item esetén a minta 4,8%-a, 21-30 item esetén a minta 20,2%-a, 3140 item esetén pedig a minta 2 %-a. Ezekről később még részletesebben írunk.



1.	15·16	10·10+5·5+15=125+15=140	0	92
13.	19·21	(19·2)·10+21=380+21=401	0	93

29. ábra 92-es és 93-as stratégia alkalmazása

A helyes eredményre vezető stratégiák közül 15 fő alkalmazta az „elképzelem fejben leírva” stratégiát, 0-10 itemre 6 fő, 11-20 itemre 2 fő, 31-40 itemre 7 fő, ebből 2 fő mind a 40 item esetén. Legtöbben a 8 · 99 itemet számították így (11 fő). Az „elképzelem fejben leírva” stratégia alkalmazását látjuk egy kecskeméti 6-osztályos fiú tesztében (30. ábra).

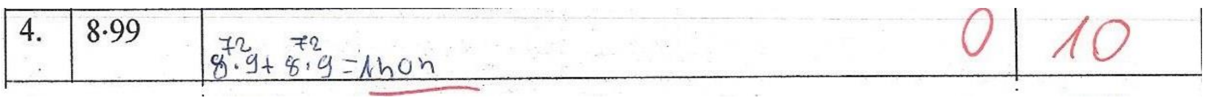


4. stratégia másképp számolnék, így: fejben szorzok írásban → 1

		RÉSZLETSZÁMÍTÁS ÉS VÉGEREDMÉNY	A javító tanár tölti ki
1.	15·16	=15 =30 =180	1
2.	25·50	125= 0 =1250	1
3.	18·16	18 =108 =288	1

30. ábra Elképzelem fejben leírva (kecskeméti 6. osztályos fiú)

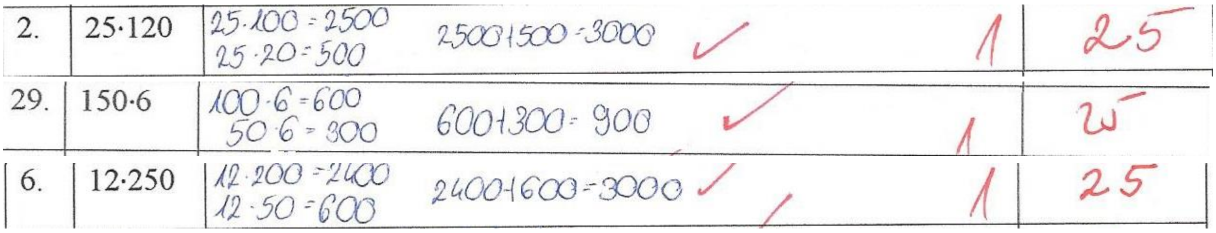
127 fő minden részletszorzatot számjegyenként szorzott össze, 0-10 item esetén 118 fő, 11-20 item esetén 7 fő, 21-30 item esetén 4 fő, 31-35 itemnél 5 fő. 39 fő alkalmazta a 77 · 8, 28 fő a 9 · 888 és a 9 · 652 itemek kiszámítására. E stratégia hibás alkalmazására mutat példát egy Hajdú-Bihar megyei 4. osztályos lány munkájában a 31. ábra.



4.	8·99	72 72 8·9+8·9=1404	0	10

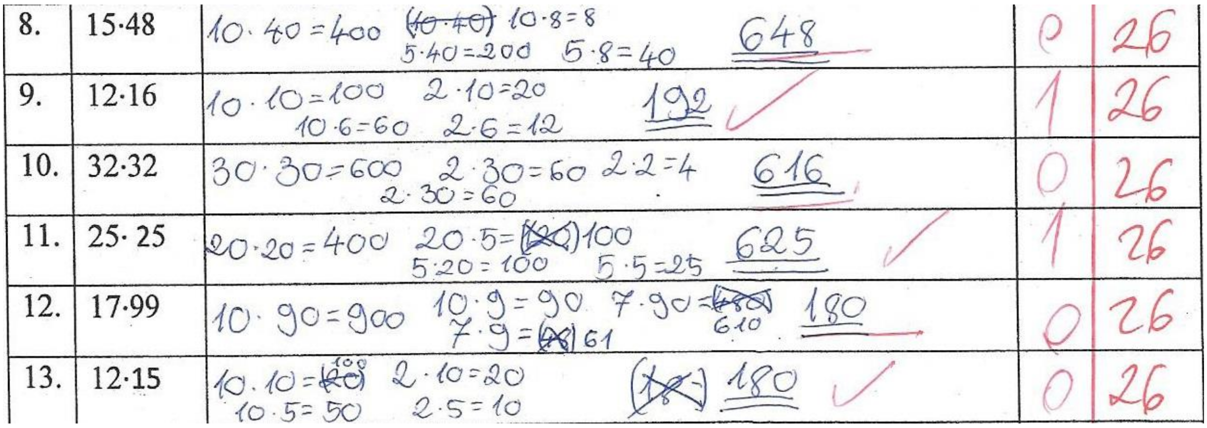
31. ábra „Minden részletszorzatot számjegyenként szoroz össze” stratégia

Az egyik tényező tagolásával 468 fő (58,5%) kezdte a számításokat, a legtöbben (254 fő) a 150 · 6 kiszámítására alkalmazták. 237 fő számította ezzel a stratégiával a 25 · 120-at, 153 fő használta a 10 · 690 és 69 fő a 8 · 4211 kiszámításakor. Egyik budapesti 6. osztályos lány munkájából adunk részletet az 32. ábrán.



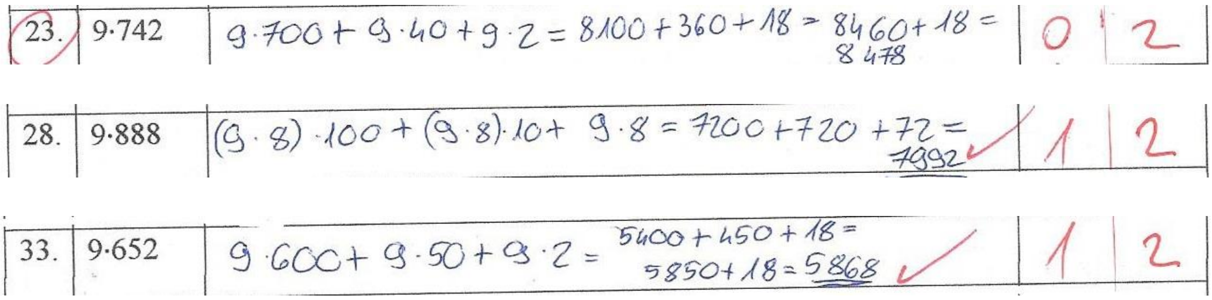
32. ábra Példa az „Összeadandókra tagolja az egyik tényezőt" stratégia használatára

Mindkét tényezőt összeadandókra bontotta a minta 12,2%-a (98 fő), 1-10 item kiszámítására 61 fő, 11-20 item esetén 19 fő, 21-30 item esetén 17 fő, 31-40 item esetén 1 fő alkalmazta. 47-en számolták így a 25 · 48-at, 44-en a 15 · 16-ot, 38-an a 18 · 16-ot, 37-en a 31 · 32-t. A stratégia helyes és hibás alkalmazására ugyanazon a teszten belüli példát láthatunk a 33. ábrán.



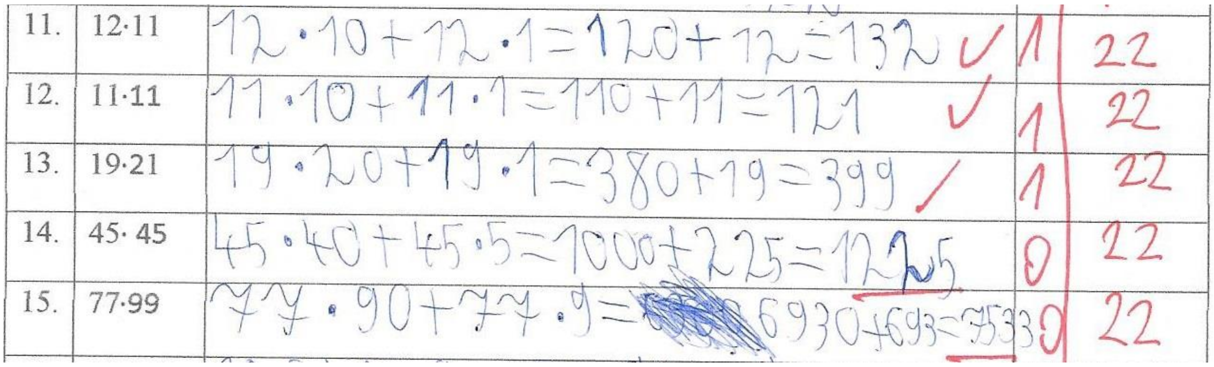
33. ábra „Mindkét tényezőt összeadandókra tagolja" stratégia (kecskeméti 6. osztályos lány)

Az additív disztribúció stratégiát 483 fő alkalmazta, közülük 300 fő a 9 · 652, 297 fő a 8 · 4211, 284 fő a 9 · 742, 266 fő a 8 · 999 item kiszámítására. A stratégia néhány alkalmazását mutatja egy budapesti 6. évfolyamos lány esetén az 34. ábra.



34. ábra Példák az additív disztribúció alkalmazására ugyanannál a tanulónál

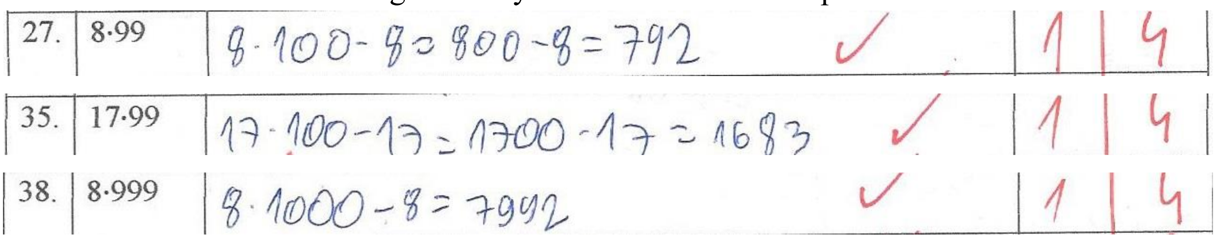
A szorzást 50 fő kezdte az egyesekkel, a legtöbben (13 fő) a 77 · 8, a 8 · 99 és a 15 · 16 itemek kiszámítására, míg 1 fő 35 itemen át így számolt. A szorzás során a tízesekkel 599 fő kezdett (a minta 74,9%-a), 1-10 itemre 278 fő, 11-20 itemre121 fő, 21-30 itemre 189 fő és 31-40 itemre 23 fő. A stratégia használatát látjuk az 35. ábrán.



35. ábra A 22-es stratégia alkalmazása (Hajdú-Bihar megye, 4. osztályos fiú)

A frakcionális disztribúciót kevesen és ritkán alkalmazták (4 fő 1-2 item esetén), ketten-ketten a 20 · 30 és az 50 · 50, 1 fő a 150 · 6 kiszámítására. A kvadratikus disztribúció szintén a ritkán és kevesek (5 fő) által alkalmazott stratégiák közül való: ketten a 24 négyzetét, egy-egy fő pedig a 9 · 652, a 19 és a 11 négyzetének kiszámítására használta.

A szubtraktív disztribúciót alkalmazók száma 136 fő (a minta 17%-a), 1-10 itemet 122 fő, 11-14 itemet 14 fő számolt így. 96 fő számolta így a 8 · 999, 83 fő a 8·99 és a 17 · 99, 82 fő a 77 · 99 szorzásokat. A stratégia néhány alkalmazására látható példa az 36. ábrán.

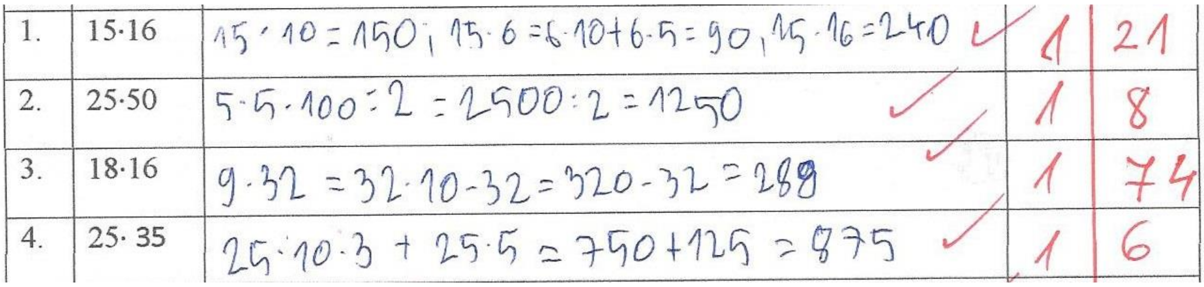


36. ábra A szubtraktív disztribúció alkalmazása (budapesti 6. osztályos fiú)

Ehhez képest elvétve (8 főnél) fordult elő a felezés-duplázás stratégia: két-két fő számolta így a 12 · 250, a 25 · 65 és a 25 · 50. itemeket, egy-egy fő pedig a 25 · 32-t és az 50 négyzetét. Erre látható példa az 37. ábrán.

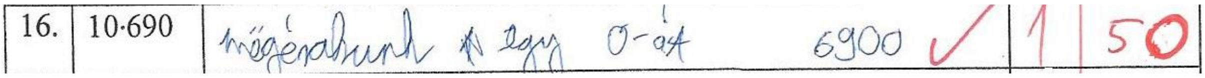
37. ábra Felezés-duplázás stratégia (budapesti 6. osztályos fiú)

E stratégia egy változatát (74-es stratégia) ketten alkalmazták a 18·16 kiszámítására. Az egyik számot maradék nélküli részekre bontja (8-as) stratégiát öten alkalmazták, 3 fő a 12 · 15, egy-egy fő a 25 · 48 és a 45 négyzetének kiszámítására. A 8-as és a 74-es stratégiát egy teszten belül alkalmazta pl. egy budapesti fiú, ahogy az 38. ábrán látjuk.



38. ábra A 8-as és a 74-es stratégiára példa (budapesti 6. osztályos fiú)

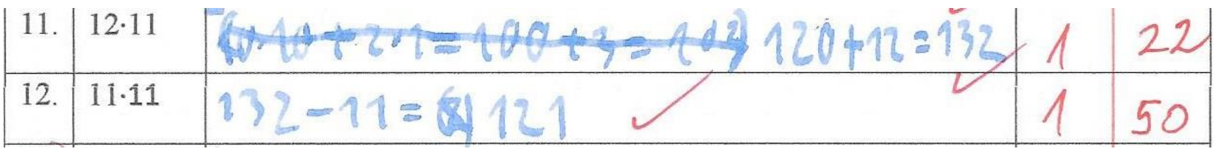
A 81-es stratégiát egy főnél figyeltük meg a 150·6 szorzásakor (150 · 6 = 150 · 10 : 2 + 150). A tanulók közül 168-an (a minta 31%-a) hivatkoztak ismert szabály alkalmazására, közülük 166 fő a 10 · 690 estén írt olyat, hogy „ha 10-zel szorzok egész számot, akkor mögé írok egy nullát”, ahogy egy budapesti 6.-os fiú munkáján láthatjuk (39. ábra és 40. ábra).



39. ábra Ismert szabály alkalmazása 1. (budapesti 6. évfolyamos fiú)

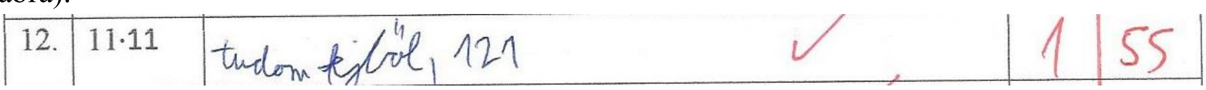
40. ábra Ismert szabály alkalmazása 2. (budapesti 6. évfolyamos fiú)

A következő, 41. ábra arra példa, hogy a tesztet kitöltő fiú észrevette, hogy az előző item eredményt felhasználhatja a számítása során.

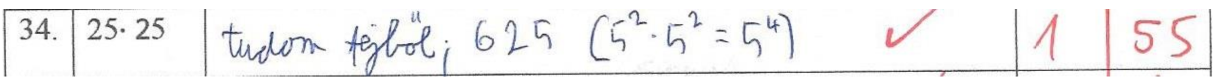


41. ábra Ismert szabály alkalmazása 3. (budapesti 6. évfolyamos fiú)

Hatan számították szabály alkalmazásával az 500 · 500, ketten a 25 négyzete, hárman a 20 · 30, egy-egy fő az 50 és a 45 négyzete, valamint a 12 · 11 itemek számításakor. Egy-egy fő részletszámításaiból látjuk, hogy algebrai azonosságot (összeg négyzete) alkalmazott a 11 és a 16 négyzetének meghatározására. Egy szokatlan algebrai átalakítás (52-es stratégia) is csak egy fő esetén fordult elő, így számolta ki a 12 · 250-et: 10 · 200 + 20 · 50. „Erre emlékszem” vagy „ezt már tudom fejből” jegyzetek utalnak az emlékezeti előhívás (55-ös) stratégia használatára 69 fő (a minta 8,6%-a) esetén, ahogy egy budapesti 6.-os fiú tesztjében látjuk (42. ábra és 43. ábra).

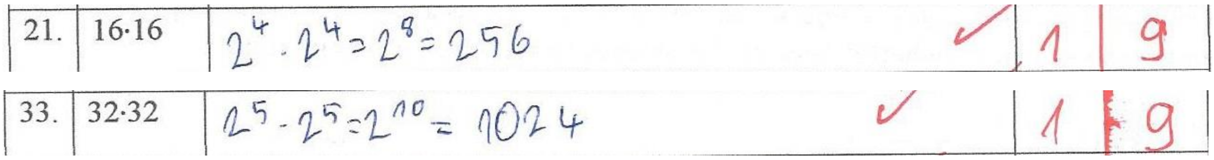


42. ábra Az emlékezeti előhívás alkalmazására 1. példa (budapesti 6. osztályos fiú)



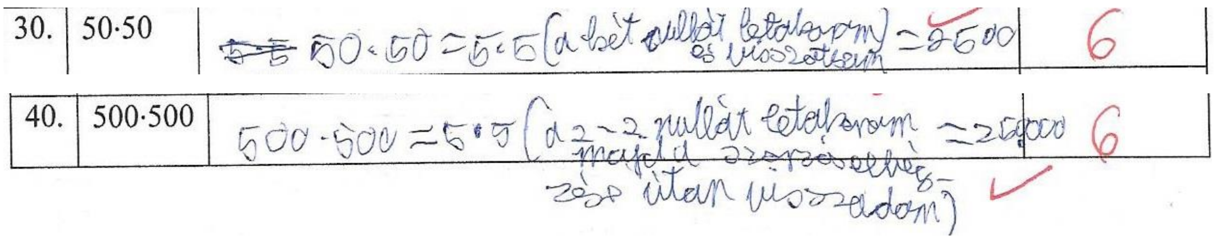
43. ábra Az emlékezeti előhívás alkalmazására 2. példa (budapesti 6. osztályos fiú)

A legtöbben két-, háromjegyű jegyű számok négyzetét határozták meg így: 43 fő a 11 négyzetét, 17 fő az 500 négyzetét, 13 fő a 13 négyzetét számolta így; 20 fő pedig a 12 · 11 kiszámítására alkalmazta. Exponenciális faktorizáció alkalmazását egy-két itemnél és 7 főnél láttuk: egy fő a 18 · 16-ot és a 11, illetve az 50 négyzetét, két fő pedig a 15 · 48, a 12 · 16. a 32 itemeket és a 16 négyzetét számította így, ez utóbbira látunk példát a 44. ábrán.



44. ábra Exponenciális faktorizáció (budapesti 6. osztályos fiú)

Az általános faktorizációt 641 fő alkalmazta, 223 fő három, 138 fő 4 item esetén. A legtöbben, 514-en az 500 · 500 kiszámítását végezték a segítségével, 492-en az 50 négyzetét, 477-en a 20 · 30-at számolták így. 131 fő a 10 · 690, 145 fő a 150·6 és 166 fő a 25 · 50 kiszámítására alkalmazta. Az általános faktorizációra látható példa a 45. ábrán.



45. ábra Általános faktorizáció (kecskeméti 6. osztályos fiú)

Az itemek 14,2%-át a tanulók a 91-es kóddal jelölt stratégiával számolták, azaz „Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel” szorozták össze az összeadás mintájára, majd ezt a két részletszorzatot összeadták, ez racionális hiba. Az itemek 8%-a esetén egyéb, helytelen eredményre vezető stratégiát alkalmaztak a tanulók a számolás során. A tanulók az itemek 4,6%-át írásban számolták, az esetek 5,3%-ában nem indokolták a számításukat, 17,5% az üresen hagyott itemek relatív gyakorisága. A 14. item (20.30) kivételével egy gyermek (a 800 fős minta 0,1%-a) mindent géppel számolt, őt nem számítottuk bele egyik adatba sem ebben a táblázatban. Amint láthatjuk, a tanulók az itemek 50,1%-át helyes eredményre vezető stratégiával számolták. Ugyanakkor, ha ezt a táblázatot összevetjük az egyes itemek megoldottságát tartalmazó, a reliabilitás tárgyalásánál már közölt táblázattal, szembetűnik, hogy a helyes eredményre vezető stratégiákat sem tudták minden egyes számításnál hibátlanul alkalmazni. A tanulók vagy elírtak egy számjegyet, vagy a részletszámítások során hibáztak.

5.6.6. Az eredményesség összefüggései a stratégiahasználattal

A tanulók 50,1%-a az 1. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 352 fő oldotta meg jól, 79,2%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 448 tanuló közül 136 fő szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Elmondhatjuk, hogy a helyes stratégiát alkalmazók 32,8%-a számolási hibát vétett a számolás során. A tanulók 51,5%-a (412 fő) a 2. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 345 fő oldotta meg jól, 78,84%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 455 tanuló 30,1%-a (137 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 33,5%-a hibázott a számolás során. A tanulók 46,1%-át képező 369 fő a 3. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. Az itemet 323 fő oldotta meg jól, 77,7%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 477 tanuló 31,9%-a (133 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 34,6%-a hibázott a számolás során.

518 fő, a tanulók 64,8%-a 4. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemre 447 fő felelt jól, 84,5%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolva. A helytelen eredményt kapott 323 tanuló 35,6%-a (115 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 22,2%-a hibásan számolt. 364 tanuló, a tesztet oldók 45,4%-a válaszolta meg az 5. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az itemre 275 adott jó megoldást, 77%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 525 tanuló 29%-a (152 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 41,8%-a rosszul számolt. A tanulók 49,7%-át alkotó 398 fő a 6. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. A szorzást 327 végezte el jól, 82,6%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 473 tanuló 27,1%-a (128 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 32,2%-os volt.

A tanulók 47,3%-a az 7. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 345 fő oldotta meg jól, 82,3%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 455 tanuló közül 175 fő szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott, tehát a helyes stratégiát alkalmazók 38,4%-a számolási hibát vétett. A tanulók 44,6%-a (356 fő) a 8. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 293 fő oldotta meg jól, 79,5%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 507 tanuló 24,3%-a (123 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 34,6%-a hibázott a számolás során. A tanulók 44,3%-át képező 354 fő a 9. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. Az itemet 340 fő oldotta meg jól, 79,7%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 460 tanuló 18,1%-a (83 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 23,4%-a hibázott a számolás során.

339 fő, a tanulók 42,6%-a 10. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemre 253 fő jó választ adott, 75,6%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolva. A helytelen eredményt kapott 547 tanuló 27,1%-a (148 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott, így a helyes stratégiát alkalmazók 43,7%-a hibásan számolt. 357 tanuló, a tesztet oldók 44,9%-a válaszolta meg a 11. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az

itemre 307 fő adott jó megoldást, 80,1%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 493 tanuló 22,5%-a (111 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 31,1%-a rosszul számolt. A tanulók 44,2%-át alkotó 354 fő a 12. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. A szorzást 277 diák végezte el jól, 78,0%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 523 tanuló 26,3%-a (138 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 39,0%-os volt.

A tanulók 45,0%-a a 13. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 359 fő oldotta meg jól, 81,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 441 tanuló közül 66 fő szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Elmondhatjuk, hogy a helyes stratégiát alkalmazók 18,3%-a számolási hibát vétett a számolás során. A tanulók 67,0%-a (536 fő) a 14. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 520 fő oldotta meg jól, 88,1%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz választ adó 280 tanuló 27,9%-a (78 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 14,6%-a hibázott a számolás során. A tanulók 58,3%-át képező 466 fő a 15. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. Az itemet 395 fő oldotta meg jól, 84,8%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 405 tanuló közül 122 fő szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 26,7%-a hibázott a számolás során.

339 fő, a tanulók 42,4%-a 16. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemre 281 fő felelt jól, 76,4%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolva. A helytelen eredményt kapott 519 tanulóból 115 fő (22,2%) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 34,8%-a hibásan számolt. 446 tanuló, a tesztet oldók 43,2%-a válaszolta meg a 17. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az itemre 325 fő adott jó megoldást, 82,2%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 475 tanuló 16,6%-a (79 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 22,8%-a rosszul számolt. A tanulók 43,6%-át alkotó 348 fő a 18. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. A szorzást 281 fő végezte el jól, 78,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 519 tanuló 24,3%-a (126 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 36,2%-os volt.

A tanulók 48,5%-a a 19. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 366 fő oldotta meg jól, 84,6%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 519 tanuló közül 126 fő (24,3%) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Elmondhatjuk, hogy a helyes stratégiát alkalmazók 28,9%-a számolási hibát vétett a számolás során. A tanulók 48,7%-a (390 fő) a 20. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 348 fő oldotta meg jól, 84,8%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 452 tanuló 19,7%-a (89 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 30,2%-a hibázott a számolás során. A tanulók 46,0%-át képező 368 fő a 21. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. Az itemet 306 fő oldotta meg jól, 80,8%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 494 tanuló 24,5%-a (121 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 32,9%-a hibázott a számolás során.

347 fő, a tanulók 43,4%-a 22. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemre 272 fő felelt jól, 77,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolva. A helytelen eredményt kapott 528 tanuló 23,8%-a (126 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 37,3%-a hibásan számolt. 382 tanuló, a tesztet oldók 47,8%-a válaszolta meg a 23. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az itemre 355 fő adott jó megoldást, 84,5%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 445 tanuló 36,7%-a (163 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 35,2%-a rosszul számolt. A tanulók 51,9%-át alkotó 413 fő a 24. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. A szorzást 376 végezte el jól, 83,7%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 424 tanuló 23,3%-a (98 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 23,7%-os volt.

A tanulók 54,0%-a a 25. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 394 fő oldotta meg jól, 79,4%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 406 tanuló közül 114 fő (28,1%) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Elmondhatjuk, hogy a helyes stratégiát alkalmazók 26,4%-a számolási hibát vétett a számolás során. A tanulók 47,9%-a (383 fő) a 26. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 346 fő oldotta meg jól, 82,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 454 tanuló 12,3%-a (56 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 14,6%-a hibázott a számolás során. A tanulók 46,6%-át képező 373 fő a 27. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. Az itemet 306 fő oldotta meg jól, 78,2%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 494 tanuló 27,1%-a (134 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 35,9%-a hibázott a számolás során.

492 fő, a tanulók 61,5%-a 28. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemre 382 fő felelt jól, 87,4%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolva. A helytelen eredményt kapott 412 tanuló 37,8%-a (156 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 31,7%-a hibásan számolt. 502 tanuló, a tesztet oldók 62,8%-a válaszolta meg a 29. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az itemre 497 adott jó megoldást, 85,5%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 303 tanuló 24,8%-a (75 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 13,4%-a rosszul számolt. A tanulók 70,1%-át alkotó 561 fő a 30. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. A szorzást 495 végezte el jól, 88,7%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 305 tanuló 41,6%-a (127 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 22,6%-os volt.

345 tanuló, a tesztet oldók 43,1%-a válaszolta meg a 31. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az itemre 251 fő adott jó megoldást, 77,7%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 549 tanuló 28,4%-a (156 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 45,2%-a rosszul számolt. A tanulók 62,6%-át alkotó 501 fő a 32. itemet helyes eredményre vezető stratégiával

válaszolta meg. A szorzást 423 végezte el jól, 86,3%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 377 tanuló 36,0%-a (136 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 27,1%-os volt.

A tanulók 58,2%-a (466 fő) a 33. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 339 fő oldotta meg jól, 85,2%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 461 tanuló közül 177 fő (38,4%) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott, tehát a helyes stratégiát alkalmazók 38,0%-a számolási hibát vétett a számolás során. A tanulók 45,9%-a (367 fő) a 34. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 370 fő oldotta meg jól, 78,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 430 tanuló 16,0%-a (69 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 18,8%-a hibázott a számolás során. A tanulók 46,3%-át képező 370 fő a 35. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. Az itemet 343 fő oldotta meg jól, 82,5%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 457 tanuló 17,7%-a (81 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott, vagyis a helyes stratégiát alkalmazók 21,9%-a hibázott a számolás során.

347 fő, a tanulók 43,4%-a 36. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemre 313 fő felelt jól, 80,5%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolva. A helytelen eredményt kapott 487 tanuló 19,3%-a (94 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 27,1%-a hibásan számolt. 329 tanuló, a tesztet oldók 41,1%-a válaszolta meg a 37. itemet helyes eredményre vezető stratégiával. Az itemre 245 fő adott jó megoldást, 79,6%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 555 tanuló 24,3%-a (135 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 41,0%-a rosszul számolt. A tanulók 43,7%-át alkotó 350 fő a 38. itemet helyes eredményre vezető stratégiával válaszolta meg. A szorzást 237 végezte el jól, 78,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 563 tanuló 29,0%-a (163 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a hibázás aránya a helyes stratégiát alkalmazók körében 46,6%-os volt.

A tanulók 65,0%-a (520 fő) a 39. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 394 fő oldotta meg jól, 89,1%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A hibás eredményt kapott 296 tanuló közül 68 fő (22,9%) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott, tehát a helyes stratégiát alkalmazók 13,1%-a számolási hibát vétett a számolás során. A tanulók 69,4%-a (555 fő) a 40. itemet helyes eredményre vezető stratégiával oldotta meg. Az itemet 418 fő oldotta meg jól, 89,9%-uk helyes eredményre vezető stratégiával számolt. A rossz eredményt kapott 382 tanuló 46,8%-a (179 fő) szintén helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazott. Így a helyes stratégiát alkalmazók 32,3%-a hibázott a számolás során.

A helyes eredményre vezető stratégiák közül a 22-es stratégia (kétjegyű számok esetén először az egyik számot megszorzom a másik kétjegyű szám tízesek helyi értékén álló számával, majd utána az egyesek helyén álló számmal) 27 item esetén a leggyakoribb, három esetben a második leggyakrabban alkalmazott stratégia. Használatának relatív gyakorisága 5,9% és 49,4% között váltakozik, 23 esetben több, mint 30%. A többi stratégia jóval kisebb arányban és esetben használatos. A 26-os stratégiát, mikor mindkét szorzandót részekre bontja, 22 item esetén a tanulók legalább 3%-a alkalmazta, a legnagyobb arányban az 1. item esetén (5,9%). A 25-ös stratégia (egyik tényezőt részekre bontja és így szoroz) négy item esetén a leggyakrabban használt stratégia; relatív gyakorisága öt item esetén 20% körüli: a 2. item esetén 29,6%, a 6. item esetén 21,6%, a 13. item esetén 35,4%, a 29. item esetén 31,8%, a 39. item esetén 19,1%; négy esetben pedig 5-9% közötti (7. item 8,6%, 23. item 5,5%, 28.item 5,1% és 33. item 6%). A 4-es stratégia, a szubsztraktív disztribúció kilenc esetben a három leggyakrabban alkalmazott stratégia között szerepel 3,4-14,4%-os előfordulási aránnyal. A 10-es stratégia négy esetben (4., 28., 32. és 33. item) található a leggyakrabban használt három stratégia között, relatív gyakorisága 5-10,3%. A 2-es stratégia, az additív disztribúció öt esetben a leggyakoribb használt stratégia, a 7., 15., 23., 28. és 33. item megoldásakor használatának relatív gyakorisága eléri a 40% körüli értéket (rendre 41,7%, 37,1%, 41,4%, 44,3% és 42,3%). A 6-os stratégia, az általános faktorizálás, három esetben a leggyakrabban használt helyes eredményre vezető stratégia, használatának relatív gyakorisága a 14. itemnél 59,6%, a 30. itemnél 61,5%, a 40. itemnél 64,3%. A 2., 6., 25. 29. és 39. item esetén használatának relatív gyakorisága rendre 3,6%, 3,9%, 20,6%, 18,1% és 16,5%. Az 50-es stratégiát, ismert szabály alkalmazása, a 39. itemnél a tanulók által leggyakrabban használt helyes eredményre veztő stratégia. Az 55-ös stratégia, az emlékezeti előhívás használatának relatív gyakorisága a 35. itemnél 5,4%.

A helyes eredményre vezető stratégiák számának változását is érdemes megfigyelnünk az egyes évfolyamokon. Az erre vonatkozó adatokat az 57. és 58. táblázatban gyűjtöttük össze. A negyedik évfolyamos tanulók általában legalább négyféle helyes eredményre vezető stratégiát használnak (pl. háromjegyű szám háromjegyű számmal való szorzásakor). Négy item esetén 10-féle stratégiát különböztettünk meg, a többi esetben hatot vagy hetet. Az egyjegyű szám kétjegyű számmal történő szorzása esetén 9, az egyjegyű szám háromjegyű számmal történő szorzása esetén 8-10-féle stratégiát, az egyjegyű szám négyjegyűvel való szorzása esetén hétféle stratégiát figyelhettünk meg. A kétjegyű szám háromjegyű számmal történő szorzásakor 7-10-féle stratégia volt megkülönböztethető. A kétjegyű számok kétjegyű számmal történő szorzása során 6-10-féle stratégiát használtak a vizsgált negyedikesek.

57. táblázat. A helyes eredményre vezető szorzási stratégiák száma növekszik, központi vizsgálat

Feladat		A helyes eredményre vezető stratégiák száma			Változás
Sor-szám	Item	4. évfolyam	5. évfolyam	6. évfolyam	
1.	$25 \cdot 48$	8	7	10	nőtt
2.	$25 \cdot 120$	7	8	9	nőtt
3.	$31 \cdot 32$	6	8	9	nőtt
6.	$12 \cdot 250$	8	10	11	nőtt
7.	$8 \cdot 4211$	7	9	9	nőtt, majd stagnált
8.	$15 \cdot 48$	8	9	11	nőtt
9.	$12 \cdot 16$	7	9	10	nőtt
10.	$32 \cdot 32$	7	7	10	stagnált, majd nőtt
11.	$25 \cdot 25$	8	9	11	nőtt

57. táblázat. A helyes eredményre vezető szorzási stratégiák száma növekszik, központi vizsgálat (folytatás)

14.	20 · 30	7	7	11	stagnált, majd nőtt
16.	23 · 27	7	8	8	nőtt, majd stagnált
19.	13 · 13	7	7	7	stagnált
20.	15 · 15	7	7	9	stagnált, majd nőtt
21.	16 · 16	7	9	12	nőtt
23.	9 · 742	8	8	9	stagnált, majd nőtt
25.	25 · 50	9	11	13	nőtt
26.	18 · 16	9	10	12	nőtt
27.	25 · 35	8	10	11	nőtt
29.	150 · 6	8	10	12	nőtt
30.	50 · 50	10	10	10	stagnált
31.	19 · 19	7	8	9	nőtt
32.	77 · 8	9	9	11	stagnált, majd nőtt
33.	9 · 652	8	8	9	stagnált, majd nőtt
34.	12 · 11	7	10	10	nőtt, majd stagnált
36.	19 · 21	7	8	9	nőtt
37.	45 · 45	8	9	11	nőtt
38.	77 · 99	8	8	8	stagnált

58. táblázat. A helyes eredményre vezető szorzási stratégiák száma csökken, központi vizsgálat

Feladat		A helyes eredményre vezető stratégiák száma			Változás
Sorszám	Item	4. évfolyam	5. évfolyam	6. évfolyam	
4.	8 · 99	9	7	9	csökkent, majd nőtt
5.	49 · 51	9	10	8	nőtt, majd csökkent
12.	17 · 99	8	7	8	csökkent, majd nőtt
13.	12 · 15	9	7	10	csökkent, majd nőtt
15.	8 · 999	10	10	9	stagnált, majd csökkent
17.	25 · 32	8	7	10	csökkent, majd nőtt
18.	25 · 65	7	6	11	csökkent, majd nőtt
22.	24 · 24	7	12	11	nőtt, majd csökkent
24.	15 · 16	10	9	11	csökkent, majd nőtt
28.	9 · 888	10	11	9	nőtt, majd csökkent
35.	11 · 11	7	12	10	nőtt, majd csökkent
39.	10 · 690	7	10	10	nőtt, majd stagnált,
40.	500 · 500	4	8	6	nőtt, majd csökkent

24 item esetén több stratégiát, hat item esetén kevesebb stratégiát használtak a vizsgált ötödik osztályos tanulók, mint a negyedik évfolyamos tanulók. Az ötödikes tanulók legalább hatféle stratégiát használtak (18. item), 9 item esetén hetet, 9 item esetén nyolcat, 8 item esetén 9-et, 9 item esetén tízet. 11-féle, illetve 12-féle stratégiát két-két item számolásakor használtak a tanulók. 27 item esetén több stratégiát, hat item esetén kevesebb stratégiát használtak a vizsgált hatodik osztályos tanulók, mint az ötödik évfolyamos tanulók. A hatodik is tanulók legalább

hatféle stratégiát használtak (40. item), 19 item esetén hetet, 4 item esetén nyolcat, 11 item esetén 9-et, 8 item esetén tízet. 11-féle stratégiát 10 item esetén, 12-féle stratégiát három item számolásakor használtak a tanulók. A legtöbb különböző számú stratégia a 25. item esetén figyelhető meg, a $25 \cdot 50$ kiszámításakor a tanulók 13-féle helyes stratégiát ismertek.

5.6.7. A tanulók által elkövetett tipikus hibák

A vizsgált tanulók által leggyakrabban elkövetett hiba a „Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz az összeadás mintájára, racionális hiba volt (ld. Ben-Zeev, 1998). Ezt a hibát a Szorzási Stratégiák Tesztet kitöltő tanulók az itemek 14,2%-a, azaz átlagosan minden hetedik item számításakor elkövették. Néhány számolást a tízeseket a tízesekkel, az egyeseket az egyesekkel racionális hiba válfajainak is tekinthetünk; ezeket külön figyeltük: ezen stratégiák használata elenyésző arányban, mindössze egy-két tanulónál fordult elő. Későbbi vizsgálatok során ez a rendszer még tovább alakítható.

Az elméleti részben leírt hibafajták közük többet is megfigyelhettünk kutatásaink sokán. Ezeken kívül számos egyéni, hibás számolásmódot tapasztaltunk, ezeket az egyéb, hibás eredményre vezető stratégiákhoz soroltuk be, a továbbiakban ezekről esik szó. Az itemek 8%-ánál figyeltünk meg ebbe a kategóriába tartozó stratégiahasználatot. A helytelen eredményre vezető stratégiák gazdag tárházát minden item kiszámításakor, mindhárom évfolyamon és több iskolában megfigyeltünk, gyakrabban az 1., 2., 3., 4., 5., 10. és 11. iskolákban.

Több tanuló olyan számokat szorzott össze, amelyek nem szerepeltek az itemben található összeszorzandó számok között: pl. $45 \cdot 45 = 23 \cdot 20$.
Egyik negyedikes tanuló az 1. iskolából így számolt: $15 \cdot 16 = 10 \cdot 48 \cdot 2 + 5 \cdot 48 = 960 + 40 = 1000$. Érdekes, hogy ugyanez a gyermek a $15 \cdot 48$ szorzást így számolta ki: $10 \cdot 48 \cdot 2$. Egy ötödikes tanuló a 2. iskolából a $49 \cdot 51$ kiszámítására a $400 \cdot 51 + 2 \cdot 51 = 2499$ eredményt kapta, a $20 \cdot 30$ -at így számolta ki: $20 \cdot 27 + 3 \cdot 27 = 540 + 81 = 621$. Ugyanez a tanuló a $8 \cdot 999$ kiszámítására a 8, 9 és 48 számokat összeszorozva 699-et kapott, a $20 \cdot 27$ szorzásra pedig $3 \cdot 7 \cdot 21 = 147$-et. Egy 4. osztályos tanuló ugyanebből az iskolából a $9 \cdot 742$-t így számolta ki: $900 \cdot 700 + 90 \cdot 740 + 9 \cdot 2$, amire $6300 + 60306 + 9 = 18000$-et kapott. A $31 \cdot 32$ kiszámítására született válaszok: $30 \cdot 30 + 1 \cdot 20 = 900 + 20 = 920$, $30 \cdot 30 + 30 \cdot 20 = 900 + 300 = 1200$ (3. iskola), $3 \cdot 3 \cdot 2 = 9 \cdot 2 = 18$ (5.iskola), $30 \cdot 30 + 1 + 2 \cdot 60$, illetve $32 \cdot 3 + 20$ (6. iskola). A 7 iskola egyik negyedikes tanulója a $32 \cdot 32$ szorzást így végezte el: $32 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 2 = 960 \cdot 2 = 1920$. Hasonlóan érdekes egy ötödikesgyerek gondolkodása a 3. iskolából: a $32 \cdot 32$ kiszámítására $10 \cdot 10 = 100, 10 \cdot 10 = 100, 10 \cdot 10 = 100, 2 \cdot 2 = 4$, ezeket összeadva 304-et kapott eredményül.

Többször előfordult a tanulók körében ─ rossz vagy jó kerekítést követő ─ kerekített értékkel szorzás, így pl. $19 \cdot 21$ helyett $20 \cdot 20$ számítása, $77 \cdot 99$ helyett $80 \cdot 100 + 7 \cdot 9$ számítása, $77 \cdot 99$ helyett $80 \cdot 100 + 7 \cdot 90$ számítás; $19 \cdot 21$ helyett $20 \cdot 20 + 9 \cdot 2$. Erre példa még $49 \cdot 51 = 50 \cdot 50 = 2500$, $45 \cdot 45 = 40 \cdot 40 = 1600$, ez utóbbi hibás kerekítés, ahogy a $45 \cdot 45 = 50 \cdot 40 = 5 \cdot 4 \cdot 100 = 2000$ is. Hasonló hibás számítások $49 \cdot 51$ helyett $40 \cdot 50$ vagy $50 \cdot 50$ vagy $50 \cdot 50 + 1 \cdot 90$ számítása. Szintén hibás stratégia a $23 \cdot 27$ kiszámításakor $25 \cdot 25 = 625$, vagy $25 \cdot 65 = 20 \cdot 70 = 1400$ vagy $25 \cdot 65 = 30 \cdot 60 = 1800$.

Egyik negyedikes gyermek a 11. iskolából következetesen ugyanazt a hibás eredményre vezető stratégiát választotta szinte mindegyik itemnél: a kétjegyű számokat szorzás helyett összeadta, pl.: $12 \cdot 18 = 12 + 18 = 28$. De ez a stratégia megfigyelhető volt a 2. iskola egyik 4. osztályos tanulójánál is, pl. $50 \cdot 50 = 50 + 50 = 100 + 00 = 100$.

Egy másik tanuló a 2. iskolából az egyjegyű szám háromjegyű számmal típusú szorzást úgy végezte el, hogy az egyjegyű számot a háromjegyű szám mögé írta, így szerinte $9 \cdot 652 = 6529$. Hasonlóan gondolkodott a 11. iskolából egy 5. évfolyamos tanuló minden item esetén, a szorzótényezőket egymás után írva kapta meg az eredményt, így $19 \cdot 21$ az 1921, $45 \cdot 45$ az 4545, $10 \cdot 690 = 10690$, $500 \cdot 500 = 500500$, stb. Egy negyedikes tanuló a 2. iskolából végig így gondolkodott: $25 \cdot 48$ az 2E 5 sz 4t 8e = 2548, tehát úgy vette, a feladat a 2548 felbontása helyiértékek szerint.

Egy ötödikes diák esetén a $8 \cdot 900 + 90 \cdot 9$ számítás utalhat arra, hogy a tanuló rosszul tagolta a 999-et, majd a 99-en belül még a 90-et a 9-cel összeszorozta. A $8 \cdot 999$ kiszámítására született további variációk egyike: $8 \cdot 99 + 8 \cdot 9$, rossz tagolás, a helyiérték figyelmen kívül hagyásával. Az 1. iskola egyik 5. osztályos fiútanulója szerint 7292 helyett $9 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 4708$ az eredmény, míg évfolyamtársa szerint $9 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 10 = 340$. A $8 \cdot 900 + 9 \cdot 3$, illetve $8 \cdot 9 \cdot 3 = 72 \cdot 3 = 239$ válasz során a tanulók arra gondolhattak, hogy háromszor szerepel a kilences az egyik tényezőben.

