

# Késleltetett differenciálegyenletek periodikus megoldásai monoton visszacsatolás esetén

Doktori értekezés

**Beretka Szandra**

Témavezető: Dr. Vas Gabriella

Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola

Bolyai Intézet, Szegedi Tudományegyetem

Szeged, 2021

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>3</b>
<b>2. Periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja pozitív visszacsatolás esetén</b>	<b>6</b>
2.1. Korábbi eredmények . . . . .	6
2.2. A fejezet fő állítása . . . . .	11
2.3. Az $F$ leképezés . . . . .	13
2.4. $F$ fixpontjai periodikus megoldásokat adnak . . . . .	21
2.5. $F$ nyereg-csomó bifurkációja . . . . .	28
2.6. Más típusú periodikus megoldások kizárása . . . . .	32
2.7. A 2.3. Tétel bizonyítása . . . . .	40
2.8. Függelék: $F$ parciális deriváltjai . . . . .	41
<b>3. Periodikus pályák egy negatív visszacsatolású egyenletre</b>	<b>51</b>
3.1. Elméleti összefoglalás . . . . .	51
3.2. Tételek a Nazarenko-egyenletre . . . . .	57
3.3. A határegyenlet . . . . .	61
3.4. Becslések . . . . .	63
3.5. Lipschitz-folytonos leképezések . . . . .	70
3.6. A periodikus megoldások értékkészletéről . . . . .	74
3.7. A fejezet legfontosabb eredményeinek bizonyítása . . . . .	81
<b>4. Összefoglalás</b>	<b>87</b>
<b>5. Summary</b>	<b>92</b>
<b>Köszönetnyilvánítás</b>	<b>97</b>
<b>Irodalomjegyzék</b>	<b>98</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

Ez a doktori értekezés késleltetett közönséges differenciálegyenletek vizsgálatát tűzte ki célul. Mint ismert, a differenciálegyenletek olyan függvényegyenletek, melyekben az ismeretlen  $x$  függvény differenciálhányadosa is megjelenik. Közönséges egyenleteknél a meghatározandó  $x$  megoldás egyváltozós függvény, általában a  $t$ -vel jelölt idő függvénye. A „késleltetett” jelző arra utal, hogy  $x$  differenciálhányadosa egy adott  $t$  időpillanatban nem csak  $x(t)$ -től, hanem  $x$  valamely múltbeli értékétől vagy értékeitől is függ. Ennek megfelelően a késleltetett differenciálegyenletek olyan folyamatok modellezésére alkalmasak, amely során a rendszer állapotának változását nem csupán annak jelen állapota határozza meg; a változás irányát a múltbeli állapot(ok) is befolyásolják. Számos ilyen folyamatot ismerünk a fizikából, közgazdaságtanból, biológiából, vagy a populációdinamikából.

A késleltetett differenciálegyenletek elmélete a XX. század második felében indult fejlődésnek. Az alapvető elméleti háttérrel Diekmann és szerzőtársai [8] monográfiájában, Hale és Verduyn Lunel [13] könyvében, illetve Smith [48] munkájában olvashatunk. Walther [61] dolgozata a legérdekesebb kutatási eredményeket foglalja össze. A széleskörű alkalmazásokról szól Erneux [9] monográfiája. Az eddig elért eredmények mellett még mindig számos nyitott kérdés van, melyek újabb és újabb kutatásokat motiválnak.

A disszertációban speciálisan

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t - \tau)), \quad t > 0, \quad (1.1)$$

alakú késleltetett differenciálegyenletekkel foglalkozunk, ahol  $\mu \geq 0$  és  $\tau > 0$ , az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  visszacsatolási függvény pedig adott folytonos nemlinearitás. Pozitív, illetve negatív visszacsatolásról beszélünk, ha  $xf(x) \geq 0$ , illetve  $xf(x) \leq 0$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén.

A következő, széles körben elfogadott fogalmakat és jelöléseket fogjuk használni. Késleltetett egyenletek esetén általában  $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$  a fázistér, amely a  $\varphi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvények Banach-tere a  $\|\varphi\| = \sup_{s \in [-\tau, 0]} |\varphi(s)|$  szuprémum normával. Ha  $x$  folytonos, valós értékű függvény, mely értelmezési tartománya tartalmazza a  $[t - \tau, t]$  intervallumot, akkor az  $x_t$  szegmens eleme  $C$ -nek, és a következőképp van definiálva:  $x_t(s) := x(t + s)$  minden  $s \in [-\tau, 0]$

esetén.