Hasonló számolási stratégiát figyeltünk meg azoknál a számoknál, amelyek egyforma számjegyből álltak. Ha szerepel a tényezők között két egyforma számjegyet tartalmazó kétjegyű szám, akkor a tanulók némelyike a 2-t; ha háromjegyű a szám, akkor a 3-at beveszi a szorzótényezők közé, ahogy ez megfigyelhető pl. $8 \cdot 99 = 8 \cdot 9 \cdot 2 = 72 \cdot 2 = 144, 3 = 72 \cdot 3 = 216$, vagy $77 \cdot 8 = 7 \cdot 8 \cdot 2 = 56 \cdot 2 = 112$ és a $9 \cdot 888 = 9 \cdot 8 \cdot 3 = 72 \cdot 3 = 216$ esetén. De előfordult a 2. iskolába járó negyedikes tanulók között olyan, aki a $77 \cdot 99$ kiszámítására a $77 \cdot 99 \cdot 5$ számítást alkalmazta.

Egy 10. iskolában tanuló 4. évfolyamos diák szerint $9 \cdot 88$ úgy számítható ki, hogy $888 + 888 = 1776$ és $1776 \cdot 7 = 13808$, a kettő összege 15584; $19 \cdot 19$ pedig $(10 \cdot 9 + 9 \cdot 9) \cdot (10 \cdot 9 + 9 \cdot 9) = (90 + 81) \cdot (90 + 81) = 171 \cdot 171$. A $8 \cdot 99$ kiszámítására született variációk közül még néhány: $8 \cdot 90 + 9 \cdot 1$; $8 \cdot 90 \cdot 2$; $11 \cdot 11 = 11 \cdot 10 \cdot 2$; vagy $11 \cdot 11 = 2 \cdot 11 = 22$.

Több tanuló hasonló hibát vétett: az egyik szorzótényezőt megszorozták a másik szorzótényező tízeseivel, és befejezettnek tekintették a számolást, eszerint pl. a $15 \cdot 16 = 15 \cdot 10 = 500$. A $13 \cdot 13$ kiszámításánál csak az egyesekkel sorozták meg a 13-at, így $13 \cdot 3 = 39$, mint egy 5. osztályos fiú szerint. A $13 \cdot 13$ kiszámítására született egy $10 \cdot 10 + 30 \cdot 3 = 100 + 900 = 1000$ megoldás a 2. iskolában. Ugyanez a 4. évfolyamos tanuló a $8 \cdot 99$ -et így számolta ki: $8 + 9 \cdot 9 \cdot 8 = 9180$, a $15 \cdot 48$ -at pedig így: $4 + 8 \cdot 1 + 1 = 114$. A 4. és 5. iskolában a $8 \cdot 99$ kiszámításakor megfigyeltük a $8 \cdot 9 \cdot 2 = 72 \cdot 2 = 144$, és a $8 \cdot 99 + 9 = 42 + 9 = 51$, illetve a $8 \cdot 9 \cdot 9 = 72 \cdot 9 = 66$ számítást. Néhány variáció a 6. iskolából a $25 \cdot 50$ kiszámítására: $25 \cdot 50 \cdot 5 = 525$, $25 \cdot 50 + 25 \cdot 5 = 1295$, $20 \cdot 50 + 5$, $20 \cdot 50 + 20 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 550$.

A továbbiakban az egyes itemeknél tapasztalt hibák bemutatása következik. Többféle megoldás született a $8 \cdot 4211$ kiszámítására. Pl. $8 \cdot 42 + 8 \cdot 11$, a tanuló rosszul tagolta a négyjegyű számot és nem vette figyelembe a helyiértékeket, $8 \cdot 4 = 32, 32 \cdot 2 = 64$, $64 \cdot 11 = 64$, tartja egy fiú, illetve $4 \cdot 8 + 2 \cdot 11 = 36$ vallja egy másik fiú az 5. iskolából. Néhány további verzió a teljesség igénye nélkül pl. a 3. iskolából: $8 \cdot 4000 + 8 \cdot 21 + 8 \cdot 1$; $8 \cdot 4000 + 8 \cdot 21 + 8 \cdot 1$; $8 \cdot 4000 + 200 \cdot 11$ vagy $8 \cdot 400 + 211$. A $15 \cdot 16$ kiszámítása némelyik tanuló szerint lehetséges a következőképpen: $10 \cdot 20 + 5 \cdot 6$; a $45 \cdot 45$ pedig $40 \cdot 4 + 50 \cdot 5$. A $20 \cdot 30$ kiszámítására is több verziót láthattunk, pl. $20 \cdot 3 + 20 \cdot 0$; $2 \cdot 30 \cdot 2$; $20 \cdot 3 + 20 \cdot 10$. Több részletszorzat is lemaradt a következő típusú számoláskor: $25 \cdot 48 = 20 \cdot 40 + 5 \cdot 40$.

Az $500 \cdot 500$ kiszámítása során megfigyeltük az $5 \cdot 5 + 50 \cdot 500$ számítási módot. Némelyik tanuló szerint $25 \cdot 120$ típusú feladatok helyes számítási módja az $20 \cdot 100 + 5 \cdot 10$; vagy $12 \cdot 250 = 200 + 10 \cdot 50 + 20$; míg $25 \cdot 50 = 20 \cdot 50 + 5 \cdot 0$. A 2. és a 3. iskolában láttuk, hogy a $25 \cdot 48$ számításakor némelyik tanuló az azonos számokon belüli számjegyeket szorozta össze, majd ezeket a részletszorzatokat adta össze, következetesen több item esetén, így $25 \cdot 48 = 2 \cdot 5 + 4 \cdot 8$ vagy $25 \cdot 48 = 20 \cdot 5 + 40 \cdot 8$. De a kétjegyű számok szorzása során találkoztunk olyan stratégiával, mikor az egyik számot megszorozták a másik tényezőben szerepelő számjegyekkel, így $25 \cdot 65$ kiszámításakor megfigyeltük a $25 \cdot 60 \cdot 5$ vagy $25 \cdot 6 \cdot 5$ típusú válaszokat, mint pl. a 11. iskola 5. és 6. évfolyamos diákjai között.

A $25 \cdot 48$ feladat azért is érdekes, mert bár a helyes eredmény (1200) könnyen kiszámolható lenne a 48 százszorosának kiszámítása, majd az eredmény negyedelése révén, többféle helytelen eredményre vezető stratégiát láthatunk a tanulók munkáiban. Így $20 \cdot 40 = 800$, $25 \cdot 8 = 200$ összegeként 1000 jön ki eredményül egy-egy 6. évfolyamos tanulónak (1. és 11. iskola). Az 1. iskola 5. osztályosainak egyike szerint $25 \cdot 48 = 25 \cdot 4 \cdot 8$, míg az iskola 6. osztályosai között némely tanuló szerint $25 \cdot 40 \cdot 8 = 1000 \cdot 8 = 8000$, illetve $25 \cdot 8 + 7 \cdot 40 = 200 + 280 = 480$ vagy $5 \cdot 4 = 20$, $2 \cdot 4 = 8$, $5 \cdot 8 = 40$, $2 \cdot 8 = 16$ számolások eredményeképp 20 + 8 + 40 + 16 = 84 az eredmény, míg egy 4. évfolyamos szerint inkább $20 \cdot 8 = 160$ és $40 \cdot 5 = 200$ számok összege, vagyis 360. De megkaphatjuk az itt tanuló gyerekek szerint másképp is: $25 \cdot 20 + 25 \cdot 48 = 1700$, vagy $25 \cdot 40 + 48 \cdot 5 = 1240$; míg a 6. iskolában tanulók egyike szerint a $20 \cdot 40 + 5 + 8$ számítás, a 7. iskolában egy 4. osztályos szerint $25 \cdot 48 : 2 = 420$ számítás eredményeképp. A 2. iskolában néhány tanuló szerint a helyes eredmény a $20 \cdot 40 = 800$ és $50 \cdot 80 = 130$ részletszorzatok összegeként 930. A 6. iskolában a tanuló egy része így számolt: $20 \cdot 40 + 5 + 8$. A 3. iskolában tapasztaltuk a $20 \cdot 50 + 5 \cdot 80 = 1000 + 400 = 1400$, valamint a $20 \cdot 40 + 5 \cdot 40 = 800 + 200 = 1000$ számítási módokat. Az 5. iskolában a $20 \cdot 40 \cdot 4 \cdot 8$, a 6. iskolában a $20 \cdot 40 + 5 + 8$ számítás fordult elő inkább.

Érdekes, de hibás egyéb számítási módok közül többet láthatunk. Pl. hogyan tagolja az egyik tényezőt az 1. iskola egyik 5. évfolyamos diákja: $10 \cdot 690 = 10 \cdot 90 + 60 = 960$, $77 \cdot 99 = 70 \cdot 9 + 7 \cdot 90 = 1260$, $9 \cdot 652 = 9 \cdot 2 + 65 = 83$, $9 \cdot 742 = 9 \cdot 40 + 72 = 432$ (a helyes eredmények 6900; 7623; 5868 és 6678 lettek volna). Egy 6. évfolyamos tanuló a $12 \cdot 11$ kiszámítására $10 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 11 \cdot 10 = 100 + 20 + 11 = 132$ eredményt kapta. A 3. iskola egyik tanulója szerint $10 \cdot 690 = 10 \cdot 600 \cdot 90$, vagyis a második szorzótényezőt százasokra és tízesekre bontotta, majd ezek szorzatát szorozta 10-zel. A $20 \cdot 30 = 20 \cdot 3 + 20 \cdot 10$ a 3. iskolába járó egyik kisdiák szerint, a $77 \cdot 8$. pedig kiszámítható úgy, ha a 77-et tízesekre és egyesekre bontjuk, majd duplázzuk: 70 + 70 = 140, 7 + 7 = 14, vagyis az eredmény 154. A 11. iskola egyik lánytanulójánál ilyen leírást láttunk: $15 \cdot 16$ az $15 \cdot 16 = 31$ és $15 \cdot 10 = 25$ összegeként áll elő 30 + 20 = 55 = 56, vagyis összeadta a szorzótényezőket és még összeadott két számot velük, ezt a stratégiát 11 itemen keresztül használta. Több 4. évfolyamos tanuló ebből az iskolából összeadást végzett a szorzások helyett, pl. $150 \cdot 6 = 6 + 80 + 150$, $50 \cdot 50 = 50 + 10 + 50 = 720$, $9 \cdot 652 = 12 + 10 + 11 = 39$, $11 \cdot 11 = 11 + 10 + 11$, rejtély, miért éppen ezeket a számokat adta össze vagy miért adott hozzá még 10-et a két szám összegéhez (következetesen 6 itemen át).

Amikor két egyforma kétjegyű szám szorzása a feladat, több 6. évfolyamos diák, mint pl. a $24 \cdot 24$ típusú szorzásokra a $24 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4 = 240 \cdot 2 \cdot 4 = 1920$, $25 \cdot 50 = 50 \cdot 20 \cdot 5 = 5000$ stratégiát ötölte ki. A $32 \cdot 32 = 30 \cdot 30 - 4 \cdot 32 = 900 - 128 = 772$, egy 6. évfolyamos diák szerint (a helyes eredmény 1024). Megfigyeltük még azt, hogy az egyik tényezőt megszorozzák a tanulók a másik tényezőből származó számokkal, melyet helyiértékre bontott alakból kapnak, így $16 \cdot 16 = 16 \cdot 10 \cdot 6 = 960$.

Némelyik tanuló elégedetlen a két szám összeszorzásával, és még hozzáad valamit, pl. $20 \cdot 50 = 20 \cdot 50 + 5 = 1005$, vagy $25 \cdot 48 = 25 \cdot 10 + 25 \cdot 48$, azaz $250 + 1180 = 1430$. A $25 \cdot 50$ az $25 \cdot 50 = 120$ meg $25 \cdot 50 = 120$, vagyis 240 a 6. iskolába járó egyik gyermek szerint. A tanulók egy része kevésnek találja az $50 \cdot 50 = 100$ eredményét, és még egyszer hozzáadja, vagyis 200-at kap, ahogy egy 6. osztályos lány a 11. iskolából. Az 1. iskola egyik 4. osztályos diákja így számolt: $50 \cdot 50 = 5 \cdot 50 + 5 \cdot 50 = 250 + 250 = 500$, illetve $11 \cdot 11 = 10 \cdot 11 + 10 \cdot 11 = 101 + 101 = 202$. Amellett, hogy ez a tanuló a 10-zel való szorzás során történő helyiértékváltozási szabályt nem ismeri, az egyik tényezőt megszorozza a másik tényező tízesre kerekített értékével, majd ezeket a részletszorzatokat összeadja.

Az egyeseket a tízesekkel szorzom, majd a részeredményeket összeadom stratégia is megfigyelhető volt, így pl. az 1. iskolába járó 4. évfolyamosok egyike az itemek szorzásakor így járt el: $15 \cdot 48 = 10 \cdot 8 + 5 \cdot 40 = 80 + 200 = 280$. Két részletszorzat is kimaradt a számításból, és a helyiértékeket sem vette figyelembe a tanuló, még a végén sem.

Próbáltak ügyesen szorozni a diákok az algebrai azonosságok vagy a szubtraktív disztribúció gondolatával, de néhány esetben rossz stratégiát találtak ki. Így $18 \cdot 16 = 10 \cdot 20 - 36 = 200 - 36 = 164$, $6 \cdot 20 - 12 = 120 - 12 = 108$, véli egy tanuló az 1. iskolába járó ötödikesek közül. $8 \cdot 4211 = 10 \cdot 4211 - 1 = 42100 - 1 = 42110$, mondja egy 6. osztályos diák a 2. iskolában, egy ötödikes iskolatársa szerint $9 \cdot 888 = 100 \cdot 8 - 8 = 800 - 8 = 792$, és $8 \cdot 4211$ az $8 \cdot 420 - 8 = 4100$. Míg $19 \cdot 21 = 20 \cdot 20 - 1 = 400 - 1 = 399$ a 8. iskolába járó egyik ötödikes szerint.

5.6.8. A fiúk és lányok, az egyes évfolyamok és iskolák közötti különbségek

A fiúk (N = 410) és a lányok (N = 390) stratégiahasználata közti különbséget is vizsgáltuk. A lányok szignifikánsan gyakrabban számoltak írásban (lányok átlaga 2,48, szórás 8,68, fiúk átlaga 1,17, szórás 5,81, a Levene-féle F = 24,67 ($p < 0,001$), a páros t-próba eredménye t = 2,52 (df = 798, $p < 0,01$, 1-tailed). A lányok szignifikánsan gyakrabban tagolták összegre az egyik szorzótényezőt (fiúk átlaga 0,88, szórás 4,11, lányok átlaga 1,47, szórás 5,03, Levene-féle F-próba értéke 10,22, $p < 0,002$, t = 1,81, df = 798, $p < 0,04$, 1-tailed). A fiúk szignifikánsan gyakrabban alkalmazták a kvadratikus disztribúció stratégiát (a fiúk átlaga 0,01, szórás 0,11, a lányok átlaga 0,00, szórás 0,00, a Levene-féle F = 19,69, $p < 0,001$, t = -2,19, df = 798, $p < 0,02$, 1-tailed).

Az évfolyamokra végzett különbségvizsgálat eredményeit az 59. táblázatban foglaltuk össze. Az évfolyamok közötti különbségeket a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével állapítottuk meg. A Levene-féle próba eredményeképp tíz item esetén azt tapasztaltuk, hogy a részminták által reprezentált populációkban a szórások különböznek ($p < 0{,}001$). Az ANOVA Welch-féle próba 81. táblázatbeli F értékei is azt mutatták, hogy szignifikáns különbség figyelhető meg az egyes évfolyamok átlagai között.

59. táblázat. Az alkalmazott stratégiák összehasonlítása évfolyamonként, központi vizsgálat

Stratégia	Év-folyam	Átlag	Szórás	Levene-féle F (szignifikancia-szint, df = 2)	Welch-féle F (szignifikanciaszint, df)
Írásban számol	4.	0,85	5,28	3,51	4,48
	5.	2,51	8,49	(p < 0,03)	(p < 0,02)
	6.	2,07	7,90		501,66
Egyesekkel kezd	4.	0,09	0,79	6,20	3,43
	5.	0,79	4,26	(p < 0,002)	(p < 0,04)
	6.	0,16	0,85		454,49
Tízesekkel kezd	4.	8,80	10,41	4,53	4,57
	5.	11,76	11,47	(p < 0,02)	(p < 0,02)
	6.	10,20	11,16		522,02
Egyik tényezőt bontja összegre	4.	1,68	1,73	3,47	4,29
	5.	1,26	1,65	(p < 0,04)	(p < 0,02)
	6.	1,58	2,19		531,12
Mindkét tényezőt összegre bontja	4.	1,87	5,82	0,56	6,63
	5.	0,51	2,52	(p < 0,004)	(p < 0,01)
	6.	1,10	4,61		488,39
Szubsztraktív disztribúció	4.	0,21	1,14	14,99	24,82
	5.	1,23	2,78	(p < 0,001)	(p < 0,002)
	6.	1,15	2,78		447,18
Ismert szabály	4.	0,09	0,29	17,45	25,57
	5.	0,27	0,54	(p < 0,001)	(p < 0,001)
	6.	0,32	0,55		479,68
Emlékezeti előhívás	4.	0,07	0,68	6,64	8,03
	5.	0,26	0,93	(p < 0,001)	(p < 0,001)
	6.	0,34	1,03		513,58
TT + EE racionális hiba	4.	8,32	11,17	17,49	14,30
	5.	4,06	8,25	(p < 0,001)	(p < 0,001)
	6.	4,24	8,36		513,04
Egyéb, hibás eredményre vezető stratégia	4.	5,07	8,73	15,24	11,46
	5.	2,14	5,25	(p < 0,001)	(p < 0,001)
	6.	2,37	5,80		508,22

Mivel a részminták által reprezentált populációkban a szórások között szignifikáns a különbség, így a post-hoc elemzések közül a Dunnett' T3–teszt eredményei mutatják, hogy az évfolyamok közötti különbség szignifikáns. Az ANOVA vizsgálat eredményei szerint az 5-6. évfolyamosok szignifikánsan gyakrabban számoltak írásban. Az 5-6. évfolyamosok körében volt gyakrabban megfigyelhető több számolást könnyítő eljárás, mint pl. a szubtraktív disztribúció, gyakrabban végezték el a szorzást ismert szabály vagy emlékezeti előhívás segítségével. Az 5. évfolyamosok szignifikánsan gyakrabban kezdték a szorzást az egyesekkel, az 5-6. évfolyamos tanulók a tízesekkel. A 4. osztályos tanulók gyakrabban tagolták összegre valamelyik szorzótényezőt. A 4. és 6. évfolyamos tanulók gyakrabban bontották összegre mindkét szorzótényezőt a szorzás előtt. A nem helyes eredményre vezető stratégiákat a 4. évfolyamosok használták szignifikánsan gyakrabban a fejben végzett szorzások során.

Iskolák közötti különbségek

Az iskolák esetén kiszámítottuk a Szorzási Stratégiák Tesztre a legfontosabb statisztikai mutatókat. Az iskolák stratégiahasználata közötti különbséget homogenitásvizsgálat és varianciaanalízis segítségével vizsgáltuk.

Az elemzés során a következő stratégiákra nem tudtunk számolásokat végezni, ugyanis a mintában szereplő tanulók ezeket nem alkalmazták: egy részletszorzatot számjegyenként, egy részletszorzatot emlékezeti előhívással szoroz; felhalmozás; számlálás; tízeseket a tízesekkel szorozza, majd a szorzatot a második tényezővel megszorozza. A számológéppel számol stratégia kivételével minden stratégia esetén szignifikáns különbség figyelhető meg az iskolák tanulóinak stratégiahasználatában (a szignifikanciaszint $p < 0{,}02$ vagy attól kisebb érték). A Levene-féle próba értékei szerint a részminták által reprezentált populációkban a szórások különböznek. Így a post-hoc elemzések közül a Dunnett' T3 – teszt eredményei utalnak az egyes iskolák közötti szignifikáns különbségre. Az iskolák általában 2-4 homogén csoportra bonthatók az egyes stratégiák használatát tekintve. A 3. iskola tanulói gyakrabban alkalmazták az írásban számolást, mint a többi iskola tanulói. A legtöbb számolást üresen a 10. iskolában hagyták, ennél kevesebbet a 3., 11., 2., 8., 1., 6. és 4. iskolákban, a legkevesebbet pedig a 9., 5., és 7. iskolákban. Az additív disztribúciót a 7. iskolában tanulók gyakrabban alkalmazták. A tízesekkel kezdi a kétjegyű számok szorzását stratégia szerint az iskolák négy homogén csoportra bonthatók: a 10. iskola az egyik csoport, a 3., 11., 4., 2. és 1. iskola a második csoport, az 5., 8. és 6. iskola a harmadik csoport, a 9. iskolában alkalmazták legnagyobb arányban ezt a stratégiát. Az egyik tényezőt összeadandókra ritkábban tagolják a 10., 3. 11. és 4. iskola tanulói, mint a többi iskoláé. Mindkét tényezőt a leggyakrabban az 5., 10. és 4. iskola tanulói tagolják. Az általános faktorizáció stratégia használata szerint a minta két homogén csoportra bontható, a 3., 10., 2., 5. és 4. iskolában ritkábban használják ezt a stratégiát a gyerekek. Az ismert szabály alkalmazása stratégia három homogén csoportra bontja az iskolákat, ritkábban alkalmazzák ezt a stratégiát a 2., 6., 11., 10., 3., 5. és 4. iskolákban, gyakrabban a 8., 1. és 7. iskolában, leggyakrabban pedig a 9. iskolában. A 9. iskola tanulói szignifikánsan gyakrabban használják a szubtraktív disztribúció, felezés-duplázás, emlékezeti előhívás és exponenciális faktorizáció stratégiákat, mint a többi iskola. A nem helyes eredményre vezető stratégiák közül az egyéb stratégiák alkalmazása ritkábban fordul elő a 9. iskolában, gyakrabban az 1., 3., 10., 11., 7., 4., 6. és 8. iskolában, az 5. és 2. iskolában számolnak így a gyerekek a legnagyobb arányban.

Az osztályok közötti különbségek

A Szorzási Stratégiák Teszten elért eredmény osztályonként változó. Az osztályok közötti különbségek megállapításában a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segít. A Levene-féle próba esetén kapott F értékekre a $p < 0{,}001$ teljesül, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások között szignifikáns különbség van. Az egyes osztályok átlagai között különbség figyelhető meg, ezt az ANOVA Fischer-féle F értékek mutatják ($p < 0,001$). A mintaelemszám különbözősége miatt a post-hoc elemzések közül a Hochberg's GT2 próbát használtuk.

Vizsgáltuk az egyes osztályokban alkalmazott szorzási stratégiákat. Az „írásban számol" stratégia szerint az osztályokat három homogén csoportra oszthatjuk: a 4. és 18. osztályban gyakrabban, a 8., 36., 41., 20., 45., 19. és 21. osztályban ritkábban, a többi osztályban még ritkábban alkalmazták ezt a stratégiát. A géppel számolás a 8. osztályban figyelhető meg. Az elképzelem fejben leírva stratégia használata a 8., 11., 2. és 21. osztályban gyakoribb; mindkét szorzótényezőt összegre bontók leginkább a 43. osztályból kerülnek ki, ebben az osztályban kezdik szignifikánsan gyakrabban a tanulók a fejben szorzást az egyesek helyiértékén álló számmal. A frakcionális disztribúció szignifikánsan gyakoribb a 9., 24., 35. és 41. osztályban. Az egyik tényezőt összegre bontja, a másikat szorzótényezőkre, ezt a stratégiát a 16. és 12. osztályban figyeltük meg, a többi osztályban nem alkalmazták a tanulók. Az összeg négyzete azonosságot a 46. és a 22. osztályban használták a tanulók, az algebrai átalakítást a 31. osztályban, a többiben nem. Az emlékezeti előhívás a 36. és 37. osztályban gyakoribb, a többi osztályban ritkább. Az exponenciális faktorizációt a 8., 14., 13., 37. és 36. osztálybeli tanulók használták. A TT + EE: tízeseket a tízesekkel és az egyeseket az egyesekkel szoroz, majd a két részletszorzatot összeadja stratégiát a 32. osztálybeli tanulók kivételével minden osztály alkalmazta, ez a fajta hibázás leggyakrabban a 20., 6., 44., 31., 8., 2., 7., 3., 4., 42., 14., és 17. osztályokban fordult elő. A TT + EE + az egyik tényezőt hozzáadja helytelen eredményre vezető stratégia használata a 37., 36. és 3. osztályban szignifikánsan gyakoribb volt. Tízeseket a tízesekkel szorozza, majd az egyik tényezőt hozzáadja a részletszorzathoz; tízesekkel kezdi a szorzást, majd az egyeseket a tízesekkel szorozza; szubtraktív disztribúció 2.; hiányzó részletszámítások mindkét tényező összegre bontásakor; helyiérték figyelmen kívül hagyása két osztályban volt megfigyelhető, a 36. és a 37. osztályokban. Egyéb, hibás eredményre vezető stratégia a 19. és 32. osztályok kivételével minden osztályban előfordult, a leggyakrabban a 15., 30., 28., 31., 14. és 13. osztályokban.

Érdekes kérdés, vajon az osztályok közötti különbségek visszavezethetőek-e az évfolyamok közötti különbségekre, röviden a válasz: nem mindig.

- Ami az évfolyamok közötti különbségre visszavezethető, pl. a frakcionális disztrició helyes eredményre vezető stratégia alkalmazása, ezt 3 hatodikos és egy 5.-es osztályban figyeltük meg.
- Példa még az emlékezeti előhívás stratégia, egy 5.-es és egy 6.-os osztálynál figyelhető meg leggyakrabban.
- Egyéb hibás eredményre vezető stratégia két 5. évfolyamos osztály kivételével mindenhol előfordult, a leggyakrabban hibázók: négy negyedikes, 1 ötödikes és egy hatodikos osztályba járnak.

De számos ellenpéldát is felsorolhatunk, amikor az évfolyamok közti különbségre nem tudjuk visszavezetni az osztályok közötti különbséget:

- Az „írásban számol" stratégia az 1. iskola 4. évfolyamán és a 3. iskola 5. évfolyam egyik osztályában volt leggyakoribb stratégia. Ettől ritkábban használta még öt 6.-os és két 5.-es osztály, a többi osztályban ez ritkábban megfigyelhető.
- A géppel számolás egy hatodik osztályban volt megfigyelhető.

- Az elképzelem fejben leírva stratégia használata egy 4. évfolyamos és 3 hatodik évfolyamos osztályban érhető tetten.
- Mindkét tényezőt összegre bontók leggyakrabban egy 5.-es osztályból kerültek ki, ugyanakkor az egész mintán általában a 4. évfolyamon volt ez a leggyakrabban megfigyelhető stratégia. Ezek tehát ellenpéldák arra, hogy a magasabb évfolyamokon jobb eredményt érnek el a gyerekek. Az osztályokra vetítve ez a kép már nem mindig igaz, előfordul, hogy egy stratégiát gyakrabban használnak alacsonyabb évfolyamokon.
- Másik ellenpélda: az exponenciális faktorizáció egy 5.-es osztály mellett két negyedikes osztályban is gyakori volt.
- A nem helyes eredményre vezető stratégiákat a 4.-esek használták szignifikánsan gyakrabban, ugyanakkor a tízeseket a tízesekkel, egyeseket az egyesekkel szorzom szorzási stratégiát a 32., vagyis egy ötödikes osztály kivételével mindenhol megfigyeltük: a leggyakrabban három negyedikes, három ötödikes és két hatodikos osztályban volt ez a fajta hibázás gyakori.
- Hasonlóan ennek a stratégiának egy változatát, hogy az egyik tényezőt még hozzáadják az összeghez, a 4., 5., 6. évfolyamon is gyakran használták egy-egy osztályban.
- Egyéb hibás eredményre vezető stratégia két 5. évfolyamos osztály kivételével mindenhol előfordult, a leggyakrabban hibázók: négy negyedikes, 1 ötödikes és egy hatodikos osztályba járnak.

Összegezve: A negyedik évfolyamokon gyengébb eredményt érnek el a gyerekek a szorzási stratégiák alkalmazásában. Az osztályokra vetítve ez a kép már nem mindig igaz. Tehát az osztályonkénti vizsgálat azért érdekes, mert árnyalja az összképet.

Összefoglalva, a tanulók sok esetben kitartóan ragaszkodtak az általuk helyesnek tartott, ám hibás eredményre vezető stratégiákhoz, gyakran szinte minden item esetén azt alkalmazták. Ez adódhat a tanuló tanulási képességeiből, szokásaiból (ld. *Csíkos*, 2013; *Schillemans, Luwel, Bulté, Onghea és Verschaffel*, 2009), de következhet az osztályok sajátosságokból is. Tapasztalataink szerint az iskolák stratégiahasználata között különbségek vannak. Ez adódhatna az iskolák által használt tankönyvek, feladatgyűjtemények közötti különbségekből. Viszont a magyarországi általános iskolákban használatos tankönyvekből hiányoznak a fejben számolás stratégiáinak explicit tanítására vonatkozó elméleti részek, gyakorló feladatok (*Csíkos*, 2013). A 9. évfolyamos Sokszínű matematika Mozaikos tankönyvben találunk néhány számolási trükköt az algebrai azonosságok témaköréhez kapcsolódva.

A hibás stratégiák alkalmazása mellett gyakran tapasztaltuk, hogy a szorzótábla rosszul vagy nem rögzült több gyermek esetén, pl. $10 \cdot 10 = 20$. Ahogy a fenti példákból láthattuk, a tanulók jelentős résznél hiányzott a becslés képessége és az eredmény ellenőrzésének igénye a számítások során. Gyakoriak voltak az egyes műveletek végzése közben az elszámolások a helyes eredményre vezető stratégiát alkalmazó tanulók körében is. A gyerekek által vétett hibák közül még szemezgethetnék, de talán a leírtak alapján is látható, milyen szomorú a helyzet a számolási stratégiák, becslés, kerekítés, szorzótábla alkalmazása tekintetében. Összességében elmondható, hogy a fiúk és a lányok között egyaránt, és minden iskolában megfigyeltük helytelen eredményre vezető stratégiák használatát.

Korrelációk az egyes stratégiák között

A 800 fős mintában a Pearson korrelációszámítást elvégezve közepesen erős korrelációt figyeltünk meg a felezés-duplázás szubtrakcióval és az exponenciális faktorizálás ($r = 0,65$, $p < 0,001$), valamint a felezés-duplázás stratégia között ($r = 0,50$, $p < 0,001$). A tízesekkel kezd stratégia és az egyik tényezőt összegre bontja, valamint az egyesekkel kezd és a mindkét tényezőt összegre tagolja stratégia között is közepes erősségű a korreláció ($r = 0,43$ és $r = 0,47$, $p < 0,001$). Több stratégia között találtunk gyenge, pozitív kapcsolatot, pl. az additív disztribúció és a tízesekkel kezd stratégia ($r = 0,33$, $p < 0,001$), az általános faktorizáció között ($r = 0,30$, $p < 0,001$), az egyik tényezőt tagolja stratégia ($r = 0,26$, $p < 0,001$), valamint „Tízeseket a tízesekkel, egyeseket az egyesekkel" stratégia között ($r = 0,23$, $p < 0,001$). A maradék nélküli részekre bont stratégia és a szubtraktív disztribúció között is gyenge a korreláció ($r = 0,34$, $p < 0,001$).

Összegezve a tapasztaltakat, a fejben számolás vizsgálata során a hibás válaszok és a használt stratégiák szempontjából szignifikáns különbségeket találtunk a vizsgálatban részt vett iskolák és osztályok, valamint a fiúk és a lányok között. Hope és Sherrill (1987) tanulmányában és Milligan, Mitchelmore és Prescott (2005) tanulmányában leírt stratégiák használatának nagy részét megfigyelhettük a vizsgált tanulók körében. Az általunk létrehozott rendszerben 35-féle számítási stratégia szerepelt, ezek egy része azért jött létre, mert az eddigi külföldi tanulmányokban publikált stratégiák egyike sem írta le. A mintában szereplő tanulók nem alkalmazták a Hope és Sherrill által leírt következő stratégiákat: egy részletszorzatot számjegyenként, egy részletszorzatot emlékezeti előhívással szoroz; felhalmozás; számlálás. Ugyanakkor néhány vizsgált tanuló körében megfigyeltük az elképzelem fejben leírva stratégia használatát. A kétjegyű számok kétjegyű számmal történő szorzásakor a leggyakrabban a tízesek helyiértékén levő számmal szorozták meg a tanulók, az egyesekkel jóval ritkábban kezdték a szorzást.

Számos hibás eredményre vezető stratégiát megfigyeltünk kutatásunk során. A tipikus hiba az összeadás mintájára kialakult racionális hiba volt (vö. Ben-Zeev, 1998a, 1998b): a tanulók a tízeseket a tízesekkel szorozták, az egyeseket pedig az egyesekkel, és a két részletszorzatot összeadták. Ennek a stratégiának számos variációját láthattuk. A gyakorlati életben szükséges a jó számolási készség, fejben és írásban, ezért a hibák korrigálása mindenképpen szükséges és célszerű lenne.

A helyes eredményre vezető stratégiák gazdag variációját láthattuk, ugyanakkor a számolást könnyítő eljárásokat (szubtraktív disztribúció, kvadratikus disztribúció, általános faktorizálás, felezés-duplázás, maradék nélküli részekre bontás aránylag kevés osztályban és kevés tanuló alkalmazta. Összességében a helyes eredményre vezető stratégiák számának évről évre növekedése állapítható meg. A tanulók metakognitív képességeinek fejlődéséhez hozzájárulhatna az, ha az órákon gyakrabban beszélgetnének arról a gyerekek, miért és milyen stratégiával számoltak ki egy adott feladatot. Mindezek miatt célszerűnek tartjuk a fejben számolási, köztük a szorzási stratégiák tanítását a 4. évfolyam után tovább folytatni, a már tanult stratégiarepertoárt újabbakkal bővíteni. Új, helyes eredményre vezető stratégiák megtanítása fontos lenne az 5-6. évfolyamos tanulók számára.

5. 6.9. A Matematika Tudásszintmérő Teszt jóságmutatói

A Matematika Tudásszintmérő Tesztre teljesül az objektivitás, és validitása is megfelelő. A következőkben a teszt megbízhatóságát elemezzük részletesebben.

A matematika tudásszintmérő papír-ceruza alapú teszt mindkét változata ugyanannyi feladatot tartalmazott az egyes évfolyamokon, reliabilitása magas. A 4. évfolyamosok Matematika Tudásszintmérő Tesztje 38 itemet, az 5. évfolyamosoké 57 itemet, a 6. évfolyamosoké pedig 71 itemet tartalmazott. A Matematika Tudásszintmérő Teszt írásakor 22 fő hiányzott, így a tesztet 828-an oldották meg, 52,66 %-uk az A változatot írta, 47,34%-uk pedig a B tesztváltozatot. A Matematika Tudásszintmérő Teszt reliabilitása mindkét tesztváltozat esetén Cronbach-α = 0,95, átlagpontszám 22,12, szórás 14,23. Az A változatot 437 fő oldotta meg, átlagpontszám 22,24 pont, szórás: 14,30. A B változatot 391 fő oldotta meg, átlagpontszám 22 pont, szórás: 14,20. A reliabilitás értéke a teljes tesztet tekintve és mindkét tesztváltozat esetén is magasabb 0,90-nál, tehát a teszt megbízhatóan mér (*Nagy*, 1975).

Mindhárom évfolyamon magasnak találtuk a Matematika Tudásszintmérő Teszt reliabilitását. A 4. évfolyamos minta 268 fős volt, a teszt reliabilitása Cronbach-α = 0,93, magas. A 38 itemes teszten a tanulók által elért átlagpontszám 16,02 pont, ez 42,16%pontos teljesítményt jelent, (szórás 9,70). Nehéz itemek az 1., 3. és 8. feladat (kockás, Grillparty és Torta feladat) mértékegységátváltást kérő itemei, ezek megoldottsága rendre 12%, 16% és 19%. Legkönnyebbnek a Locsolkodás feladatnak tűnt, az itemek megoldottsága 70%, 58%, 51% é s 58%. A könnyebb feladatok közé tartozott még az Állítások feladat, itt is 53% és 62% közötti megoldottságot találunk. 49%-os a megoldottsága a kockás feladat c itemének és a Sárkányok feladat első itemének. Alacsony megoldottságú és 0,3 alatti elkülönítésmutatóval rendelkezik, ezért a legközelebbi mérésnél megfontolandó az 1. feladat mértékegységátváltást kérő itemének elhagyása. 0,6 feletti, jó elkülönítési mutatójúak a Pékség e), g), h), k), l), m); a Strucc feladat c) iteme, a Sárkányok feladat b) és c) itemei, valamint a Torta feladatok itemei.

Az 5. évfolyamon a minta 254 fős volt, a reliabilitás-mutató magas, Cronbach-α = 0,95. Az átlag 21,70 pont (szórás 13,25), ez 37,07%pontos teljesítményt jelent. Az 5. évfolyamos tanulók számára is nehéz itemek voltak az 1., 3. és 8. feladat (Kockatérfogat, Grillparty és Torta feladat) mértékegységátváltást kérő itemei, ezek megoldottsága rendre 7%, 23% és 20%. A kockás feladat többi itemének, a Torta feladat b és c, A Strucc feladat első két itemének is 20% alatti a megoldottsága. A nehezebb feladatok közé tartozott a törtek bővítésére vonatkozó feladat, megoldottsága 21% és 38 % között váltakozik. 0,3 alatti elkülönítésmutatóval rendelkezik a 2. feladat a), b) és c) iteme, a Sport feladat c) iteme és a Strucc feladat d) iteme. Ezeket az alacsony elkülönítési mutatójú itemeket a legközelebbi vizsgálat során érdemes kihagyni.0,6 feletti elkülönítési mutatójúak a pékség e), f), g), h) és l) itemei, valamint a Törtek feladat d) és f) iteme.

A 6. évfolyamos minta 306 fős, a reliabilitásmutató itt is magas, Cronbach-α = 0,96. A tanulók által elért pontszámok átlaga 27,97 pont (szórás 16,11), ez 39,39%pontos teljesítményt jelent. Nehéz itemek az 1. feladat (kockás feladat) itemei, Grillparty feladat, Sport b, Strucc a, b és c iteme, Aránybővítés feladat j iteme, ezek megoldottsága kisebb, mint 20%. Legkönnyebbnek a Szög a és c iteme bizonyult (84%-os, illetve 82%-os megoldottság). A Torta item megoldottsága közelíti meg legjobban az 50%-os megoldottságot (51%). Alacsony, 0,3 alatti elkülönítésmutatóval rendelkezik az 1. feladat b) iteme, a 2. feladat a), b) és c) iteme, a Sport feladat c) iteme és a Strucc feladat d) iteme. Közel 0,6 az elkülönítési mutatója a pékség f), g), h), j) és l) itemeinek, valamint a Törtek feladat d) itemének.

Összegezve a tapasztalatainkat, a Matematika Tudásszintmérő Teszt a teljes mintán, évfolyamonként, valamint a mintát nemek szerint bontva is igen megbízhatóan mér. Osztályok szintjén vizsgálva is számos igen jó, 1-hez közeli értéket számoltunk. A reliabilitás viszont függ a vizsgált csoport képességeloszlásától is (*Csapó*, 2004b). Egy kecskeméti negyedikes osztály esetében a teszt reliabilitása nagyon alacsony (0,19) volt. Az osztály valószínűleg túl homogén összetételű, jó képességű, az országos átlaghoz képest magasabb tudásszintű csoport, így számukra ugyanaz a teszt, ami több osztályban jól mér, túl könnyűnek bizonyult.

5.6.10. A Matematika Tudásszintmérő Teszt elemzése

A Matematika Tudásszintmérő Teszt feladatait a mért tartalmak közötti korrelációk szerinti vizsgálatnak vetettük alá mindhárom évfolyamon. Ezt követően klaszteranalízist végeztünk, hogy megállapíthassuk az egyes mért tartalmak, ill. az egyes feladatok közötti kapcsolatokat. A dolgozat terjedelme miatt ezen adatok részletes elemzésétől eltekintünk.

A teszt feladatait a mért tartalom szerint 11 altesztre bonthatjuk. Negyedik évfolyamon ezekből a tesztben öt csoport szerepel: a számok szorzása, törtrészszámítás, egyenes arányosság, mértékegységátváltás, összeadás. Minden itemcsoport között pozitív a korreláció, ezek mindegyike szignifikáns kapcsolatot fejez ki. Közepesen erős vagy gyenge korrelációt figyelhetünk meg a legtöbb itemcsoport között. A törtbővítés és számok szorzása között a korreláció közepes ($r = 0,56$); a legmagasabb (0,6 fölötti) értékeket az egyenes arányosság és számok szorzása, törtrész számítása és mértékegységátváltás itemcsoportok között találjuk. A legalacsonyabb korrelációban a százalékszámítás és a kockatérfogat itemek állnak a többi itemcsoporttal. A feladattípusokra és a feladatokra végzett klaszteranalízis (a legközelebbi szomszéd módszere, négyzetes euklideszi távolság) során a kapott koefficiensek (43; 165; 267; 357; 1160; 1753; 5874; 7463) alapján megállapítható, hogy a a százalékszámítás és a kocka térfogata feladattípusok kapcsolata a legszorosabb, velük a mértékegységátváltás itemcsoportok kapcsolata szoros. A törtrész számítás és az összeadás is szorosan kapcsolódik egymáshoz, majd e két hasonlósági csoport csatlakozik egymáshoz. Később hozzájuk társul a törtbővítés, majd e fürt az egyenes arányosság csoportjával kapcsolódik össze. Végül az egész számok szorzása kapcsolódik be a fürtalkotásba.

A teszt az ötödik évfolyamon a Szögek, Törtek feladatokkal, térfogatszámításra, százalékszámításra vonatkozó itemekkel bővül. A hatodik évfolyamon a teszt 71 itemből áll. Az 5. évfolyamosok által írt teszt feladatain kívül még a fordított arányosságra, aránybővítésre vonatkozó itemek, valamint még törtrész számításra vonatkozó itemek kerültek be a tesztbe.

A teszt szerkezetének megismeréséhez az egyes évfolyamokon lépésenkénti regresszióanalízist is végeztünk a feladatokra. A vizsgálat során azt tapasztaltuk, a 4. évfolyamon négy feladat adja a megmagyarázott variancia 95,6%-át. A legnagyobb, 77%-os magyarázó erővel a 14 itemes Grillparty feladat rendelkezik; ezt követi a következő lépésben regresszióba lépő Sárkányok feladat. A Sárkányok és a Locsolkodás feladatok a Grillparty feladattal együtt már a variancia 92,8%-át magyarázzák. A teszt 4 feladatának 26 iteme adja a megmagyarázott variancia 95,6%-át, így a további vizsgálatok során ezeket az itemeket célszerű beletenni a tesztbe.

Az 5. évfolyamon íratott teszt 10 feladata közül öt feladatnak van a legnagyobb hatása a teszt összpontszámára. A teszt lépésenkénti regresszióanalízissel történő vizsgálata alapján a

Grillparty feladat adja a megmagyarázott variancia 71,3%-át; a Szögek és a Sárkányok feladattal együtt már a megmagyarázott variancia 90,8%-át adják. A Törtek feladat 3,5-os, az Állítások pedig 2,3%-os magyarázó erővel rendelkezik. Ezen öt feladat 38 iteme adja a megmagyarázott variancia 96,7%-át, így a további vizsgálatok során ezeket az itemeket célszerű beletenni a tesztbe.

A 6. évfolyamon hat feladatnak van a legnagyobb hatása a teszt összpontszámára. A Grillparty feladat adja a megmagyarázott variancia 53,2%-át; a Szögek és a Strucc feladatokkal együtt már a megmagyarázott variancia 85,7%-át adják. Ez a három feladat a Törtek, Locsolkodás és Tömeg feladatokkal együtt adja a megmagyarázott variancia 96,1%-át, így a további vizsgálatok során ezeket a feladatokat érdemes a tesztben hagyni, ez 48 item.

Összegzésképp elmondhatjuk, hogy a teszt itemcsoportjainak és feladatainak elemzésekor a reliabilitás értéke minden évfolyamon a még elfogadható 0,7 érték közelében vagy attól magasabb volt. A feladatokra végzett reliabilitás esetén is 0,73, 0,77, 0,82 értékeket kaptunk. Az elkülönítésmutatók néhány kivétellel 0,3 fölöttiek voltak, több itemcsoport esetén 0,6, illetve 0,7 fölötti értéket is láthattunk. A 4. évfolyamon minden elkülönítésmutató legalább 0,5 volt, magas az elkülönítésmutatója az egyenes arányosságnak és a számok szorzásának. 5. évfolyamon két itemcsoport (kocka térfogata, százalékszámítás) kivételével mind elfogadható értékűek az elkülönítésmutatók. A 6. évfolyamon minden itemcsoport, illetve feladat elkülönítésmutatója legalább 0,5, kivéve a kockatérfogat itemet. Az elkülönítésmutatók közül a 0,7 fölöttti értékkel rendelkeznek a számok szorzásához, az egyenes arányossághoz, valamint a törtrészszámításhoz tartozók.