Minden  $\varphi \in C$  egyértelműen meghatároz egy  $x^\varphi : [-\tau, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvényt, amely differenciálható  $(0, \infty)$ -en, teljesíti az egyenletet minden  $t > 0$ -ra, és amelyre  $x_0^\varphi = \varphi$ . Az ilyen  $x^\varphi$  függvényt nevezzük az egyenlet  $\varphi$  kezdeti függvényhez tartozó megoldásának. Az  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvényt is megoldásnak nevezzük, ha kielégíti az egyenletet minden valós  $t$  esetén.

Az, hogy minden  $\varphi$  kezdeti függvény egyértelműen meghatároz egy  $x^\varphi$  megoldást, könnyen bizonyítható a lépések módszerével: Először megoldjuk az  $x'(t) = -\mu x(t) + f(\varphi(t - \tau))$  inhomogén, lineáris differenciálegyenletet a  $[0, \tau]$  intervallumon:

$$x^\varphi(t) = \varphi(0)e^{-\mu t} + \int_0^t e^{\mu(s-t)} f(\varphi(s - \tau)) ds, \quad t \in [0, \tau].$$

Ha pedig ismerjük a megoldást  $[0, \tau]$ -n, akkor hasonló módon meghatározhatjuk  $[\tau, 2\tau]$ -n, majd  $[2\tau, 3\tau]$ -n, és így tovább.

A lépések módszere igazolja a megoldások létezését, de nem ad információt a megoldások aszimptotikus viselkedéséről, és nem alkalmas a periodikus megoldások meghatározására sem. Késleltetett differenciálegyenletek esetén a megoldások hosszú távú viselkedésének, illetve a periodikus megoldások létezésének, unicitásának és stabilitásának vizsgálata érdekes és összetett feladat [21, 22, 61].

A doktori értekezésben periodikus megoldásokkal kapcsolatos kérdéseket tanulmányozunk. Először periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazoljuk pozitív visszacsatolás esetén. A dolgozat második felében a negatív visszacsatolást megvalósító Nazarenko-egyenlet lassan oszcilláló periodikus megoldásának egyértelműségét és stabilitását vizsgáljuk. A disszertáció az alábbi két publikációra épül:

- Beretka Sz., Vas G., Saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation, *J. Differential Equations* 269 (2020), no. 5, 4215-4252.
- Beretka Sz., Vas G., Stable periodic solutions for Nazarenko's equation, *Communications on Pure & Applied Analysis* 19 (2020), no. 6, 3257-3281.

Az első dolgozatot a 2. fejezetben mutatjuk be. Az (1.1) egyenletet vizsgáljuk, ha  $\mu = 1$ ,  $\tau = 1$ , és  $f = f_K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  az alábbi paraméterfüggő, folytonos, nemcsökkenő függvény:

$$f_K(x) = \begin{cases} K, & x \geq 1 + \varepsilon, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x - 1), & 1 \leq x < 1 + \varepsilon, \\ 0, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x + 1), & -1 - \varepsilon \leq x < -1, \\ -K, & x < -1 - \varepsilon. \end{cases}$$

Itt  $\varepsilon > 0$  kicsi, rögzített szám. Igazoljuk, hogy létezik  $K^*$  6.5 és 7 között úgy, hogy  $K = K^*$ -ban periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja történik. A létrejövő periodikus megoldások nagy

amplitúdójúak abban az értelemben, hogy oszcillálnak  $f_K$  mindkét instabil fixpontja körül, amelyek a  $(-1 - \varepsilon, -1)$  és az  $(1, 1 + \varepsilon)$  intervallumokba esnek.

A nagy amplitúdójú periodikus megoldás fogalmát Krisztin és Vas vezette be [24]-ben. A 2. fejezetben bemutatott Beretka–Vas-dolgozat Krisztin és Vas nagy amplitúdójú periodikus megoldásokról írt [24, 25, 53] cikksorozatának folytatása. Úgy tudjuk, ez az első olyan eredmény, amely periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazolja (1.1) alakú egyenletek esetén. Hasonló tételt bizonyított López Nieto [36]-ban késleltetett differenciálegyenletek egy másik osztályára.

A bizonyítás ötlete a következő: Bevezetünk egy egydimenziós  $F$  leképezést (amely függ a  $K$  és  $\varepsilon$  paraméterektől is) úgy, hogy a periodikus pályák és  $F$  fixpontjai között bijekció van. Ezután egy klasszikus bifurkációelméleti tétel segítségével megmutatjuk, hogy  $F$  nyereg-csomó bifurkáción megy keresztül. A bizonyítás kulcslépése a megfelelő  $F$  leképezés definiálása. Ehhez arra van szükségünk, hogy pontos képünk legyen a periodikus megoldások alakjáról a bifurkációs pont közelében.

A második dolgozat eredményeit a 3. fejezetben ismertetjük. Az

$$\dot{y}(t) + py(t) - \frac{qy(t)}{r + y^n(t - \tau)} = 0, \quad t > 0,$$

Nazarenko-egyenlet periodikus megoldásait vizsgáljuk a  $p, q, r, \tau \in (0, \infty)$ ,  $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  és  $q/p > r$  feltételek mellett. Ekkor  $K = (q/p - r)^{1/n}$  adja az egyetlen pozitív egyensúlyi helyzetet. Korábbi kutatásokból ismert, hogy a fenti egyenletnek számok periodikus megoldása van [49]. A 3. fejezet fő eredménye, hogy ha  $\tau$  vagy  $n$  elég nagy, akkor az egyenletnek egyetlen pozitív,  $K$  körül lassan oszcilláló periodikus megoldása létezik, amely orbitálisan aszimptotikusan stabil. Ezen periodikus megoldás aszimptotikus alakját is meghatározzuk  $n \rightarrow \infty$  esetén.

A bizonyítás során a Nazarenko-egyenletet az  $x = \ln y - \ln K$  transzformáció által

$$x'(t) = -f(x(t - \tau))$$

alakban vizsgáljuk, ahol

$$f(x) = p - \frac{q}{r + \left(\frac{q}{p} - r\right) e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Walther negatív visszacsatolású egyenletekre [56]-ban bemutatott technikáját és Nussbaum [44] dolgozatának eredményeit ötvözzük, hogy megmutassuk a lassan oszcilláló periodikus pálya létezését és egyértelműségét. A stabilitás Kaplan és Yorke [19] dolgozatából következik.

## 2. fejezet

# Periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja pozitív visszacsatolás esetén

A késleltetett differenciálegyenletek periodikus pályáinak létezését és bifurkációját már sokan tanulmányozták, lásd a [8, 9, 13] könyveket és Walther [61] dolgozatát. Krisztin [22] dolgozatában speciálisan az

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t-1)), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

alakú késleltetett differenciálegyenletekkel kapcsolatos eredményeket foglalja össze, ahol  $f$  paraméterfüggő, monoton visszacsatolási függvény.

A Hopf-bifurkáció széles körben vizsgált jelenség [61]. Krisztintól, Walthertől és Wutól származik a jól ismert példa: Hopf-bifurkáció révén periodikus pályák keletkeznek, ha a visszacsatolási függvény szigorúan monoton növekvő, például  $f(x) = K \tanh(x)$  vagy  $f(x) = K \arctg(x)$ , lásd [26, 27, 28]. Periodikus pályák más típusú bifurkációit kevesen tanulmányozták. Egy érdekes példa származik Walthertől: kis amplitúdójú és nagy (végtelenbe tartó) periódusú periodikus pályák bifurkációját mutatta be [56] dolgozatában. Ebben a fejezetben periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazoljuk (2.1)-re, adott monoton növekvő visszacsatolási függvény esetén. Tudomásunk szerint csak López Nieto rendelkezik hasonló eredménnyel késleltetett differenciálegyenletekre: periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazolta egy másik késleltetett egyenletosztályra. Eredménye publikálás előtt áll [36].

### 2.1. Korábbi eredmények

Ebben a szakaszban, néhány alapvető fogalom és jelölés ismertetése után, áttekintjük a kutatásunkat motiváló korábbi eredményeket. Az alábbiakban tegyük fel, hogy  $f$  folytonosan differenciálható és  $f'(x) > 0$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén (tehát a visszacsatolás pozitív).