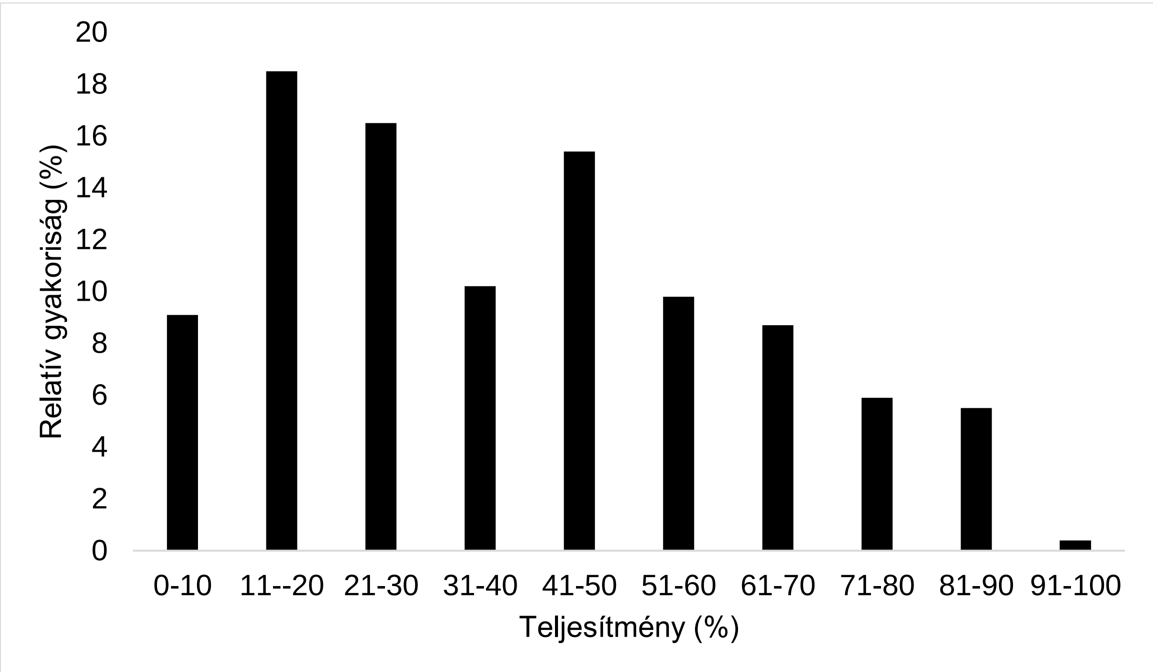
Az itemcsoportokra végzett korrelációszámítások alapján elmondhatjuk, hogy minden itemcsoport között pozitív és szignifikáns korreláció található ($p < 0,001$). A 4. évfolyamon főleg közepes, 0,4 és 0,7 közötti korrelációkat találunk. A legmagasabb korrelációt az egyenes arányosság és a számok szorzása között ($r = 0,63$), illetve az egyenes arányosság és a mértékegységátváltás között ($r = 0,69$) mértük. Az 5. évfolyamon magas korrelációt figyelhetünk meg a törtbővítés és az aránybővítés között ($r = 0,71$). Közepesen erős vagy gyenge korrelációt figyelhetünk meg a legtöbb itemcsoport között. A törtbővítés és számok szorzása között a korreláció közepes ($r = 0,56$); a legmagasabb (0,6 fölötti) értékeket az egyenes arányosság és számok szorzása, törtrész számítása és mértékegységátváltás itemcsoportok között találjuk A legalacsonyabb korrelációban a százalékszámítás és a kockatérfogat itemek állnak a többi itemcsoporttal. A 6. évfolyamon magas a korreláció a törtbővítés és az aránybővítés között ($r = 0,71$). Közepes a korreláció az egyenes arányosság és a számok szorzása, a törtrész számítás és a mértékegységátváltás között, értékeik rendre $r = 0,56$, $r = 0,52$ és $r = 0,58$. Továbbá közepes erősségű a kapcsolat a számok szorzása és a törtrész számítás, a mértékegységátváltás, az összeadás a szögfajták között, valamint az összeadás és az egyenes arányosság között. A kockatérfogat két kivétellel (mértékegység átváltás, százalékszámítás) minden itemcsoporttal alacsony.

A mérősezköz itemeire, itemcsoportjaira és a feladatokra is elvégeztük a reliabilitás-vizsgálatot, kiszámítottuk az elkülönítésmutatókat. Összességében kijelenthetjük, hogy minden évfolyamon megfelelőek, elfogadhatóak voltak a reliabilitás-, és elkülönítésmutatók. A reliabilitás (Cronbach-α) a kevesebb itemet tartalmazó tesztrészek esetén is a még elfogadható 0,7 érték közelében volt. A teszt mindegyik évfolyamon megbízhatóan mér. így sikerült igazolnunk a hipotézisünket, mely szerint az általunk készített mérőeszköz a 4., 5. és 6. évfolyamon alkalmas a tanulók tudás-és képességszintjének mérésére.

5.6.11. A Matematika Tudásszintmérő Teszt összpontszáma részminták szerint

A H8 hipotézis szerint a vizsgált iskolák, évfolyamok, osztályok, fiúk és lányok Matematika Tudásszintmérő Teszten nyújtott teljesítménye szignifikánsan eltér egymástól. Ez a hipotézisünkbeigazolódott.

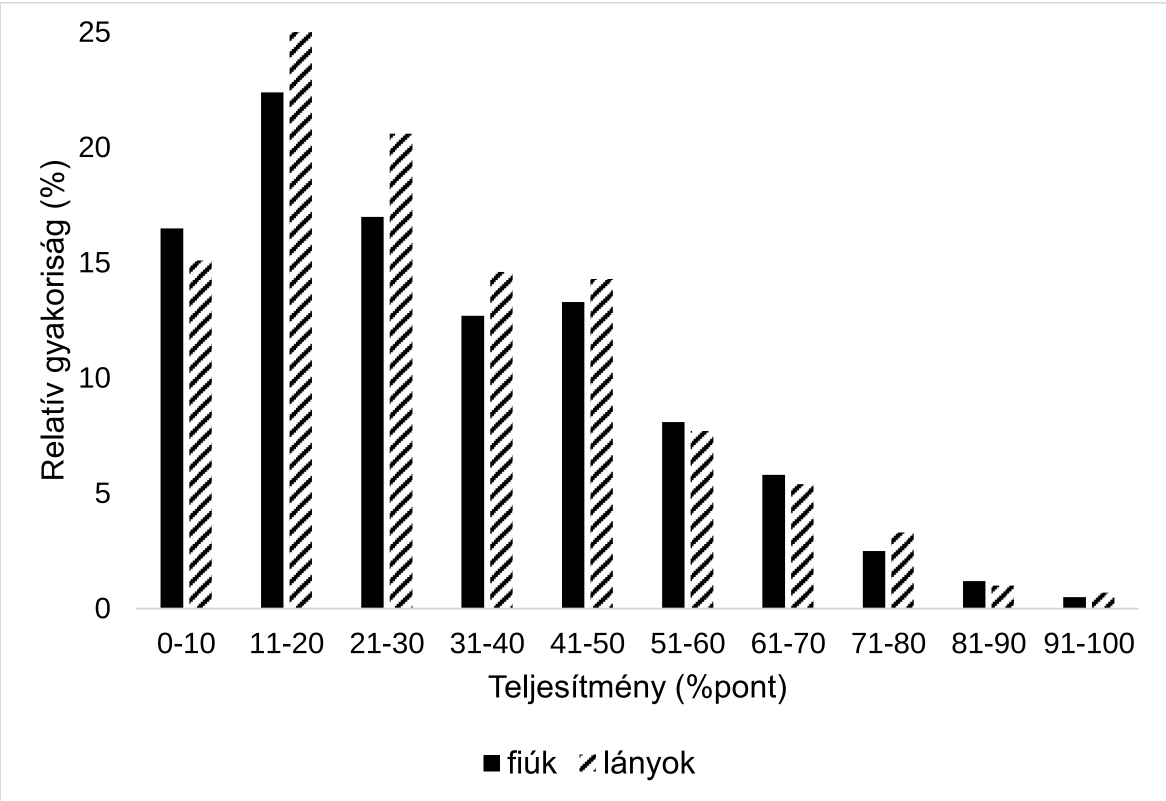
A következőkben a Matematika Tudásszintmérő Teszt néhány jellemző statisztikai mutatóját foglaljuk össze. A teszten elért átlagpontszám a teljes mintán 22,12 pont volt (az átlagteljesítmény 31,12 %), módusz 25, medián 19. A teljesítmények szórása pedig 14,23. A teljesítmények mediánja kisebb, mint a módusz, és kisebb, mint az átlag, ezért az ábrán látható eloszlást figyelhetjük meg. A 46. ábrán a teljes minta Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredményének eloszlása látható. A 828 fős mintán elért pontszám relatív gyakoriságát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy az eloszlás egymóduszú, azaz a mért tudást tekintve a minta homogénnek tekinthető. A ferdeségi mutató 0,65, így az ábrán aszimmetrikus, balra tolódó eloszlást látunk, és mivel a lapultság -0,12, az eloszlásfüggvény laposabb, mint a normális haranggörbeé.



46. ábra A teljes minta Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredményének eloszlása, központi vizsgálat

A tesztet 424 fiú és 404 lány töltötte ki. A fiúk által elért átlagpontszám 21,64, szórás 14,39; átlagos teljesítményük 30,48%pont, a lányok átlagosan 22,62 pontot értek el, szórás 14,06; átlagos teljesítményük 31,86%pont. A módusz a fiúk esetén 9, a lányoknál 7; a medián értékek 19 és 21. A ferdeségi mutató a fiúknál 0,62, a lányoknál 0,69; hozzá tartozó sztenderd hiba 0,12 mindkét nem esetén. A lapultság a fiúknál -0,23, a lányoknál 0,01, hozzá tartozó sztenderd hiba 0,24.

A 47. ábrán a Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények összehasonlítását láthatjuk nemek szerint bontásban. Az ábrán látható, hogy az eloszlásfüggvény hasonlít a teljes mintán látottra. A fiúk és a lányok mintáján is egymóduszú, aszimmetrikus, balra tolódó eloszlást látunk, a fiúk esetén az eloszlásfüggvény laposabb, a lányok esetén kicsit magasabb, mint a normális haranggörbéé. A fiúk 38,9%-a, a lányok 32,4%-a a legfeljebb 20%-os teljesítményt elérők közé tartozik. A fiúk 81,8%-a, a lányok 81,8%-a legfeljebb 50%-os teljesítményt ért el. A fiúk 0,5 %-a, míg a lányok 0,7 %-a ért el legalább 90%-os teljesítményt.



47. ábra A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények nemek szerint, központi vizsgálat

Évfolyamonkénti különbségek

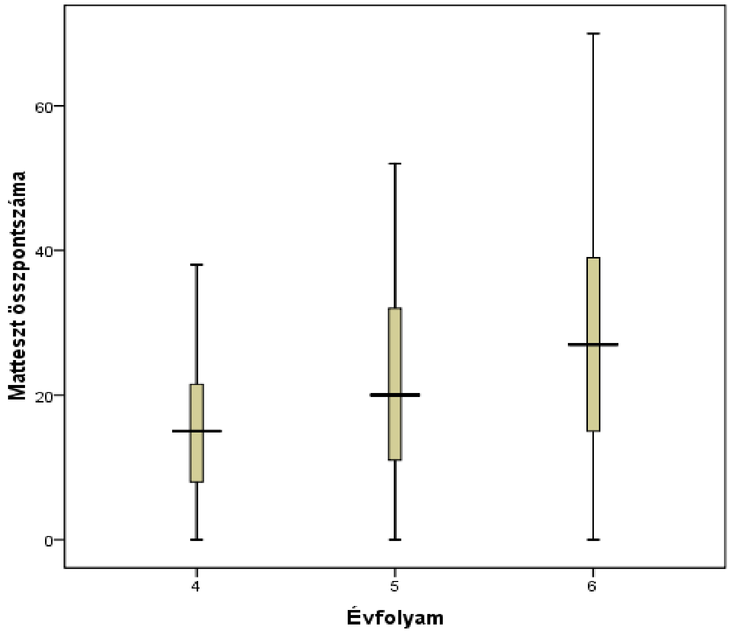
Az egyes évfolyamokra jellemző adatok olvashatók ki a 60. táblázat adataiból. A negyedik évfolyamon a mintát 268 tanuló alkotta. A 38 itemes teszten a tanulók által elért átlagpontszám 15,72 pont, ez 41,37%pontos teljesítményt jelent, (szórás 9,84).

60. táblázat. A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények évfolyamok szerint, központi vizsgálat

Évfolyam	4.	5.	6.	Összesen
Minta (fő)	268	254	306	828
Minimum	0	0	0	0
Maximum	38	52	70	70
Medián	15	20	27	19
Átlag	15,72	21,70	27,81	22,12
Szórás	9,84	13,25	15,99	14,23
Ferdeség	0,54	0,35	0,31	0,65
Szt. hiba	0,15	0,15	0,14	0,09
Lapultság	-0,57	-0,87	-0,13	-0,12
Szt. hiba	0,30	0,30	0,28	0,17

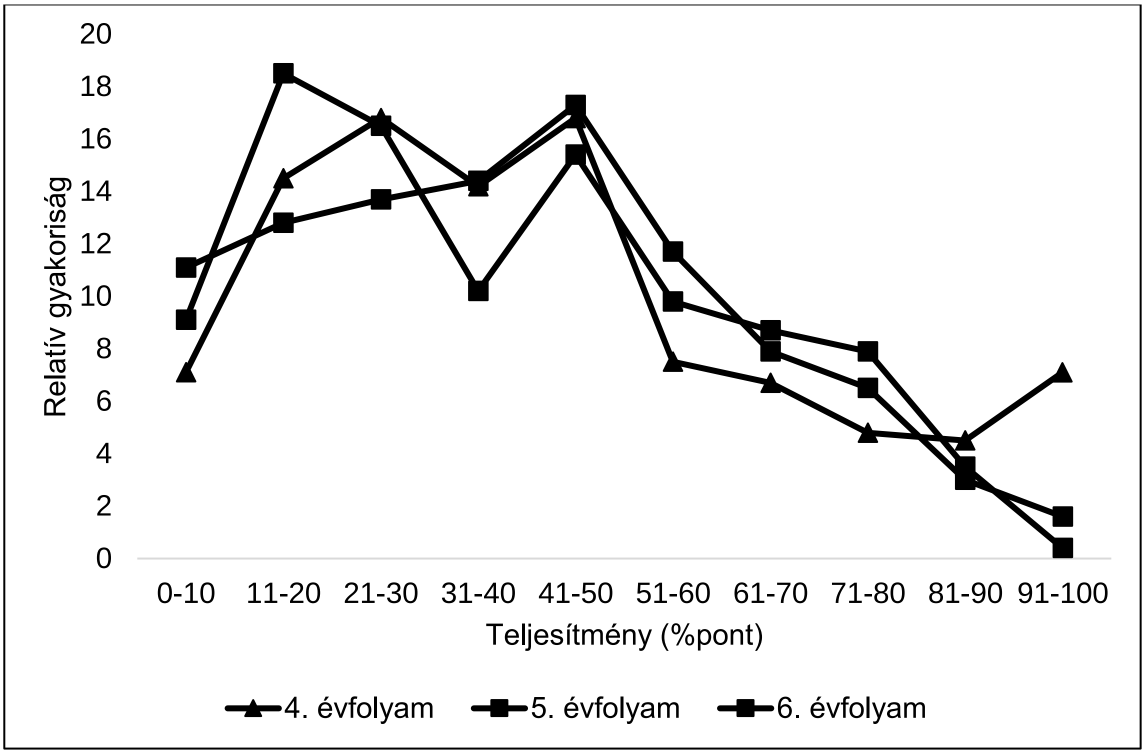
Az 5. évfolyamon a minta 254 fős volt, Az átlag 21,70 pont (szórás 13,25), ez 37,07%pontos teljesítményt jelent. A 6. évfolyamos minta 306 fős. A tanulók által elért pontszámok átlaga 27,97 pont (szórás 16,11), ez 39,39%pontos teljesítményt jelent. Mindhárom évfolyamon volt 0 pontos dolgozat. Negyedik évfolyamon több tanuló elérte maximális pontszámot, ez a többi évfolyamon tanulóknak nem sikerült. Az 5. évfolyamosok által elért legnagyobb pontszám 52 volt az 57-ből, míg a 6. évfolyamon 70 pont a 71 pontból. Relatív szórás értéke az egyes évfolyamokon 0,63; 0,61 és a 6. évfolyamon a legkisebb, értéke 0,58.

Az évfolyamok közötti különbségeket homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével állapítottuk meg. A Levene-féle próba esetén F = 34,40, p = 0,000-t kaptuk, amire p < 0,05 teljesül, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások különböznek. A Welch-próba F értéke 60,99, p < 0,001, vagyis szignifikáns különbség figyelhető meg az egyes évfolyamok átlagai között. A negyedik évfolyamosok által elért átlag a legkisebb, a hatodik évfolyamosok által elért a legnagyobb. Ez a szignifikáns különbség jól látható a box-plot diagramon is, melyet a 48. ábrán tekinthetünk meg.



48. ábra A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények box-plot diagramon évfolyamok szerint, központi vizsgálat

Az évfolyamok közötti különbség a 49. ábrán is látható, itt az egyes évfolyamok sűrűségfüggvényének eloszlását tekinthetjük meg.

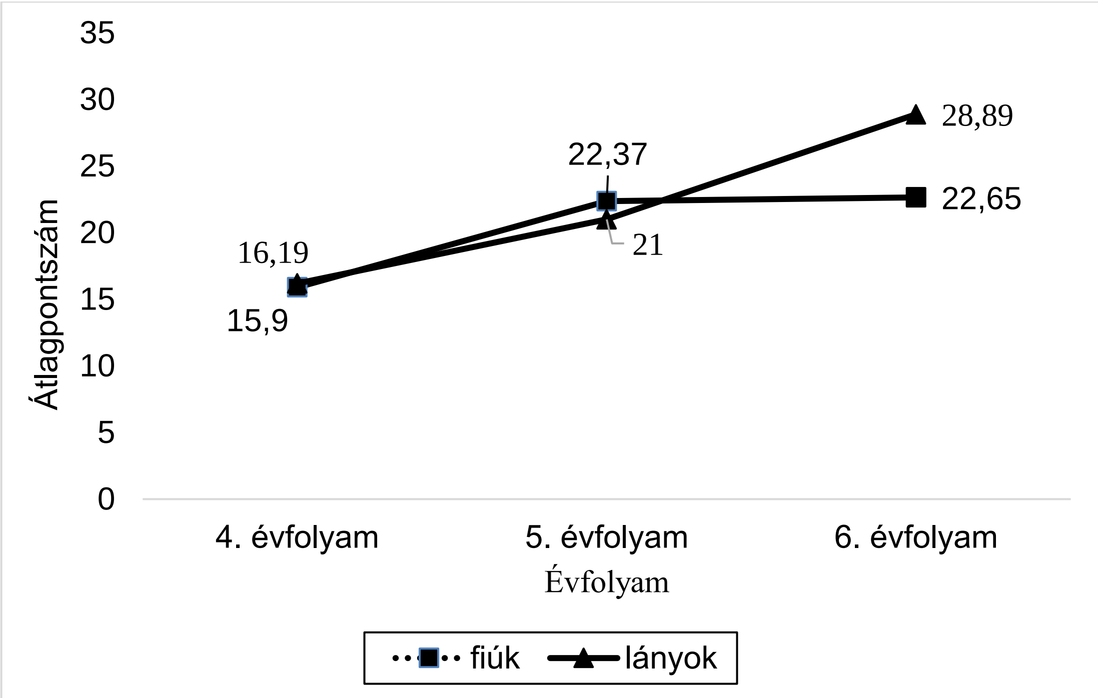


49. ábra A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmények eloszlása évfolyamonként, központi vizsgálat

Mindhárom évfolyamon pozitív a ferdeségi mutató, a sűrűségfüggvények aszimmetrikusak, elől van a csúcsuk. Az ábrán is látható, a 4. és 5. évfolyam ferdeségi mutatói kicsit nagyobbak, mint a 6. évfolyamé, így annak eloszlása hasonlít jobban a normális haranggörbéhez. A lapultság mindhárom évfolyam esetén negatív, megfigyelhetjük, hogy minél kisebb a negatív szám abszolút értéke, jelen esetben a 6. évfolyam görbéjén, annál közelebb van a sűrűségfüggvény eloszlása a normális haranggörbe eloszlásához.

A fiúk és a lányok által elért átlagpontszám eltérő volt minden évfolyamon. A 4. évfolyamon a lányok átlagpontszáma volt magasabb (16,19 pont, szórás 9,52), mint a fiúké (15,9, szórás 9,92). Az ötödik évfolyamon a fiúk értek el magasabb átlagpontszámot (22,37 pont, szórás 13,91), a lányoké 21 pont, szórás 12,52. A 6. évfolyamon pedig ismét a lányok átlagpontszáma volt magasabb, 28,99 pont a fiúk 22,65 pontjával szemben (a szórás a lányok esetén 15,52, a fiúk mintáján 16,46). A t-próbát elvégezve azonban elmondhatjuk, hogy ez a különbség egyik évfolyamon sem szignifikáns. A t-próbák esetén az egyes évfolyamokon számított F értékek a 4. évfolyamon $F = 0,07$ ($p = 0,799$); az 5. évfolyamon $F = 0,67$ ($p = 0,412$), a 6. évfolyamon 1,51 ($p = 0,221$). A 74. ábra a Matematika Tudásszintmérő Teszten elért átlagpontszámot jeleníti meg nemek szerint.

Az 50. ábrán látható, hogy a negyedik évfolyamra járó tanulók 7,1%-a, az 5. évfolyamra járók 9,1%-a, a 6. évfolyamra járók 11,1%-a teljesített 10 % alatt. A 4. évfolyamon a tanulók 69,4%-a, az 5. évfolyamon a tanulók 69,7%-a, a 6. évfolyamon a tanulók 69,3%-a az elérhető pontszámnak legfeljebb a felét érte el. A 4. évfolyamon a tanulók 7,1%-a, az 5. évfolyamon a tanulók 0,4%-a, míg a 6. évfolyamon a tanulók 1,6%-a nyújtott legalább 90%-os teljesítményt.



50. ábra A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért átlagpontszám nemek szerint, központi vizsgálat

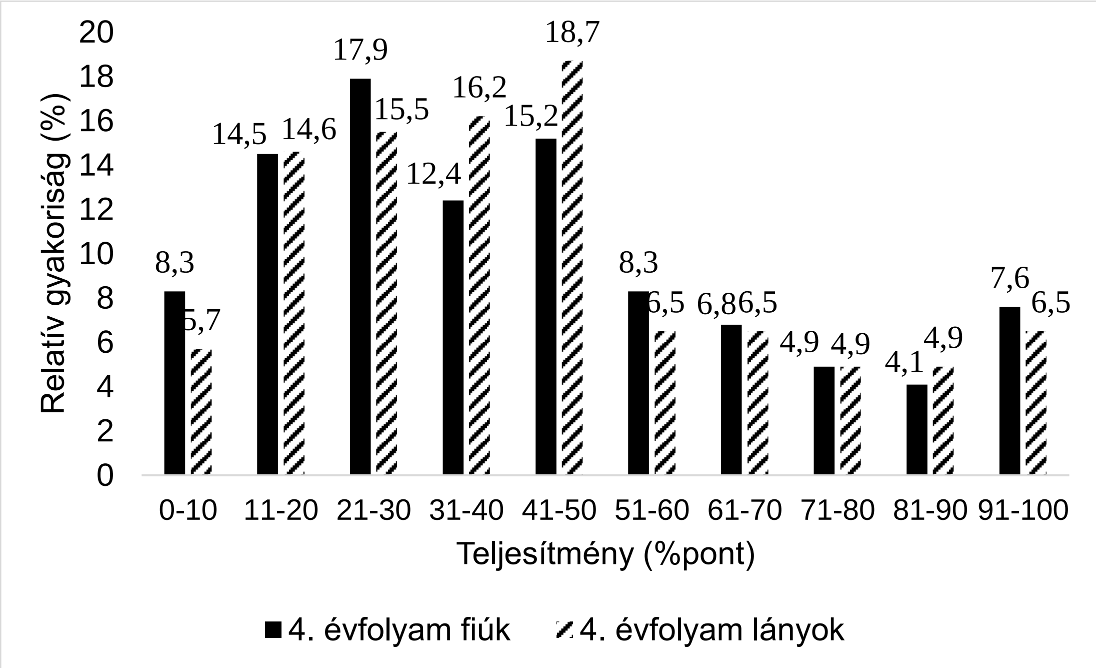
Az egyes évfolyamokon a fiúk és lányok teljesítményére vonatkozó statisztikai mutatókat találunk a 61. táblázatban.

61. táblázat. A fiúk és lányok teljesítményére vonatkozó statisztikai mutatók évfolyamonként

Nem	Évfolyam	Minta (fő)	Minimum	Maximum	Medián	Átlag	Szórás
Fiú	4.	145	0	38	15,0	15,90	9,92
	5.	131	0	51	23,0	22,37	13,91
	6.	148	0	70	26,5	22,65	16,46
Összesen		424	0	70	19,0	21,65	14,40
Lány	4.	123	0	36	15,0	16,19	9,52
	5.	123	0	52	18,0	21,00	12,52
	6.	158	0	68	29,0	28,89	15,52
Összesen		404	0	68	21,0	21,70	14,06

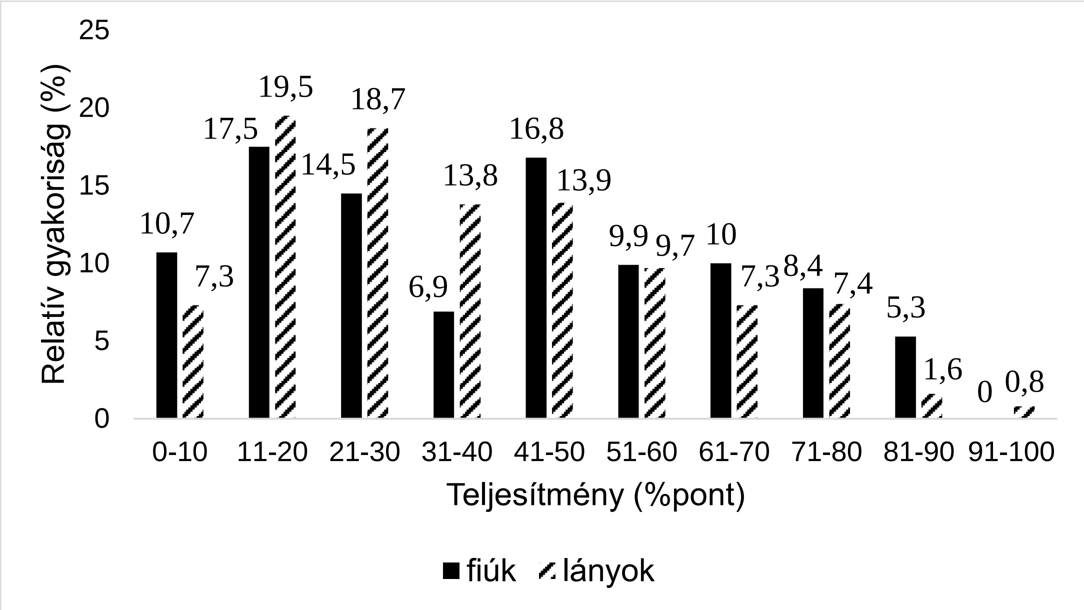
A 4. évfolyamon tesztet író 268 tanuló 54%-a volt fiú (145 fő) és 46%-a lány (123 fő). Az 5. évfolyamon tesztet író 254 tanuló 51,57%-a volt fiú (131 fő) és 48,43%-a lány (123 fő). A 6. évfolyamos minta 306 fős, ennek 48,37%-a fiú (148 fő), 51,63%-a lány (158 fő). Mint láthatjuk, a fiúk és a lányok között is volt olyan, aki 0 pontot ért el a teszten. A negyedikes fiúknál 38, a lányoknál 36 pont volt a legmagasabb pontszám, az 5. évfolyamon a legnagyobb szerzett pontszám a fiúknál 51, a lányoknál 52 pont volt, a 6. évfolyamon a fiúknál 70, a lányoknál 68 pont volt a maximum.

Az 51. ábrán látható 4. évfolyamos fiúk és lányok teljesítményének eloszlása. A negyedik évfolyamra járó fiúk 8,3%-a, lányok 5,7%-a teljesített 10 % alatt. 11% és 20% közötti teljesítményű tanulók szinte ugyanolyan arányban fordultak elő a fiúk és a lányok között. A fiú tanulók 68,3%-a, a lány tanulók 70,7%-a az elérhető pontszámnak legfeljebb a felét szerezte meg. A fiúk 7,6%-a, a lányok 6,5%-a nyújtott legalább 90%-os teljesítményt. A teljesítmények sűrűségfüggvényének eloszlásán megfigyelhetjük az aszimmetriát, a csúcs elől van mindkét esetben. A lapultsági mutató jelzi, hogy a sokaság eloszlás sűrűségfüggvénye laposabb, mint a normális haranggörbéé lenne.



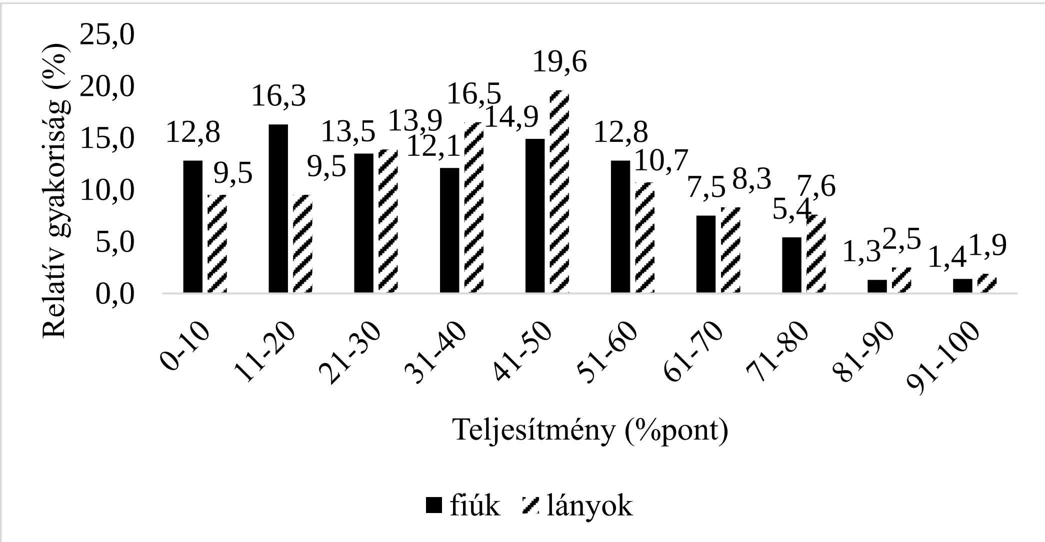
51. ábra A 4. évfolyamos fiúk és lányok teljesítményének eloszlása a Matematika Tudásszintmérő Teszten, központi vizsgálat

Az 52. ábrán tekinthető meg 5. évfolyamos fiúk és lányok teljesítményének eloszlása. Az ötödik évfolyamra járó fiúk 10,7%-a, lányok 7,3%-a teljesített 10 % alatt. Az ötödik évfolyamosok mintáján is a lányok voltak nagyobb arányban a legfeljebb 50%-os teljesítményt nyújtók, ez a fiú diákok 66,4%-a, a lányok 73,2%-a. 51% és 60% közötti teljesítményű tanulók közel egyforma arányban fordultak elő a fiúk és a lányok között. A fiúk 5,3%-a, a lányok 1,6%-a teljesített 81% és 90% között, viszont egy fiú sem ért el 90%-osnál jobb eredményt, míg a lányok 0,8%-a igen. Az 5. évfolyamos fiúk és lányok teljesítménye sűrűségfüggvényének eloszlása is aszimmetrikus, a csúcsot elől találjuk. A lapultsági mutató jelzi, hogy a fiúk eloszlás sűrűségfüggvénye laposabb, mint a lányoké, és mindkettő laposabb, mint a normális haranggörbéé lenne.



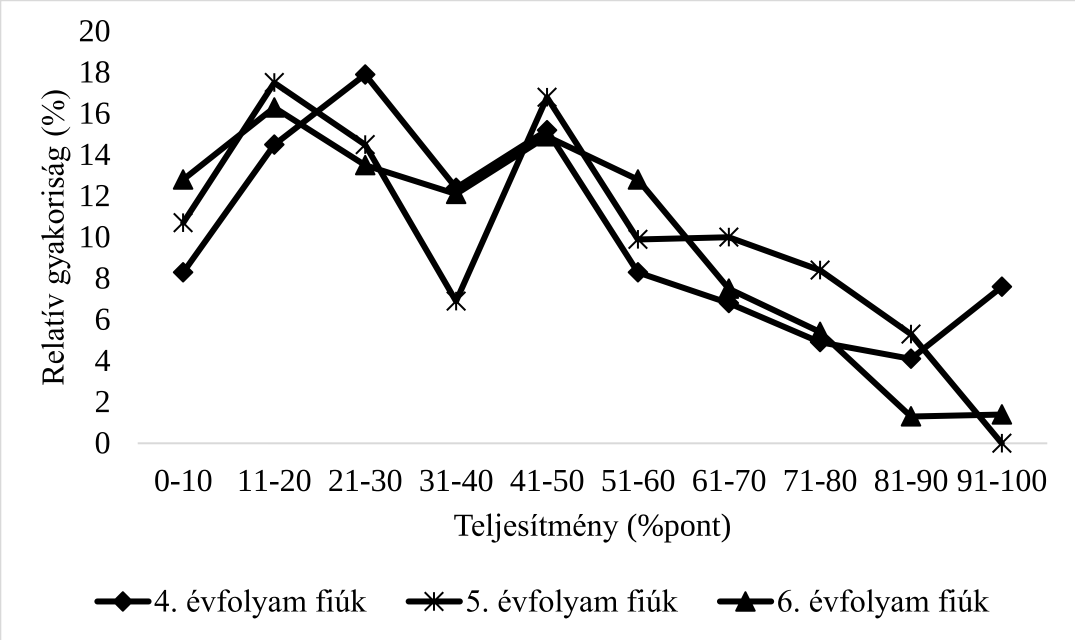
52. ábra Az 5. évfolyamos fiúk és lányok teljesítményének eloszlása a Matematika Tudásszintmérő Teszten, központi vizsgálat

Az 53. ábrán mutatjuk be a 6. évfolyamos fiúk és lányok teljesítményének eloszlását. A hatodik évfolyamra járó fiúk között nagyobb arányban vannak a 10%, 20% alatt teljesítők, mint a lányoknál. A fiúk 12,8%-a, a lányok 9,5%-a ért el legfeljebb 10%-os eredményt. 20%-nál kisebb teljesítményt látunk a fiúk 29,1%-ánál és a lányok 19%-ánál. A hatodik évfolyamosok mintáján szinte egyforma arányban vannak a legfeljebb 50%-os teljesítményt nyújtók, ez a fiúk 69,6%-a, a lányok 69%-a. A fiúk 1,3%-a, a lányok 2,5%-a teljesített 81% és 90% között, a fiúk 1,4%-a, a lányok 1,9%- ért el legalább 90%-os eredményt. A 6. évfolyamos fiúk és lányok teljesítménye sűrűségfüggvényének eloszlása is aszimmetrikus, a csúcsot elől találjuk. A fiúk eloszlás sűrűségfüggvénye ez esetben is kicsit laposabb, mint a lányoké, és mindkettő laposabb, mint a normális haranggörbeé.



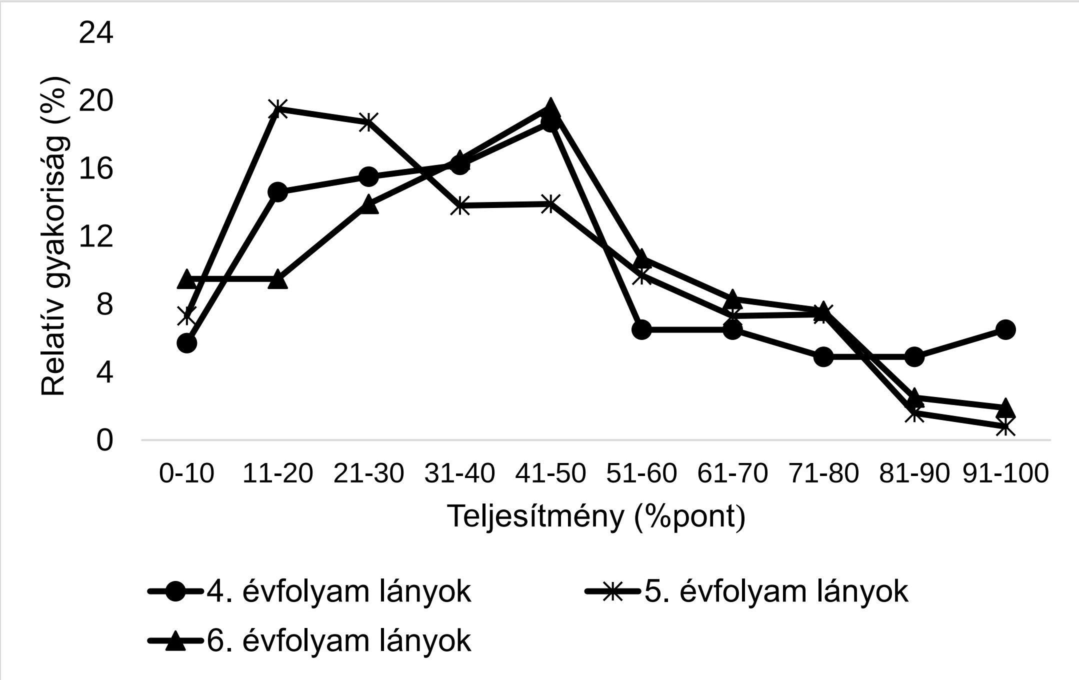
53. ábra A 6. évfolyamos fiúk és lányok teljesítményének eloszlása a Matematika Tudásszintmérő Teszten, központi vizsgálat

A 54. ábrán található vonaldiagramon a fiúk teljesítményének eloszlását hasonlíthatjuk össze évfolyamonként. Az évfolyamok közötti különbség az ábrán is látható. A negyedik évfolyamos fiúk közül kisebb arányban vannak a 10%-os teljesítményszint alatt, mint a többi évfolyamon. A legnagyobb arányban a 21-30% között, valamint 90%-os teljesítmény fölött találunk negyedikeseket. Az ötödik évfolyamosok között legnagyobb arányban a 11-20% közötti és a 41-50%-os teljesítményt nyújtók vannak.



54. ábra A fiúk Matematika Tudásszintmérő Teszten nyújtott teljesítményének összehasonlítása évfolyamonként, központi mérés

Az évfolyamok közötti különbség a lányok mintáján is megfigyelhető, ezt látjuk az 55. ábrán. A negyedik évfolyamos lányok közül is kisebb arányban vannak a 10%-os teljesítményszint alatt, mint a többi évfolyamon. A legnagyobb arányban negyedikeseket találunk a 81-90% között, valamint 90%-os teljesítmény fölött (4,1%-uk, illetve 7,6%-uk). Az ötödik évfolyamosok között legnagyobb arányban a 11-20% közötti teljesítményt nyújtók vannak, mintegy ötöd részük, 18,7%-uk a 21-30%-os teljesítményt nyújtott. A 41-50% közötti teljesítményt elérők között a legnagyobb arányban hatodikos tanulókat találunk, közel ötöd részüket látjuk itt.



55. ábra A lányok Matematika Tudásszintmérő Teszten nyújtott teljesítményének összehasonlítása évfolyamonként, központi vizsgálat

Iskolák és osztályok közötti különbségek

A H8b hipotézis szerint a vizsgált iskolák tanulóinak a Matematika Tudásszintmérő Teszten nyújtott teljesítménye szignifikánsan eltér egymástól. Ez a hipotézisünk beigazolódott.
Az egyes osztályok által elért eredmények terén megfigyelhető különbségeket mutatja a 62. táblázat.

62. táblázat. Iskolák közötti különbségek a Matematika Tudásszintmérő Teszten, 4. évfolyam

Iskola	Minta	Átlag (pont)	Átlag (%pont)	Szórás	Minimum	Maximum
1.	74	21,22	55,84	11,37	2	40
2.	29	12,00	31,58	7,48	3	29
3.	25	16,08	42,32	7,26	4	34
4.	34	11,71	30,82	7,82	0	32
5.	7	7,43	19,55	7,83	0	18
6.	41	19,12	50,32	6,89	8	34
7.	15	9,73	25,61	4,70	2	18
10.	20	12,10	31,84	6,46	2	23
11.	23	15,39	40,50	10,96	0	35
Összesen	268	16,03	42,18	9,72	0	40

Az iskolák közötti különbségeket a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis segítségével vizsgáltuk. A Levene-féle próba esetén $F = 8{,}64$, ($df1 = 8$, $df2 = 259$) $p < 0{,}001$-t kaptunk, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások szignifikánsan különböznek. A Welch-próba során kapott F értéke 8,99, ($df1 = 8$, $df2 = 66{,}01$), $p < 0{,}001$, vagyis szignifikáns különbség figyelhető meg az egyes iskolák átlagai között. A post hoc elemzések közül a Hochberg's GT2 eredményei mutatják, hogy szignifikáns különbség van az iskolák tanulóinak teszten elért eredményei között. Az iskolák csoportra oszthatók, a 2., 3., 4., 5., 7., 10. és 11. iskola teszteredménye szignifikánsan nem tér el egymástól, míg az 1. és 6. iskola eredménye ettől szignifikánsan magasabb. Egy másik felosztás szerint az egyik csoportot az 5. és 7. iskola alkotja, a másik csoportot a 2., 3., 4., 10. és 11. iskola, míg a harmadik csoportot a legjobb teljesítményű 1. és 6. iskola alkothatja.

Az egyes osztályok által elért eredmények terén is különbségeket láthatunk, ezt tekinthetjük meg a 96. táblázatban. A legkisebb teljesítményt (19,55%pont) a 26. osztályban érték el a tanulók. A 3. osztály teljesítménye egyedülálló a mintában, 91,18%pontot értek el itt a tanulók. 25,61%pontot értek el a 31. osztályban, 7 osztályban értek el 30% és 40% közötti teljesítményt. A 17., 30. és 38. osztály tanulói 30% és 40% pont közötti átlagteljesítményt mutattak, a 29. osztály pedig 53%pontot.

63. táblázat. A Matematika Tudásszintmérő Teszt megoldottsága iskolánként osztályonként, 4. évfolyam

Isko-la	Osz-tály	Minta (fő)	Mini-mum	Maxi-mum	Medián	Átlag	Szórás
1.	1.	17	6	38	12,00	14,94	8,74
	2.	18	3	38	15,50	14,79	9,48
	3.	23	31	36	35,00	34,65	1,43
	4.	16	2	27	14,00	13,88	7,36
2.	13.	13	4	29	11,00	12,92	8,93
	14.	16	3	21	11,50	11,25	6,28
3.	17.	25	4	34	17,00	16,08	7,26
4.	22.	17	1	29	10,00	11,88	7,25
	23.	17	0	32	11,00	11,53	8,58
5.	26.	7	0	18	6,00	7,43	7,83
6.	29.	22	10	30	19,00	20,14	5,38
	30.	19	8	34	19,00	17,95	8,30
7.	31.	15	2	18	10,00	9,73	4,70
10.	38.	20	2	23	12,00	12,10	6,46
11.	42.	23	0	35	11,00	15,39	10,96
Összesen	15	268	0	38	15,00	15,72	9,84

Az osztályok közötti különbségek megállapításában ismét a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis volt segítségünkre. A Levene-féle próba esetén $F = 4,52$, $p < 0,001$-t kaptunk, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szóráshomogenitás nem teljesül. A Welch-próba F értéke 96,31, $p < 0,001$, vagyis szignifikáns különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között. A post hoc elemzések közül a Hochberg's GT2 eredményei mutatják, hogy szignifikáns különbség van az osztályok tanulóinak teszten elért eredményei között. Az osztályok három csoportra oszthatók. Az 1., 2., 4., 13., 14., 17., 22., 23., 26., 31., 38. és 42. osztályok teszteredménye szignifikánsan nem tér el egymástól, a 29. és 30. osztály eredménye ettől magasabb, a 3. osztály eredménye szignifikánsan magasabb, mint az összes többi osztály eredménye.