Ahogy a Bevezetésben említettük,  $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$  a fázistér a szuprémum normával. Minden  $\varphi \in C$  kezdeti függvény egyértelműen meghatároz egy  $x^\varphi : [-1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  megoldást.

Használjuk a  $\Phi$  jelölést a (2.1) egyenlet által indukált szemi-dinamikai rendszerre:

$$\Phi : [0, \infty) \times C \ni (t, \varphi) \mapsto x_t^\varphi \in C.$$

$\Phi$  folytonos. Az Arzelà–Ascoli-tétel segítségével bizonyítható, hogy  $\Phi(t, \cdot) : C \rightarrow C$ ,  $t \geq 1$ , kompakt abban az értelemben, hogy korlátos halmazokat képez prekompakt halmazokra.

Az  $\mathcal{A}$  globális attraktor a  $C$  fázistér azon nemüres, kompakt részhalmaza, amely egyrészt pozitívan invariáns (azaz  $\Phi(t, \mathcal{A}) = \mathcal{A}$  minden  $t \geq 0$  esetén), másrészt vonzza a fázistér korlátos részhalmazait (azaz tetszőleges  $B \subset C$  korlátos halmaz és  $\mathcal{A}$  bármely  $U$  nyitott környezete esetén létezik  $T \geq 0$  úgy, hogy  $\Phi([T, \infty) \times B) \subset U$ ). A globális attraktorról bővebben például [12]-ben olvashatunk.

Tudjuk, hogy ha  $\chi$  fixpontja az  $f$  leképezésnek (azaz  $f(\chi) = \chi$ ), akkor

$$\hat{\chi} : [-1, 0] \ni s \mapsto \chi \in \mathbb{R}$$

egyensúlyi helyzet. Minden  $\varphi \in C$  esetén  $D_2\Phi(t, \hat{\chi})\varphi = y_t^\varphi$ , ahol  $y^\varphi : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  az

$$\dot{y}(t) = -y(t) + f'(\chi)y(t-1)$$

variációs egyenlet megoldása az  $y_0^\varphi = \varphi$  kezdeti feltétellel. A  $D_2\Phi(t, \hat{\chi}) : C \rightarrow C$ ,  $t \geq 0$ , operátorok erősen folytonos félcsoportot alkotnak. A félcsoport generátorának spektruma információt ad az egyensúlyi helyzet stabilitási tulajdonságairól. A spektrum sajátértékekből áll, ezek a

$$C \ni \lambda \mapsto \lambda + 1 - f'(\chi)e^{-\lambda} \in \mathbb{C}.$$

karakterisztikus függvény zérushelyei. Egyetlen valós sajátérték van:  $\lambda_0$ . A spektrum ezen kívül komplex konjugált sajátértékek sorozatából áll:  $(\lambda_j, \overline{\lambda_j})_{j=1}^\infty$ . Az is igaz, hogy

$$\lambda_0 > \operatorname{Re}\lambda_1 > \operatorname{Re}\lambda_2 > \dots > \operatorname{Re}\lambda_n > \dots,$$

$$\operatorname{Re}\lambda_j \rightarrow -\infty, \text{ ha } j \rightarrow \infty,$$

és

$$(2j-1)\pi < \operatorname{Im}\lambda_j < 2j\pi \text{ minden } 1 \leq j \in \mathbb{N} \text{ esetén,}$$

lásd [8]-at. Minden sajátérték egyszeres. Ha  $0 < f'(\chi) < 1$ , akkor  $\lambda_0 < 0$ , és  $\hat{\chi}$  stabil és hiperbolikus. Ha  $f'(\chi) > 1$ , akkor  $\lambda_0 > 0$ , és  $\hat{\chi}$  instabil. Az alábbiakban a  $W^u(\hat{\chi})$  jelölést használjuk  $\hat{\chi}$  instabil halmazára.

Mallet-Paret és Sell bizonyított Poincaré–Bendixson-típusú tételt a (2.1) egyenletre [37]-ben. Ha valamely  $\varphi \in C$  esetén az  $x^\varphi : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  megoldás korlátos, akkor az  $\omega(\varphi)$  határhalmaz vagy egyetlen periodikus pálya, vagy minden  $\psi \in \omega(\varphi)$  esetén  $\alpha(x^\psi) \cup \omega(\psi)$  az egyensúlyi helyzetek részhalmaza.