A 64. táblázatban A Matematika Tudásszintmérő Teszt 5. évfolyamán iskolánként elért eredmények statisztikáját láthatjuk.

64. táblázat. Matematika Tudásszintmérő Teszt, iskolák közötti különbségek, 5. évfolyam

Iskola	Minta	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
1.	57	19,04	11,39	2	45
2.	16	20,06	8,10	5	34
3.	37	17,08	11,20	1	39
4.	16	20,38	15,21	0	46
5.	10	12,10	10,51	0	26
7.	16	30,69	14,31	2	51
8.	15	35,00	10,10	9	46
9.	31	37,68	9,06	17	52
10.	16	13,75	5,51	7	25
11.	40	15,60	9,05	0	38
Összesen	254	21,70	13,25	0	52

Az iskolák 5. évfolyamai közötti különbségek megállapítására ismét a homogenitásvizsgálatot és a varianciaanalízist hívtuk segítségül. A Levene-féle próba esetén $F = 3,88$, ($df1 = 9$, $df2 = 244$) $p < 0,001$-t kaptunk, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások szignifikánsan különböznek. A Welch-próba során kapott F értéke 20,31, ($df1 = 9$, $df2 = 70,18$), $p < 0,001$, vagyis az egyes iskolák átlagpontszámai szignifikánsan különböznek egymástól. A post hoc elemzések közül a Hochberg's GT2 eredményeit tekintve látjuk, hogy szignifikáns különbség van az iskolák tanulóinak teszten elért eredményei között. Az iskolák több csoportra oszthatók. Az 5., 10., 11., 3., 1., 2. és 4. egy csoportot alkothat, míg a 7., 8. és 9. iskola egy másik csoportot. A 9. iskola teljesítménye szignifikánsan magasabb, mint az összes többi iskoláé. Egy másik csoportosítás szerint egy csoportot alkot az 5., 10., 11., 3. és 1. iskola, a 2., 4. és 7. egy másik csoportot, és a 3. csoportba kerül a 8. és 9. iskola.

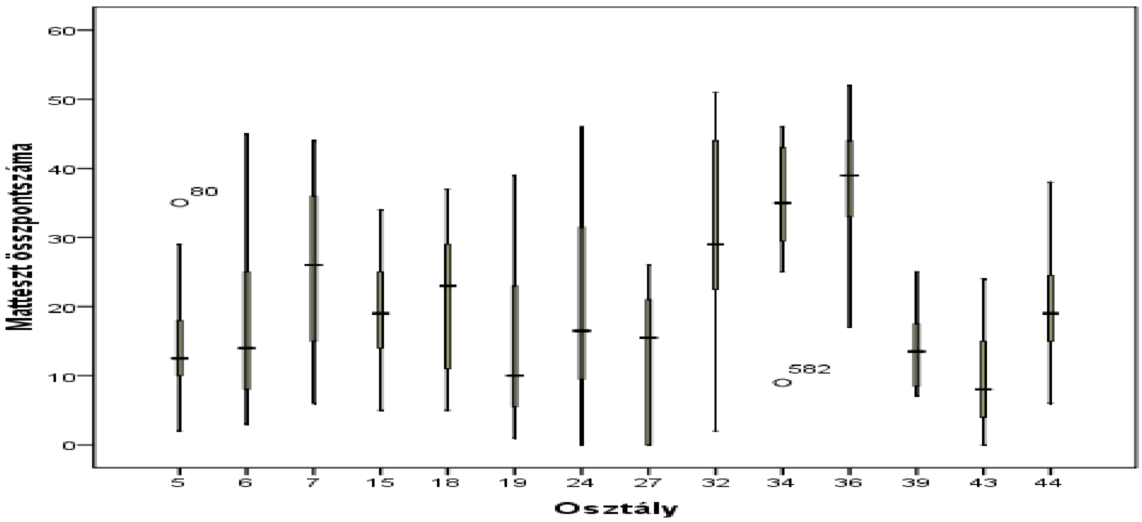
Az 5. évfolyamon is összehasonlítottuk az egyes osztályok által elért teljesítményt. A 65. táblázat a Matematika Tudásszintmérő Teszt megoldottságát mutatja be iskolánként, osztályonként. A legkisebb teljesítményt (17,33%pont) a 43. osztályban érték el a tanulók, a legnagyobbat pedig (66,11%pontot) a 36. osztályban. A 32. osztály tanulói 53,84%pontot értek el, a 34. osztály tanulói pedig 61,4%pontot. 25%pont alatt teljesítettek a 19., 27., 39. és a 43. osztály tanulói.

65. táblázat. A Matematika Tudásszintmérő Teszt megoldottsága iskolánként, osztályonként, 5. évfolyam

Iskola	Osztály	Minta (fő)	Mini-mum	Maxi-mum	Medián	Átlag	Szórás
	5	18	2	35	12,50	15,00	8,14
1.	6	18	3	45	14,00	16,44	11,18
	7	21	6	44	26,00	24,71	12,08
2.	15	16	5	34	19,00	20,06	8,10
3.	18	17	5	37	23,00	20,24	10,17
	19	20	1	39	10,00	14,40	11,57
4.	24	16	0	46	16,50	20,38	15,21
5.	27	10	0	26	15,50	12,10	10,51
7.	32	16	2	51	29,00	30,69	14,31
8.	34	15	9	46	35,00	35,00	10,10
9.	36	31	17	52	39,00	37,68	9,06
10.	39	16	7	25	13,50	13,75	5,51
11.	43	17	0	24	8,00	9,88	8,02
	44	23	6	38	19,00	19,83	7,39
Összesen	14	254	0	52	20,00	21,70	13,25

A homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízis során a Levene-féle próba esetén $F = 3,11$ ($df1 = 13$, $df2 = 240$), $p < 0,001$-t kaptunk, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások szignifikánsan különböznek. A Welch-próba F értéke 16,14 ($df1 = 13$, $df2 = 85,252$), $p < 0,001$, vagyis szignifikáns különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között. A post hoc elemzések közül a Hochberg's GT2 tesztet végeztük el. Az osztályok több csoportra is oszthatók. Egyik csoport állhat a 43., 27., 39., 19., 5., 6. 44., 15., 18. és 24. osztályból, ezek átlagai között nincsen szignifikáns eltérés. Egy másik csoport állhat a 7., 32. és 34. osztályból, a 3. a 36. osztályból. Egy másik csoportosítás szerint az egyik csoport lehet a 43. és 27. osztály, a másik csoport a 32., 34. és 36. osztály (e három osztály teszteredménye nem tér el egymástól szignifikánsan), és az összes többi alkothatja a 3. csoportot.

Az 56. ábrán láthatjuk, hogyan helyezkednek el egymáshoz képest az egyes osztályok a box-plot diagramon.



56. ábra Az 5. évfolyam Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítménye osztályonként a box-plot diagramon, központi vizsgálat

A 66. táblázatban foglaltuk össze az 5. évfolyamos osztályokban mért Matematika Tudásszintmérő Teszt megoldottságára vonatkozó adatokat.

66. táblázat. A Matematika Tudásszintmérő Teszt megoldottsága iskolánként, 5. évfolyam

Iskola	Minta	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
1.	83	28,69	12,14	2	58
2.	17	14,53	8,36	2	32
3.	35	26,03	13,71	1	61
4.	16	16,75	15,75	0	50
5.	12	17,25	14,84	3	47
7.	25	41,28	13,18	0	62
8.	10	14,20	8,28	2	25
9.	32	48,44	12,18	30	70
10.	29	14,79	12,23	0	51
11.	47	28,55	12,59	4	57
Összesen	306	27,81	15,99	0	70

A homogenitásvizsgálat és varianciaanalízis során a következőkre jutottunk: A Levene-féle próba esetén $F = 0,90$ ($df1 = 9$, $df2 = 296$), $p = 0,530$-t kaptuk, amire $p > 0,05$ teljesül, vagyis a részminták által reprezentált populációkban a szórások között nincsen szignifikáns különbség. Az ANOVA Fischer-féle F értéke 22,175 ($df1 = 9$), p 0,001, vagyis különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között. Mivel a részminták által reprezentált populációkban a szórások nem különböznek szignifikánsan egymástól, így a post-hoc elemzések közül a Tukey'b –teszt eredményei mutatják, hogy szignifikáns különbség van az egyes osztályok teszten elért eredményei között. Az iskolákat három csoportra oszthatjuk, a 2., 4., 5., 8. és 10. iskola egy csoportba kerülhet, az 1., 3. és 11 alkot egy másik csoportot, a harmadik csoportot a 7. és 9. iskolából áll, átlagaik között nincsen szignifikáns különbség.

A 67. táblázat a 6. évfolyamon mutatja a teszt eredményeit osztályonkénti bontásban. Az osztályokra elvégezve a homogenitásvizsgálat és a varianciaanalízist, a Levene-féle próba esetén F = 1,35, (df1 = 16, df2 = 289), p = 0,17-t kaptuk, amire p > 0,05 teljesül, vagyis a a részminták által reprezentált populációkban szórások megegyeznek. Az ANOVA Fischer-féle F értéke 16,42 (df1 = 16), p < 0,001, vagyis különbség figyelhető meg az egyes osztályok átlagai között.

67. táblázat. A Matematika Tudásszintmérő Teszt megoldottsága iskolánként osztályonként, 6. évfolyam

Iskola	Osztály	Minta (fő)	Mini-mum	Maxi-mum	Medi-án	Átlag	Szórás
1.	8	18	2	51	28	26,94	12,82
1.	9	18	13	53	36,5	35,44	12,73
1.	10	22	7	39	23	22,73	9,01
1.	11	14	12	35	23,5	24,21	6,91
1.	12	11	19	58	40	38,09	11,37
2.	16	17	2	32	14	14,53	8,36
3.	20	18	6	61	31,5	32,78	13,02
3.	21	17	1	37	18	18,88	10,66
4.	25	16	0	50	10,5	16,75	15,75
5.	28	12	3	47	11	17,25	14,84
7.	33	25	0	62	42	41,28	13,18
8.	35	10	2	25	15,5	14,20	8,28
9.	37	32	30	70	48	48,44	12,18
10.	40	15	0	51	19	20,53	13,47
10.	41	14	1	22	5	8,64	6,92
11.	45	27	4	53	28	27,26	11,77
11.	46	20	5	57	31	30,30	13,74
Össz.	17	306	0	70	27	27,81	15,99

Mivel a részminták által reprezentált populációkban a szóráshomogenitást tapasztalunk, így a post-hoc elemzések közül ismét a Tukey'b –teszt eredményei mutatják, hogy szignifikáns különbség van az egyes osztályok teszten elért eredményei között. Az osztályokat három csoportra oszthatjuk, a 41., 35., 16., 25., 28., 21. és 40. osztály tartozik egy csoportba. Egy másik csoportot alkot együtt a 10., 11., 8., 45., 46., 20. és 9. osztály, míg a harmadik csoportot a legjobb teljesítményű 12., 33. és 37. osztály alkotja.

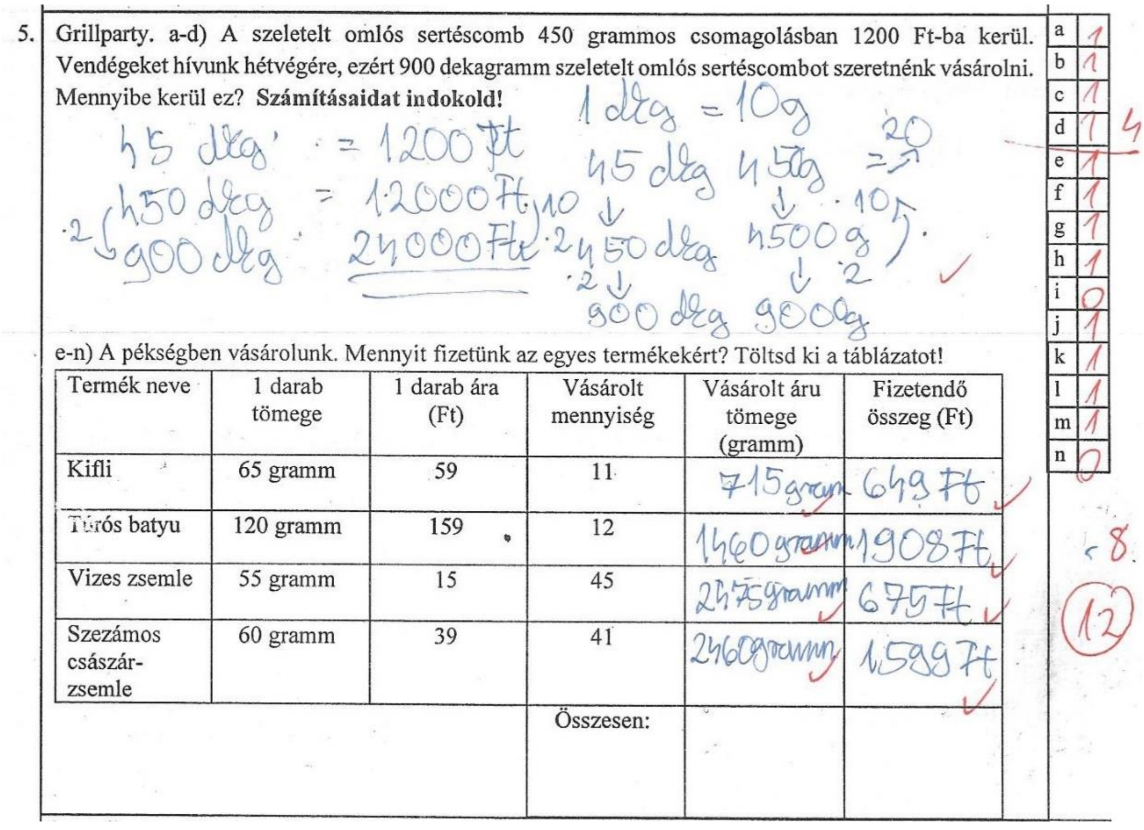
Összegzésképpen elmondhatjuk, hogy mindhárom vizsgált évfolyamon szignifikáns különbségeket tapasztaltunk az egyes iskolák, valamint osztályok Matematika Tudásszintmérő Teszt eredményei között.

Matematika Tudásszintmérő Teszt

A Matematika Tudásszintmérő Tesztet 828-an oldották meg, 52,66 %-uk az A változatot írta (A = 437), 47,34%-uk pedig a B tesztváltozatot (N = 391). A reliabilitás értéke a teljes teszt és a tesztváltozatok esetén is magasabb 0,90-nál (Cronbach-α = 0,946; 0,947; 0,95), tehát a teszt megbízhatóan mér (*Nagy*, 1975).

A Matematika Tudásszintmérő Teszt a teljes mintán, évfolyamonként, valamint a mintát nemek szerint bontva is igen megbízhatóan mér. Osztályok szintjén vizsgálva is számos igen jó, 1-hez közeli értéket számoltunk. A reliabilitás viszont függ a vizsgált csoport képességeloszlásától is (*Csapó*, 2004b). Egy kecskeméti negyedikes osztály esetében a teszt reliabilitása nagyon alacsony volt. Az osztály valószínűleg túl homogén összetételű, jó képességű, az országos átlaghoz képest magasabb tudásszintű csoport, így számukra ugyanaz a teszt, ami több osztályban jól mér, túl könnyűnek bizonyult.

A teszt szerkezetének és működésének megismeréséhez végzett lépésenkénti regresszióanalízis eredményeit elemezve arra jutottunk, hogy a 4. évfolyamon négy, az ötödik évfolyamon 5, a hatodik évfolyamon 6 feladatnak van a legnagyobb hatása a teszt összpontszámára. Mindhárom évfolyamon a 14 itemes Grillparty feladat (57. ábra) bír a legnagyobb magyarázó erővel a teszten elért eredmények varianciájára, ez az egyes évfolyamokon rendre 77%, 71,3%, illetve 53,2%.



5. Grillparty. a-d) A szeletelt omlós sertéscomb 450 grammos csomagolásban 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, ezért 900 dekagramm szeletelt omlós sertéscombot szeretnénk vásárolni. Mennyibe kerül ez? **Számításaidat indokold!**

1 dkg = 10g

45 dkg = 1200 Ft

450 dkg = 12000 Ft ·10

·2 900 dkg 24000 Ft ·2

45 dkg 450g

450 dkg 4500 g ·10

900 dkg 9000g ·2

e-n) A pékségben vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	Vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Kifli	65 gramm	59	11	715gram	649 Ft
Túrós batyu	120 gramm	159	12	1440gramm	1908 Ft
Vizes zsemle	55 gramm	15	45	2475gramm	675 Ft
Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41	2460gramm	1,599 Ft
			Összesen:		

a	1
b	1
c	1
d	1
e	1
f	1
g	1
h	1
i	0
j	1
k	1
l	1
m	1
n	0

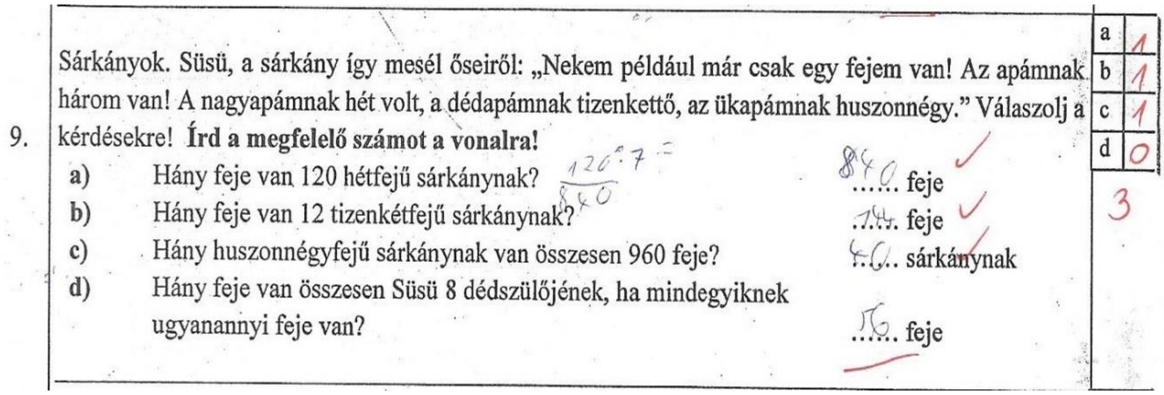
4

8

12

57. ábra Grillparty. 5. évfolyamos fiú megoldása (Budapest)

A 4. és az 5. évfolyamon a Sárkányok feladat (58. ábra) 11,8%, illetve 5,3%-ot magyaráz meg a varianciából.



9. Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy.” Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány feje van 120 hétfejű sárkánynak? 120 · 7 = 840 ... 840 feje

b) Hány feje van 12 tizenkétfejű sárkánynak? ... 144 feje

c) Hány huszonnégyfejű sárkánynak van összesen 960 feje? ... 40 sárkánynak

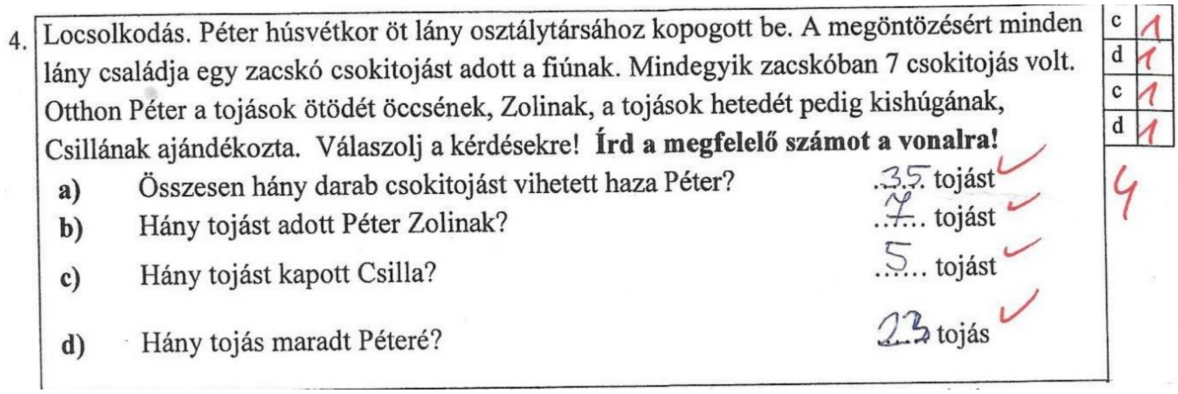
d) Hány feje van összesen Süsü 8 dédszülőjének, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? ... 56 feje

a	1
b	1
c	1
d	0

3

58. ábra Sárkányok. 5. évfolyamos fiú megoldása (Budapest)

A 4. évfolyamon a Locsolkodás feladat (59. ábra) 4%-ot, a Torta feladat (60. ábra) 2,8%-ot magyaráz meg a varianciából.



4. Locsolkodás. Péter húsvétkor öt lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja egy zacskó csokitojást adott a fiúnak. Mindegyik zacskóban 7 csokitojás volt. Otthon Péter a tojások ötödét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Összesen hány darab csokitojást vihetett haza Péter? .35. tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? ..7.. tojást

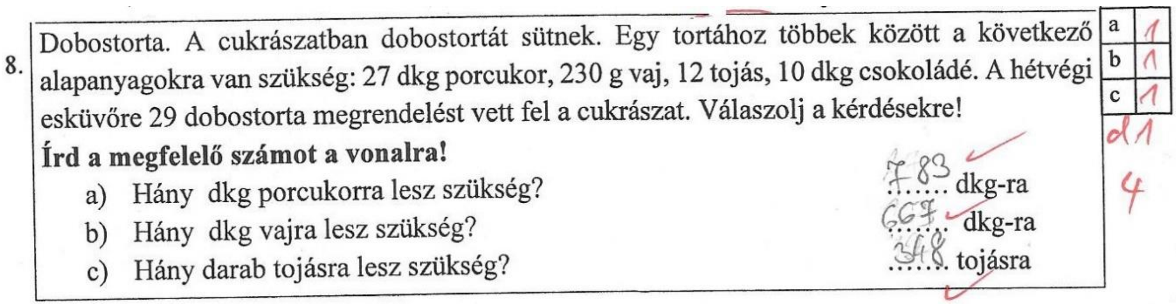
c) Hány tojást kapott Csilla? ..5.. tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? 23 tojás

c	1
d	1
c	1
d	1

4

59. ábra Locsolkodás. 4. évfolyamos fiú megoldása (Hajdú-Bihar megye)



8. Dobostorta. A cukrászatban dobostortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 27 dkg porcukor, 230 g vaj, 12 tojás, 10 dkg csokoládé. A hétvégi esküvőre 29 dobostorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre!

Írd a megfelelő számot a vonalra!

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség? 783 dkg-ra

b) Hány dkg vajra lesz szükség? 667 dkg-ra

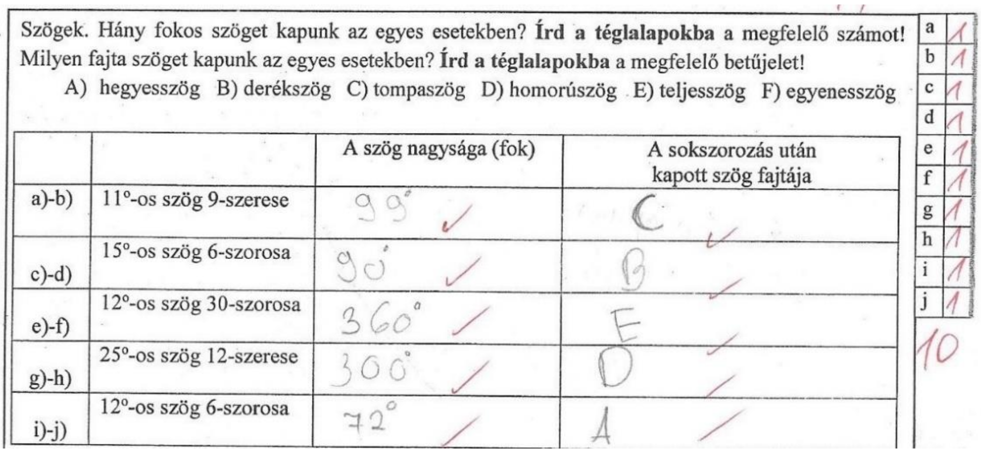
c) Hány darab tojásra lesz szükség? 348 tojásra

a	1
b	1
c	1
d	1

4

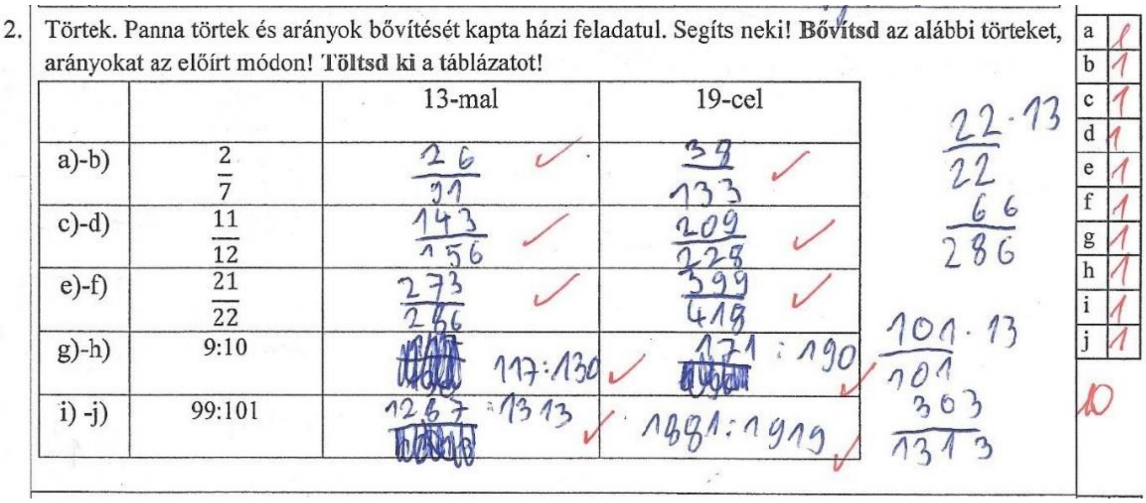
60. ábra Torta. 5. évfolyamos fiú megoldása (Budapest)

Az 5. és 6. évfolyamon a Szögek (61. *ábra*) 14,2%, illetve 21,5%-ot magyaráznak meg a varianciából.



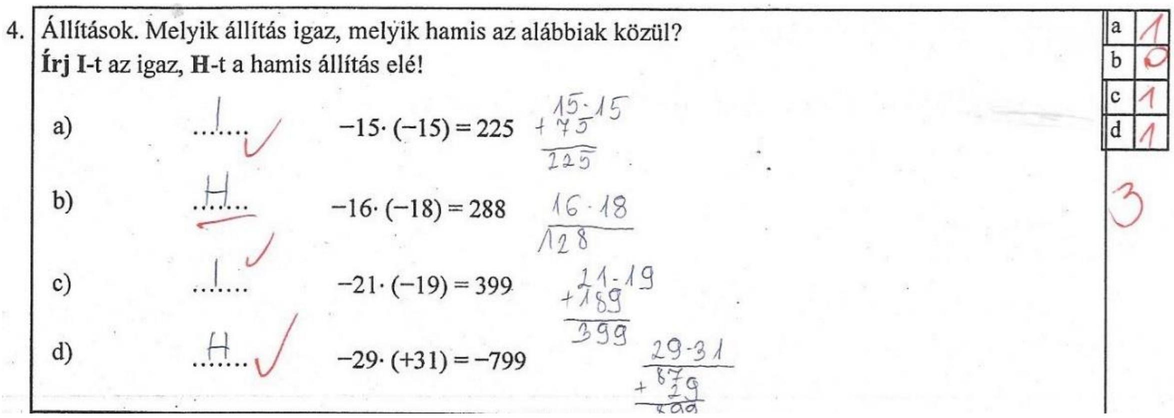
61. ábra Szögek. 5. évfolyamos fiú megoldása (Veszprém megye)

A Törtek feladat (62. ábra) hozzájárulása a magyarázathoz 3,5%, illetve 6%.



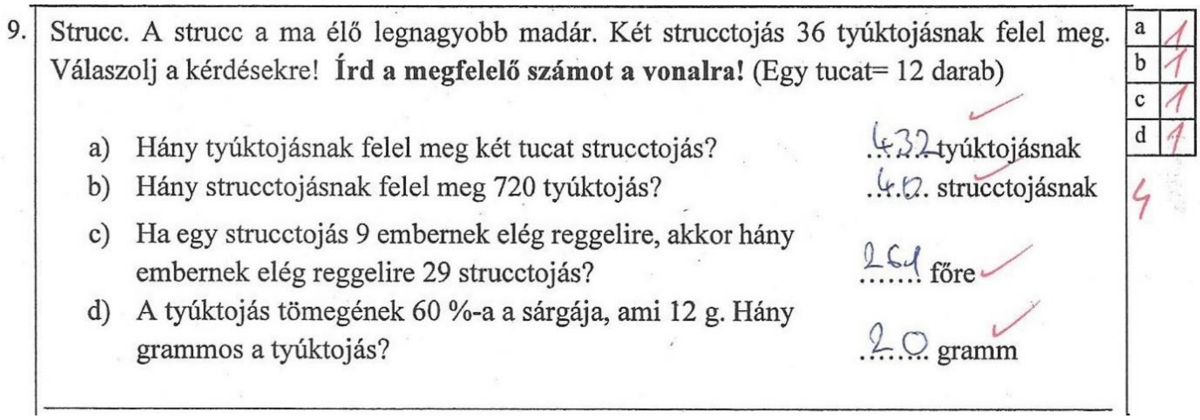
62. ábra Törtek. 6. évfolyamos fiú megoldása (Budapest)

Az 5. évfolyamon az Állítások feladat (63. ábra) 2,3%-os magyarázó erejével lesz együtt az 5 feladat által a megmagyarázott variancia több, mint 95%.



63. ábra Állítások. 5. évfolyamos fiú megoldása (Borsod-Abaúj-Zemplén megye)

A hatodik évfolyamon a Struccfeladat (64. ábra) 11%-kal, a Tömeg feladat (65. ábra) pedig 1,9%-kal növeli a megmagyarázott varianciát.



9. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Két strucctojás 36 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat= 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg két tucat strucctojás? 432 tyúktojásnak

b) Hány strucctojásnak felel meg 720 tyúktojás? 40 strucctojásnak

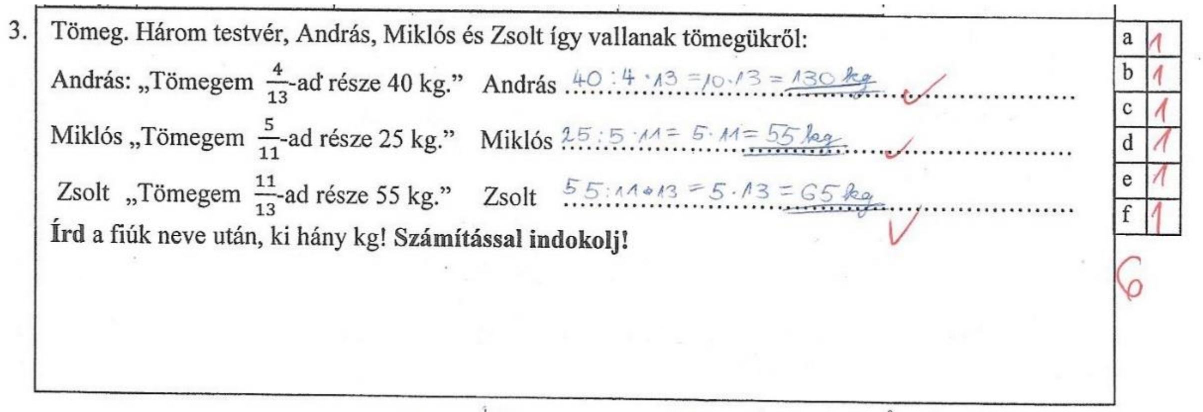
c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 29 strucctojás? 261 főre

d) A tyúktojás tömegének 60 %-a a sárgája, ami 12 g. Hány grammos a tyúktojás? 20 gramm

a	1
b	1
c	1
d	1

4

642. ábra Strucc. 6. évfolyamos lány megoldása (Bács-Kiskun megye)



3. Tömeg. Három testvér, András, Miklós és Zsolt így vallanak tömegükről:

András: „Tömegem $\frac{4}{13}$-ad része 40 kg." András $40 : 4 \cdot 13 = 10 \cdot 13 = 130$ kg

Miklós „Tömegem $\frac{5}{11}$-ad része 25 kg." Miklós $25 : 5 \cdot 11 = 5 \cdot 11 = 55$ kg

Zsolt „Tömegem $\frac{11}{13}$-ad része 55 kg." Zsolt $55 : 11 \cdot 13 = 5 \cdot 13 = 65$ kg

Írd a fiúk neve után, ki hány kg! Számítással indokolj!

a	1
b	1
c	1
d	1
e	1
f	1

6

65. ábra Tömeg. 6. évfolyamos lány megoldása (Budapest)

A többi feladat csekély magyarázó erővel rendelkezik a teszteredmény értelmezésekor. A 828 fős mintán elért pontszám relatív gyakoriságát vizsgálva megállapíthatjuk, hogy az eloszlás egymóduszú, azaz a mért tudást tekintve a minta homogénnek tekinthető. A ferdeségi mutató 0,65, így aszimmetrikus, balra tolódó eloszlást látunk, és mivel a lapultság -0,12, az eloszlásfüggvény laposabb, mint a normális haranggörbéé.

A stratégiahasználat eredményességének összefüggései a háttérváltozókkal

A szorzási stratégiák kutatása során fontosnak tartottuk a tanulók által használt stratégiák háttérváltozókkal való kapcsolatának, illetve a háttérkérdőív reliabilitásának vizsgálatát. A megkérdezett tanulók közül 777 fő mindhárom mérőeszközt kitöltötte A Háttérkérdőív reliabilitása mindhárom évfolyamon elfogadható (Cronbach-α_{min} = 0,72). A fejben szorzási stratégiák és az egyéb háttértényezők között több pozitív korrelációt találtunk. A Szorzási Stratégiák Teszt és Matematika Tudásszintmérő Teszt eredménye közepes erősségű kapcsolatot mutat egymással ($r_{4.évf}$ = 0,45; $r_{5.évf}$ = 0,67; $r_{6.évf}$ = 0,69; $p < 0,001$), ez a hipotézis beigazolódott, tehát a szorzási stratégiák sikeressége összefügg a matematika teszten elért eredménnyel.

A 4. évfolyamosok mintáján a Szorzási Stratégiák Teszten elért összpontszám gyenge, pozitív kapcsolatot mutat az anya iskolai végzettségével, a gyermek továbbtanulási terveivel, iskolai teljesítményével való elégedettséggel (a korreláció értékei rendre: $r_{anya} = 0,16$; $r_{terv} = 0,15$; $r_{isk} = 0,19$, $p < 0,01$); a félévi matematika osztályzattal, a tanuló vélekedésével a matematika teszten elért pontszámról, az elégedettséget szerző pontszámmal, a matematikai teljesítménnyel való elégedettségével, a szorzás szeretetével és a matematika versenyeken való részvétel gyakoriságával ($r_{félmat} = 0,36$; $r_{véltpont} = 0,35$; $r_{elégpont} = 0,23$, $r_{matelegédett} = 0,29$; $r_{szorzás} = 0,22$; $r_{verseny} = 0,32$, $p < 0,001$). Gyenge, negatív kapcsolatot találunk a teszt összpontszáma és a tanulás közben mennyire segít a zenehallgatás, a páros munkában, csoportmunkában dolgozás; illetve a szabadidőben tv-nézésre fordított idő között ($r_{zene} = -0,20$; $r_{páros} = -0,17$; $r_{csoport} = -0,18$, $r_{tv} = 0,15$; $p < 0,01$).

A vizsgálat során vizsgáltuk a tanulók által használt stratégiák és a háttérváltozók kapcsolatát. A stratégiahasználatot figyelve gyenge, pozitív a kapcsolat az additív disztribúció és a szülők iskolai végzettsége között ($r_{anya} = 0,17$; $r_{apa} = 0,14$; $p < 0,001$); az általános faktorizáció és a szülők iskolai végzettsége között ($r_{anya} = 0,14$; $r_{apa} = 0,18$; $p < 0,001$); „ezt fejből tudom” stratégia és az apa iskolai végzettsége között ($r_{apa} = 0,20$; $p < 0,001$). A jobb félévi matematika osztályzatú tanulók gyakrabban alkalmazzák a helyes eredményre vezető stratégiákat. Az additív disztribúció, az egyik tényező tagolása, általános faktorizáció, ismert szabály stratégiák és a matematika osztályzat közötti korrelációk gyengék ($r_{additív} = 0,27$; $r_{egyik} = 0,16$; $r_{ált.fakt} = 0,19$, $r_{ismert} = 0,15$; $p < 0,01$).

Összességében elmondható, hogy a fiúk és a lányok között egyaránt, és minden évfolyamon, iskolában, osztályban megfigyeltük helytelen eredményre vezető stratégiák használatát. A stratégiahasználat eredményességének különbségei eredhetnek az egyes iskolák tanulói összetételéből (vö. országos kompetenciamérések eredményei, SNI, BTMN, HH-s tanulók aránya), az attitűdbeli különbségekből, tanulmányi eredményekből, továbbtanulási terveiből, tanulási szokásaiból vagy a tanárok eltérő tanítási módszereiből, ez utóbbi egy további vizsgálat tárgya lehet.

A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért összpontszám még több gyenge, pozitív kapcsolatot mutat más változókkal: a szülők iskolai végzettségével, iskolai teljesítményével való elégedettséggel, a gyermek továbbtanulási terveivel (a korreláció értékei rendre: $r_{anya} = 0,30$; $r_{apa} = 0,23$; $r_{isk} = 0,14$; $r_{terv} = 0,19$; $p < 0,02$). Gyenge (0,02 és 0,4 közötti) korrelációt tapasztalunk a félévi osztályzatokkal kapcsolatosan, ezek közül magasabbak a matematika, nyelvtan, természetismeret és idegen nyelv korrelációja a tesztpontszámmal ($r_{mat} = 0,37$; $r_{nyelvtan} = 0,37$; $r_{tis} = 0,34$; $r_{idnyelv} = 0,40$; $r_{terv} = 0,19$; $p < 0,001$). Gyenge a kapcsolat a tanuló vélekedésével a matematika teszten elért pontszámról, az elégedettséget szerző pontszámmal, a matematikai teljesítménnyel való elégedettségével ($r_{véltpont} = 0,38$; $r_{elégpont} = 0,23$; $r_{matelegédett} = 0,22$; $p < 0,001$). Gyenge a tesztpontszám korrelációja az idegen nyelv iránti attitűddel, a szorzás, osztás, törtek iránti attitűddel ($r_{idatt} = 0,15$; $r_{szozás} = 0,22$; $r_{osztás} = 0,18$, $r_{tör\ t} = 0,14$; $p < 0,001$); a továbbtanulási tervekkel, „azért tanulom a matematikát, mert kötelező”, „mert jó érettségit szeretnék tenni”, a matematika versenyeken való részvétel gyakoriságával ($r_{terv} = 0,19$; $r_{kötelező} = 0,14$; $r_{érettségi} = 0,14$; $r_{verseny} = 0,29$, $p < 0,001$); az olvasási és színházba járási szokásokkal ($r_{olvas} = 0,13$, $r_{színház} = 0,22$; $p < 0,03$). Gyenge, negatív kapcsolatot találunk a teszt összpontszáma és a matematikatanulás közben mennyire segít a rajz, az ujjakon számolás, a magántanár ($r_{rajz} = -0,27$; $r_{ujj} = -0,20$; $r_{magán} = -0,15$, $r_{tv} = 0,15$; $p < 0,01$); a szabadidőben matematikatanulásra, illetve tv-nézésre fordított idő között ($r_{idő} = -0,17$, $r_{tv} = 0,14$; $p < 0,02$).

Összegzés

Hipotéziseink közül a következők igazolódtak be: a 4-6. évfolyamos tanulók legalább ötféle, helyes eredményre vezető stratégiát használnak a fejszámolás során; az eredményesség tekintetében, a fiúk és lányok közötti különbség inszignifikáns; az általunk kifejlesztett mérőeszközök alkalmasak voltak a vizsgálatok elvégzéséhez; a teszteken elért eredmények közepes korrelációt mutatnak. Az egyes iskolák, évfolyamok teljesítménye között különbségeket találtunk; és az egyes évfolyamokon alkalmazott stratégiák száma nem mindig csökkent, így ez a két hipotézisünk megdőlt.

Összegzésképpen elmondhatjuk, hogy mindhárom vizsgált évfolyamon szignifikáns különbségeket tapasztaltunk az egyes iskolák, valamint osztályok Szorzási Stratégiák Teszten és Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredményei között. Tapasztalataink szerint a 4-6. évfolyamos tanulók esetén a használt stratégiák száma még változott, így az „egymást átfedő hullámok" fejlődési modell (Siegler, & Lin, 2010) alapján fejlődésük nem zárult le a 4. évfolyam végére. A kutatás során feltárt stratégia-használatbeli különbségek felhívják a figyelmet arra, hogy a szorzási stratégiák tanítása nem szabad, hogy véget érjen az alsó tagozaton, azt a felső tagozaton is folytatni kell. Ily módon a számolási stratégiák és az olvasási stratégiák tanítása párhuzamba állítható (vö. Józsa & Józsa, 2014).

A következő fejezetben a hat vizsgálat eredményeit összegezzük és megfogalmazzuk a kutatás tapasztalatait.

6. DISZKUSSZIÓ ÉS KÖVETKEZTETÉSEK

Kutatásunkban 10-18 éves tanulók szorzási stratégiáinak vizsgálatát tűztük ki célul. Empirikus vizsgálatunk során saját készítésű mérőeszközöket és más, hazai kutatásokban használt háttérkérdőíveket alkalmaztunk. Saját mérőeszközeinktől azt vártuk, hogy alkalmasak lesznek szorzási stratégiák detektálására, a tanulók matematikai tudásszintjének mérésére, az eredményes stratégiahasználat háttérváltozóinak megismerésére.

Feltételeztük, hogy a vizsgálatban részt vevő tanulók képesek arra, hogy beszámoljanak az általuk alkalmazott szorzási stratégiákról. Feltételeztük, hogy egyes feladatok megoldása során néhány stratégia alkalmazásának gyakorisága hasonló (Nikolov, 2003). A szakirodalom alapján azt vártuk, hogy a matematika tudásszint számos háttértényezővel összefügg. Feltételeztük, hogy a tanulók a különböző szorzási feladatok során más-más stratégiát használnak, attól függően, melyik adaptív.

Empirikus vizsgálatainkra 2013 tavasza és 2019 tavasza között került sor. Az egyes vizsgálatok során szöveges feladatokat és szorzási stratégiát vizsgáló tesztet vettünk fel a 4-12. évfolyamos tanulókkal. A vizsgálatokhoz felállított hipotéziseket az elméleti részben ismertettük. Ebben a fejezetben összefoglaljuk és értelmezzük eredményeinket, bemutatjuk az eredmények felhasználásának lehetőségeit, és további kutatási célokat jelölünk ki.

6.1. Az eredmények összegzése

Kutatásunk eredményeit a hipotézisek mentén foglaljuk össze.

6.1.1. Mérőeszköz

H1a: A Szorzási Stratégiák Teszt megbízhatóan méri az egyes évfolyamokon tanuló diákok stratégiahasználatát a fejben végzett szorzási feladatok megoldása során.
Az első, szemmozgásos vizsgálat során a szorzási stratégiák mérésére 8 feladatból álló szöveges feladatot adtunk a negyedikes tanulóknak. Az interjúk során hangosan gondolkodtatás, illetve a szemmozgás követés segítségével információkat kaphattunk a metakognitív stratégiáikról. A második vizsgálatban 120 fő 8-12. évfolyamos diák töltött ki 10 itemes szorzási stratégiák tesztet. A mérőeszköz reliábilis volt, ugyanakkor kevés információt adott az alkalmazott stratégiákról. Ezért tesztfejlesztésbe kezdtük, és külföldi vizsgálatok során is alkalmazott itemekkel bővítettük a tesztet, hogy azután összehasonlíthassuk eredményeinket. A tesztfejlesztés több lépésben történt és sikeres volt. Az általunk készített Szorzási Stratégiák teszt megfelelő reliabilitással rendelkezik, jól méri a 10-12 éves tanulók szorzási stratégiáinak használatát. Emellett egy Matematika Tudásszintmérő Tesztet is kifejlesztettünk, amely segítségével feltérképezhetjük a stratégiahasználat és a matematikai tudás közötti kapcsolatot. H1b hipotézisünk beigazolódott.

6.1.2. A vizsgált tanulók stratégiahasználatának jellemzői fejben szorzás során

Több hipotézisünk vonatkozott a vizsgált tanulók stratégiahasználatára.

A vizsgált tanulók legalább hatféle, helyes eredményre vezető stratégia használatáról számoltak be, H2a hipotézisünk beigazolódott.

H4: A szorzási feladatok megoldása során a tanulók leggyakrabbam a számlálás, tényeken alapuló, helyiértéken alapuló és a holisztikus stratégiát alkalmazzák (vö: Hope Sherril, 1987), ez a hipotézisünk beigazolódott.

A Hope és Sherrill (1987) és a Heirdsfield és munkatársai vizsgálatában alkalmazott modellt kibővítettük, és a nagymintás vizsgálat során 35 stratégiát írtunk le. Ezek közül a magyar tanulók mintegy 21, helyes eredményre vezető stratégiát használnak az írásban számolás, illetve a számológéppel számolás nem tartozik ide.

A megfigyelt stratégiák:

„Fejben történő írásbeli szorzás"
Minden részletszorzatot számjegyenként szoroz össze *(P&P0,* Hope & Sherrill, 1987*)*
Additív disztribúció (*additive distribution,* Hope & Sherrill, 1987)
Kétjegyű számmal való szorzás során az egyesekkel kezd (*right to left separated strategy*, Heirdsfield & mtársai)
Kétjegyű számmal való szorzás során a tízesekkel kezd (*left to right separated strategy*, Heirdsfield és mtársai)
Összeadandókra tagolja az egyik tényezőt
Mindkét tényezőt összeadandókra tagolja
Frakcionális disztribúció (*fractional distribution,* Hope & Sherrill, 1987)
Számlálás (Counting strategy, Heirdsfield & mtársai)
Szubsztraktív disztribúció (*subtractive distribution,* Hope & Sherrill, 1987*; wholistic strategy,* Heirdsfield & mtársai)
Kvadratikus disztribúció (*quadratic distribution,* Hope & Sherrill, 1987)
Általános faktorizálás, egyik vagy mindkét tényező szorzattá bontása (*general factoring,* Hope & Sherrill, 1987)
Felezés-duplázás: az egyik tényezőt felezi, a másikat duplázza (*half-and-double,* Hope & Sherrill, 1987)
Felezés-duplázás, szubsztrakcióval
Maradék nélkül osztható részekre bontás (*aliquot parts,* Hope & Sherrill, 1987)
Maradék nélkül osztható részekre bontás, az egyik tényező átalakítása
„Ismert szabály" alkalmazása
„Algebrai azonosság" alkalmazása, összeg négyzete
„Algebrai átalakítás"
Emlékezeti előhívás (*retrieval of a numerical equivalent, Hope* & *Sherrill,* 1987*, Basic fact strategy,* Heirdsfield & mtársai))
Exponenciális faktorizálás (*exponetial factoring,* Hope & Sherrill, 1987)

H2b: A fejszámolással megoldható szorzási feladatokban 10-18 évesek különböző stratégiát alkalmaznak. A gyerekek fejlettségi szintje a stratégiahasználat rugalmassága terén eltérő, az egyes gyermekek – matematikában tehetséges gyermek, többségi, SNI-s tanulók – stratégiahasználata között szignifikáns a különbség. Ez a hipotézisünk beigazolódott. A matematikából jobb eredményt elérő tanulók körében gyakrabban figyeltük meg holisztikus stratégiák, illetve disztribúciós stratégiák alkalmazását. A gyengébb eredményt elérő tanulók gyakrabban alkalmaztak valamilyen hibás eredményre vezető stratégiát, úgy mint:

„Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz az összeadás mintájára
„Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz, majd hozzáadja még egyszer az egyik tényezőt
Kétjegyű számmal való szorzás során a tízesekkel kezd, majd hozzáadja még egyszer az egyik tényezőt
Kétjegyű számmal való szorzás során a tízesekkel kezd, majd ehhez hozzáadja az egyik tényező helyiérték szerinti felbontással kapott tagjainak szorzatát
„Tízeseket a tízesekkel és egyeseket az egyesekkel" szoroz
Szubsztraktív disztribúció 2. változat
Az egyik tényező egyeseivel való részletszorzatok hiányoznak
Helyiérték figyelembevétele nélkül számol
Egyéb, az előzőektől különböző, helytelen eredményre vezető stratégia.

H2c: Szignifikáns a különbség a stratégia használat során a különböző iskolák között.

H2d: Szignifikáns a különbség a stratégiahasználat során a különböző osztályok között.

H2e: A vizsgált tanulók körben megfigyelhetők racionális hibák (vö: Ben-Zeev, 1998).

H5a: A szorzási feladatok megoldása során a 4. évfolyamos tanulók gyengébb eredményt érnek el, mint a magasabb évfolyamokon. Ez a hipotézisünk beigazolódott.

H5b: Az egyes évfolyamok teljesítménye között különbség van, az alacsonyab évfolyamos tanulók szignifikánsan alacsonyabb eredményt értek el, mint a magasabb évfolyamra járók. Ez a hipotézisünk több vizsgálat során beigazolódott. Ugyanakkor a magasabb évfolyamon tanulók nem feltétlenül nyújtottak jobb teljesítményt a teszten, ahogy a második vizsgálatból származó eredményeink mutatják.

H5c: A magasabb évfolyamokon a tanulók által használt stratégiák száma csökkenő tendenciát mutat (vö. Siegler és Lin, 2010, „egymást átfedő hullámok" modellje). Ez a hipotézisünk nem igazolódott be. A stratégiahasználat sok háttértényezővel összefügg. A 4. évfolyamon tanulók szorzási stratégiáinak száma kevesebb, mint a magasabb, pl. 5. és 6. évfolyamon tanulóké. Úgy tűnik, egy spontán fejlődés végbemegy, nem zárul le az alsó tagozat végére. Emiatt a Siegler és Lin által leírt „hullámok modell" alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy a számolási stratégiák tanítását az olvasási stratégiák tanításához (vö. Józsa & Józsa, 2014) hasonlóan a felső tagozaton is folytatni kell.

6.1.3. A stratégiahasználat összefüggései a háttérváltozókkal

H3: Az alábbi háttérváltozókkal hozható összefüggésbe a megoldáskor alkalmazott szorzási stratégia és annak adaptivitása: anya iskolai végzettsége, a tanuló neme, a tanuló tanulási eredménye, tanulási nehézségek és zavarok. Ez a hipotézisünk részben beigazolódott. A szorzási stratégia használata eredményesebb volt a magasabb iskolai végzettségű anyához tartozó gyermek esetén. A tanulók nemével is összefüggött a stratégiahasználat, de a különbségek nem voltak szignifikánsak. A jobb tanulmányi eredményű diák magasabb eredményt ért el a szorzási stratégiák teszten. Mivel a tanulási zavarral rendelkező diákokról kevés információnk van, ők gyakran írásban számoltak, így a mintából kivettük őket, a kevés vizsgált személy eredménye alapján csak feltételezzük, hogy a stratégiahasználat eredményessége a tanulási zavarokkal összefügghet.

H6: A Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb teljesítményt elérő gyerekek stratégiahasználatát kettősség jellemzi: egyrészt rugalmasabb, és többféle stratégiát alkalmaznak, mint a Matematika Tudásszintmérő Teszten gyengébb teljesítményt nyújtó diákok; másrészt stratégiahasználatuk nem minden esetben adaptív. Ez a hipotézis beigazolódott. A vizsgálat során tapasztaltuk, hogy a matematikateszten elért jobb eredmény nem feltétlenül jelent rugalmas stratégiahasználatot. Számos esetben a tanulók mereven ragaszkodtak az általuk használt stratégiához, akkor is, ha az nem volt adaptív (vö. de Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquiére & Verchaffel, 2010)

H7: A sajátos nevelési igényű gyerekek stratégiahasználatát nagyfokú rugalmatlanság jellemzi. Ugyanakkor azzal az egy-két ismert stratégiával – szorgalmuk, precizitásra törekvésük miatt – sokszor jobban boldogulnak, mint a Matematika Tudásszintmérő Teszten jobb teljesítményt elérő tanulótársaik. Erre vonatkozóan kevés információt tudtunk szerezni, így nem dönthető el, igaz-e.

H8a: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat a Szorzási Stratégiák Teszten elért eredménnyel. Ez a hipotézisónk beigazolódott. A vizsgálataink nagy részénél ez a korreláció 0,4 körüli érték.

H9a, H9b, H9c hipotéziseink beigazolódtak:

A szorzási stratégiák explicit tanításában részt vevő tanulók jobb eredményeket érnek el, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Mulligen & Mitchelmore, 2009).
A fejlesztésben részt vett tanulók jobb eredményeket értek el a Matematika Tudásszintmérő utóteszten, mint a fejlesztésben részt nem vett társaik (vö. Csíkos, 2007).
A fejlesztés hatása a késleltetett utóteszt során is kimutatható (vö. Csíkos, 2007).
Fejlesztő kísérletünk közepes hatást mutatott ki, és a három hónappal később felvett interjúk alapján úgy véljük, akár egyhónapos, tartalomba ágyazott fejlesztés, a stratégiák előnyeinek és hátrányainak megmutatásával, metakognitív stratégiák alkalmazásával pozitívan hat a fejben szorzás eredményességére.

6.1.4. A Matematika Tudásszintmérő Teszt

H8b: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért eredmény szerint szignifikáns a különbség (vö.: Hermann, 2019) a mérésben részt vevő iskolák, osztályok, a fiúk és a lányok között.
H8c: A Matematika Tudásszintmérő Teszten elért teljesítmény közepes korrelációt mutat (vö. Hermann, 2019) a szülők iskolai végzettségével, az iskolai teljesítménnyel való elégedettséggel, a gyermek továbbtanulási terveivel, a gyermek félévi matematika osztályzatával.
Mindkét hipotézisünk beigazolódott.

6.2. Kutatásunk újdonságértéke

Kutatásunk során arra vállalkoztunk, hogy fejben végzett szorzás során alkalmazott szorzási stratégiákat feltérképezzük 10-18 éves tanulók körében. Eddig hazánkban fehér foltnak számított a fejben számolás során alkalmazott szorzási stratégiák kutatása. Kutatásunk során kifejlesztettünk egy jól működő mérőeszközt a 10-12 éves tanulók szorzási stratégiák vizsgálatára. Az általunk kifejlesztett mérőeszközök alkalmasak voltak a 10-12 éves tanulók szorzási stratégiájának vizsglatához. A Szorzási Stratégiák Teszt jóságmutatója magas (Cronbach-α = 0,9 körüli volt ezeken az évfolyamokon).

A tanulók képesek voltak beszámolni arról, hogyan gondolkodtak. Vizsgálataink során megfigyeltük, kielemeztük a tanulók által használt stratégiákat, hibázási mintázatokat tártunk fel. Kutatásaink során a nemzetközi kutatók eredményeivel egybecsengő következtetésekre jutottunk. A stratégiakutatások egyik fő konklúziója, hogy matematikai gondolkodásunkat nagy változatosság jellemzi. A különféle matematikai feladatok megoldása során a többségi gyerekek és a felnőttek, a tehetséges gyerekek stratégiahasználata (vö. Thomas, 2002) eltérő jellegzetességeket mutat, függ a szituációtól, a feladat és az egyén jellemzőitől (vö. Siegler, 2003, 2005, 2007). Az egyén élete folyamán alkalmazott stratégiák folyamatosan fejlődnek, egyesek eltűnnek (vö. Siegler & Lin, 2010), és célszerű egyszerre több stratégiát tanítani a gyerekeknek (vö. Shrager & Siegler, 1998; Siegler & Araya, 2005). A gyerekek az ismert stratégiák alapján spontán új stratégiákat fejlesztenek ki (v.ö. Torbeyns, De Smedt, Ghesquiére & Verchaffel, 2009).

A kutatás számos új eredményt hozott. Nemzetközi szakirodalomban még nem leírt szorzási stratégiákat különítettünk el. A kutatási módszerek között hazai kutatásokban ritkaságnak számít az első vizsgálat során alkalmazott szemkamerás vizsgálat. Ötödik vizsgálatunk egyhónapos, tartalomba ágyazott fejlesztést tartalmazott, melyet matematikaórákon végeztünk. A fejlesztés hatása a késleltetett utómérés során kimutatható volt. A korábbi kutatások eredményeire támaszkodva választ kaptunk kutatási kérdéseinkre, megállapítottuk a tanulók stratégiahasználatára vonatkozó jellegzetességeket, hibázási mintázatokat, összefüggéseket mutattunk ki a szorzási stratégia eredményessége és a háttérváltozók között. A keresztmetszeti vizsgálatban három budapesti és nyolc vidéki iskola 850 tanulója töltötte ki három saját fejlesztésű mérőeszközünket: Szorzási Stratégiák Tesztet, Matematika Tudásszintmérő Tesztet, Háttérkérdőívet. Elemzéseinkhez a statisztikai számításokat SPSS 16, illetve SPSS 17 szoftverrel végeztük. Hipotéziseink nagy része beigazolódott. Megállapítottuk, hogy a 4-6. évfolyamos tanulók legalább ötféle, helyes eredményre vezető stratégiát használnak a fejszámolás során; az eredményesség tekintetében a nemek közötti különbség inszignifikáns.

6.3. Kutatásunk korlátai

Az általunk végzett, 7-12. évfolyamos tanulókra vonatkozó kisebb mintás vizsgálatokból nem vonhatók le általános érvényű következtetések. A 4-6. évfolyam vizsgálata során azonban mintánk elemszáma 850 volt. Így erre a három évfolyamra tett megállapításaink vélhetően általánosak igazak a magyar tanulókra. Azonban szükségesek további nagyobb mintás vizsgálatok, településszerkezet szerint reprezentatív mintán. A mérőeszköz kotlátozottan használható. Sajátos nevelési igényú és tanulási zavarokkal rendelkező tanulók esetén nem tudtunk arról meggyőződni, jól mér-e. Másik korlátja mérőeszközünknek, hogy a számolást írásban végző tanulók mérésére nem alkalmas. Szükségesnek tartjuk szóbeli interjúk felvételét ilyen esetekben. Harmadik korlátja a mérőeszközünknek lehet az, hogy nehezebben emlékszünk vissza a már automatikussá vált eljárásokra.

6.4. Az eredmények felhasználási lehetőségei

Kutatásunk során a fejben való szorzás során alkalmazott szorzási stratégiákat vizsgáltuk 10-18 évesek körében, 10-12 évesek között folytattuk le a vizsgálatok nagy részét.. Három kisebb mintás és három nagyobb mintás vizsgálatot, köztük két keresztmetszeti vizsgálatot végeztünk az elmúlt tíz évben. Dolgozatunkban a szorzási stratégiák vizsgálatával kapcsolatos elméleteket összegeztük, és a végzett vizsgálatok eredményeit foglaltuk össze. Verschaffel, De Corte és Pauwels (1992) megállapításaival egybecsengtek tapasztalataink. A kismintás szemmozgás követéses vizsgálat rámutatott arra, hogy a releváns információk felismerése, kiválasztása és feldolgozása elengedhetetlen a matematikai szöveges feladatok sikeres megoldásához.

Az általunk végzett vizsgálatok eredményei szerint a tanulók számolási készségeinek fejlesztése, fejben számolás, szorzási stratégiák tanítására célszerű lenne felhívni a leendő és a gyakorló pedagógusok figyelmét. Kutatásunkkal igyekeztünk megvilágítani, hogy a metakognitív stratégiák fejlesztése számos transzferhatást eredményezhet, a számolási stratégiák tanítását érdemes folytatni a felső tagozaton és a középiskolában. Az általunk vizsgált tanulók képesek voltak arra, hogy az általuk alkalmazott stratégiákról beszámoljanak. Célszerű lenne több fejlesztést végezni, és a tanárok képzésébe több ponton beiktatni a metakognitív stratégiák tanítását.

6.5. További kutatások lehetőségei

A kutatás eredményeire támaszkodva további kérdések vethetők fel. Érvényesek-e a 4-6. évfolyamos tanulók mintáján kapott eredmények a 7-12. évfolyamos tanulókra is? Vajon a felnőttek stratégiahasználatára mi jellemző? A matematikatanárok hogyan vélekednek a fejben számolás fontosságáról? Milyen stratégiát alkalmaznak a tanárok a fejben szorzás során és milyeneket tanítanak? Módszertani szempontból kihívás egy olyan mérőeszköz létrehozása, amely segítségével hamarabb választ kapunk kérdéseinkre. Hogyan, milyen módszerrel lehetne gyorsabban elemezni a vizsgálat során kapott eredményeket? Az eDia online rendszer erre kínálkozik. A technológiaalapú tesztelés az adatfelvételi és az értékelési objektivitás növekedését eredményezi (Csapó, Molnár és R. Tóth, 2008), ezáltal nő a tesztek reliabilitása és validitása is (Csapó, Molnár és Nagy, 2014, 2015; Molnár, 2016). Vajon létrehozható-e olyan valid és reliábilis mérőeszköz, amely online képes mérni a tanulók stratégiahasználatát? Nézetünk szerint igen, de ez már egy másik kutatás témája lehet.

Robinson (2015) szerint még mindig úgy tekintünk az iskolára, mint egy tudás-vagy vizsgagyárra, ahol futószalagon készülnek az iskolázott emberek. Az iskolarendszerek ma már a szervezeti szertartások és a szellemi szokások mátrixa, amelyek nem tükrözik megfelelően a résztvevő diákok tehetségének sokféleségét. Mivel ezek a rendszerek ellentmondásokat hordoznak magukban, túl sok diák gondolja magáról, hogy nem elég értelmes. Jelenleg egy olyan tömegközlekedési modellt működtetünk, amely nem képes felkészíteni a fiatalokat a digitális korszak drámai társadalmi-gazdasági igényeire (Robinson, 2015). Szerinte a tanítás-tanulás ideális esetben organikus fejlődés, és a közoktatásnak ezt kellene támogatna. A közoktatás célja önmagát fejlesztő, kreatív, sokoldalú, digitálisan is művelt generáció nevelése lenne (Prievara, 2015).

A XXI. században szinte lehetetlen körülhatárolni azon ismeretek körét, amelyekre a következő nemzedékeknek szükségük lehet (Csapó, 1992). Nem lehetünk biztosak abban, hogy a tanárok által tanított tudás a felhasználáskor is korszerűnek és hasznosíthatónak fog számítani, a mai posztindusztriális társadalomban ezért a leendő munkavállalók tanulási készségeit célszerű inkább fejleszteni (Csapó, 2008c). Ez jelenti a jó minőségű, az élethosszig tartó tanulás (*life-long learning* – LLL) során használható tudást (Csapó, 2008a). A 2003-as OECD vizsgálat kiegészítő adatfelvétele során kiderült, hogy a magyar iskolások inkább a memorizálásra, felidézésre épülő tanulási stratégiákat preferálják az elemző, gondolkodó, rendszerező módszerekkel szemben. A tanulásban a minőség javításának záloga a tanulási stratégiák arányának változtatása lehet (Csapó, 2004b). A közoktatás legfőbb tartalékait a tanulás hatékonyságának javítása képezheti, melynek kulcseleme a mélyebb megértésen alapuló és ezért szélesebb körben alkalmazható tudás (Csapó, 2008b).

Az oktatás területén bekövetkező változások egyik motorjává az üzleti élet válhat (Romberg, 1992). A gazdaság egy késleltetett visszacsatolás révén arra ösztönzi az oktatás szereplőit, hogy az oktatásban a munkaerőpiacon szükséges képességek elsajátítását tekintsék elsődlegesnek. A tudásalapú társadalomban, a tudásalapú gazdaságban a hasznosítható tudáson múlik a nemzet, a gazdaság, az egyén versenyképessége is. A nagyobb versenyképesség ugyanakkor többletjövedelmet, egészséges nemzetet, gazdagságot, és még több tudást eredményezhet. Nemzetgazdaságunk versenyképessége és a tudásalapú gazdaság feltételeinek megteremtése tehát egymást kölcsönösen feltételező fogalmak. Kiemelt szerepet kap e cél megvalósításában az emberi tőke, így a versenyképesség növelése az ország, a vállalat és az egyén szintjén is a tudásba való befektetést, több innovációt és kutatás-fejlesztést igényel (Varga, 2014, 2013). Hazánk gazdasági felemelkedésének kulcsa a versenyképesség növelése, a tudásalapú társadalom kiépítése (Pelle, 2013). A 2020-as koronavírusjárvány utáni gazdasági talpra állásunk gyorsasága azon is múlhat, mennyire vesszük ezt figyelembe.

Az iskoláztatás pozitív hatásaként a gyermekek kognitív és egyéb készségei, képességei fejlődnek, és az esetek egy részében elérik az antropológiai optimumot (Nagy, 2000). Viszont a tanulók jelentős része esetén a készségek optimális begyakorlása nem valósul meg, s alacsony szinten vagy hibásan működő kognitív képességekkel, mintegy funkcionális analfabétaként lépnek be a munka világába. Ez ellenkezik mind a társadalom, mind az egyén érdekeivel. Az oktatáspolitika kiemelt célja kell, hogy legyen, hogy a fiatalok között csökkenjen a minimális szintű társadalmi elvárásoknak sem eleget tevők száma, ezért fontosnak tartjuk az alapkészségek fejlesztését, a munkavégzéshez, társadalmi beilleszkedéshez szükséges szociális és kognitív kompetenciák kialakulásának segítését. A siker egyik kulcsa lehet többek között a matematikai kompetenciák fejlesztése (Vígh-Kiss, 2019). A világ több országában oktatási reformok zajlanak, célszerű a magyar oktatási rendszerben is átgondolni, hogyan tudnánk még többet segíteni abban, hogy gyermekeink, hazánk egészségesebbek és versenyképesek legyenek.

Úgy gondoljuk, megfelelő és elegendő kutatás segítségével standardizálhatóvá válik a fejben végzett számolások, szorzások elvárt képességszintje. Ezzel együtt új tanítási segédeszközök jöhetnek létre. A számolási stratégiák, a metakognitív stratégiák tudatosabb és gyakoribb tanítása a tanulók differenciált fejlesztésének eszközévé válhat, korunk kihívásaihoz jobban illeszkedő új tantermi kultúra kialakulását segítheti. Gyermekeink adaptív számolási, szorzási készségeinek fejlesztése a gyakorlati életben is hasznosítható, és feltételezhetően az adaptivitás szemléletmódja jelentős transzferhatást eredményezhet az emberi gondolkodás más területein is.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Először is köszönetem fejezem ki a vizsgálatba bekapcsolódott iskolák vezetésének, tanárainak, akik az adatfelvétel során építő megjegyzéseikkel támogatták, segítették munkámat, és aktívan kivették részüket a kutatás lebonyolításában. Köszönet illeti a vizsgálatban önként részt vevő tanulókat az együttműködésükért.

Hálásan köszönöm témavezetőmnek, Dr. Csíkos Csaba egyetemi tanárnak, hogy bátorított, a szakirodalom összeállításában, a statisztikai elemzések során segített munkámban. Köszönöm a publikációimhoz, szakdolgozatomhoz fűzött értékes kritikai megjegyzéseit, tanácsait.

Külön köszönöm a Neveléstudományi Doktori Iskola vezetőjének, Dr. Csapó Benőnek, valamint a Doktori Iskolában és a szakvizsgára felkészítő tanfolyamon oktató tanáraim, köztük Dr. Vidákovich Tibor, Dr. Vígh Tibor, Dr. Józsa Krisztián, Dr. Molnár Gyöngyvér, Dr. B. Németh Mária, Dr. Molnár Edit Katalin, Dr. Steklács János, Dr. Hercz Mária, Dr. Kinyó László és Dr. Fejes József Balázs áldozatos munkáját, önzetlen segítségét, akik mind példamutatásukkal, mind szakértelmükkel motiváltak minket arra, hogy képesek legyünk hasonló vizsgálatok elvégzésére, elemzésére, értékelésére. Hálával tartozom Dr. Vidákovich Tibornak a kutatási szemináriumokon és a szakdolgozatom bírálatában megfogalmazott hasznos észrevételeiért, javaslataiért.

Nagyon köszönöm opponenseimnek, Dr. Szitányi Juditnak és Dr. Salamon Anikónak a dolgozatom bírálatában leírt kritikus észrevételeit, segítő javaslatait.

Köszönöm csoporttársaim támogatását, észrevételeit.

Köszönöm Sötét Bélánénak és Dr. Kuczmann Imrének a tesztek javításában, kódolásában nyújtott segítségét. Nagyon szépen köszönöm Csontosné Dr. Buzás Zsuzsannának, Füleki Enikőnek és Sebestyénné Molnár Juditnak az angol nyelvű szövegek lektorálását.

Nagyon köszönöm barátaimnak, Halmos Istvánnénak, Lénárt Istvánnak, Pósa Lajosnak, hogy kitartottak mellettem. Hálásan köszönöm Dr. Tuza Zsoltnak a bátorítást és a lektori segítséget.

Köszönöm Farkas György igazgató úrnak, kollégáimnak és volt tanáraimnak a buzdítást.

Végül, de nem utolsósorban hálás szívvel köszönöm szüleimnek, Vígh-Kiss Józsefnek és Vígh-Kiss Józsefnének, hogy éveken át levették vállamról a napi terheket, megteremtve az alkotómunkához szükséges körülményeket, hogy mindvégig hittek bennem, mellettem voltak és támogattak. Köszönöm az írás során nyújtott értékes észrevételeiket.

Szeretettel ajánlom munkámat Roszkos Zsuzsa, Keszegh István, Oláh György és Rábai Imre kollégák emlékének.

NYILATKOZAT EREDETISÉGRŐL ÉS SZERZŐI JOGRÓL

Ph.D. értekezés elkészítésére vonatkozó szabályok betartásáról

Alulírott Vígh-Kiss Erika Rozália jelen nyilatkozat aláírásával kijelentem, hogy A fejben szorzás stratégiáinak vizsgálata 10-12 éves tanulók körében című PhD értekezésem önálló munkám, a dolgozat készítése során betartottam a szerzői jogról szóló 1999. évi LXXVI tv. vonatkoz rendelkezéseit, a más megjelent vagy közlés alatt álló közleményekből felhasznált ábra/szöveg nem sérti a kiadó vagy más jogi vagy természetes személy jogait.

Jelen nyilatkozat aláírásával tudomásul veszem, hogy amennyiben igazolható, hogy a dolgozatban nem saját eredményeimet használtam fel vagy a dolgozattal kapcsolatban szerzői jog megsértése merül fel, a Szegedi Tudományegyetem megtagadja PhD dolgozatom befogadását, velem szemben eljárást indít, illetve visszavonja a már odaítélt PhD fokozatot.

Tudomásul veszem, hogy a PhD-értekezés nyilvánosan elérhető formában feltöltésre kerül az Országos Doktori Tanács honlapjára.

Szeged, 2021. 05. 22.

Vígh-Kiss Erika Rozália

7. IRODALOM

Albert Sándor (2008). *Didaktika*. Selye János Egyetem.

Alatorre, S., & Figueras, O. (2005): A developmental model for proportional reasonong in retio comparison tasks. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp.25-32). PME.

Anderson, J. R. (1993). *Rules of the mind*. Erlbaum.

Anderson, J. R. (1989). The origin of errors in problem solving. In D. Klahr, & K. Kotovsky (Eds.) *Complex information processing: The impact of Herbert A. Simon* (pp. 343–371). Erlbaum.

Andrews, P., Diego-Mantecon, J., Vankuš, P., Op 't Eynde, P., & Conway, P. (2008). A tanulók matematikai meggyőződéseinek értékelése: Egy három országot érintő összehasonlító vizsgálat. *Iskolakultúra, 18,* 2.sz., 141-159.

Anghileri, J. (1989). An investigation of young children's understanding of multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 367–385. https://doi.org/10.1007/BF00315607 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Ashlock, R. B. (1976). *Error patterns in computation*. Columbus, OH: Bell & Howell.

Ashcraft, M.H. (1992). Cognitive arithmetic: a review of data and theory. *Cognition, 44*, 75-106. 10.1016/0010-0277(92)90051-I.

Aunola, K. E., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K., & Nurmi, J.-E. (2004). Developmental dynamics of math performance from preschool to grade 2. *Journal of Educational Psychology, 84*, 261–271.

Australian Education Council (1991). *A National Statement on Mathematics for Australian schools*. Curriculum Corporation.

Balázsi Ildikó, Balkányi Péter, Ostorics László, Palincsár Ildikó, Rábainé Szabó Annamária, Szepesi Ildikó, Szipőcsné Krolopp Judit és Vadász Csaba (2014). *Az Országos kompetenciamérés tartalmi keretei: Szövegértés, matematika, háttérkérdőívek*. Oktatási Hivatal

Balázsi Ildikó, Ostorics László, Szalay Balázs, Szepesi Ildikó és Vadász Csaba (2013). *PISA 2012 Összefoglaló jelentés*. Budapest: Oktatási Hivatal. http://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/pisa/pisa2012_osszefoglalo_jelentes.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Balázsi Ildikó, Lak Ágnes Rozina és Szabó Vilmos (2011). Országos kompetenciamérés 2010. Országos jelentés. Budapest: Oktatási Hivatal. http://www.ohkir.gov.hu/okmfit/files/OKM_2010_Orszagos_jelentes.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Balázsi Ildikó, Ostorics László és Szalay Balázs (2007). *PISA 2006 Összefoglaló jelentés*. A ma oktatása és a jövő társadalma. Oktatási Hivatal.

Balázsi Ildikó, Szabó Annamária, Szabó Vilmos, Szalay Balázs, Balázsi Ildikó és Szepesi Balázs (2004). *Országos kompetenciamérés 2004*. Összefoglaló tanulmány. Sulinova.

Baroody, A. J. (1985). Mastery of the basic number combinations. Internalization of relationships or facts? *Journal of Research in Mathematics Education, 16,* 83-98.

Baroody, A. J. (1993). Early mental multiplication perfprmance and the role of relational knowledge in mastering combinations involving two. *Learning and Instruction, 3,* 93-111.

Baroody, A. J. (1994). An evaluation of evidence supporting fact-retrieval models. *Learning*

and Individual Differences, 6, 1-336.
Baroody, A. J. (1999a). Children’s relational knowledge of addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 17,* 137–175.
Baroody, A. J. (1999b). The roles of estimation and the communtativity principle in the development of third-graders mental multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*, 157-193.
Baroody, A. J. (2013). The Development of Adaptive Expertise and Flexibility: The Integration of Conceptual and Procedural Knowledge. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills, Constructive Adaptive Expertise* (pp. 16-34). Routledge.
Baroody, A. J., & Ginsburg, H.P. (1986). The relationship between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Lawrene Erlbaum Associates.
Baroody, A. J., & Ginsburg, H.P. (1991). A cognitive approach to assessing the mathematical difficulties of children labeled learning disabled. In H.L. Swanson (Ed.), *Handbook on the assessment of learning disabilities: Theory, research and practice* (pp. 177-277). Pro- Ed.
Baroody, A. J., Lai, M.-l., & Mix, K. S. (2006). The Development of Young Children's Early Number and Operation Sense and its Implications for Early Childhood Education. In B. Spodek, & O. N. Saracho (Eds.), *Handbook of research on the education of young children* (p. 187–221). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
Baroody, A. J., & Tiilikainen, S. H. (2013). Two perpectives on Addition Development. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills, Constructive Adaptive Expertise* (pp. 75-126). Routledge.
Baroody, A. J., Wilkins, J. L. M., & Tiilikainen, S. H. (2003). The development of children’s understanding of additive commutativity: From protoquantitive concept to general concept? In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills,* (pp. 127–160). Lawrence Erlbaum Associates.
Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70,* 217-241. 10.1007/s10649-008-9145-1.
Baron, J. (1978). Intelligence and general strategies. In Underwood, G. (Ed.) *Strategies of information processing*. Academic.
Baron-Cohen, S. (2003). *The essential difference: The truth about the male and female brain.* Basic Books.
Beke Manó (1900). Typikus hibák a mathemaikai tanításban. *Magyar Pedagógia, (9)*, 520-530.
Beke Manó és Reif Jakab (szerk., 1893). *Érettségi vizsgálati mathematikai feladatok gyűjteménye*. Singer és Wolfner Könyvkereskedése.
Belmont, J.M., & Butterfield, E. C. (1975). Learning strategies as determinants of memory deficitences. *Cognitive Psychology, 2,* 411-420.
Benjamin, A. és Shermer, M. (2006). *Fejszámolás.* Budapest: Partvonal Kiadó.
Ben-Zeev, T. (1995). The nature and origin of rational errorsin arithmetic thinking: Induction from examples and prior knowledge. *Cognitive Science, 19*, 341–376.
Ben-Zeev, T. (1996). When erroneous mathematical thinking is just as “correct”: The oxymoron of rational errors. In R.J. Sternberg, & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 55–79). Erlbaum.
Ben-Zeev, T. (1998a): Amikor a hibás matematikai gondolkodás majdnem olyan, mint a helyes:

racionális hibák. In R. J. Sternberg és T. Ben-Zeev (szerk.), *A matematikai gondolkodás természete*, (pp. 65-86.). Vincze Kiadó.

Ben-Zeev, T. (1998b). Rational errors and the mathematical mind. *Review of General Psychology, 2(4),* 366-383.

Blöte, A. W., Van der Burg, E., & Klein, A. S. (2001). Students' flexibility in solving two-digit addition and subtraction problems: Instruction effects. *Journal of Educational Psychology, 93 (3), Sep 2001*, 627-638. http://dx.doi.org/10.1037/0022-0663.93.3.627

B. Németh Mária és Habók Anita (2006). A 13 és 17 éves tanulók viszonya a tanuláshoz. *Magyar Pedagógia*, *106* (2), 83–105.

Booker, G., Bond, D., Sparrow, L., & Swan, P. (2014). *Teaching primary mathematics,* 5th edition. Pearson Australia

Bransford, J. D., & Johnson, M. K. (1972). Contextual prerequisites for understanding: Some investigations of comprehension and recall. *Journal of Verbal Learning & Verbal Behavior, 11(6)*, 717–726. https://doi.org/10.1016/S0022-5371(72)80006-9

Bransford, J. (2001). Thoughts on adaptive expertise. (Unpublished manuscript), http://www.vanth.org/docs/AdaptiveExpertise.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Kluwer.

Brown, J. S., & Burton, R.R. (1978). Diagnosticmodels for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science, 2,* 155-192.

Brown, L. I., & Kanyongo, G. Y. (2010). Gender differences in performance in mathematics in Trinidad and Tobago: Examining affective factors. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 5,* 113–130.

Brown, J. S., & VanLehn, K. (1980). Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science, 4*, 379–426.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (1993). Problem posing in mathematics education. In S. I. Brown, & M.I. Walter (Eds.), *Problem posing: Reflections and applications* (pp. 16–27). Erlbaum.

Bruner, J.S., Goodnow, J.J., & Austin, G. A. (1956). *A study of thinking*. New York: Wiley.

Bransford, J. D. & Johnson, M. K. (1972). Contextual prerequisites for understanding: Some investigations of comprehension and recall. *Journal of Verbal Learning & Verbal Behavior, 11*, 717–726.

Buswell, G. T. (1926). *Diagnostic studies in arithmetic*. Chicago: University of Chicago Press.

Butterworth, B., Marchesini, N., & Girelli, L. (2003). Basic multiplication combinations: Passive storage or dynamic reorganization? In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *Studies in mathematical thinking and learning. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 189–202). Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Buzás Zsuzsa (2016). Kottaolvasási stratégiák vizsgálata zeneiskolás diákok körében. In: Devosa Iván és Steklács János (szerk.) *II. Magyar Szemmozgáskutatás Konferencia - II. Hungarian Conference on Eye Movements: A konferencia programja és absztraktjai. - Program and abstracts of the conference.* Konferencia helye, ideje: Kecskemét, Magyarország, 2016.06.10 Kecskemét: Kecskeméti Főiskola Tanítóképző Főiskolai Kar, 8. https://libres.uncg.edu/ir/uncg/f/Carrier_uncg_0154D_10324.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Campbell, P.F. (1995). *Project IMPACT: Increasing mathematics power for all children and teachers (phased final report)*. Center for mathematics Education, University of Maryland.

Carr, M., Alexander, J., & Folds-Bennett, T. (1994). Metacognition and mathematics strategy use. *Applied Cognitive Psychology, 8(6),* 583-595.

https://doi.org/10.1002/acp.2350080605
Carrier, J. A., Ph.D (2010). *Indicators of Multiplicative Reasoning among Fourth Grade Students*. Directed by Dr. Sarah B. Berenson, S.B., & Dr. Richardson, K. The University of North Carolina at Greensboro, ProQuest Dissertations Publishing, 2010. 3403677. https://search.proquest.com/openview/78d21ea5c20b8113051ffd9ef954f7ac/1?pq-origsite=gscholar&cbl=18750&diss=y Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Carroll, J.B. (1993). *Human cognitive abilities: A survey of factor-analytical studies*. Cambridge University Press.
Chi, M. T. H., & Slotta, J. D. (1993). The ontological coherence of intuitive physics. *Cognition and Instruction, 10*, 249–260.
Clement, J. (1982): Students' preconceptions in introductory mechanics. *American Journal of Physics, 50*, 66-71.
Clement, J. (1993). Using bridging analogies and anchoring intuitions to deal with students' preconceptions in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, ***30*(**10),1241-1257.
Cooney, J. B., Swanson, H. L., & Ladd, S. F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition and Instruction, 5(4),*323–345.
https://doi.org/10.1207/s1532690xci0504_5 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Cooper, T., Heirdsfield, A., Mulligan, J., & Irons, C. (1999). *Children's multiplication and division strategies*. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 89-96). University of Haifa, Israel, Program Committee.
Cox, L. S. (1975). Diagnosing and remediating systematic errors in addition and subtraction computation. *The Arithmetic Teacher, 22*, 151–157.
Cowan, R. (2013). Does It All Add Up? Changes in children's Knowledge of Addition combinations, Straegies, and principles. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The Develompent of Arithmetic Concepts and Skills. Constructing Adaptive Expertise* (pp. 35-74). Lawrence Erlbaum Associates.
Csapó Benő (1992). *Kognitív pedagógia*. Akadémiai Kiadó.
Csapó Benő (1998a, szerk.). *Az iskolai tudás*. Osiris Kiadó.
Csapó Benő (1998b). Az iskolai tudás felszíni rétegei: mit tükröznek az osztályzatok? In Csapó Benő (szerk.), *Az iskolai tudás* (pp. 45-90). Osiris Kiadó.
Csapó Benő (2000). Tudásszintmérő tesztek. In Falus Iván (szerk.) *A pedagógiai kutatás módszerei*, (pp. 277-316). Műszaki Könyvkiadó.
Csapó Benő (2002a, szerk). *Az iskolai tudás*. 2.kiadás. Osiris Kiadó.
Csapó Benő (2002b). A tudáskoncepció változása. *Új Pedagógiai Szemle, 52*, 2.sz., 38-45.
Csapó Benő (2002, szerk.). *Az iskolai műveltség*. Osiris Kiadó.
Csapó Benő (2002c). Iskolai osztályzatok, attitűdök, műveltség. In Csapó Benő (szerk.), *Az iskolai műveltség* (pp. 37–64). Osiris Kiadó.
Csapó Benő (2002d): Az osztályok közötti különbségek és a pedagógiai hozzáadott érték. In Csapó Benő (szerk.), *Az iskolai műveltség (*pp. 269–297). Osiris Kiadó.
Csapó Benő (2003a): Az iskolai osztályzatok közötti különbségek és az oktatási rendszer demokratizálása. *Iskolakultúra, 13,* 8. sz., 107–117.
Csapó Benő (2003b). *A képességek fejlődése és iskolai fejlesztése*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
Csapó Benő (2004a). *Tudás és iskola*. Műszaki Könyvkiadó.
Csapó Benő (2004b). Tudásszintmérő tesztek. In Falus Iván (szerk.), *Bevezetés a pedagógiai kutatás módszereibe* (pp. 277–316). PSZMP – Keraban Kiadó.

Csapó Benő (2004c). A tudásvagyon újratermelése. *Magyar Tudomány, 11*., 1233-1239. http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/Tudasvagyon.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Csapó Benő (2004d). Tudás és kompetenciák. In Csapó Benő (szerk.), *Tudás és Iskola*. Műszaki Kiadó.
Csapó Benő (2006). A formális és nem-formális tanulás során szerzett tudás integrálása. Az előzetes tudás felmérése és elismerése. *Iskolakultúra, 16,* 2.sz., 3-16. http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/Csapo_ElozetesTudas.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Csapó Benő (2008a). A magyar iskolarendszer adaptációs problémái: a tudás minősége. In Fazekas Károly (szerk.), *Közoktatás, iskolai tudás és munkapiaci siker* (pp. 113-131). MTA Közgazdaságtudományi Intézet.
Csapó Benő (2008b). A tanulás és a tanítás tudományos megalapozása. In Fazekas Károly, Köllő János és Varga Júlia (szerk.), *Zöld könyv a magyar közoktatás megújításáért,* (pp. 217-234). Ecostat. http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/CSB_ZoldKonyv2008_9.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Csapó Benő (2008c). Tudásakkumuláció a közoktatásban. In Simon Mária (szerk.), *Tankönyvdialógusok*, (pp. 95-108.). Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet. http://www.edu.u-szeged.hu/~csapo/publ/TudasakkumulacioCsB.pdf Utolsó letöltés: 2014. május 23.
Csapó Benő (2017). *A nemzetközi felmérések tudományos háttere: értelmezési keretek és fejlesztési feladatok* http://mta.hu/tudomany_hirei/tanacskozas-a-pisa-eredmenyekrol-videon-az-mta-szekhazaban-rendezett-konferencia-107431 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Csapó Benő, Csíkos Csaba és Molnár Gyöngyvér (2015, szerk.). *A matematikai tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei.* Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet. https://www.academia.edu/27099341/A_matematikai_gondolkod%C3%A1s_diagnosztikus_%C3%A9rt%C3%A9kel%C3%A9se Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Csapó Benő, Fejes József Balázs, Kinyó László és Tóth Edit (2014). *Az iskolai teljesítmények alakulása Magyarországon nemzetközi összehasonlításban.* TÁRKI Társadalmi riport. http://www.tarki.hu/adatbank-h/kutjel/pdf/b327.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Cser Andor (1952). Formalizmus a matematikatanításban. *Köznevelés, 751-753*.
Csíkos Csaba és B. Németh Mária (2002). A tesztekkel mérhető tudás. In Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás* (második kiadás), pp. 91–122. Osiris Kiadó.
Csíkos Csaba (2003a). Egy hazai matematika felmérés eredményei nemzetközi összehasonlításban. *Iskolakultúra, 13,* 8.sz., 20-27.
Csíkos Csaba (2003b). Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia, 103*., 35-55.
Csíkos Csaba (2004a). Metakogníció a tanulásban és a tanításban: az EARLI 10. konferenciájának kutatási eredményei. *Iskolakultúra, 24,*12.sz., 10-16.
Csíkos Csaba (2006b). A metakogníció pedagógiai értelmezése. In Kelemen Elemér és Falus Iván (szerk.), *Tanulmányok a neveléstudomány köréből 2005* (pp. 25-43). Műszaki Kiadó.
Csíkos Csaba és Steklács János (2006). Metakogníció és szövegfeldolgozás. In Józsa Krisztián (szerk.), *Az olvasási képesség fejlődése és fejlesztése,* (pp. 75-88.). Dinasztia Tankönyvkiadó
Csíkos Csaba (2007). *Metakogníció*. A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája. Tanítás és tanulás sorozat. Műszaki Könyvkiadó.

Csíkos Csaba, Kelemen Rita és Steklács János (2008). *Kéttényezős pedagógiai kísérletek eredményességének és hatásvizsgálatának kvantitatív elemzése egy magyarországi kéttényezős kísérlet példáján*. Előadás a VI. Pedagógiai Értékelési Konferencián. Szeged, 2008. április 11-12.

Csíkos Csaba (2009): Mintavétel a kvantitatív pedagógiai kutatásban. Kutatás-módszertani Kiskönyvtár. Gondolat Kiadó.

Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010). Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia*, *110*, 149-166.

Csíkos Csaba és Steklács János (2011). *Az adaptív stratégiaválasztás pedagógiai relevanciája*. In Közoktatás, pedagógusképzés, neveléstudomány - a múlt értékei és a jövő kihívásai: XI. Országos Neveléstudományi Konferencia. Program és összefoglalók, p. 219. MTA Pedagógiai Bizottság.

Csíkos Csaba (2012). Success and strategies in 10 year old students' mental three-digit addition. In T. Y. Tso (szerk.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Volume 2* (pp. 179-186). Taipei, Taiwan: PME.

Csíkos, C., Szitányi, J., & Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*, 47-65.

Csíkos Csaba (2013). A fejben számolás stratégiáinak vizsgálata háromjegyű számok összeadásával negyedik osztályos tanulók körében. In Molnár Gyöngyvér és Korom Erzsébet (szerk.), *Az iskolai sikerességet befolyásoló kognitív és affektív tényezők értékelése* (pp. 31-45). Nemzetek Tudása Tankönyvkiadó.