Krisztin, Walther és Wu munkáiból részletesebb képet kapunk a (2.1) egyenlet megoldásainak szerkezetéről. Tegyük fel, hogy  $\chi_-$ , 0 és  $\chi_+$  három, egymást követő fixpontja  $f$ -nek úgy, hogy

$$f'(\chi_-) < 1, \quad f'(\chi_+) < 1 \quad \text{és} \quad f'(0) > \frac{1}{\cos \theta},$$

ahol  $\theta \in (3\pi/2, 2\pi)$  megoldása  $\theta = -\text{tg}\theta$ -nak. Ekkor  $\hat{\chi}_-$  és  $\hat{\chi}_+$  stabil, míg  $\hat{0}$  instabil egyensúlyi helyzet. Tegyük fel továbbá, hogy  $f(x)/x < 1$ , ha  $|x|$  elég nagy. Krisztin, Walther és Wu [27] monográfiája leírja a  $W^u(\hat{0})$  instabil halmaz lezártját, ha  $\hat{0}$  hiperbolikus. A legegyszerűbb esetben  $\overline{W^u(\hat{0})}$  a  $\hat{\chi}_-, \hat{0}, \hat{\chi}_+$  egyensúlyi helyzetekből, egy periodikus pályából és köztük futó összekötő pályákból áll. Ez a periodikus megoldás lassan oszcillál abban az értelemben, hogy 1 vagy 2 előjelváltása van minden 1 hosszú intervallumon. Ebben a legegyszerűbb esetben  $\overline{W^u(\hat{0})}$  homeomorf a 3-dimenziós zárt gömbbel. A szakirodalomban orsóként hivatkoznak rá. További technikai feltételek teljesülése esetén (ha  $f$  páratlan, és  $(0, \infty) \ni x \mapsto xf'(x)/f(x)$  szigorúan monoton csökkenő), akkor a  $\overline{W^u(\hat{0})}$  halmaz a  $\Phi|_{[0, \infty) \times B}$  globális attraktora [23, 26], ahol

$$B = \{\varphi \in C : \chi_- \leq \varphi(s) \leq \chi_+ \text{ bármely } s \in [-1, 0] \text{ esetén}\}.$$

Más esetben nem tudjuk kizárni további periodikus pályák létezését. Sőt,  $f'(0)$  növelésével újabb periodikus pályák születnek  $\hat{0}$ -ban Hopf-bifurkáció révén. Ekkor  $\overline{W^u(\hat{0})}$  szerkezete összetettebb, orsószzerű alakzat [22, 23, 26, 28].

Azt mondjuk, hogy a  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus megoldás nagy amplitúdójú, ha  $p$  az  $f$  nemlinearitás legalább két instabil fixpontja körül oszcillál (pontosabban fogalmazva, ha  $f$ -nek legalább két különböző  $\chi_1, \chi_2$  fixpontja van  $p(\mathbb{R})$ -ben úgy, hogy  $f'(\chi_1) > 1$  és  $f'(\chi_2) > 1$ ). A nagy amplitúdójú periodikus megoldás által meghatározott pályát pedig nagy amplitúdójú periodikus pályának hívjuk.

Először Krisztin és Vas bizonyította nagy amplitúdójú periodikus pálya létezését a [24] dolgozatban. A következő hipotézis mellett vizsgálták az egyenletet:

**(H)**  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $f'(\chi) > 0$  minden  $\chi \in \mathbb{R}$ -re, továbbá  $f$ -nek öt egymást követő

$$\chi_{-2} < \chi_{-1} < \chi_0 = 0 < \chi_1 < \chi_2$$

fixpontja van, és  $f'(\chi_j) < 1 < f'(\chi_k)$  minden  $j \in \{-2, 0, 2\}$  és  $k \in \{-1, 1\}$  esetén.