Csíkos, C. (2016). Strategies and performance in elementary students' three-digit mental addition. *Educational Studies in Mathematics, 91*, 123-139.

Csíkos, C., & Steklács, J. (2016). Relationships between students' performance on arithmetic word problems, eye-fixation duration variables, and number notation (number words vs Arabic numerals). *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 43-57.

Csíkos Csaba (2017). A matematikai műveltség fejlesztésének lehetőségei a PISA-felmérések tükrében.
http://mta.hu/tudomany_hirei/tanacskozas-a-pisa-eredmenyekrol-videon-az-mta-szekhazaban-rendezett-konferencia-107431 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Cs. Czachesz Erzsébet (1998). *Olvasás és pedagógia*. Szeged: Mozaik Oktatási Stúdió.

Danielsen, A. G., Wiium, N., Wilhelmsen, B., & Wold, B. (2010). Perceived support provided by teachers and classmates and students' self-reported academic initiative. *Journal of School Psychology, 48*, 247–267. doi: 10.1016/j.jsp.2010.02.002

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281–303.

De Corte, E. (2001). Az iskolai tudás: A legfrissebb eredmények és legfontosabb tennivalók. *Magyar Pedagógia, 101*, 413-434.

De Corte, E., Op't Eynde, P., & Verschaffell, L. (2001). Knowing what to belive: The relevance of student's mathematical beliefs for mathematics education. Personal epistemology the psychology of belifs about knowledge and knowing. *Instructien psychologic en-technologie Afdeling Didactiek Levens Institut voor onderwijsonderzoek (LIVO)*, 297-320.

Dehaene, S., Bossini, S., & Giroux, P. (1993). The mental Representation of Parity and Number

Magnitude. *Journal of Experimental Psychology, 122*(3), 371-396.
Department for Education and Employment (1999). *The National Numeracy Strategy Framework for Teaching Mathematics from Reception to Year 6*. London.
De Smedt,B., Torbeyns,J., Stassens,N., Ghesquiére, P., & Verschaffel, L.(2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20,* 205-215.
Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2003). Can offline metacognition enhance mathematical problem solving? *Journal of Educational Psychology, 95(1),* 188–200. https://doi.org/10.1037/0022-0663.95.1.188 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Dienes Zoltán (1973/2015). *Építsük fel a matematikát!* EDGE 2000 Kft.
diSessa, A. A. (1982). Unlearning Aristotelian physics: A study of knowledge-based learning.. *Cognitive Science, 6*, 37–75.
diSessa, A. A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10,* 105–225.
D. Molnár Éva (2013). *Tudatos fejlődés. Az önszabályozott tanulás elmélete és gyakorlata*. Akadémiai Kiadó.
Dobi János (2002). Megtanult és megértett matematikai tudás. In Csapó Benő (szerk.), *Az iskolai tudás* (pp. 177-200). Vince Kiadó.
Dooling, D. J., & Lachman, R. (1971). Effects of comprehension on retention of prose. *Journal of Experimental Psychology,88,* 216–222.
Dowker, A. (2005). Early Identification and Intervention for Students with Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38,* 324. http://dx.doi.org/10.1177/00222194050380040801 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Dowker, A. (1998). Individual differences in normal arithmetical developmnet. In. C. Donlan (Ed.), *The developmnet of mathematical skills* (pp. 275-302). Psychology Press.
Dowker, A. (2005). Early Identification and Intervention for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 324-332 https://doi.org/10.1177/00222194050380040801
Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking.. In P. Nesher, P., & K. Kilpatrick, (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113–134). Cambridge University Press.
Duffin, J. M., & Simpson, A. P. (1993). Natural, conflicting, and alien. *Journal of Mathematical Behavior, 12,* 313–328.
Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In T.A. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Eds.), *Integrating research ont he graphical representation of functions* (pp. 101-130). Erlbaum.
Eccles, J. (2011). Gendered education and occupational choices: Applying Eccles et al. model of achievement-related choices. *International Journal of Behavioural Development, 35,* 195–201. doi: 10.1177/0165025411398185
Eccles, J. S., & Roeser, R. W. (2011). Schools as developmental contexts during adolescence. *Journal of Research on Adolescence, 21,* 225–241. doi: 10.1111/j.1532-7795.2010.00725.x
Ellis, S. (1997). Strategy choice in sociocultural context. *Developmental Review, 17,* 490–524.
Esztergályos Jenő (1992): Oktatójátékok kisiskolásoknak. Didaktikai játékgyűjtemény, negyedik kiadás. Sylvester János Nyomda.
Fábosné Zách Enikő (1999). *Te is szeretsz tanítani? Kézikönyv a matematika tanításához.* Műszaki Könyvkiadó.

Faragó László (1958). A logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibák a középiskolai matematikatanításban. In Kiss Árpád (szerk.), *Tanulmányok a neveléstudomány köréből* (pp. 207-274). Akadémiai Kiadó.

Faragó László (1960). Aritmetikai feladatok általános /algebrai/ alakban való megoldása során elkövetett tanulóhibák. In Kiss árpád, Nagy Sándor, Szokolszky István és Tettamanti Béla (szerk.), *Tanulmányok a neveléstudományok köréből 1959* (pp.315-378). Akadémiai Kiadó.

Faragó László (1962). Lélektani szempontok érvényesítése a matematikatartás metodikájában. In Juhász Ferenc, Horváth Lajos, Szathmári Lajos, Tóth Gábor, Bori István, Faragó László és Buzás László (szerk.), *Tanulmányok a neveléstudományok köréből 1961* (pp. 485-518). Akadémiai Kiadó.

Falus Iván és Ollé János (2008). *Az empirikus kutatások gyakorlata*. Nemzeti Tankönyvkiadó.

Fenyvessyné Békei Gabriella és Scheidl Róbert (2008). *Matematikai kompetenciaterület. „B" Történelem 5. évfolyam Tanári útmutató*. Budapest: Educatio Kht. https://docplayer.hu/26429399-Matematikai-kompetenciaterulet-b.html Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Fettweiss, E. (1929). Psychologische Fragen des mathematischen Unterrichts, (A matematikatanítás lélektani kérdései.] *Zeitschrift für pädagogische Psychologie*, 1929.

Fuson, K. C. (1992). Research on learning and teaching addition and subtraction of whole numbers. In G. Leinhardt, R. Putnam, & R.A. Hattrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 53–188). Erlbaum.

Geary, D. C. (2003). Arithmetical development: Commentary on Chapters 9 through 15 and future directions. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 453–464). Lawrence Erlbaum Associates.

Gelman, R. (1991). Epigenetic foundations of knowledge structures: Initial and transcendent constructions. In S. Carey & R. Gelman (Eds.), *The epigenesis of mind: Essays on biology and cognition* (pp. 293–322). Erlbaum.

Githua, B. N., & Mwangi, J. G. (2003). Students' mathematics self-concept and motivation to learn mathematics: relationship and gender differences among Kenya's secondary-schools students in Nairobi and Rift Valley provinces. *International Journal of Educational Development, 23*, 487–499. doi: 10.1016/S0738-0593(03)00025-7

Goals of 2000: Educate America. (Amerika nevelési céljai 2000-re). One Hundred Third Congress of the United States of America At the Second Session. https://www2.ed.gov/legislation/GOALS2000/TheAct/index.html Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Gray, W.S. (1956). *The teaching of reading and writing*. Paris: UNESCO.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*, 293–307.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute, University of Utrecht.

Griffiths, A. K., & Preston, K. R. (1992). Grade-12 students' misconceptions relating to fundamental characteristics of atoms and molecules. *Journal of Research in Science Teaching, 29*, 611-628.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*, 329-343.

Hajnal Imre (1984). *A matematika tanítása a magyar gimnáziumokban. Az Entwurftól 1979-ig*. Doktori értekezés. Szeged. http://doktori.bibl.u-szeged.hu/3754/1/1984_hajnal_imre.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Hajtman Béla (1968). *Bevezetés a matematikai statisztikába*. Akadémiai Kiadó.
Halmos Mária és Pósa Lajos (1990). *Vegyes feladatok tanári útmutató, I. osztály*. Kézirat gyanánt. Matematika-Módszertani Kutatócsoport, Calibra Kiadó.
Hanczár Gergely (2007): Tudomány-ezotéria-áltudomány tengely (blogbejegyzés). http://oktatasfilozofia.blog.hu/2007/12/28/tudomany_ezoteria_altudomany_... Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Hatano, G. (1982). Cognitive consequenses of practice in culture spesific procedural skills. *Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition, 4*, 15-18.
Hatano, G., Baroody, A. J., & Dowker, A. (2003, Eds.), The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise (pp. xi-xiii). Lawrence Erlbaum Associates.
M. Hegarty, R.E. Mayer, C. Green (1992): Comprehension of arithmetic word problems: evidence from students' eye fixations. *Journal of Educational Psychology, 84 (1)*, 76-84.
M. Hegarty, R. Mayer, C. Monk (1995): Comprehension of arithmetic word problems: a comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87* (1), 18-32.
Heirdsfield, A. M. és Cooper, T. J. (2002): Flexibility and inflexibility in accurate mental addittion and subtraction: Two case studies. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*, 57-74.
Heirdsfield, A. M., Cooper, T. J., Mulligan, J. & Irons, C.J. (1999). Children's meltal multiplication and divison strategies. In O. Zaslavsky (Ed.), Proceedings of the 23rd Psychology of Mathematics Education Conference, Haifa, Israel (pp. 89-96.). https://core.ac.uk/download/pdf/10873641.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Hermann, Zoltán (2018). *Nemek szerinti tesztpontszám-különbségek nemzetközi összehasonlításban.* In Munkaerőpiaci tükör 2017, pp. 103-109. Budapest: MTA Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont Közgazdaság-tudományi Intézet.
Hill, H.C. & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35* (5), 330-351.
Holland, J. H., Holyoak, K. J., Nisbett, R. E., & Thagard, P. R. (1986). *Induction: Processes of inference, learning, and discovery.* MIT Press.
Holt, John (1991). *Iskolai kudarcok. Stratégiák gyerekeknek és tanároknak azon kudarcok elkerülésére, amelynek fő oka a kudarctól való félelem*. Gondolat Könyvkiadó.
Hope, J. A. & Sherrill, J. M. (1987). Characteristics of unskilled and skilled Mental Calculation. *Journal for Reserches in Mathematics Education., 18* (2), 98-111.
Imbo, I., & Vandierendonck, A. (2008). Practice effects on strategy selection and strategy efficiency in simple mental arithmetic. PSYCHOLOGICAL RESEARCH-PSYCHOLOGISCHE FORSCHUNG, 72 (5), 528–541.
Inhelder, B. & Piaget, J. (1955). De la logique de l'enfant á la logique de l' adolescent. Esseai sur la consturction des structures operatioires formelles. Presses Universitaire.
Jerman, M. (1970). Some strategies for solving simple multiplication combinations. *Journal for Research in Mathematics Education, 1*, 95-128.
Józsa Krisztián (2000). A számlálási képesség kritériumorientált fejlesztése. *Új Pedagógiai Szemle*, 7-8. sz., 270-278.

Innovativ Teaching and Learning Research. 21th Century Learning Design. 21CLD Learning Activity Rubrics
http://fcl.eun.org/documents/10180/14691/5.3x+-+21cld+learning+activity+rubrics+2012.pdf/e240da11-07c2-4633-a86e-06c12f00d8ad?version=1.0
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_027777_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_029083_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_029086_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_202993_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_201722_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_031190_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_037116_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_201170_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_035250_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_201632_OKM2018 KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_035092_OKM2018, KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

IntezmenyiOsszefoglalo_029086_OKM2015 KIR Tanügyigazgatási szakportál. Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Jacobs, D. (2012). From Capitalism to Talentism.
http://www.businessspectator.com.au/article/2012/2/2/commodities/capitalism-talentism
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

R.J. Jacob, & S.K. Karn (2003). Eye tracking in human-computer interaction and usability research: ready to deliver the promises. Radach, J.H. & Deubel, H. (Eds.), In the mind's eye: Cognitive and applied aspects of eye movement research, pp. 573-605. Elsevier Science.

Jacob, L. & Mulligan, J. (2014). Using arrays to build towards multiplicative thinking in early years. *Australian Primary Mathematics Classroom, 19(1),* 35-40.

Józsa Gabriella és Józsa Krisztián (2014). A szövegértés, az olvasási motiváció és a stratégiahasználat összefüggése. *Magyar Pedagógia, 114* (2), 67-89.

Józsa Krisztián (2007). *Az eljasátítási motiváció*. Műszaki Kiadó.

Józsa Krisztián (2003). A számolási készség fejlesztése. Dubiczné Mile Katalin és Farkas Istvánné (szerk.), Az általános iskola alapozó szakaszának megújítása (pp. 27-44). Székesfehérvár: Fejér Megyei Pedagógiai Szakmai és Szakszolgáltató Intézet. https://docplayer.hu/20402379-Jozsa-krisztian-a-szamolasi-keszseg-fejlesztese.html Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Józsa Krisztián (2002). Tanulási motiváció és humán műveltség. In: Csapó Benő (szerk.), *Az iskolai műveltség,* (pp. 239–268). Osiris Kiadó.

Józsa Krisztián (2000). Az elsajátítási motiváció szerepe a kritériumorientált pedagógiában. *Új Pedagógiai Szemle,* 10.sz., 78–82.

Karmiloff-Smith, A. (1992a). *Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science*. MIT Press/Bradford Books.

Karmiloff-Smith, A. (1992b): Nature, nurture and PDP: Preposterous developmental postulates? *Connection Science, 4,* 253-269.

Karplus, R.., Pulos, S., & Stage, E.K. (1983a). Early adolescents' proportional reasoning on „rate" problems. *Educational Studies in Mathematics, 14,* 219-234.

Karplus, R.., Pulos, S. & Stage, E.K. (1983b). Proportional reasoning in early adolescents. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 45-90). Academic Press.

Kasten, P. (2002). The Importance of proportional Reasoning. http://ohiorc.org/for/math/ogt/article.aspx?articleId=16

Kelecsényi Rita és Csíkos Csaba (2013). Matematikával kapcsolatos tanulói meggyőződések kérdőívének empirikus vizsgálata. In Józsa Krisztián és Fejes József Balázs (szerk.), PÉK 2013. XI. Pedagógiai Értékelési Konferencia: CEA 2013 (p. 123). 11th Conference on Educational Assessment. Konferencia helye, ideje: Szeged, Magyarország, 2013.01.11-1013.04.13. Szeged: SZTE BTK Neveléstudományi Doktori Iskola.

Kelemen Rita (2004). Egyes háttérváltozók szerepe „szokatlan" matematikai szöveges feladatok megoldásában. *Iskolakultúra, 24*, 11.sz., 28-38.

Kelemen Rita (2010). A matematikai szövegesfeladat-megoldó képesség vizsgálata többségi és tanulásban akadályozott 9–13 éves tanulók körében. Doktori értekezés. Kézirat.Szeged.

Kelemen Rita és Csíkos Csaba (2008). A 3. osztályos tanulók körében, a matematikai szöveges feladatok területén végzett fejlesztő kísérlet eredményei (Előadás). VIII. Országos Neveléstudományi Konferencia: Program - Tartalmi összefoglalók, 179.

Keppel, G. (1991). *Design and Analysis: A Researcher's Handbook* (3rd Edition). New York: Prentice Hall, Englewood Clifts.

Kieran, C. (1992). Learning and teaching of school algebra. Kieran, C. & Grouws, D. (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). NewYork, NY: Simon & Schuster.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding it Up: helping children learn mathematics*. Washington DC: National Research Council.

Kintsch, W. (1988). The role of knowledge in discourse comprehension: A construction-integration model. *Psychological Review, 95,* 163–182.
Kiss Árpád (1961). Iskolás tanulóink tudásszintjének vizsgálata – Második közlemény. *Pedagógiai Szemle, 10*, 9.sz., 775-784.
Kontra József (2011). A pedagógiai kutatások módszertana. Kaposvári Egyetem. http://janus.ttk.pte.hu/tamop/kaposvari_anyag/kontra_jozsef/index.html Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Korom Erzsébet (1997). Naiv elméletek és tévképzetek a természettudományos fogalmak tanulásakor. *Magyar Pedagógia, 97* (1), 19-40.
Korom Erzsébet (1998). Az iskolai tudás és a hétköznapi tapasztalat ellentmondásai. In Csapó Benő (szerk.): *Az iskolai tudás*. Budapest: Osiris Kiadó. Letöltés: http://publicatio.bibl.u-szeged.hu/11931/1/CsBeno_Iskolai_tudas_2002.pdf
Korom Erzsébet (2017). A természettudományos műveltség fejlesztésének lehetőségei – a PISA-felmérések tanulságai http://mta.hu/tudomany_hirei/tanacskozas-a-pisa-eredmenyekrol-videon-az-mta-szekhazaban-rendezett-konferencia-107431 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Kosztolányi, J., Kovács, I., Pintér, K., Urbán, J., & Vincze, I. (2015). *Colourful Mathematics 9.* Mozaik Kiadó.
Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János dr. és Vincze István (2019). *Sokszínű matematika 9*. (9. kiadás). Mozaik Kiadó.
Kuhn, D., Schauble, L., & Garcia-Mila, M. (1992). Cross-domain development of scientific reasoning. *Cognition and Instruction, 9*(4), 285–327. https://doi.org/10.1207/s1532690xci0904_1 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Kouba, V. L. (1989). Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(2), 147–158. https://doi.org/10.2307/749279 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Lak Ágnes Rozina, Szepesi Ildikó, Takácsné Kárász Judit és Vadász Csaba (2019). Országos Kompetenciamérés Országos jelentés. Oktatási Hivatal. https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/meresek/orszmer2018/Orszagos_jelentes_2018_.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Lambdin, D. V., & Walcott, C. (2007). Connections between psychological learning theories and the elementary school curriculum. In G. Martin, & M. Strutchens (Eds.): The sixty-ninth annual yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics.
Lange, H. (2014). Rechnen ohne Taschenrechner. Verblüffende Rechentricks. (2. Auflage). mvg Verlag, Ebnen, & Spiegel.
Lankford, F. G. (1972). *Some computational strategies of seventh grade pupils*. University of Virginia. ERIC document.
Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate, peripheral participation. Cambridge University Press.
LeFevre, J.A., Bisanz, J., Daley, K. E., Buffone, L., Greenham, S. L., & Sadesky, G. S. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General, 125*, 284-306.
LeFevre, J., Smith, B. L., Hiscock, K., Daley, K. E., & Morris, J. (2013). Young adults' strategy

choices in simple arithmetic: Implications for the development of mathematical representations. In A. J. Baroody, & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Recent research and theory* (pp.203-228). Erlbaum.

Lemaire, P., & Siegler, R. S. (1995). Four aspects of strategic change: Contributions to children's learning of multiplication. *Journal of Experimental Psychology: General, 124*(1), 83–97. https://doi.org/10.1037/0096-3445.124.1.83

Lemaire, P., & Lecacheur, M. (2001). Older and Younger Adults' Strategy Use and Execution in Currency Conversion Tasks: Insights From French Franc to Euro and Euro to French Franc Conversions. *Journal of experimental psychology. Applied. 7*, 195-206. 10.1037/1076-898X.7.3.195.

Lemaire.P., & Reder, L. (1999). What affects strategy selection in arithmetic? The example of parity and five effectson product verification. *Memory & Cognition, 27* (2), 364-382.

Lénárd Ferenc (1963). *A problémamegoldó gondolkodás*. Akadémiai Kiadó.

Lindberg, S. M., Hyde, J. S., Petersen, J. L., & Linn, M. C. (2010). New trends in gender and performance in mathematics: A meta-analysis. *Psychological Bulletin, 136*, 1123–1135. doi: 10.1037/a0021276

Liu, R.-D. & Ding, Y. & Gao, B.-C. & Zhang, D. (2014). The Relations Between Number Property Strategies, Working Memory, and Multiplication in Elementary Students. *The Journal of Experimental Education, 83*, 1-25. 10.1080/00220973.2013.876606.

Lo, J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2007). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. *Journal of Mathematics.Teacher Education, 11* (1), 5-22. 10.1007/s10857-007-9056-6.

Majoros Mária (é.n.). *A matematikai gondolkodás leírásának történeti áttekintése*. Matematika Oktatási Portál. Fazekas Mihály Gimnázium. https://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20100101_cikkek_majorosmaria_matgondolkodas.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Mayer, R. E. és Hegarty, M. (1998). A matematikai problémák megértésének folyamata. In *A matematikai gondolkodás természete* (pp.41-63.). Vince Kiadó.

Mayer, R.E. és Hegarty, M. (1998). A matematikai problémák megértésének folyamata. In Sternberg-Ben-Zeev (szerk.), *A matematikai gondolkodás természete* (pp. 41-64). Vince Kiadó.

Marks, G. N. (2008): Accounting for the gender gaps in student performance in reading and mathematics: evidence from 31 countries. *Oxford Review of Education, 34.,* 89–109.

Márkus Attila (2003). *Számok, számolás, számolászavarok*. Pro Die Kiadó.

Marsh, H. W., Martin, A. J., and Cheng, J. H. (2008). A multilevel perspective on gender in classroom motivation and environment: Potential benefits of male teachers for boys? *Journal of Educational Psychology, 100*, 78–95. doi: 10.1037/0022-0663.100.1.78

Mátrai Zsuzsa (1997). *Középiskolai tantárgyi feladatbankok: Bevezetés.* In Középiskolai tantárgyi feladatbankok I. Mérés, Értékelés. Vizsga Sorozat 2. Országos Közoktatási Intézet.

McClelland, J.L., Rummelhart, D.E., & the PDP Research Group (1986). *Parallel Distributed Processing*. Explorations int he Microstructure of Cognition. Volume 2: Psychological and Biological Models. A Bradford Book.The MIT Press.

McCloskey, M., Caramazza, A., & Green, B. (1980). Curvilinear motion in the absence of external forces: Naive beliefs about the motion of objects. *Science, 210*, 1139–1141.

McIntosh, A.J. (1990). 'Becoming numerate: Developing number sense'. In S. Willis (Ed.), *Being Numerate: What Counts* (pp. 24–43). Australian Council for Educational Research.

McIntosch, A.J., Reys, R. E., & Reys, B.J. (1997). Mental Computation in the Middle Grades: The Importance of Thinking Strategies. *Mathematics Teaching in the Middle School Vol. 2, No. 5,* pp. 322-327. https://www.jstor.org/stable/41181582?seq=1 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

McMullen, J., Brezovszky, J., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, R. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences, 47,* pp. 172-181. 10.1016/j.lindif.2016.02.007 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Menne, J. J. M. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment*. [A productive training program for mathematically weak children in the number domain up to 100 – a design study]. CD-beta Press. http://pedagogischestudien.nl/search?identifier=616589 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Mérő László (2001). *Új észjárások. A racionális gondolkodás ereje és korlátai*. Tericum Kiadó.

Mitchelmore, M. C., & Mulligan, J.T (2016). *Pattern and Structure Mathematics Awareness Program: Book One-Foundation and Year1*. Austrian Council for Education Research. Acer Press.

Mittring, G. (2013). *Fit im Kopf mit Rechenweltmeister Dr. Dr. Mittring: Gedächtnistraining für jeden Tag von Kaffeekochen bis Schäfchenzählen.* Fischer Taschenbuch. S. Fischer Verlag GmbH.

Molitorisz Anikó (2011a). Hetedikes tanulók olvasási stratégiákra vonatkozó meggyőződéseinek mérése. In Hegedűs Judit, Kempf Katalin és Németh András (szerk.), XI. Országos Neveléstudományi Konferencia, Budapest, 2011. november 3-5. Közoktatás, pedagógusképzés, neveléstudomány – A múlt értékei és a jövő kihívásai, 163. Gondolat Kiadó.

Molitorisz Anikó (2011b). Tizedik évfolyamos szakközépiskolás tanulók tankönyvolvasási meggyőződései. *Iskolakultúra, 21*, 6–7. sz. 157–165.

Molitorisz Anikó (2012a). Tankönyvolvasási stratégiák vizsgálata 12–18 éves tanulók körében. *Anyanyelvpedagógia, 5*, 1. sz. http://www.anyp.hu/cikkek.php?id=375 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Molitorisz Anikó (2012b). Tizenegyedikes tanulók tankönyvolvasási stratégiái. *Valóság, 55*, 9. sz., 90–100.

Molnár Gyöngyvér (2006). *Tudástranszfer és komplex problémamegoldás*. Műszaki Kiadó.

Mosonyi Kálmán (1972). *Gondolkodási hibák az általános iskolai matematika órákon*. Tankönyvkiadó.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J. & Highfield, K. (2008). *Encouraging Mathematical Thinking through Pattern & Structure: An Intervention in the First Year of Schooling*. Australian Primary Mathematics Classroom.

Mulligan, J.T., & Mitchelmore, M.C. (1997). Young Children’s Intuitive Models of Multiplication and Division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Mulligan, J.T. & Mitchelmore, M. C. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. Mathematics Education Research Journal, 21(2), 33-49. Mathematics Education Research Journal. 21. 33-49. 10.1007/BF03217544.

Mulligan, J.T., Mitchelmore, M. C., & Prescott, A. (2005). *Case studies of children's* *development of structure in early mathematics: A two-year longitudinal study*. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 4 (pp. 1-9). Melbourne: The University.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Gonzales, E. J., & Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 international maths report: Findings from IEA'S trends in international mathematics and science study of the fourth and eight grades*. Boston College.

Nagy József (1973). Alapműveleti számolási készségek. Acta Universitatis Szegediensis de József Attila Nominatae, Sectio Paedagogica Series Specifica 1., Standardizált képességmérő tesztek. József Attila Tudományegyetem.

Nagy József (1975). *A témazáró tesztek reliabilitása és validitása. Standardizált témazáró tesztek*. JATE, Pedagógiai Tanszék.

Nagy József (1980). *5-6 éves gyermekeink iskolakészültsége*. Budapest: Akadémiai Kiadó.

Nagy József (1999). A kognitív készségek és képességek fejlesztése. *Iskolakultúra, 9*(1), 14-26. http://www.iskolakultura.hu/index.php/iskolakultura/article/view/18982 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Nagy József (2000). *XXI.század és nevelés*. Osiris Kiadó.

Nagy József (2007). *Kompetencia alapú kritérium orientált pedagógia*. Szeged: Mozaik Kiadó.

Nagy József, Józsa Krisztián, Vidákovich Tibor és Fazekasné Fenyvesi Margit (2004). In Nagy József (szerk.), *Az elemi alapkészségek fejlődése 4-8 éves életkorban: az eredményes iskolakezdés hét kritikus alapkészségének országos helyzetképe és a pedagógiai tanulságok: DIFER perogramcsomag*. Mozaik Kiadó.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Principles and standards for school mathematics*. Reston.101: National Council of Teachers of Mathematics

Nelson, T. O. (1996). Consciousness and metacognition. *American Psychologist, 51*, 102-116.

Nemzeti Alaptanterv (2012). *Magyar Közlöny, 66. sz*., 10635-10847.o. www.magyarkozlony.hu/pdf/13006 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

NAT (2020). A Kormány 5/2020. (I. 31.) Korm. rendelete a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 110/2012. (VI. 4.) Korm. rendelet módosításáról. *Magyar Közlöny, 17.sz*., 2020.január 31., 290-446. Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Nikolov Marianne (2003). Angolul és németül tanuló diákok nyelvtanulási attitűdje és motivációja. *Iskolakultúra, 13*, 8. sz. 61–73.

Northcote, N. & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life? *Australian Primary Mathematics Classroom, 4* (1), 19–21.

NSW Department of Education & Training (2001). *Count Me In Too: Professional development package*. Author.

Numeracy = Everyone's Business. The Report of the Numeracy Education Strategy Development Conference (May 1997). Numeracy Education Strategy Development Conference, Adelaide, Australian Association of Mathematics Teachers.

Nunes T., Bryant, P., & Watson, A. (2009). Key understandings in mathematics learning Nuffield Foundation. https://www.nuffieldfoundation.org/wp-content/uploads/2019/12/P2.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Nussbaum, J., & Novak, J. D. (1976). An assessment of children's concepts of the Earth utilizing structured interviews. *Science Education, 60*, 535-550.

Nuus.hu Kiadó (2019). Van olyan, hogy kollektív hangyatudat?

https://nuus.hu/wp-content/uploads/hangya_11111892_m-820x521.jpg Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Nyström, A.-S. (2012). *Att synas och lära utan att synas lära. En studie om underprestation och privilegierade unga mäns identitetsförhandlingar i gymnasieskolan*. Uppsala universitet.
OECD (2013). PISA 2012 Results: Ready to Learn: Students' Engagement, Drive and SelfBeliefs. Vol. III, OECD Publishing.
OECD (2019). *PISA 2018 Results.* COMBINED EXECUTIVE SUMMARIES VOLUME I, II & III
https://www.oecd.org/pisa/Combined_Executive_Summaries_PISA_2018.pdf
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
OFI (2012a). *51/2012.(XII.21.) számú EMMI rendelet 1. melléklete: Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára: Matematika*. Budapest. https://kerettanterv.oh.gov.hu/01_melleklet_1-4/index_alt_isk_also.html Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
OFI (2012b). *51/2012.(XII.21.) számú EMMI rendelet 2. melléklete: Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára: Matematika*. https://kerettanterv.oh.gov.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Oktatási Hivatal (2019). *PISA 2018 Összefoglaló jelentés.*
https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/pisa/PISA2018_v6.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Orosz Gyula és Majoros Mária (1997). *Tehetséggondozás matematikából*. Általános iskolások számára. Tóth Könyvkereskedés és Kiadó Kft.
Országos kompetenciamérés 2018, 2014, 2015, FIT-jelentés. Intézményi jelentések 6. évfolyam.
Intezmenyi_027777_06_OKM2018,
Intezmenyi_029083_06_OKM2018,
Intezmenyi_029086_06_OKM2018,
Intezmenyi_029086_06_OKM2015,
Intezmenyi_029086_06_OKM2014,
Intezmenyi_202993_06_OKM2018,
Intezmenyi_201722_06_OKM2018,
Intezmenyi_031190_06_OKM2018,
Intezmenyi_037116_06_OKM2018,
Intezmenyi_201170_06_OKM2018,
Intezmenyi_035250_06_OKM2018,
Intezmenyi_201632_06_OKM2018.
KIR Tanügyigazgatási szakportál – Az országos mérések eredményei (2008-tól kezdődően) https://www.kir.hu/okmfit/kereso.aspx?t=i Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Ostorics László, Szalay Balázs, Szepesi Ildikó és Vadász Csaba (2016): *PISA 2015 Összefoglaló jelentés*.
https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/nemzetkozi_meresek/pisa/PISA2015_osszefoglalo_jelentes.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Informatiemap voor de onderwijspraktijk. Gewoon

basisonderwijs (1998). [Standards. Documentation for practitioners. Elementary education.] Brussel: Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, Departement Onderwijs, Afdeling Informatie en Documentatie.

Paulson, E. J., & Jenry, J. (2002). Does the degrees of reading power assessment reflect the reading process? An eye-movement examination. *Journal of Adolescent & Adult Literacy, 46*, 234-244.

Payne, J.W., Bettman, J.R., & Johnson, E.J. (1988). Adaptive Strategy Selection in Decision Making. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 14,* 534-552.

Payne, S., & Squibb, H. (1990). Algebra mal-rules and cognitive accounts of error. *Cognitive Science, 14,* 445–481.

Pedagógiai Program (2014). Magyar Táncművészeti Főiskola Nádasi Ferenc Gimnáziuma és Kollégiuma. http://www.mtf.hu/gimi/download/1386670014.pdf Utolsó letöltés: 2017.12.12.

Pedagógiai Program (2015). Budapest XVII. Kerületi Kőrösi Csoma Sándor. Általános Iskola és Gimnázium. http://www.kcss.hu/korosi/userfiles/PP_K%C5%91r%C3%B6si_2015_OH.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Pedagógiai Program (2016). Budapest: Klebelsberg Intézményfenntartó Központ Budapest XVII. Kerületi Balassi Bálint Nyolcévfolyamos Gimnázium. http://www.balassi-bp.hu/images/dokumentumok/2016-2017/pedp_2015.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Pelle Anita (2013). *A Duna régió stratégia országainak versenyképessége*. Nemzeti Kiválóság Program, Duna Stratégia zöld minikonferencia, 2013. október 8. http://nemzetikivalosag.hu/documents/17142/282626/2.1+PelleA.pdf/bfe5425a-4aa1-4570-9c6f-e34227632775 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Penner, A. M., Paret, M. (2008). Gender differences in mathematics achievement: Exploring the early grades and the extremes. *Social Science Research*, *37*., 239-253.

Petz Tiborné (2017). *Kompetenciaalapú matematikaoktatás megvalósulása és kritikus pontjai a tanítóképzésben*. Doktori disszertáció. Eszterházy Károly Egyetem. https://ntdi.uni-eszterhazy.hu/public/uploads/doktori-disszertacio-petz-tiborne-eke_5b3b47ba99bf5.pdf

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence,* New York: Basil Books, Inc.

Pólya György (1945/1969). *How to Solve It. A system of thinking which can help you solve any problem.* Princeton University Press, 1945. Magyarul: *A gondolkodás iskolája*. Gondolat Kiadó.

Pósa Lajos (1990). *Vegyes feladatok munkafüzet, I. osztály*. Kézirat gyanánt. Matematika-Módszertani Kutatócsoport, Calibra Kiadó.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. J. Ès Gertzog, W. A. (1982): Accomodation of a scientific conception: Toward a theory of a conceptual change. *Science Education, 66,* 211-227.

Pléh Csaba (2003). *A pszichológiaoktatás kérdései*. Gondolat Kiadó.

Pléh Csaba (2010). *A lélektan története*. (2. bővített kiadás). Osiris Kiadó.

Prievara Tibor (2015). *A 21. századi tanár. Egy pedagógiai szemléletváltás személyes története*. Modern Pedagógus Sorozat. Neteducatio Kft.

QCA (Qualifications and Curriculum Authority, 2008). *National Curriculum for Mathematics*

curriculum. Annual Report and Accounts 2008–09.
https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/229260/0634.pdf
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

QCDA (Qualifications and Curriculum Development Agency, 2009). Engaging mathematics for all learners https://dera.ioe.ac.uk/8950/7/Engaging_mathematics_Redacted.pdf
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Radach, R. & Kennedy, A. (2004). Theoretical perspectives on eye movements in reading: past controversies, current issues, and an agenda for future research Radach, R., Kennedy, A., & Rayner, K. (Eds.), *Eye movements and information processing during reading* (pp. 3-26) Psychology Press.

Radó Péter (2019). *PISA 2018: Hol a gödör alja?*
Tani-tani Online, 2019. dec. 04. http://www.tani-tani.info/pisa_2018_hol_a_godor_alja
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Rayner, K. (1998). Eye movements and information processing: 20 years of research. *Psychological Bulletin*, *124* (3), 372-422.

K. Rayner, K.H. Chace, T.J. Slattery, J. Ashby (2006): Eye movements as reflections of comprehension process in reading. *Scientific Studies of Reading*, *10* (3), 241-255.

Reusser, K. (2000). Success and failure in school mathematics: effect of instruction and school environment. *European Child and Adolescent Psychiatry, 9*. Steinkopff Verlag http://www.psy.cmu.edu/~siegler/sieglershipley95.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction, 7,* 309-328.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R., & Alibali, M. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*, 346-362. 10.1037//0022-0663.93.2.346.
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Robinson, J. P., & Lubienski, S. T. (2011). The development of gender achievement gaps in mathematics and reading during elementary and middle school: Examining direct cognitive assessments and teacher ratings. *American Educational Research Journal*, *48*, 268–302. doi: 10.3102/0002831210372249

Robinson, K. S. (2015). Creative Schools: The Grassroots Revolution That's Transforming Education (with Lou Aronica). Penguin.

Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2010). Természettudományos nevelés ma: megújult pedagógia Európa jövőjéért: vezetői összefoglaló. *Iskolakultúra*, *20*(12), 13-30. Elérés forrás http://www.iskolakultura.hu/index.php/iskolakultura/article/view/21099

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking*. Oxford University Press.

Romberg, T. A. (1992, szerk.). *Mathematics assessment and evaluation: Imperatives for mathematics education*. SUNY Press.

Rózsa Sándor, Nagybányai Nagy Olivér és Oláh Attila (2006, szerk). *A pszichológiai mérés alapjai. Elmélet, módszer és gyakorlati alkalmazás*. Bölcsész Konzorcium. http://gepeskonyv.btk.elte.hu/adatok/Pszichologia/110R%F3zsa/A%20pszichol%F3giai%20m%E9r%E9sa%20alapjai%20_R%F3zsa,%20Nagyb%E1nyai%20%E9s%20Ol%E1h_2006.pdf
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Samuelsson, M., & Samuelsson, J. (2016). Gender differences in boys' and girls' perception of teaching and learning mathematics, *Open Review of Educational Research, 3*(1), 18-34, DOI: 10.1080/23265507.2015.1127770

Schillemans, V., Luwel, K., Bulté, I., Onghena, P., Verschaffel, L. & Verschaffel, K. (2009). The Influence of Previous Strategy Use on Individuals' Subsequent Strategy Choice: Findings from a Numerosity Judgement Task. *Psychologica Belgica. 49. 49-4*. 10.5334/pb-49-4-191.

Schoenfeld, A.H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A.H. Schoenfeld (Ed.), Cognitive Science and Mathematics Education, chapter 8, 189-215. Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J.F. Voss, D.N. Perkins, & J.W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311–343). Erlbaum.

Selter, C. (1998). Building on children's mathematics. A teaching experiment in grade three. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 1–27. https://doi.org/10.1023/A:1003111425076 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Selter, C. (2009). Creativity, flexibility, adaptivity, and strategy use in mathematics. *ZDM Mathematics Education, 41*, 619-625.

Shaughnessy, J. M. (1985). Problem-solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In E.A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 399–415). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Shrager, J., & Siegler, R. S. (1998). SCADS: A model of children's strategy choices and strategy discoveries. *Psychological Science, 9*(5), 405–410. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00076
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Siegler, R. S. (1986). Strategy Choice Procedures and the Development of Multiplication Skills. *Journal of experimental psychology, General, 117*, 258-75.10.1037/0096-3445.117.3.258.

Siegler, R. S. (1987). The perils of averaging data over strategies: An example from children's addition. *Journal of Experimental Psychology: General, 116*(3), 250–264. https://doi.org/10.1037/0096-3445.116.3.250

Siegler, R. S. (1988). Strategy choice procedures and the development of multiplication skill. *Journal of Experimental Psychology: General, 117*(3), 258–275. https://doi.org/10.1037/0096-3445.117.3.258 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Siegler, R.S. (2000). The Rebirth of Children's Learning. *Child Development, 71*(1), 26-35.

Siegler, R.S. (2003). Implications of cognitive science research for mathematics education. In Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. E. (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 119-233). National Council of Teachers of Mathmatics.

Siegler, R.S. (2005). Children's learning. *American Psychologist, 60,* 769-778.

Siegler, R.S. (2007). Cognitive variability. *Developmental Science, 10*, 104-109.

Siegler, R.S., & Araya, R. (2005): A computational model of conscious and unconscious strategy discovery. In R. V. Kail (Ed.): *Advances in child development and behaviour, 33,* 1-42. Elsevier.

Siegler, R., & Jenkins, E (1989). *How children discover new strategies*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. https://psycnet.apa.org/record/1989-98401-000 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126*(1), 71–92. https://doi.org/10.1037/0096-3445.126.1.71

Siegler, R.S., & Lin, X. (2010). Self-explanations promote children's learning. In Salatas Waters, H., & Schmeider, W. (Eds.), *Metacognition, strategy use, and instruction* (pp. 85-112). The Guilford Press.

Siegler, R. S., & McGilly, K. (1989). Strategy choices in children's time-telling. In I. Levin, & D. Zakay (Eds.), *Advances in psychology, 59. Time and human cognition: A life-span perspective* (p. 185–218). North-Holland. https://doi.org/10.1016/S0166-4115(08)61042-0 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Siegler, R.S., & Robinson, M. (1982). The development of numerical understandings. In H. W. Reese, & L.P. Lipsitt (Eds.), *Advances in child developmnet and behaviour, Vol. 16*. New York: Academic Press.

Siegler, R. S., & Shipley, C. (1995). Variation, Selection and Cognitive Change. In T.J. Simon, & G. S. Halford (Eds.), *Developing cognitive competence: New approaches to process modelling* (pp. 31-76). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Siegler, R. S., & Shrager, J. (1984). Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do? In C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills* (pp. 229–293). Erlbaum.

Siemon, D., Beswick, K., Brady, K., Clark, J., Faragher, R. Warren, E. (2011). *Teaching Mathematics: Foundations to Middle Years*. OUP Australia & New Zealand.

Sievert, H., van den Ham, A.-K., Niedermeyer, I., & Heinze, A. (2019). Effects of mathematics textbooks on the development of primary school children's adaptive expertise in arithmetic. *Learning and Individual Differences, 74*. 101716. 10.1016/j.lindif.2019.02.006. Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Sleeman, D. (1984). An attempt to understand students' understanding of basic algebra. *Cognitive Science, 8*, 387–412.

Smith, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*, 115–163.

Smith, E. E., & Swinney, D. A. (1992). The role of schemas in reading text: A real-time examination. *Discourse Processes,15*, 303–316.

Spelke, E. S. (2005) Sex Differences in Intrinsic Aptitude for Mathematics and Science? A critical review. *American Psychologist, 60*(9), 950-958.

Star, J.R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B., & K. Durkin (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology, 41*, 198-208, 10.1016/j.cedpsych.2015.03.001 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Steklács János (2009). *Az olvasás kis kézikönyve szülőknek, pedagógusoknak. Hogyan olvas(s)unk? A funkcionális analfabetizmustól az olvasási stratégiákig*. Okker Kiadó.

Steklács János (2013). *Olvasási stratégiák tanítása, tanulása és az olvasásra vonatkozó meggyőződés*. Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó.

Steklács János (2014). A szemmozgás vizsgálatának lehetőségei az olvasás és a vizuális információfeldolgozás képességének a megismerésében. *Anyanyelv─Pedagógia 7*(3), 2. http://www.anyanyelv-pedagogia.hu/cikkek.php?id=524 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Steklács János (2017). A szövegértés fejlesztésének feladatai – következtetések a PISA-felmérések alapján.

http://mta.hu/tudomany_hirei/tanacskozas-a-pisa-eredmenyekrol-videon-az-mta-szekhazaban-rendezett-konferencia-107431 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (1998). *A matematikai gondolkodás természete*. Budapest: Vince Kiadó.
Stigler, J., Fernandez, C., & Yoshida, M. (1996). Cultures of mathematics instruction in Japanese and American elementary classrooms. In T. Rohlen, & G.K. LeTendre (Eds.), *Teaching and learning in Japan* (pp. 213–247). Cambridge University Press.
St. George, M., Mannes, S., & Hoffman, J. E. (1994). Global semantic expectancy and language comprehension. *Journal of Cognitive Neuroscience, 6*, 70–83.
Solow, R. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics, Vol. 39*, 3., 312-320. http://faculty.georgetown.edu/mh5/class/econ489/Solow-Growth-Accounting.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Szalma Erika (2019). *Matematikatanár szeretne lenni Jázmin, a fejben számoló kislány.* https://nlc.hu/ezvan/20190615/fejben-szamolo-zseni-kislany/ Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Szeliánszky Ferenc (1938). *A hibakutatás neveléslélektani problémái*. I. kötet 1938. Közlemények a Szegedi Ferencz József-Tud, Egy. Ped.-Lélektani Intézetéből. 26. szám. Intelligencia és iskolai teljesítmény. Különlenyomat a szegedi m. kir. áll. Baross Gábor gimn. 1937/38. évi értesítőjéből.
Szendrei Julianna (2005). *Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek.* Budapest: Typotex Kiadó.
Szenes Adolf (1904). *Gyakorlati gyorsszámoló*. Franklin.Társulat Magyar Irodalom Intézet és Könyvnyomda.
Szenes Adolf (1934): *A tanuló tipikus számolási hibái és elhárítási módja*. Prometheus-nyomda és Könyvkiadóvállalat.
Thomas, K. W. (2002). *Intrinsic Motivation at Work - Building Energy and Commitment: Building Energy and Commitment*. USA: Berrett-Koehler Publishers, Inc.
Thompson, I. (1999). Getting your head around mental calculation. In I. Thompson (Ed.), Issues in teaching numeracy in primary schools (pp. 145–156). Buckingham: Open University Press.
Thorne, B.M és Henley, T.B. (2000). *A pszichológia története*. Budapest: Glória Kiadó.
Thorndyke, P. W. (1977). Cognitive structures in comprehension memory of narrative discourse. *Cognitive Psychology, 9,* 77–110.
Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM - International Journal on Mathematics Education, 41*, 541-555. 10.1007/s11858-009-0195-3.
Trivett, J. (1980). The multiplication table: Tobe memorized or mastered? *Fort he Learning of Mathematics, 1*(1), 21-25.
Toffler, A. (1970). *Future Shock*. Random House.
Torbeyns, J., Smedt, B. de, Ghesquière, P. & Verschaffel, L. (2009). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally-schooled children. *Educational studies in mathematics, 7,*(1), 1-17.
Tóth László (2006). *A tehetségfejlesztés kisenciklopédiája*. Debrecen: Pedellus tankönyvkiadó.
Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1990). *Proeve van een national programma voor het reken/wiksundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen*. [Towards a national curriculum for mathematics education in the elementary school. part 1. Overview of the goals.] Zwijsen, Tilburg.
Tronsky, L. N. (2005). Strategy Use, the Development of Automaticity, and Working Memory

Involvement in Complex Multiplication. *Memory & Cognition, 33,* 927-940. http://link.springer.com/article/10.3758/BF03193086#page-1

Tversky, A., & Kahnemann, D. (1974). Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. *Science, 185,* 1124-1131. Washington. D.C.

Van der Heijden, M. K. (1993) *Consistentie van aanpakgedrag*. [Consistency in solution behavior.]. Swets & Zeitlinger.

VanLehn, K. (1983). On the representation of procedures in Repair Theory. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The developmnet of mathematical thinking* (pp. 201-252). Academic Press.

VanLehn, K. (1986). Arithmetic procedures are induced from examples. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 133–179). Erlbaum.

VanLehn, K. (1990). *Mind bugs. The orogin of procedural misconceptions*. MIT Press.

Varga János (2013). „Dunán innen – együttműködésen túl" – Hálózatok és partnerkapcsolatok a Duna régió versenyképességének szolgálatában. Nemzeti Kiválóság Program, Duna Stratégia zöld minikonferencia, 2013. október 8. http://nemzetikivalosag.hu/documents/17142/282626/2.2+VargaJ.pdf/7e646ae3-7f06-4684-b692-d021e9564bd8 Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Varga János (2014). *A versenyképesség többszintű értelmezése és az innovációval való összefüggései*. Doktori (PhD) értekezés tézisei. Gödöllő: Szent István Egyetem. https://szie.hu//file/tti/archivum/Varga_Janos_tezis.pdf
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Varga Tamás (1971). A kivételesek vannak többen. *Köznevelés, 9*.

Vári Péter és Krolopp Judit (1997). Egy nemzetközi felmérés főbb eredményei (TIMSS). Új *Pedagógiai Szemle, 47*(4), 57–76.

Vaszari Tamás (2013). *A tudásgazdaság korába léptünk.*
http://www.hrportal.hu/hr/a-tudasgazdasag-koraba-leptunk-20130910.html
Utolsó letöltés: 2021. 05.09.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare word problems: as eye movement test of Lewis and Mayer's consistency hypothesis. Journal of Educational Psychology, 84, 85-94.

Verschaffel, L., Greer, B. és De Corte, E. (2007): Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Information Age Publishing.

Verschaffel, L., Greer, B., & Torbeyns, J. (2006). Numerical thinking. *Handbbok of Research ont he Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds), PME 1976-2006, 51-82. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publischers.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J. & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. European Journal of *Psychology of Education, 24* (3), 335-359, 10.1007/BF03174765

Verschaffel, L., Torbeyns, J., Luwel, K., Van Dooren, W. & De Smedt, B. (2007). A stratégiahasználat rugalmassága az alsótagozatos matematikában: elemzés és fejlesztés. *Iskolakultúra, 17*, 11-12.sz., 92-102.

Verschaffel, L., Torbeyns, J, De Smedt, B., & Van Dooren, W. (2007). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational & Child Psychology, 24*.(2), 16-27. The British Psychological Society.

Vidákovich Tibor (1989). A 4-5 éves gyermekek vizsgálatára használt eszközök rendszerének elemzése. In Gerebenné Várbíró Katalin és Vidákovich Tibor (szerk.), *A differenciált beiskolázás néhány mérőeszköze: A Bender A-, a Budapesti Binet-, A Frostig-, a*

Goodenough-, a SON- és a PREFER-tesztek összahasonlító vizsgálata (pp. 117-127). Akadémiai Kiadó.
Vidákovich Tibor (2008). Kerettanterv Általános iskola és középiskola 3–12. évfolyam, több műveltségterületet érintő fejlesztés. Baldaváriné Juhász Éva, Scheidl Róbert, Hodossy Attila, Kiss Gábor közreműködésével Matematikai kompetenciaterület. http://www.kooperativ.hu/matematika/2_tantervek/Kerettantervek/Kerettanterv_matematika_B_3-12%20evf.pdf Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Vidákovich Tibor (2013). Kompetenciákon alapuló korszerű oktatás a középiskolákban - a Magyar Nemzeti Tanács, a szabadkai Vajdasági Módszertani Központ és a magyarkanizsai Regionális Szakmai Pedagógus-továbbképző Központ közös nemzetközi konferenciája. 2013.06.06., Szabadka, Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar. https://www.youtube.com/watch?v=PTP_6HBJYnQ Utolsó letöltés: 2021. 05.09.
Vidákovich Tibor és Csapó Benő (1998). A szövegesfeladat- megoldó készségek fejlődése. In Budai Ágnes és Varga Lajos (szerk.), *Közoktatás-kutatás 1996-1997* (pp. 247-273). Művelődési és Közoktatási Minisztérium.
Vidákovich Tibor és Csíkos Csaba (2009). A tanulók matematika tudásának alakulása – nemzetközi és hazai vizsgálatok. In Fazekas Károly (szerk.), *Oktatás és foglalkoztatás*. Magyar Közgazdaságtudományi Intézet.

AZ ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖRÉBEN MEGJELENT PUBLIKÁCIÓK

Vígh-Kiss, E.R. (2013a). Adaptive Strategy Use in Mathematics Education. In J. T. Karlovitz (Ed.), *Questions and perspectives in education*, (pp. 342-352). International Research Institute.
Vígh-Kiss Erika (2013b). Adaptív stratégiahasználat a matematikaoktatásban. In Józsa Krisztián és Fejes József Balázs (szerk.), *PÉK 2013. XI. Pedagógiai Értékelési Konferencia: CEA 2013. 11th Conference on Educational Assessment* (p.118). SZTE BTK Neveléstudományi Doktori Iskola.
Vígh-Kiss, E. (2014a). Advocy and support for mathematically talented adolescents (aged 14-18): Matematikai tehetség gondozása 10-18 éves korban. In M. Takács, G. Czékus, & L. Major (Eds.), *3rd International Methodologocal Conference: The influence of teaching methodology ont he quality teacher and preschool teacher training. Abstracts*, p.43. Újvidéki Egyetem Magyar Tannyelvű Tanítóképző Kar.
Vígh-Kiss, E.R. (2014b). The Development of mathematical Gifted Students. In J.T. Karlovitz (Ed.), *2nd IRI International educational conference: abstracts*, p. 64. Komárno: International Research Institute.
Vígh-Kiss, E.R. (2014c). The Development of Talented Students. In J.T. Karlovitz (Ed.), *PRACTICE AND THEORY IN SYSTEMS OF EDUCATION* (pp. 350-356). Elérés forrás: http://eduscience.fw.hu/3007VighKissErika.pdf
Vígh-Kiss, E.R. (2014d). 14-18 éves tanulók adaptív készséghasználatának vizsgálata In Korom Erzsébet és Pásztor Attila (szerk.), *PÉK 2014: XII. Pedagógiai Értékelési Konferencia: program, előadás-összefoglalók*, p. 177. SZTE BTK Neveléstudományi Doktori Iskola.
Vígh-Kiss, E.R. (2014e). 14-18 year old students' use of adaptive skills. In A. Engin (Ed.), *METAcognition: 6th Biennal Meating of the EARLI Special Interest Gruop 16*, 2014.09. 03-2014.09.06, p. 154. Istanbul: Bogaziçi University.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2015a). Tudás és gazda(g)ság: A gazdasági versenyképesség és az oktatás kapcsolata. Új Kép: Pedagógusok és Szülők folyóirata, pp. 7-17.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2015b). A metakogníció körében végzett legújabb kutatások eredményei: Beszámoló az EARLI Metacognition szakcsoportjának SIG, Special Interest Group) 2014-es konferenciájáról. *Iskolakultúra: Pedagógusok szakmai tudományos folyóirata 25*(12), 121-133.
Elérés forrás: http://www.iskolakultura.hu/index.php/iskolakultura/article/view/21741

Vígh-Kiss Erika Rozália (2015c). A szorzási stratégiák vizsgálata negyedik osztályos tanulók körében a szemmozgás-elemzés módszerével. In Zs. Buzás, I. Devosa, J. Steklács, & Á. Maródi (Eds.), *Nemzetközi Szemmozgáskutatás Konferencia: International Conference on Eye Movements 2015*, 5. Kecskeméti Főiskola Tanítóképző Főiskolai Kar.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2015d). 10-12 éves tanulók szorzási stratégiáinak vizsgálata. In Tóth Péter, Holik Ildikó és Tordai Zita (szerk.), *Pedagógusok, tanulók, iskolák- az értékformálás, az értékközvetítés és az értékteremtés világa: tartalmi összefoglalók: XV. Országos Neveléstudományi Konferencia*, 320. Óbudai Egyetem.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2016a). Development of 11-12 years−old children's multiplication strategies. In Cs. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: PME 40*, 260. Szeged: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2016b). A segítés értelmezése a matematika tanítása során. In Buda András és Kiss Endre (szerk.), *Interdiszciplináris pedagógia és az oktatási rendszer újraformálása*: A IX. Kiss Árpád Emlékkonferencia előadásainak szerkesztett változata (pp. 374-382). Kiss Árpád Archívum Könyvtára, DE Neveléstudományok Intézete.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2016c). 11-12 éves tanulók szorzási stratégiáinak fejlesztése. In Zsolnai Anikó és Kasik László (szerk.), *A tanulás és nevelés interdiszciplináris megközelítése: XVI. Országos Neveléstudományi Konferencia*, Szeged, 2016. november 17-19.: program és absztraktkötet, 356. MTA Pedagógiai Bizottság, SZTE BTK Neveléstudományi Intézet.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2017a). A fejben számolás stratégiáinak vizsgálata hatodik évfolyamos tanulók körében. In Talata István (szerk.), *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája: MAFIÓK 2017*, 42. Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2017b). A fejben számolás stratégiáinak vizsgálata hatodik évfolyamos tanulók körében. In Talata István (szerk.), *Matematikát, Fizikát és Informatikát Oktatók 41. Országos Konferenciája: MAFIÓK 2017* (pp. 261-266). Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2017c). Az IKT eszközök használatának lehetőségei a matematikaoktatásban. In [s. n.] (szerk.), *Innováció, kutatás, pedagógusok. HUCER 2017: Absztraktkötet*, 241. Magyar Nevelés- és Oktatáskutatók Egyesülete, Hungarian Educational Research Association (HERA).

Vígh-Kiss Erika Rozália (2017d). Oktatás – Egészség – Tudásgazda(g)ság. In I. Devosa, Á. Maródi, Zs. Buzás, & J. Steklács (Eds.), *International HEART 2017 Conference: Program and abstracts of the conference*, pp. 29-30. Kecskemét: Pallasz Athéné Egyetem.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2017e). Hatodik évfolyamos tanulók szorzási stratégiáinak vizsgálata. In Kerülő Judit, Jenei Teréz és Gyarmati Imre (szerk.), *XVII. Országos Neveléstudományi Konferencia*, 528. MTA Pedagógiai Tudományos Bizottság, Nyíregyházi Egyetem.

Vígh-Kiss Erika és Buzás Zsuzsanna (2017). Metakognitív stratégiák a tanulási folyamatban. In Janurik Márta és Szabó Norbert (szerk.), *III. Digitális Zenepedagógiai és Szakmódszertani Konferencia*, 15. JATEPress Kiadó.

Vígh-Kiss Erika Rozália (2019). OKTATÁS – TUDÁS – GAZDA(G)SÁG. In Devosa Iván (szerk.), *Aszklépiosz tanulmányok 2019* (pp. 5-21). Neumann János Egyetem, Pedagógusképző Kar.

Vígh-Kiss Erika, Csíkos Csaba és Steklács János (2013). Negyedikes tanulók adaptív készséghasználatának vizsgálata a szemmozgás-elemzés módszerével. In Bárdos Jenő, Kis-Tóth Lajos és Racskó Réka (szerk.), *XIII: Országos Neveléstudományi Konferencia: Változó életformák – Régi és új tanulási környezetek: Absztraktkötet*. Konferencia helyszíne: Eger, Magyarország, 2013.11.06-2016.11.09. Líceum Kiadó, 2013.p71.

Vígh-Kiss Erika, Csíkos Csaba és Steklács János (2019). Negyedik osztályos tanulók szorzási stratégiáinak vizsgálata szemkamerás módszerrel. In Steklács János (szerk.), *Szemkamerás vizsgálatok a pedagógiai kutatásban: Tanulmánykötet* (pp. 119-131). Kaposvári Egyetem Pedagógiai Kar.

Vincze Szilvia (2003). A matematikai képeség összetevőinek vizsgálata és kapcsoalta az intelligenciával. *Magyar Pedagógia, 103,* 2. sz. 229–261. Elérés forrás: http://www.magyarpedagogia.hu/document/Vince_MP1032.pdf

Wandt, E. & Brown, G. W. (1957). Non-occupational uses of mathematics: Mental and written — approximate and exact. *Arithmetic Teacher, 4*(4), 151–154.

Wiley, J. & Rayner,K. (2000). Effects of titles on the processing of text and lexically ambiguous words: Evidence from eye movements. *Memory & Cognition 28* (6). 1011-1021.

Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (1990–1992). *Handbuch produktiver rechenübungen*. Vols 1 & 2 [Handbook of productive arithmetic exercises. Volume 1 & 2]. Klett Verlag.

Wong, M., & Evans, D. (2007). Improving Basic Multiplication Fact Recall for Primary School Students. *Mathematics Education Research Journal, 19* (1), 89–106.

Xu, L., Liu, R.-D., Star, J.R., Wang, J., Liu, Y., & Zhen, R. (2017). Measures of potential flexibility and practical flexibility in equation solving. *Frontiers in Psychology, 8,* 1368, 10.3389/fpsyg.2017.01368

ÁBRÁK JEGYZÉKE

TÁBLÁZATOK JEGYZÉKE

MELLÉKLETEK JEGYZÉKE

MELLÉKLETEK

1. sz. melléklet. A fejben végzett osztás során alkalmazott stratégiák.

(forrás: Heirdsfield, Cooper, Mulligan & Irons, 1999. 91.o.*)*

Kategóriák	A stratégia leírása	Példák
Counting (CO) *Számlálás*	A számlálás formái, előre, hátra, összeadás, kivonás, felezés, duplázás	96 : 4 kiszámítása: 4,8,12… 96 : 4: az 96 fele, majd 48 fele 121:11 kiszámítása: 11, 22, 33
Basic fact (BF) *Tényeken alapuló*	Szorzótábla ismeretén alapuló	96 :4 kiszámítása: 4 x ? = 96, 24 96 : 4 kiszámítása másképp: 4 · 20 = 80, 4 · 4 = 16, így 24 · 4 = 96 121 : 11 kiszámítása: 1 – 2 + 1 = 0, így 121 : 11 = 11 121 : 11 kiszámítása: 11 · 10 = 110, 1 · 11 = 11, így 121 : 11 = 11 121 : 11 kiszámítása: 9 · 11 = 99, 2 · 11 = 22, így 121 : 11 = 11
RL separated (RLS) *Jobbról balra*	Helyiérték szerint elválasztva, jobbról balra	96 : 4 kiszámítása: 6 : 4 = 1, (2), 9 : 4 = 2, (1), 12 : 4 = 3, tehát 96 : 4 = 1 + 23 = 24
LR separated (LRS) *Balról jobbra*	Helyiérték szerint elválasztva, balról jobbra	96 : 4 kiszámítása: 9 : 4 = 2 (1), (10 + 6) : 4 = 4 96 : 4 = 24 121 : 11 kiszámítása: 12 : 11 = 1, (1), 11 : 11 = 1, így 121 : 11 = 10 + 1 = 11
Wholistic (WH) *Holisztikus*	Kerek egészként értelmezi a számot	96 :4 kiszámítása: 100 : 4 = 25, 1 · 4 = 4, 96 : 4 = 24 121 : 11 kiszámítása: 110 : 11 = 10, 11 : 11 = 1, tehát 121 : 11 = 11

2. sz. melléklet. A negyedik vizsgálat során alkalmazott Szorzási Stratégiák Teszt megoldókulcsa
Minden jó válasz egy pontot ér.

		VÉGEREDMÉNY
1.	25 · 48	1050
2.	25 · 120	3000
3.	31 · 32	992
4.	8 · 99	792
5.	49 · 51	2499
6.	12 · 250	600
7.	8 · 4211	33688
8.	15 · 48	720
9.	12 · 16	192
10.	32 · 32	1024
11.	25 · 25	625
12.	17 · 99	1683
13.	12·15	180
14.	20 · 30	600
15.	8 · 999	7992
16.	23 · 27	621
17.	25 · 32	800
18.	25 · 65	1625
19.	13 · 13	169
20.	15 · 15	225
21.	16 · 16	256
22.	24 · 24	576
23.	9 · 742	6678

		VÉGEREDMÉNY
24.	15 · 16	240
25.	25 · 50	1250
26.	18 · 16	288
27.	25 · 35	875
28.	9 · 888	7992
29.	150 · 6	900
30.	50 · 50	2500
31.	19 · 19	361
32.	77 · 8	616
33.	9 · 652	5868
34.	12 · 11	132
35.	11 · 11	121
36.	19 · 21	399
37.	45 · 45	2025
38.	77 · 99	7623
39.	10 · 690	6900
40.	500 · 500	250000

3. sz. melléklet. Háttérkérdőív

Név: ………………………………………………………. Osztály:……… Kód: …………..

Kedves Tanuló!

Ez a kérdőív nem a tudásodat méri. Arra vagyunk kíváncsiak, mennyire szeretsz iskolába járni, tanulni. Az alábbi kérdőívvel továbbá az érdeklődési köródet, továbbtanulással kapcsolatos terveidet szeretnénk felmérni. Kérjük, segítsd munkánkat, olvasd el figyelmesen az alábbi kérdéseket, és őszintén töltsd ki a kérdőívet! A megfelelő válasz sorszámát karikázd be! Ahol szükséges, írd be a válaszod! Válaszaidat bizalmasan kezeljük, azokat kizárólag kutatási célokra használjuk fel.

1. Nemed: 1) fiú 2) lány
2. Mikor születtél? ________év _______________hó
3. Mi a szüleid legmagasabb iskolai végzettsége? ***Karikázd be*** a megfelelő számot!

ANYA	legmagasabb iskolai végzettsége	APA
1	általános iskola	1
2	szakmunkásképző iskola	2
3	érettségi	3
4	OKJ tanfolyam	4
5	főiskola	5
6	egyetem	6

4. Mennyire szeretsz iskolába járni? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz sorszámát!*

   1)egyáltalán nem szeretek 2) nem szeretek 3) közepesen 4) szeretek 5) nagyon szeretek

5. Milyen idegen nyelvet vagy nyelveket tanulsz? ***Írd*** *a vonalra!*
   1. idegen nyelv ……………………………………….
   2. idegen nyelv ………………………………………

6. Mennyire vagy elégedett a mostani iskolai teljesítményeddel? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz sorszámát!*

   1) nagyon elégedetlen 2) elégedetlen 3) közepesen elégedett
   4) elégedett 5) nagyon elégedett

7. Mennyire szereted a következő tantárgyakat? ***Karikázd be*** *megfelelő számokat, a számok alábbi jelentéseknek megfelelően! Ha valamelyik tantárgyat nem tanulod, húzd át a nevét!*

   1) egyáltalán nem szeretem 2) nem szeretem 3) közömbös 4) szeretem 5) nagyon szeretem

a)	Irodalom	1	2	3	4	5
b)	Nyelvtan	1	2	3	4	5
c)	Történelem	1	2	3	4	5
d)	Természetismeret	1	2	3	4	5
e)	1. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
f)	2. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
g)	Informatika	1	2	3	4	5
h)	Matematika	1	2	3	4	5
i)	Fizika	1	2	3	4	5
j)	Technika	1	2	3	4	5
k)	Erkölcstan/hittan	1	2	3	4	5
l)	Testnevelés	1	2	3	4	5

m)	Művészetismeret	1	2	3	4	5
n)	Ének-zene	1	2	3	4	5

1. Milyen osztályzataid voltak félévkor az alábbi tantárgyakból? ***Karikázd be*** *megfelelő számot! Ha valamelyik tantárgyat nem tanulod, húzd át a nevét!*

a)	Magatartás	1	2	3	4	5
b)	Szorgalom	1	2	3	4	5
c)	Irodalom	1	2	3	4	5
d)	Nyelvtan	1	2	3	4	5
e)	Történelem	1	2	3	4	5
f)	Természetismeret	1	2	3	4	5
g)	1. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
h)	2. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
i)	Informatika	1	2	3	4	5
j)	Matematika	1	2	3	4	5
k)	Fizika	1	2	3	4	5
l)	Technika	1	2	3	4	5
m)	Erkölcstan/hittan	1	2	3	4	5
n)	Testnevelés	1	2	3	4	5
o)	Művészetismeret	1	2	3	4	5
p)	Ének-zene	1	2	3	4	5

9. Mit gondolsz, egy 100 pontos matematikateszten hány százalékos eredményt érnél el? ………..
10. Hány százalékos eredménnyel lennél elégedett? ……..

11. Az iskola befejezése után melyek a legtávolabbi terveid? Melyik az a legmagasabb iskolai végzettség, amit életed során el szeretnél érni? ***Karikázd be*** *a megfelelő számot!*

1) szakmunkás bizonyítványt szerezni
2) érettségizni
3) érettségizni és szakmát is tanulni
4) főiskolát végezni/diplomát szerezni felsőfokú alapképzésben
5) egyetemet végezni/ diplomát szerezni felsőfokú mesterképzésben
6) abbahagyni az iskolát és munkába állni, amilyen hamar csak lehet

12. Mennyire vagy elégedett a mostani matematikai teljesítményeddel? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz előtti számot!*

1) nagyon elégedetlen 2) elégedetlen 3) közepesen elégedett
4) elégedett 5) nagyon elégedett

13. Mennyire szereted az alábbiakat?

1)egyáltalán nem szeretem 2) szeretem 3) közömbös 4) szeretem 5) nagyon szeretem

Összeadás	1	2	3	4	5
Kivonás	1	2	3	4	5
Szorzás	1	2	3	4	5
Osztás	1	2	3	4	5

Fejben számolás	1	2	3	4	5
Írásban számolás	1	2	3	4	5
Természetes számok	1	2	3	4	5
Negatív számok	1	2	3	4	5
Törtek	1	2	3	4	5
Tizedes törtek	1	2	3	4	5
Vegyes számok	1	2	3	4	5
Szöveges feladatok	1	2	3	4	5
Szerkesztési feladatok	1	2	3	4	5
Arányossági feladatok	1	2	3	4	5
Százalékszámítás	1	2	3	4	5
Mértékegységátváltás	1	2	3	4	5
Logikai feladatok	1	2	3	4	5

14. Szerinted mennyire lesznek fontosak későbbi életed során, hogy jól tudd az alábbiakat?
1) szükségtelen 2) nem fontos 3) közepes fontosságú 4) elég fontos 5) nagyon fontos

Fejben végzett számítások	1	2	3	4	5
Írásban végzett számítások	1	2	3	4	5
Szöveges feladatok	1	2	3	4	5
Szerkesztési feladatok	1	2	3	4	5
Arányossági feladatok	1	2	3	4	5
Százalékszámítás	1	2	3	4	5
Mértékegységátváltás	1	2	3	4	5
Logikai feladatok	1	2	3	4	5

15. Mennyire segítenek matematika tanulása közben az alábbiak?
1) egyáltalán nem segít 2) inkább nem/ ritkán segít 4) inkább/gyakran segít 5) sokat segít

Rajz készítése	1	2	4	5
Zenehallgatás	1	2	4	5
Ujjakon számolás	1	2	4	5
Magamban számolás	1	2	4	5
Hangos számolás	1	2	4	5
Írásban számolás	1	2	4	5
Teljes csend	1	2	4	5
Páros munka	1	2	4	5
Csoportmunka	1	2	4	5
Tanár magyarázata	1	2	4	5
Tankönyv mintapéldái	1	2	4	5
Szülő / testvér magyaráz	1	2	4	5
Magántanár	1	2	4	5

16. Egy átlagos tanítási napon mennyi időt fordítasz tanórán kívüli (pl.: otthoni) tanulásra?

1) Egyáltalán nem készülök.
2) Naponta fél óránál kevesebbet készülök.
3) Naponta fél-egy órát készülök.
4) Naponta egy-két órát készülök.
5) Naponta két-három órát készülök.
6) Naponta több, mint három órát készülök.

17. Egy átlagos tanítási napon mennyi ideig készülsz matematikaórára?

1) Egyáltalán nem készülök.
2) Naponta fél óránál kevesebbet készülök.
3) Naponta fél-egy órát készülök.
4) Naponta egy-két órát készülök.
5) Naponta két-három órát készülök.
6) Naponta több, mint három órát készülök.

A következő kérdések (18-23. kérdések) segítségével azt szeretném megtudni, hogyan vélekedsz a matematika tanulásával kapcsolatban. Miért tanulod a matematikát? Kérjük, hogy 1-től 5-ig terjedő skálán pontozd az állításokat a pontok alábbi jelentésének megfelelően! Karikázd be a válaszodnak leginkább megfelelő számot!

1: nem igaz, egyáltalán nem jellemző.
2: általában nem igaz, sokszor nem így van.
3: nem tudom eldönteni.
4: általában igaz, legtöbbször így van
5: igaz, mindig így van

18.	Mert kötelező tantárgy.	1	2	3	4	5
19.	Mert érdekes.	1	2	3	4	5
20.	Mert szeretnék jó eredménnyel bekerülni a középiskolába.	1	2	3	4	5
21.	Mert szeretnék jó eredménnyel érettségizni.	1	2	3	4	5
22.	Mert szükségem van rá a továbbtanuláshoz.	1	2	3	4	5
23	Mert matematika szakra szeretnék jelentkezni.	1	2	3	4	5

24. Milyen gyakran veszel részt matematikaversenyeken?

1) Még sosem voltam.
2) Egyszer voltam már.
3) Két-háromszor voltam.
4) Minden évben részt veszek egyen.
5) Évente több versenyen indulok.

25. Mennyi időt fordítasz számítógépezésre?

1) nem szoktam számítógépezni
2) havonta egy óránál kevesebbet
3) hetente egy-két órát
4) naponta egy-két órát
5) naponta három-négy órát

26. Mit szeretsz olvasni az alábbiak közül? *Több választ is megjelölhetsz!*

1) sms-t
2) üzeneteket a facebookon, e-mailt
3) híreket, érdekességeket újságban,neten
4) mesekönyvet
5) ifjúsági regényt
6) egyebet, mégpedig:

27. Hányszor voltál már színházban?

1) még sosem voltam
2) egyszer voltam
3) kétszer-háromszor voltam
4) legalább négyszer voltam
5) legalább ötször voltam már
6) rendszeresen járok, bérletem van

28. Egy átlagos tanítási napon mennyi időt fordítasz TV nézésre?

1) nem szoktam TV-t nézni
2) egy óránál kevesebbet
3) egy-két órát
4) három-négy órát
5) több, mint négy órát

29. Mennyi időt fordítasz hetente olvasásra?

1) nem szoktam olvasni
2) egy óránál kevesebbet
3) egy-két órát
4) egy-két órát
5) három-négy órát

Válaszaidat, együttműködésedet köszönjük!

4. sz. melléklet. Az egyes iskolák eredményessége az országos kompetenciaméréseken matematikából 2014 és 2018 között. (forrás: Országos kompetenciamérés 2018, FIT-jelentés. Intézményi jelentések 6. évfolyam alapján)

Iskola	2014	2015	2016	2017	2018	Az iskola eredménye az országos átlaghoz képest (2018)
1.	1575 (1550;1618)	1606 (1576;1637)	1573 (1544;1604)	1579 (1549;1613)	1564 (1534;1597)	🙂
2.	1240 (1195;1282)	1151 (1120;1191)	1138 (1103;1171)	1145 (1109;1179)	1180 (1166;1197)	🙁
3.	1584 (1533;1643)	1539 (1486;1597)	1480 (1430;1533)	1511 (1447;1586)	1542 (1487;1599)	😐
4.	1533 (1443;1604)	1511 (1408;1617)	1432 (1344;1528)	1398 (1326;1453)	1479 (1392;1574)	😐
5.	1430 (1366;1482)	1255 (1174;1346)	1285 (1214;1370)	1246 (1160;1316)	1344 (1278;1422)	🙁
6.	1326 (1287;1362)	1338 (1302;1385)	1295 (1256;1336)	1361 (1315;1411)	1316 (1283;1347)	🙁
7.	1477 (1380;1550)	1470 (1426;1526)	1456 (1364;1537)	1548 (1479;1652)	1465 (1386;1543)	😐
8.	1493 (1443;1523)	1485 (1429;1556)	1441 (1389;1489)	1468 (1426;1513)	1507 (1487;1531)	😐
9.	1657 (1625;1693)	1686 (1656;1718)	1683 (1664;1707)	1775 (1745;1801)	1743 (1716;1769)	🙂
10.	1331 (1285;1379)	1327 (1269;1390)	1376 (1279;1451)	1346 (1294;1417)	1466 (1418;1499)	😐
11.	1574 (1532;1616)	1517 (1464;1555)	1564 (1524;1604)	1509 (1460;1556)	1610 (1575;1649)	🙂
Országos átlag	1491 (1490;1492)	1497 (1496;1498)	1486 (1485;1487)	1497 (1496;1498)	1499 (1498;1499)	

Jelmagyarázat:

🙂 Az intézmény eredményénél szignifikánsan alacsonyabb az adott érték

😐 Az intézmény eredménye nem különbözik szignifikánsan az adott értéktől

🙁 Az intézmény eredményénél szignifikánsan magasabb az adott érték

5. sz. melléklet. A központi vizsgálatban részt vett tanulók száma, iskolánkénti, osztályonkénti összetétele

Iskola	Évfolyam	Osztály	Létszám	Fiú	Lány	A részvevők között a lányok aránya (%)
1.	4.	1	17	10	7	41,2
		2	19	9	10	52,6
		3	23	11	12	52,2
		4	17	6	11	64,7
	5.	5	19	9	10	52,6
		6	18	11	7	38,9
		7	22	12	10	45,5
	6.	8	18	7	11	61,1
		9	18	8	10	55,5
		10	22	12	10	45,5
		11	14	5	9	64,3
		12	11	9	2	18,2
2.	4.	13	13	7	6	46,2
		14	16	8	8	50,0
	5.	15	18	8	10	55,6
	6.	16	18	7	11	61,1
3.	4.	17	25	16	9	36,0
	5.	18	17	8	9	52,9
		19	21	9	12	66,7
	6.	20	18	6	12	66,7
		21	17	10	7	41,2
4.	4.	22	17	7	10	58,8
		23	17	7	10	58,8
	5.	24	16	10	6	37,5
	6.	25	16	8	8	50,0
5.	4.	26	7	4	3	42,9
	5.	27	10	3	7	70,0
	6.	28	12	9	3	25,0
6.	4.	29	23	16	7	30,4
		30	20	16	4	20,0
7.	4.	31	16	10	6	37,5
	5.	32	16	9	7	43,8
	6.	33	25	14	11	44,0
8.	5.	34	15	10	5	33,3
	6.	35	10	5	5	50,0
9.	5.	36	31	18	13	41,9
	6.	37	32	17	15	46,9
10.	4.	38	20	7	13	65,0
	5.	39	17	9	8	47,0
	6.	40	15	7	8	53,3
		41	14	9	5	35,7

5.sz. melléklet. A központi vizsgálatban részt vett tanulók száma, iskolánkénti, osztályonkénti összetétele

(folytatás)

Iskola	Évfolyam	Osztály	Létszám	Fiú	Lány	A részvevők között a lányok aránya (%)
11.	4.	42	24	13	11	45,8
	5.	43	17	9	8	47,1
		44	27	11	16	59,3
	6.	45	27	5	22	81,5
		46	25	14	11	44,0
Összesen			850	435	415	48,8

6. sz. melléklet. Hátrányos helyzetű tanulók száma iskolánként, központi vizsgálat

Iskola	Évfolyam	Osztály	Létszám	HH-s tanuló (fő)	HHH-s tanuló (fő)	SNI tanuló (fő)	BTM tanuló (fő)
1.	4.	1	17	0	0	0	0
		2	19	0	0	2	0
		3	23	0	0	0	1
		4	17	0	0	0	1
	5.	5	19	0	0	1	0
		6	18	0	0	1	0
		7	22	0	0	0	1
	6.	8	18	0	0	1	2
		9	18	0	0	0	1
		10	22	0	0	1	2
		11	14	0	0	1	0
		12	11	0	0	0	0
2.	4.	13	13	0	13	0	0
		14	16	0	16	1	0
	5.	15	18	1	17	1	0
	6.	16	18	0	19	1	0
3.	4	17	25	0	0	0	0
	5.	18	17	0	0	0	1
		19	21	0	0	0	0
	6.	20	18	0	0	0	0
		21	17	0	0	0	1
4.	4.	22	17	1	0	0	1
		23	17	0	0	0	0
	5.	24	16	0	0	1	0
	6.	25	16	0	0	0	2
5.	4.	26	7	6	0	1	1
	5.	27	10	5	0	1	2

6.sz. melléklet. Hátrányos helyzetű tanulók száma iskolánként, központi vizsgálat (folytatás)

Iskola	Évfolyam	Osztály	Létszám	HH-s tanuló	HHH-s tanuló	SNI tanuló	BTM tanuló
5.	6.	28	12	8	0	2	1
6.	4.	29	23	12	6	0	5
		30	20	5	8	1	1
7.	4.	31	16	0	0	2	0
	5.	32	16	2	0	6	1
	6.	33	25	0	0	1	3
8.	5.	34	15	0	0	0	0
	6.	35	10	1	0	0	3
9.	5.	36	31	0	0	0	1
	6.	37	32	0	0	0	1
10.	4.	38	20	0	0	1	2
	5.	39	17	0	0	0	9
	6.	40	15	0	0	4	8
		41	14	0	0	0	0
11.	4.	42	24	0	0	0	2
	5.	43	17	0	0	0	3
		44	27	0	0	1	6
	6.	45	27	0	0	0	4
		46	25	0	0	1	5
Összesen			850	40	79	36	71

7. sz. melléklet. Matematika Tudásszintmérő Teszt 6. évfolyam A csoport, központi vizsgálat

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI INTÉZET

Vígh-Kiss Erika Rozália
2019

MATEMATIKA Tudásszintmérő Teszt 6. évfolyam *A* CSOPORT

______________ ______________ ______ **Kód:** | | | | | |

Település **Iskola** **Osztály**

Elérhető pontszám: 69 Elért pontszám: _________

1\. Szögek. Hány fokos szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd a téglalapokba** a megfelelő számot! Milyen fajta szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd téglalapokba** a megfelelő betűjelet!

A) hegyesszög B) derékszög C) tompaszög D) homorúszög E) teljesszög F) egyenesszög

		A szög nagysága (fok)	A sokszorozás után kapott szög fajtája
a)-b)	11°-os szög 9-szerese		
c)-d)	15°-os szög 6-szorosa		
e)-f)	12°-os szög 30-szorosa		
g)-h)	25°-os szög 12-szerese		
i)-j)	12°-os szög 6-szorosa		

a		
b		
c		
d		
e		
f		
g		
h		
i		
j		

2\. Törtek. Panna törtek és arányok bővítését kapta házi feladatul. Segíts neki! **Bővítsd** az alábbi törteket, arányokat az előírt módon! **Töltsd ki** a táblázatot!

		13-mal	19-cel
a)-b)	$\frac{2}{7}$		
c)-d)	$\frac{11}{12}$		
e)-f)	$\frac{21}{22}$		
g)-h)	9:10		
i) -j)	99:101		

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	

3\. Tömeg. Három testvér, András, Miklós és Zsolt így vallanak tömegükről:

András: „Tömegem $\frac{4}{13}$-ad része 20 kg.” András ……………………………………………………

Miklós „Tömegem $\frac{5}{11}$-ad része 15 kg.” Miklós ……………………………………………………

Zsolt „Tömegem $\frac{11}{12}$-ad része 55 kg.” Zsolt ……………………………………………………

Írd a fiúk neve után, ki hány kg! **Indokolj számítással!**

a	
b	
c	
d	
e	
f	

4. Állítások. Melyik állítás igaz, melyik hamis az alábbiak közül? **Írj I**-t az igaz, **H**-t a hamis állítás elé!

a	
b	
c	
d	

a) ……. $-15 \cdot (-15) = 125$

b) ……. $-18 \cdot (-16) = 288$

c) ……. $+21 \cdot (-19) = -399$

d) ……. $-39 \cdot (+41) = -1599$

5. Grillparty. Az üzletben 450 gramm sertéscomb 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, ezért 495 dekagramm sertéscombot szeretnénk vásárolni. Mennyibe kerül ez? a-d) **Számításaidat indokold!**

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	
k	
l	
m	
n	

e-n) A pékségben vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	A vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Kifli	65 gramm	59	12		
Túrós batyu	120 gramm	159	11		
Vizes zsemle	55 gramm	15	55		
Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41		
			Összesen:		

6. Nyaralás. Egy tíztagú baráti társaság nyaralni indult. Két hétre való élelmet vittek magukkal. Tegyük fel, hogy mindenki ugyanannyit eszik. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány napra lett volna elegendő ez az élelmiszermennyiség, ha 4 tagú a csapat? ……. napra

b) Hány napra lett volna elegendő ez az élelmiszermennyiség egy kéttagú csapatnak? ……. napra

c) Egy embernek hány napi elemózsiája az egész készlet? ……. napi

d) Ha egy hétre elegendő a készlet, akkor hány fős ez a csapat? ……. fős

7. Locsolkodás. Péter húsvétkor öt lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja egy csomag csokitojást adott a fiúnak. Egy csomagban 7 csokitojás volt. Otthon Péter a tojások ötödét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Összesen hány csokitojást kapott Péter? ……. tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? ……. tojást

c) Hány tojást kapott Csilla? ……. tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? ……. tojás

a	
b	
c	
d	

8. Sportnap. Az iskolában 16 osztály működik. A júniusi sportnapon az iskola minden osztályát hétfős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány tanuló vett részt a versenyen? ……. tanuló

b) Egy másik sportversenyen 195 gyerek indult. A versenyzők $\frac{12}{13}$-a fiú volt. Hány lány versenyzett? ……. lány

c) A városi gyermeknapon 160 diák vett részt az ügyességi versenyen, a versenyzők 15 %-a hatodikos volt. Hány hatodikos vett részt az ügyességi versenyen? ……. hatodikos

a	
b	
c	

9. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Két strucctojás 36 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat= 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg egy tucat strucctojás? ……. tyúktojásnak

a	
b	
c	
d	

b) Hány strucctojásnak felel meg 180 tyúktojás? ……. strucctojásnak

c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 19 strucctojás? ……. főre

d) A 20 grammos tyúktojás 8 gramm fehérjét tartalmaz. A tojás tömegének hány százaléka fehérje? ……. %

10. Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy.” Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	
d	

a) Hány feje van 120 hétfejű sárkánynak? ……. feje

b) Hány feje van 12 tizenkétfejű sárkánynak? ……. feje

c) Hány huszonnégyfejű sárkánynak van összesen 960 feje? ……. sárkánynak

d) Hány feje van összesen Süsü dédszüleinek, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? ……. feje

11. Dobostorta. A cukrászatban dobostortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 27 dkg porcukor, 230 g vaj, 12 tojás, 10 dkg csokoládé. A hétvégi esküvőre 29 dobostorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség? ……. dkg-ra

b) Hány dkg vajra lesz szükség? ……. dkg-ra

c) Hány darab tojásra lesz szükség? ……. tojásra

12. Laci egyforma kockákból tornyot épít. Egy kocka éle 4 cm. Hány dm^3 a térfogata egy 12 kockából álló építménynek? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetőek legyenek!

a	
b	
c	

Köszönjük, hogy segítetted a munkánkat!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI INTÉZET
Vígh-Kiss Erika Rozália
2019

MATEMATIKA Tudásszintmérő Teszt 6. évfolyam *B* CSOPORT

______________ ______________ ________ **Kód:** ☐☐☐☐☐

Település **Iskola** **Osztály**

Elérhető pontszám: 69 Elért pontszám: _____

1. Szögek. Hány fokos szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd a téglalapokba** a megfelelő számot! Milyen fajta szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd téglalapokba** a megfelelő betűjelet!

A) hegyesszög B) derékszög C) tompaszög D) egyenesszög E) homorúszög F) teljesszög

		A szög nagysága (fok)	A sokszorozás után kapott szög fajtája
a)-b)	9°-os szög 20-szorosa		
c)-d)	16°-os szög 5-szöröse		
e)-f)	15°-os szög 24-szerese		
g)-h)	22°-os szög 15-szöröse		
i)-j)	22°-os szög 6-szorosa		

a b c d e f g h i j

2. Törtek. Panna törtek, illetve arányok bővítését kapta házi feladatul. Segíts neki! **Bővítsd** az alábbi törteket, arányokat az előírt módon! Töltsd ki a táblázatot!

		16-tal	29-cel
a)-b)	$\frac{3}{7}$		
c)-d)	$\frac{11}{13}$		
e)-f)	$\frac{22}{23}$		
g)-h)	9:10		
i) -j)	99: 101		

a b c d e f g

3. Tömeg. Három testvér, András, Miklós és Zsolt így vallanak tömegükről:

András: „Tömegem $\frac{4}{13}$-ad része 40 kg.” András ……………………………………………………

Miklós „Tömegem $\frac{5}{11}$-ad része 25 kg.” Miklós ……………………………………………………

a b c d e f

Zsolt „Tömegem $\frac{11}{13}$-ad része 55 kg.” Zsolt ………………………………………………………

Írd a fiúk neve után, ki hány kg! **Számítással indokolj!**

4. Állítások. Melyik állítás igaz, melyik hamis az alábbiak közül?

Írj I-t az igaz, **H**-t a hamis állítás elé!

a	
b	
c	
d	

a) ……. $-15\cdot(-15) = 225$

b) ……. $-16\cdot(-18) = 288$

c) ……. $-21\cdot(-19) = 399$

d) ……. $-29\cdot(+31) = -799$

5. Grillparty. 450 gramm sertéscomb 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, ezért 585 dekagramm sertéscombot szeretnénk vásárolni.

a-d) Mennyibe kerül ez? **Számításaidat indokold!**

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	
k	
l	
m	
n	

e-n) A pékségben vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	Vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Kifli	65 gramm	59	11		
Túrós batyu	120 gramm	159	12		
Vizes zsemle	55 gramm	15	45		

Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41		
			Összesen:		

6. Nyaralás. Egy húsztagú baráti társaság nyaralni indult. Két hétre való élelmet vittek magukkal. Tegyük fel, hogy mindenki ugyanannyit eszik. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	
d	

a) Hány napra lett volna elegendő ez az élelmiszermennyiség, ha 5 tagú a csapat? ……. napra

b) Hány napra lett volna elegendő ez az élelmiszermennyiség egy kéttagú csapatnak? ……. napra

c) Egy embernek hány napi elemózsiája az egész készlet? ……. napi

d) Ha egy hétre elegendő a készlet, akkor hány fős ez a csapat? ……. fős

7. Locsolkodás. Péter húsvétkor hét lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja egy csomag csokitojást adott a fiúnak. Egy csomagban 8 csokitojás volt. Otthon Péter a tojások negyedét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	
d	

a) Összesen hány csokitojást kapott Péter? ……. tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? ……. tojást

c) Hány tojást kapott Csilla? ……. tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? ……. tojás

8. Sportnap. Az iskolában 16 osztály működik. A júniusi sportnapon az iskola minden osztályát hétfős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	

a) Hány tanuló vett részt a versenyen? ……. tanuló

b) Egy másik sportversenyen 195 gyerek indult. A versenyzők $\frac{12}{13}$-a fiú volt. Hány lány versenyzett? ……. lány

c) A városi gyermeknapon 160 diák vett részt az ügyességi versenyen, a versenyzők 15 %-a hatodikos volt. Hány hatodikos vett részt az ügyességi versenyen? ……. hatodikos

9. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Két strucctojás 36 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat= 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg két tucat strucctojás? ……. tyúktojásnak

b) Hány strucctojásnak felel meg 720 tyúktojás? ……. strucctojásnak

c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 29 strucctojás? ……. főre

d) A tyúktojás tömegének 60 %-a a sárgája, ami 12 g. Hány grammos a tyúktojás? …….. gramm

---

a	
b	
c	
d	

10. Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy.” Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány feje van 110 hétfejű sárkánynak? ……. feje

b) Hány feje van 21 huszonnégyfejű sárkánynak? ……. feje

c) Hány tizenkétfejű sárkánynak van összesen 960 feje? ……. sárkánynak

d) Hány feje van összesen Süsü 8 dédszülőjének, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? ……. feje

11. Sachertorta. A cukrászatban Sachertortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 34 dkg porcukor, 165 g vaj, 6 tojás, 12 dkg búzaliszt. A hétvégi esküvőre 19 Sachertorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség? ……. dkg-ra

b) Hány g vajra lesz szükség? ……. grammra

c) Hány gramm búzalisztre lesz szükség? ……. grammra

12. Laci egyforma kockákból tornyot épít. Egy kocka éle 3 cm. Hány dm^3 a térfogata egy 12 kockából álló építménynek? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetőek legyenek!

a	
b	
c	

Köszönjük, hogy segítetted munkánkat!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI INTÉZET

Vígh-Kiss Erika Rozália
2019

MATEMATIKA Tudásszintmérő Teszt 5. évfolyam *A* CSOPORT

______________________________ ______________________________________ _________ **Kód:** ☐☐☐☐☐

Település **Iskola** **Osztály**

Elérhető pontszám: 55

Elért pontszám:

1. Szögek. Hány fokos szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd a téglalapokba** a megfelelő számot! Milyen fajta szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd a téglalapokba** a megfelelő betűjelet!