A fenti (H) feltétel mellett  $\hat{\chi}_j : [-1, 0] \ni s \mapsto \chi_j \in \mathbb{R}$  egyensúlyi helyzet minden  $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ -re. Mivel  $f$  monoton nő, a fázistér alábbi részhalmazai pozitívan invariánsak a  $\Phi$  szemi-dinamikai rendszerben:

$$\begin{aligned} C_{-2,0} &= \{\varphi \in C : \chi_{-2} \leq \varphi(s) \leq \chi_0 \text{ minden } s \in [-1, 0] \text{-ra}\}, \\ C_{0,2} &= \{\varphi \in C : \chi_0 \leq \varphi(s) \leq \chi_2 \text{ minden } s \in [-1, 0] \text{-ra}\}, \\ C_{-2,2} &= \{\varphi \in C : \chi_{-2} \leq \varphi(s) \leq \chi_2 \text{ minden } s \in [-1, 0] \text{-ra}\}. \end{aligned}$$



Amint már említettük, a  $\Phi|_{[0,\infty)\times C_{-2,0}}$  és a  $\Phi|_{[0,\infty)\times C_{0,2}}$  megszorítások  $\mathcal{A}_{-2,0}$  és  $\mathcal{A}_{0,2}$  globális attraktorainak szerkezetét (legalább is részben) jól ismerjük, ezek orsószerű alakzatok. Legyen  $\mathcal{A}$  a  $\Phi|_{[0,\infty)\times C_{-2,2}}$  megszorítás globális attraktora. A kérdés, hogy  $\mathcal{A}$  előáll-e

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2}$$

alakban, már [27]-ben felmerült. Krisztin és Vas [24] dolgozata igazolta, hogy speciális nemlineáris függvényekre  $\mathcal{A}$  szerkezete összetettebb, és az  $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$  halmazban periodikus pályák vannak. Ezek a periodikus megoldások nagy amplitúdóval rendelkeznek és lassan oszcillálnak abban értelemben, hogy 1 vagy 2 előjelváltásuk van minden 1 hosszú intervallumban.

**2.1. Tétel.** *Létezik olyan, a (H) hipotézist kielégítő  $f$  nemlinearitás, amelyre a (2.1) egyenletnek (időbeli eltolás erejéig) pontosan két lassan oszcilláló, nagy amplitúdójú periodikus megoldása van:  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ahol  $p(\mathbb{R}) \subsetneq q(\mathbb{R})$ . Az*

$$\mathcal{O}_p = \{p_t : t \in \mathbb{R}\} \text{ és } \mathcal{O}_q = \{q_t : t \in \mathbb{R}\}$$

*periodikus pályák hiperbolikusak és instabilak. Kettő, illetve egy Floquet-együtthatóval rendelkeznek az egységkörön kívül.*

Jelölje  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$  és  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$  rendre az  $\mathcal{O}_p$  és  $\mathcal{O}_q$  pályák instabil halmazát, vagyis legyen

$$\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p) = \{\varphi \in C : x^\varphi \text{ létezik } \mathbb{R}\text{-en, és } x_t^\varphi \rightarrow \mathcal{O}_p \text{ ahogy } t \rightarrow \infty\}$$

és

$$\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q) = \{\varphi \in C : x^\varphi \text{ létezik } \mathbb{R}\text{-en, és } x_t^\varphi \rightarrow \mathcal{O}_q \text{ ahogy } t \rightarrow -\infty\}.$$

A következő tétel a [24] dolgozat második fő állítása.

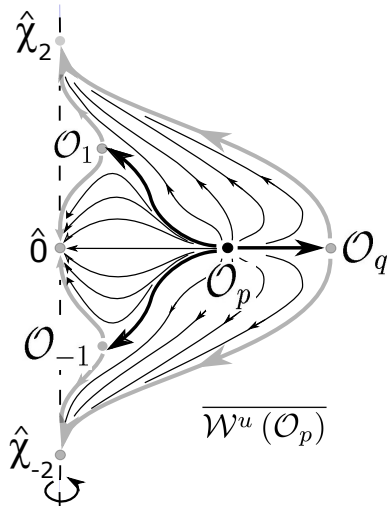
**2.2. Tétel.** *Az  $f$  függvény választható úgy, hogy kielégítse a (H) hipotézist, a 2.1. Tétel állítása igaz legyen, és az  $\mathcal{A}$  globális attraktorra az*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2} \cup \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p) \cup \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$$