B) hegyesszög B) derékszög C) tompaszög D) homorúszög E) teljesszög F) egyenesszög

		A szög nagysága (fok)	A sokszorozás után kapott szög fajtája
a)-b)	11^{o}-os szög 9-szerese		
c)-d)	15^{o}-os szög 6-szorosa		
e)-f)	12^{o}-os szög 30-szorosa		
g)-h)	25^{o}-os szög 12-szerese		
i)-j)	12^{o}-os szög 6-szorosa		

a b c d e f g h i j

2. Törtek. Panna törtek bővítését kapta házi feladatul. Segíts neki! **Bővítsd** az alábbi törteket az előírt módon! **Töltsd ki** a táblázatot!

		13-mal	19-cel
a)-b)	$\frac{2}{7}$		
c)-d)	$\frac{11}{12}$		
e)-f)	$\frac{21}{22}$		

a b c d e f

3. Laci egyforma kockákból tornyot épít. Egy kocka éle 4 cm. Hány dm^3 a térfogata egy 12 kockából álló építménynek? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetőek legyenek!

a b c

4. Állítások. Melyik állítás igaz, melyik hamis az alábbiak közül? **Írj I**-t az igaz, **H**-t a hamis állítás elé!

a	
b	
c	
d	

a) ……. $-15\cdot(-15) = 125$

b) ……. $-18\cdot(-16) = 288$

c) ……. $+21\cdot(-19) = -399$

d) ……. $-39\cdot(+41) = -1599$

5. Grillparty. a-d) A szeletelt omlós sertéscomb 450 grammos csomagolásban 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, ezért 900 dekagramm szeletelt omlós sertéscombot szeretnénk vásárolni. Mennyibe kerül ez? **Számításaidat indokold!**

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	
k	
l	
m	
n	

e-n) A pékségben vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	Vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Kifli	65 gramm	59	12		
Túrós batyu	120 gramm	159	11		
Vizes zsemle	55 gramm	15	55		

Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41		
			Összesen:		

6. Locsolkodás. Péter húsvétkor öt lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja egy zacskó csokitojást adott a fiúnak. Egy zacskóban 7 csokitojás volt. Otthon Péter a tojások ötödét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	
d	

a) Összesen hány csokitojást kapott Péter? …… tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? …… tojást

c) Hány tojást kapott Csilla? …… tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? …… tojás

7. Sportnap. Az iskolában 16 osztály működik. A júniusi sportnapon az iskola minden osztályát hétfős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány tanuló vett részt a versenyen? ……. tanuló

b) Egy másik sportversenyen 195 gyerek indult. A versenyzők $\frac{12}{13}$-a fiú volt. Hány lány versenyzett? ……. lány

c) A városi gyermeknapon 160 diák vett részt az ügyességi versenyen, a versenyzők 15 %-a ötödikes volt. Hány ötödikes vett részt az ügyességi versenyen? ……. ötödikes

8. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Két strucctojás 36 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat= 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg egy tucat strucctojás? ……. tyúktojásnak

b) Hány strucctojásnak felel meg 180 tyúktojás? ……. strucctojásnak

c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 19 strucctojás? ……. főre

d) A 20 grammos tyúktojás 8 gramm fehérjét tartalmaz. A tojás tömegének hány százaléka fehérje? ……. %

9.

Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy.” Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	

a) Hány feje van 120 hétfejű sárkánynak? …… feje

b) Hány feje van 12 tizenkétfejű sárkánynak? …… feje

c) Hány huszonnégyfejű sárkánynak van összesen 960 feje? …… sárkánynak

d) Hány feje van összesen Süsü 8 dédszülőjének, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? …… feje

10.

Dobostorta. A cukrászatban dobostortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 27 dkg porcukor, 230 g vaj, 12 tojás, 10 dkg csokoládé. A hétvégi esküvőre 29 dobostorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	
d	

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség? ……. dkg-ra

b) Hány dkg vajra lesz szükség? ……. dkg-ra

c) Hány darab tojásra lesz szükség? ……. tojásra

Köszönjük, hogy segítetted a munkánkat!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI INTÉZET

Vígh-Kiss Erika Rozália
2019

MATEMATIKA Tudásszintmérő Teszt 5. évfolyam *B* CSOPORT

______________________________ ______________________________________ _________ **Kód:**

Település **Iskola** **Osztály**

Elérhető pontszám: 55

Elért pontszám:

1. Szögek. Hány fokos szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd a téglalapokba** a megfelelő számot! Milyen fajta szöget kapunk az egyes esetekben? **Írd téglalapokba** a megfelelő betűjelet!

B) hegyesszög B) derékszög C) tompaszög D) egyenesszög E) homorúszög F) teljesszög

		A szög nagysága (fok)	A sokszorozás után kapott szög fajtája
a)-b)	9^{o}-os szög 20-szorosa		
c)-d)	16^{o}-os szög 5-szöröse		
e)-f)	15^{o}-os szög 24-szerese		
g)-h)	22^{o}-os szög 15-szöröse		
i)-j)	22^{o}-os szög 6-szorosa		

2. Törtek. Panna törtek bővítését kapta házi feladatul. Segíts neki! **Bővítsd** az alábbi törteket az előírt módon! Töltsd ki a táblázatot!

		16-tal	29-cel
a)-b)	$\frac{3}{7}$		
c)-d)	$\frac{11}{13}$		
e)-f)	$\frac{22}{23}$		

3. Sachertorta. A cukrászatban Sachertortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 34 dkg porcukor, 165 g vaj, 6 tojás, 12 dkg búzaliszt. A hétvégi esküvőre 19 Sachertorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség? ……. dkg-ra

b) Hány g vajra lesz szükség? ……. grammra

c) Hány gramm búzalisztre lesz szükség? ……. grammra

a	
b	
c	
d	

4. Állítások. Melyik állítás igaz, melyik hamis az alábbiak közül?

Írj I-t az igaz, **H**-t a hamis állítás elé!

a) ……. $-15\cdot(-15) = 225$

b) ……. $-16\cdot(-18) = 288$

c) ……. $-21\cdot(-19) = 399$

d) ……. $-29\cdot(+31) = -799$

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	
k	
l	
m	
n	

5. Grillparty. a-d) A szeletelt omlós sertéscomb 450 grammos csomagolásban 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, ezért 900 dekagramm szeletelt omlós sertéscombot szeretnénk vásárolni. Mennyibe kerül ez? **Számításaidat indokold!**

e-n) A pékségben vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	Vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Kifli	65 gramm	59	11		
Túrós batyu	120 gramm	159	12		
Vizes zsemle	55 gramm	15	45		

Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41		
			Összesen:		

7. Locsolkodás. Péter húsvétkor hét lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja nyolc festett tojást adott a fiúnak. Péter a tojások negyedét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a
b
c
d

a) Összesen hány hímes tojást vihetett haza Péter? ……. tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? ……. tojást

c) Hány tojást kapott Csilla? ……. tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? ……. tojás

8. Sportnap. A felső tagozaton 16 osztály működik. A júniusi sportnapon a felső tagozat minden osztályát hétfős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány tanuló vett részt a versenyen? ……. tanuló

b) Egy másik sportversenyen 195 gyerek indult. A versenyzők $\frac{12}{13}$-a fiú volt. Hány lány versenyzett? ……. lány

c) A városi gyermeknapon 160 diák vett részt az ügyességi versenyen, a versenyzők 15 %-a ötödikes volt. Hány ötödikes vett részt az ügyességi versenyen? ……. ötödikes

9. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Két strucctojás 36 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat= 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg két tucat strucctojás? ……. tyúktojásnak

b) Hány strucctojásnak felel meg 720 tyúktojás? ……. strucctojásnak

c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 29 strucctojás? ……. főre

d) A tyúktojás tömegének 60 %-a a sárgája, ami 12 g. Hány grammos a tyúktojás? …….. gramm

10. Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy.”

Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány feje van 110 hétfejű sárkánynak? ……. feje

b) Hány feje van 21 huszonnégyfejű sárkánynak? ……. feje

c) Hány tizenkétfejű sárkánynak van összesen 960 feje? ……. sárkánynak

d) Hány feje van összesen Süsü dédszüleinek, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? ……. feje

a	
b	
c	
d	

11. Laci egyforma kockákból tornyot épít. Egy kocka éle 3 cm. Hány dm^3 a térfogata egy 12 kockából álló építménynek? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetőek legyenek!

a	
b	
c	

Köszönjük, hogy segítetted munkánkat!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI INTÉZET

Vígh-Kiss Erika Rozália
2019 április

MATEMATIKA **Tudásszintmérő Teszt 4. évfolyam** ***A* CSOPORT**

Kód:

Település: **Iskola:** **Osztály:**

Elérhető pontszám: 37

Elért pontszám: __________

1. Laci egyforma kockákból tornyot épít. Egy kocka éle 40 mm. Hány cm magas egy 12 kockából álló építmény? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetőek legyenek!

a | b | c

2. Állítások. Melyik állítás igaz, melyik hamis az alábbiak közül? **Írj I**-t az igaz, **H**-t a hamis állítás elé!

a)	…….	15· 15 = 125
b)	…….	18· 16 = 288
c)	…….	21· 19 = 399
d)	…….	39· 41 = 1599

a | b | c | d

3. Grillparty. a-d) A 450 grammos nádudvari gyorsfagyasztott darálthús 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, fasírozottat készítünk, ezért 900 dekagramm darálthúst szeretnénk vásárolni. Mennyibe kerül ez? **Számításaidat indokold!**

a | b | c | d | e | f | g | h | i | j | k | l | m | n e-n) A pékségben zsemlét vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	Vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Ciabatta	65 gramm	59	12		
Provanszi ciabatta	120 gramm	159	11		
Vizes zsemle	55 gramm	15	55		
Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41		
			Összesen:		

4. Locsolkodás. Péter húsvétkor öt lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja egy zacskó csokitojást adott a fiúnak. Mindegyik zacskóban 7 csokitojás volt. Otthon Péter a tojások ötödét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

c
d
c
d

a) Összesen hány darab csokitojást vihetett haza Péter? …… tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? …… tojást

c) Hány tojást kapott Csilla? …… tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? …… tojás

5. Sportnap. Egy iskolában 16 osztály működik. A júniusi sportnapon az iskola minden osztályát hétfős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a
b

a) Hány tanuló vett részt a versenyen? ……. tanuló

b) Egy másik sportversenyen 195 gyerek indult. A versenyzők $\frac{3}{5}$-e fiú volt. Hány lány versenyzett? ……. lány

6. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Két strucctojás 36 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat = 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg egy tucat strucctojás? ……. tyúktojásnak

b) Hány strucctojásnak felel meg 180 tyúktojás? ……. strucctojásnak

c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 19 strucctojás? ……. főre

a	
b	
c	
d	

7. Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy." Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány feje van 120 hétfejű sárkánynak? ……. feje

b) Hány feje van 12 tizenkétfejű sárkánynak? ……. feje

c) Hány huszonnégyfejű sárkánynak van összesen 960 feje? ……. sárkánynak

d) Hány feje van összesen Süsü nyolc dédszülőjének, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? ……. feje

a	
b	
c	

8. Dobostorta. A cukrászatban dobostortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 27 dkg porcukor, 230 g vaj, 12 tojás, 10 dkg csokoládé. A hétvégi esküvőre 29 dobostorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre!
Írd a megfelelő számot a vonalra!

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség? ……. dkg-ra

b) Hány dkg vajra lesz szükség? ……. dkg-ra

c) Hány darab tojásra lesz szükség? ……. tojásra

Köszönjük, hogy segítetted a munkánkat!

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
NEVELÉSTUDOMÁNYI INTÉZET

Vígh-Kiss Erika Rozália
2019 április

MATEMATIKA **Tudásszintmérő Teszt 4. évfolyam *B* CSOPORT**

Kód:

Település: **Iskola:** **Osztály:**

Elérhető pontszám: 37 Elért pontszám: __________

1. Állítások. Melyik állítás igaz, melyik hamis az alábbiak közül? **Írj I**-t az igaz, **H**-t a hamis állítás elé!

a)	…….	15· 15 = 225
b)	…….	18· 16 = 288
c)	…….	21· 19 = 399
d)	…….	39· 41 = 1209

a	
b	
c	
d	

2. A 450 grammos nádudvari gyorsfagyasztott darálthús 1200 Ft-ba kerül. Vendégeket hívunk hétvégére, fasírozottat készítünk, ezért 900 dekagramm darálthúst szeretnénk vásárolni. Mennyibe kerül ez? **Számításaidat indokold!**

a	
b	
c	
d	
e	
f	
g	
h	
i	
j	
k	
l	
m	
n	

e-n) A pékségben zsemlét vásárolunk. Mennyit fizetünk az egyes termékekért? Töltsd ki a táblázatot!

Termék neve	1 darab tömege	1 darab ára (Ft)	Vásárolt mennyiség	Vásárolt áru tömege (gramm)	Fizetendő összeg (Ft)
Ciabatta	65 gramm	59	11		
Provanszi ciabatta	120 gramm	159	12		
Vizes zsemle	55 gramm	15	45		
Szezámos császár-zsemle	60 gramm	39	41		
			Összesen:		

a	
b	
c	
d	

3. Locsolkodás. Péter húsvétkor hét lány osztálytársához kopogott be. A megöntözésért minden lány családja egy zacskó csokitojást adott a fiúnak. Otthon Péter a tojások negyedét öccsének, Zolinak, a tojások hetedét pedig kishúgának, Csillának ajándékozta. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Összesen hány darab csokitojást vihetett haza Péter? ……. tojást

b) Hány tojást adott Péter Zolinak? …… tojást

c) Hány tojást kapott Csilla? …… tojást

d) Hány tojás maradt Péteré? …… tojás

a	
b	

4. Sportnap. Az alsó tagozaton 16 osztály működik. A júniusi sportnapon az alsó tagozat minden osztályát hétfős csapat képviselte az ügyességi versenyen. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a) Hány tanuló vett részt a versenyen? ……. tanuló

b) Egy másik sportversenyen 375 gyerek indult. A versenyzők $\frac{4}{5}$-e fiú volt. Hány lány versenyzett?

……. lány

5. Strucc. A strucc a ma élő legnagyobb madár. Négy strucctojás 72 tyúktojásnak felel meg. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!** (Egy tucat = 12 darab)

a) Hány tyúktojásnak felel meg egy tucat strucctojás? ……. tyúktojásnak

b) Hány strucctojásnak felel meg 360 tyúktojás? ……. strucctojásnak

c) Ha egy strucctojás 9 embernek elég reggelire, akkor hány embernek elég reggelire 29 strucctojás? ……. főre

6. Sárkányok. Süsü, a sárkány így mesél őseiről: „Nekem például már csak egy fejem van! Az apámnak három van! A nagyapámnak hét volt, a dédapámnak tizenkettő, az ükapámnak huszonnégy.” Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	
d	

a) Hány feje van 130 hétfejű sárkánynak? …… feje

b) Hány feje van 12 tizenkétfejű sárkánynak? …… feje

c) Hány huszonnégyfejű sárkánynak van összesen 720 feje? …… sárkánynak

d) Hány feje van összesen Süsü nyolc dédszülőjének, ha mindegyiknek ugyanannyi feje van? …… feje

7. Sachertorta. A cukrászatban Sachertortát sütnek. Egy tortához többek között a következő alapanyagokra van szükség: 34 dkg porcukor, 165 g vaj, 6 tojás, 12 dkg búzaliszt. A hétvégi esküvőre 19 Sachertorta megrendelést vett fel a cukrászat. Válaszolj a kérdésekre! **Írd a megfelelő számot a vonalra!**

a	
b	
c	

a) Hány dkg porcukorra lesz szükség ……. dkg-ra

b) Hány g vajra lesz szükség? ……. grammra

c) Hány gramm búzalisztre lesz szükség? ……. grammra

8. Laci egyforma kockákból tornyot épít. Egy kocka éle 30 mm. Hány cm magas egy 14 kockából álló építmény? Úgy dolgozz, hogy számításaid nyomon követhetőek legyenek!

Köszönjük, hogy segítetted a munkánkat!

13. sz. melléklet. Kérdőív 4. évfolyam, központi vizsgálat

KÉRDŐÍV (4. osztály)

Település, iskola: ………………………………………………. Osztály:… Kód: …………..

Kedves Tanuló!

Ez a kérdőív nem a tudásodat méri. Arra vagyunk kíváncsiak, mennyire szeretsz iskolába járni, tanulni. Az alábbi kérdőívvel továbbá az érdeklődési körödet, továbbtanulással kapcsolatos terveidet szeretnénk felmérni. Kérjük, segítsd munkánkat, olvasd el figyelmesen az alábbi kérdéseket, és őszintén töltsd ki a kérdőívet! A megfelelő válasz sorszámát karikázd be! Ahol szükséges, írd be a válaszod! Válaszaidat bizalmasan kezeljük, azokat kizárólag kutatási célokra használjuk fel.

1. Nemed: 1) fiú 2) lány

2. Mikor születtél? ________év _______________hó

3. Mi a szüleid legmagasabb iskolai végzettsége? ***Karikázd be*** a megfelelő számot!

ANYA	legmagasabb iskolai végzettsége	APA
1	általános iskola	1
2	szakmunkásképző iskola	2
3	érettségi	3
4	OKJ tanfolyam	4
5	főiskola	5
6	egyetem	6

4. Mennyire szeretsz iskolába járni? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz sorszámát!*

1)egyáltalán nem szeretek 2) nem szeretek 3) közepesen 4) szeretek 5) nagyon szeretek

5.Milyen idegen nyelvet vagy nyelveket tanulsz? ***Írd*** *a vonalra!*

1. idegen nyelv:…………………………..

2. idegen nyelv: …………………………….

6. Mennyire vagy elégedett a mostani iskolai teljesítményeddel? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz sorszámát!*

1) nagyon elégedetlen 2) elégedetlen 3) közepesen elégedett
4) elégedett 5) nagyon elégedett

7. Mennyire szereted a következő tantárgyakat? ***Karikázd be*** *megfelelő számokat, a számok alábbi jelentéseknek megfelelően! Ha valamelyik tantárgyat nem tanulod, húzd át a nevét!*

a) Irodalom	1	2	3	4	5
b) Nyelvtan	1	2	3	4	5

1)						
	c) Természetismeret	1	2	3	4	5
	d) 1. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
	e) 2. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
	f) Matematika	1	2	3	4	5
	a) Technika	1	2	3	4	5
	h) Erkölcstan/hittan	1	2	3	4	5
	i) Testnevelés	1	2	3	4	5
	j) Művészetismeret	1	2	3	4	5
	k) Ének-zene	1	2	3	4	5

egyáltalán nem szeretem 2) nem szeretem 3) közömbös 4) szeretem 5) nagyon szeretem

8. Milyen osztályzataid voltak félévkor az alábbi tantárgyakból? ***Karikázd be*** *megfelelő számot! Ha valamelyik tantárgyat nem tanulod, húzd át a nevét!*

a) Magatartás	1	2	3	4	5
b) Szorgalom	1	2	3	4	5
c) Irodalom	1	2	3	4	5
d) Nyelvtan	1	2	3	4	5
e) Természetismeret	1	2	3	4	5
f) 1. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
g) 2. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
h) Matematika	1	2	3	4	5
i) Technika	1	2	3	4	5
j) Erkölcstan/hittan	1	2	3	4	5
k) Testnevelés	1	2	3	4	5
l) Művészetismeret	1	2	3	4	5
m) Ének-zene	1	2	3	4	5

9. Mit gondolsz, egy 100 pontos matematikateszten hány pontos eredményt érnél el? ……….. Hány pontos eredménnyel lennél elégedett? ……..
10. Az iskola befejezése után melyek a legtávolabbi terveid? Melyik az a legmagasabb iskolai végzettség, amit életed során el szeretnél érni? ***Karikázd be*** *a megfelelő számot!*
    1) szakmunkás bizonyítványt szerezni
    2) érettségizni
    3) érettségizni és szakmát is tanulni
    4) főiskolát végezni/diplomát szerezni felsőfokú alapképzésben
    5) egyetemet végezni/ diplomát szerezni felsőfokú mesterképzésben
    6) abbahagyni az iskolát és munkába állni, amilyen hamar csak lehet
11. Mennyire vagy elégedett a mostani matematikai teljesítményeddel? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz előtti számot!*
    1) nagyon elégedetlen 2) elégedetlen 3) közepesen elégedett
    4) elégedett 5) nagyon elégedett

12. Mennyire szereted az alábbiakat?
    1)egyáltalán nem szeretem 2) szeretem 3) közömbös 4) szeretem 5) nagyon szeretem

Összeadás	1	2	3	4	5
Kivonás	1	2	3	4	5
Szorzás	1	2	3	4	5
Osztás	1	2	3	4	5

Fejben számolás	1	2	3	4	5
Írásban számolás	1	2	3	4	5
Törtek	1	2	3	4	5
Szöveges feladatok	1	2	3	4	5
Szerkesztési feladatok	1	2	3	4	5
Mértékegységátváltás	1	2	3	4	5
Logikai feladatok	1	2	3	4	5

13. Szerinted mennyire lesznek fontosak későbbi életed során, hogy jól tudd az alábbiakat?
    2) szükségtelen 2) nem fontos 3) közepes fontosságú 4) elég fontos 5) nagyon fontos

Fejben végzett számítások	1	2	3	4	5
Írásban végzett számítások	1	2	3	4	5
Szöveges feladatok	1	2	3	4	5
Szerkesztési feladatok	1	2	3	4	5
Mértékegységátváltás	1	2	3	4	5
Logikai feladatok	1	2	3	4	5

14. Mennyire segítenek matematika tanulása közben az alábbiak?
    egyáltalán nem segít 2) inkább nem/ ritkán segít 4) inkább/gyakran segít 5) sokat segít

Rajz készítése	1	2	4	5
Zenehallgatás	1	2	4	5
Ujjakon számolás	1	2	4	5
Magamban számolás	1	2	4	5
Hangos számolás	1	2	4	5
Írásban számolás	1	2	4	5
Teljes csend	1	2	4	5
Páros munka	1	2	4	5
Csoportmunka	1	2	4	5
Tanár magyarázata	1	2	4	5
Tankönyv mintapéldái	1	2	4	5
Szülő / testvér magyaráz	1	2	4	5
Magántanár	1	2	4	5

15. Egy átlagos tanítási napon mennyi időt fordítasz tanórán kívüli (pl.: otthoni) tanulásra?

1) Egyáltalán nem készülök.
2) Naponta fél óránál kevesebbet készülök.
3) Naponta fél-egy órát készülök.
4) Naponta egy-két órát készülök.
5) Naponta két-három órát készülök.

16. Egy átlagos tanítási napon mennyi ideig készülsz matematikaórára?

1) Egyáltalán nem készülök.
2) Naponta fél óránál kevesebbet készülök.
3) Naponta fél-egy órát készülök.
4) Naponta egy-két órát készülök.
5) Naponta két-három órát készülök.

6) Naponta több, mint három órát készülök.

6) Naponta több, mint három órát készülök.

A következő kérdések (17-22. kérdések) segítségével azt szeretném megtudni, hogyan vélekedsz a matematika tanulásával kapcsolatban. Miért tanulod a matematikát? Kérjük, hogy 1-től 5-ig terjedő skálán pontozd az állításokat a pontok alábbi jelentésének megfelelően! Karikázd be a válaszodnak leginkább megfelelő számot!

1: nem igaz, egyáltalán nem jellemző.
2: általában nem igaz, sokszor nem így van.
3: nem tudom eldönteni.
4: általában igaz, legtöbbször így van
5: igaz, mindig így van

17)	Mert kötelező tantárgy.	1	2	3	4	5
18)	Mert érdekes.	1	2	3	4	5
19)	Mert szeretnék jó eredménnyel bekerülni a középiskolába.	1	2	3	4	5
20)	Mert szeretnék jó eredménnyel érettségizni.	1	2	3	4	5
21)	Mert szükségem van rá a továbbtanuláshoz.	1	2	3	4	5
22)	Mert matematika szakra szeretnék jelentkezni.	1	2	3	4	5

23. Milyen gyakran veszel részt matematikaversenyeken?
1) Még sosem voltam.
2) Egyszer voltam már.
3) Két-háromszor voltam.
4) Minden évben részt veszek egyen.
5) Évente több versenyen indulok.

24. Mennyi időt fordítasz számítógépezésre?
1) nem szoktam számítógépezni
2) havonta egy óránál kevesebbet
3) hetente egy-két órát
4) naponta egy-két órát
5) naponta három-négy órát

25. Mit szeretsz olvasni az alábbiak közül? *Több választ is megjelölhetsz!*
1) sms-t
2) üzeneteket a facebookon, e-mailt
3) híreket, érdekességeket újságban, neten
4) mesekönyvet
5) ifjúsági regényt
6) egyebet, mégpedig:

26. Hányszor voltál már színházban?
1) még sosem voltam
2) egyszer voltam
3) kétszer-háromszor voltam
4) legalább négyszer voltam
5) legalább ötször voltam már
6) rendszeresen járok, bérletem van

27. Egy átlagos tanítási napon mennyi időt fordítasz TV nézésre?
1) nem szoktam TV-t nézni

28. Mennyi időt fordítasz hetente olvasásra?
1) nem szoktam olvasni

2) egy óránál kevesebbet	2) egy óránál kevesebbet
3) egy-két órát	3) egy-két órát
4) három-négy órát	4) egy-két órát
5) több, mint négy órát	5) három-négy órát

Válaszaidat, együttműködésedet köszönjük!

14. sz. melléklet. Kérdőív 5-6. évfolyam, központi vizsgálat

KÉRDŐÍV (5-6. osztály)

Név: ………………………………………………………. Osztály:……… Kód: …………..

Kedves Tanuló!

Ez a kérdőív nem a tudásodat méri. Arra vagyunk kíváncsiak, mennyire szeretsz iskolába járni, tanulni. Az alábbi kérdőívvel továbbá az érdeklődési körödet, továbbtanulással kapcsolatos terveidet szeretnénk felmérni. Kérjük, segítsd munkánkat, olvasd el figyelmesen az alábbi kérdéseket, és őszintén töltsd ki a kérdőívet! A megfelelő válasz sorszámát karikázd be! Ahol szükséges, írd be a válaszod! Válaszaidat bizalmasan kezeljük, azokat kizárólag kutatási célokra használjuk fel.

1. Nemed: 1) fiú 2) lány
2. Mikor születtél? ________év _______________hó
3. Mi a szüleid legmagasabb iskolai végzettsége? ***Karikázd be*** a megfelelő számot!

ANYA	legmagasabb iskolai végzettsége	APA
1	általános iskola	1
2	szakmunkásképző iskola	2
3	érettségi	3
4	OKJ tanfolyam	4
5	főiskola	5
6	egyetem	6

4. Mennyire szeretsz iskolába járni? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz sorszámát!*
   1)egyáltalán nem szeretek 2) nem szeretek 3) közepesen 4) szeretek 5) nagyon szeretek

5. Milyen idegen nyelvet vagy nyelveket tanulsz? ***Írd*** *a vonalra!*
   3. idegen nyelv ……………………………………….
   4. idegen nyelv ………………………………………

6. Mennyire vagy elégedett a mostani iskolai teljesítményeddel? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz sorszámát!*
   1) nagyon elégedetlen 2) elégedetlen 3) közepesen elégedett
   4) elégedett 5) nagyon elégedett

7. Mennyire szereted a következő tantárgyakat? ***Karikázd be*** *megfelelő számokat, a számok alábbi jelentéseknek megfelelően! Ha valamelyik tantárgyat nem tanulod, húzd át a nevét!*
   1) egyáltalán nem szeretem 2) nem szeretem 3) közömbös 4) szeretem 5) nagyon szeretem

o)	Irodalom	1	2	3	4	5
p)	Nyelvtan	1	2	3	4	5
q)	Történelem	1	2	3	4	5
r)	Természetismeret	1	2	3	4	5
s)	1. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
t)	2. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
u)	Informatika	1	2	3	4	5
v)	Matematika	1	2	3	4	5
w)	Fizika	1	2	3	4	5

x) Technika	1	2	3	4	5
y) Erkölcstan/hittan	1	2	3	4	5
z) Testnevelés	1	2	3	4	5
aa) Művészetismeret	1	2	3	4	5
bb) Ének-zene	1	2	3	4	5

8. Milyen osztályzataid voltak félévkor az alábbi tantárgyakból? ***Karikázd be*** *megfelelő számot! Ha valamelyik tantárgyat nem tanulod, húzd át a nevét!*

q) Magatartás	1	2	3	4	5
r) Szorgalom	1	2	3	4	5
s) Irodalom	1	2	3	4	5
t) Nyelvtan	1	2	3	4	5
u) Történelem	1	2	3	4	5
v) Természetismeret	1	2	3	4	5
w) 1. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
x) 2. Idegen nyelv	1	2	3	4	5
y) Informatika	1	2	3	4	5
z) Matematika	1	2	3	4	5
aa) Fizika	1	2	3	4	5
bb) Technika	1	2	3	4	5
cc) Erkölcstan/hittan	1	2	3	4	5
dd) Testnevelés	1	2	3	4	5
ee) Művészetismeret	1	2	3	4	5
ff) Ének-zene	1	2	3	4	5

9. Mit gondolsz, egy 100 pontos matematikateszten hány százalékos eredményt érnél el? ……….. Hány százalékos eredménnyel lennél elégedett? ……..

10. Az iskola befejezése után melyek a legtávolabbi terveid? Melyik az a legmagasabb iskolai végzettség, amit életed során el szeretnél érni? ***Karikázd be*** *a megfelelő számot!*
    1) szakmunkás bizonyítványt szerezni
    2) érettségizni
    3) érettségizni és szakmát is tanulni
    4) főiskolát végezni/diplomát szerezni felsőfokú alapképzésben
    5) egyetemet végezni/ diplomát szerezni felsőfokú mesterképzésben
    6) abbahagyni az iskolát és munkába állni, amilyen hamar csak lehet
11. Mennyire vagy elégedett a mostani matematikai teljesítményeddel? ***Karikázd be*** *a megfelelő válasz előtti számot!*
    1) nagyon elégedetlen 2) elégedetlen 3) közepesen elégedett
    4) elégedett 5) nagyon elégedett

12. Mennyire szereted az alábbiakat?
    1)egyáltalán nem szeretem 2) szeretem 3) közömbös 4) szeretem 5) nagyon szeretem

Összeadás	1	2	3	4	5

Kivonás	1	2	3	4	5
Szorzás	1	2	3	4	5
Osztás	1	2	3	4	5
Fejben számolás	1	2	3	4	5
Írásban számolás	1	2	3	4	5
Természetes számok	1	2	3	4	5
Negatív számok	1	2	3	4	5
Törtek	1	2	3	4	5
Tizedes törtek	1	2	3	4	5
Vegyes számok	1	2	3	4	5
Szöveges feladatok	1	2	3	4	5
Szerkesztési feladatok	1	2	3	4	5
Arányossági feladatok	1	2	3	4	5
Százalékszámítás	1	2	3	4	5
Mértékegységátváltás	1	2	3	4	5
Logikai feladatok	1	2	3	4	5

13. Szerinted mennyire lesznek fontosak későbbi életed során, hogy jól tudd az alábbiakat?
    3) szükségtelen 2) nem fontos 3) közepes fontosságú 4) elég fontos 5) nagyon fontos

Fejben végzett számítások	1	2	3	4	5
Írásban végzett számítások	1	2	3	4	5
Szöveges feladatok	1	2	3	4	5
Szerkesztési feladatok	1	2	3	4	5
Arányossági feladatok	1	2	3	4	5
Százalékszámítás	1	2	3	4	5
Mértékegységátváltás	1	2	3	4	5
Logikai feladatok	1	2	3	4	5

14. Mennyire segítenek matematika tanulása közben az alábbiak?
    2) egyáltalán nem segít 2) inkább nem/ ritkán segít 4) inkább/gyakran segít 5) sokat segít

Rajz készítése	1	2	4	5
Zenehallgatás	1	2	4	5
Ujjakon számolás	1	2	4	5
Magamban számolás	1	2	4	5
Hangos számolás	1	2	4	5
Írásban számolás	1	2	4	5
Teljes csend	1	2	4	5
Páros munka	1	2	4	5
Csoportmunka	1	2	4	5
Tanár magyarázata	1	2	4	5

Tankönyv mintapéldái	1	2	4	5
Szülő / testvér magyaráz	1	2	4	5
Magántanár	1	2	4	5

15. Egy átlagos tanítási napon mennyi időt fordítasz tanórán kívüli (pl.: otthoni) tanulásra?

1) Egyáltalán nem készülök.
2) Naponta fél óránál kevesebbet készülök.
3) Naponta fél-egy órát készülök.
4) Naponta egy-két órát készülök.
5) Naponta két-három órát készülök.
6) Naponta több, mint három órát készülök.

16. Egy átlagos tanítási napon mennyi ideig készülsz matematikaórára?

1) Egyáltalán nem készülök.
2) Naponta fél óránál kevesebbet készülök.
3) Naponta fél-egy órát készülök.
4) Naponta egy-két órát készülök.
5) Naponta két-három órát készülök.
6) Naponta több, mint három órát készülök.

A következő kérdések (17-22. kérdések) segítségével azt szeretném megtudni, hogyan vélekedsz a matematika tanulásával kapcsolatban. Miért tanulod a matematikát? Kérjük, hogy 1-től 5-ig terjedő skálán pontozd az állításokat a pontok alábbi jelentésének megfelelően! Karikázd be a válaszodnak leginkább megfelelő számot!

1: nem igaz, egyáltalán nem jellemző.
2: általában nem igaz, sokszor nem így van.
3: nem tudom eldönteni.
4: általában igaz, legtöbbször így van
5: igaz, mindig így van

17)	Mert kötelező tantárgy.	1	2	3	4	5
18)	Mert érdekes.	1	2	3	4	5
19)	Mert szeretnék jó eredménnyel bekerülni a középiskolába.	1	2	3	4	5
20)	Mert szeretnék jó eredménnyel érettségizni.	1	2	3	4	5
21)	Mert szükségem van rá a továbbtanuláshoz.	1	2	3	4	5
22)	Mert matematika szakra szeretnék jelentkezni.	1	2	3	4	5

23. Milyen gyakran veszel részt matematikaversenyeken?

1) Még sosem voltam.
2) Egyszer voltam már.
3) Két-háromszor voltam.
4) Minden évben részt veszek egyen.
5) Évente több versenyen indulok.

24. Mennyi időt fordítasz számítógépezésre?

1) nem szoktam számítógépezni
2) havonta egy óránál kevesebbet
3) hetente egy-két órát
4) naponta egy-két órát
5) naponta három-négy órát

25. Mit szeretsz olvasni az alábbiak közül? *Több választ is megjelölhetsz!*

1) sms-t
2) üzeneteket a facebookon, e-mailt

26. Hányszor voltál már színházban?

1) még sosem voltam
2) egyszer voltam

3) híreket, érdekességeket újságban, neten
4) mesekönyvet
5) ifjúsági regényt
6) egyebet, mégpedig:

3) kétszer-háromszor voltam
4) legalább négyszer voltam
5) legalább ötször voltam már
6) rendszeresen járok, bérletem van

27. Egy átlagos tanítási napon mennyi időt fordítasz TV nézésre?

1) nem szoktam TV-t nézni
2) egy óránál kevesebbet
3) egy-két órát
4) három-négy órát
5) több, mint négy órát

28. Mennyi időt fordítasz hetente olvasásra?

1) nem szoktam olvasni
2) egy óránál kevesebbet
3) egy-két órát
4) egy-két órát
5) három-négy órát

Válaszaidat, együttműködésedet köszönjük!

15. sz. melléklet. A Szorzási Stratégiák Teszt elemzése, reliabilitás, központi vizsgálat

Item		Átlag	Szórás	Cronbach-α, ha az itemet töröljük
A szorzásteszt 1. iteme	25·48	0,44	0,50	0,96
A szorzásteszt 2. iteme	25·120	0,43	0,50	0,96
A szorzásteszt 3. iteme	31·32	0,40	0,49	0,96
A szorzásteszt 4. iteme	8·99	0,60	0,49	0,96
A szorzásteszt 5. iteme	49·51	0,34	0,48	0,96
A szorzásteszt 6. iteme	12·250	0,41	0,49	0,96
A szorzásteszt 7. iteme	8·4211	0,43	0,50	0,96
A szorzásteszt 8. iteme	15·48	0,37	0,48	0,96
A szorzásteszt 9. iteme	12·16	0,42	0,50	0,96
A szorzásteszt 10. iteme	32·32	0,32	0,47	0,96
A szorzásteszt 11. iteme	25· 25	0,38	0,49	0,96
A szorzásteszt 12. iteme	17·99	0,35	0,48	0,96
A szorzásteszt 13. iteme	12·15	0,45	0,50	0,96
A szorzásteszt 14. iteme	20·30	0,66	0,47	0,96
A szorzásteszt 15. iteme	8·999	0,49	0,50	0,96
A szorzásteszt 16. iteme	23·27	0,35	0,48	0,96
A szorzásteszt 17. iteme	25·32	0,41	0,49	0,96
A szorzásteszt 18. iteme	25·65	0,35	0,48	0,96
A szorzásteszt 19. iteme	13·13	0,46	0,50	0,96
A szorzásteszt 20. iteme	15·15	0,44	0,50	0,96
A szorzásteszt 21. iteme	16·16	0,38	0,49	0,96
A szorzásteszt 22. iteme	24· 24	0,34	0,47	0,96
A szorzásteszt 23. iteme	9·742	0,44	0,49	0,96
A szorzásteszt 24. iteme	15·16	0,47	0,50	0,96
A szorzásteszt 25. iteme	25·50	0,49	0,50	0,96
A szorzásteszt 26. iteme	18·16	0,43	0,50	0,96
A szorzásteszt 27. iteme	25· 35	0,38	0,49	0,96
A szorzásteszt 28. iteme	9·888	0,48	0,50	0,96
A szorzásteszt 29. iteme	150·6	0,62	0,49	0,96
A szorzásteszt 30. iteme	50·50	0,62	0,49	0,96
A szorzásteszt 31. iteme	19·19	0,31	0,46	0,96

15.sz. melléklet. A Szorzási Stratégiák Teszt elemzése, reliabilitás, központi vizsgálat (folytatás)

Item		Átlag	Szórás	Cronbach-α, ha az itemet töröljük
A szorzásteszt 32. iteme	77· 8	0,53	0,50	0,96
A szorzásteszt 33. iteme	9·652	0,42	0,49	0,96
A szorzásteszt 34. iteme	12·11	0,46	0,50	0,96
A szorzásteszt 35. iteme	11·11	0,43	0,50	0,96
A szorzásteszt 36. iteme	19·21	0,39	0,49	0,96
A szorzásteszt 37. iteme	45· 45	0,31	0,46	0,96
A szorzásteszt 38. iteme	77·99	0,30	0,46	0,96
A szorzásteszt 39. iteme	10·690	0,63	0,48	0,96
A szorzásteszt 40. iteme	500·500	0,52	0,50	0,96

16. sz. melléklet. Az egyes stratégiákra vonatkozó statisztika iskolánként, központi vizsgálat

Stratégia	Iskola	Minta (N)	Átlag	Szórás	Minimum	Maximum
Írásban számol	1	209	1,21	6,35	0	40
	2	64	0,05	0,28	0	2
	3	88	8,44	14,43	0	40
	4	66	0,00	0,00	0	0
	5	11	0,00	0,00	0	0
	6	43	0,00	0,00	0	0
	7	56	0,00	0,00	0	0
	8	25	0,32	1,60	0	8
	9	63	1,65	5,53	0	31
	10	57	0,72	4,43	0	33
	11	118	2,48	8,78	0	40
	Össz.	800	1,81	7,38	0	40
Üresen hagyja	1	209	6,84	9,78	0	37
	2	64	6,67	11,15	0	39
	3	88	6,47	9,81	0	37
	4	66	10,33	12,01	0	40
	5	11	1,09	3,30	0	11
	6	43	7,79	10,06	0	32
	7	56	1,75	6,43	0	38
	8	25	6,72	11,49	0	35
	9	63	0,14	0,44	0	2
	10	57	17,84	12,58	0	39
	11	118	6,50	9,23	0	39
	Össz.	800	6,89	10,41	0	40
Számológéppel számol	1	209	0,19	2,77	0	40
	2	64	0,00	0,00	0	0
	3	88	0,00	0,00	0	0
	4	66	0,00	0,00	0	0
	5	11	0,00	0,00	0	0
	6	43	0,00	0,00	0	0
	7	56	0,00	0,00	0	0
	8	25	0,00	0,00	0	0
	9	63	0,00	0,00	0	0
	10	57	0,00	0,00	0	0
	11	118	0,00	0,00	0	0
	Össz.	800	0,05	1,41	0	40

17. sz. melléklet. Az egyes stratégiákra vonatkozó Levene-féle F értékek, központi vizsgálat

Stratégia	Levene-féle F	Szignifikan-ciaszint (p)
Írásban számol	30,27	0,000
Üresen hagyja	21,67	0,000
Számológéppel számol	1,13	0,335
Elképzelem fejben leírva	6,04	0,000
Minden részletszorzatot számjegyenként szoroz össze	3,43	0,000
Egy részletszorzatot számjegyenként, egy részletszorzatot emlékezeti előhívással szoroz	nem számolható	
Két részletszorzatot emlékezeti előhívással számol ki	2,34	0,010
Felhalmozás	nem számolható	
Additív disztribúció	5,17	0,000
Egyesekkel kezd	5,52	0,000
Tízesekkel kezd	13,11	0,000
Az egyik szorzótényezőt összegre tagolja	6,32	0,000
Mindkét tényezőt részekre tagolja	37,17	0,000
Frakcionális disztribúció	4,65	0,000
Számlálás	nem számolható	
Szubtraktív disztribúció	29,18	0,000
Kvadratikus disztribúció	7,46	0,000
Általános faktorizáció	2,41	0,008
Felezés-duplázás	24,23	0,000
Felezés-duplázás, szubtraktív disztribúcióval folytatva	10,19	0,000
Maradék nélkül osztható részekre bontás	7,32	0,000
Maradék nélkül osztható részekre bontás, összegre bontással kiegészítve	2,49	0,006
Ismert szabály alkalmazása	42,82	0,000
Összeg négyzete azonosság alkalmazása	3,04	0,001
Ötletes algebrai átalakítás	5,54	0,000
Emlékezeti előhívás	43,67	0,000
Exponenciális faktorizálás	18,32	0,000
TT + EE: Tízeseket a tízesekkel és az egyeseket az egyesekkel szoroz, majd a két részletszorzatot összeadja	15,45	0,000
TT + EE + az egyik tényezőt hozzáadja	10,19	0,000
Tízeseket a tízesekkel szorozza, majd az egyik tényezőt hozzáadja a részletszorzathoz	3,34	0,000
Tízeseket a tízesekkel szorozza, majd a második tényezővel megszorozza	nem számolható	

17. *sz. melléklet. Az egyes stratégiákra vonatkozó Levene-féle F értékek, központi vizsgálat* (folytatás)

Stratégia	Levene-féle F	Szignifikanciaszint (p)
Tízesekkel kezdi a szorzást, majd az egyeseket a tízesekkel szorozza	10,19	0,000
Szubtraktív disztribúció 2.	10,19	0,000
Hiányzó részletszámítások mindkét tényező összegre bontásakor	10,19	0,000
Helyiérték figyelmen kívül hagyása	10,19	0,000
Egyéb, hibás eredményre vezető stratégia	19,81	0,000

Megjegyzés: Szabadságfok (df1)=10, szabadságfok (df2)=789