*egyenlőség teljesüljön. A  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$  és  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$  halmazokon a dinamika a következő. Minden  $\varphi \in \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q) \setminus \mathcal{O}_q$ -ra az  $\omega(\varphi)$  határhalmaz vagy  $\{\hat{\chi}_{-2}\}$ , vagy  $\{\hat{\chi}_2\}$ . Minden  $\varphi \in \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p) \setminus \mathcal{O}_p$ -re  $\omega(\varphi)$  a  $\{\hat{\chi}_{-2}\}$ ,  $\{\hat{0}\}$   $\{\hat{\chi}_2\}$ ,  $\mathcal{O}_q$ ,  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_{-1}$  halmazok valamelyike, ahol  $\mathcal{O}_1$ ,  $\mathcal{O}_{-1}$  adott periodikus pályák az orsószerű alakzatokon belül. Továbbá az itt felsorolt heteroklinikus megoldások mind léteznek.*

Krisztin és Vas [25] dolgozata a nagy amplitúdójú periodikus pályák instabil halmazainak geometriai tulajdonságait vizsgálta. A dolgozat bizonyítja, hogy  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$  3-dimenziós részsoka-sága  $C$ -nek és egy folytonosan differenciálható függvény grafikonjaként áll elő. További fontos

eredmény, hogy a 2.2. Tételben említett, periodikus pályákat összekötő heteroklinikus halmazok 2-dimenziós részsokaságai  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$ -nek, homeomorfak a 2-dimenziós nyitott körgyűrűvel, és szintén leírhatók folytonosan differenciálható függvények grafikonjaiként. Az is igaz, hogy az  $\mathcal{O}_p$  periodikus pályát a stabil egyensúlyi helyzetekkel összekötő heteroklinikus halmazok 3-dimenziós részsokaságai  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$ -nek. A 2.1. ábrán a  $\overline{\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)}$  egy reprezentációját látjuk.



2.1. ábra.  $\overline{\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)}$ -t úgy képzelhetjük el, mint egy "tulipánt", amelyet körbeforgatunk a függőleges tengely körül. A pontok egyensúlyi helyzeteket és periodikus pályákat reprezentálnak. A vastag nyilak 2-dimenziós összekötő halmazokat, míg a vékony nyilak csoportjai 3-dimenziós összekötő halmazokat szimbolizálnak. Fekete színt használunk  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$ -re, és szürkével jelöljük  $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$  határát. (Az ábra forrása: [25].)

Vas nagy amplitúdójú periodikus pályák összetettebb konstrukcióit írta le [53]. Ebben a munkában a következő két, a fenti hipotézisektől némiképp eltérő feltétel mellett vizsgálta a (2.1) egyenletet:  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  nemcsökkenő függvény, és ha  $\chi$  fixpontja  $f$ -nek, akkor  $f'(\chi) \neq 1$ . Utóbbi feltétel garantálja, hogy minden egyensúlyi helyzet hiperbolikus.

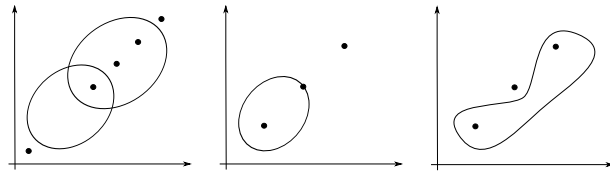
Az [53] dolgozat Mallet-Paret és Sell [37] munkájára épül. Mallet-Paret és Sell megmutatták, hogy ha  $f'(u) > 0$  minden  $u \in \mathbb{R}$  esetén, akkor a

$$\pi_2 : C \ni \varphi \mapsto (\varphi(0), \varphi(-1)) \in \mathbb{R}^2$$

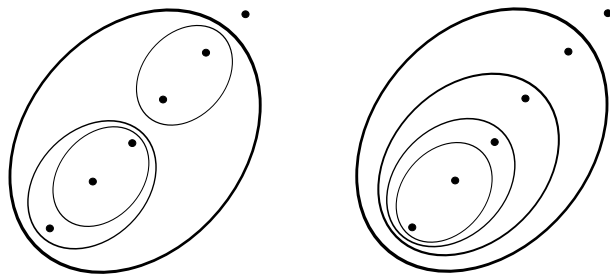
leképezés (2.1) különböző (konstans és nemkonstans) periodikus pályáit diszjunkt halmazokra képezi  $\mathbb{R}^2$ -ben, és a nemkonstans periodikus pályák képe zárt görbe. Igazolták továbbá, hogy a (2.1) egyenlet  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nemkonstans periodikus megoldása pontosan akkor oszcillál az  $f$  függvény  $\chi$  fixpontja körül, ha a  $\pi_2 \hat{\chi} = (\chi, \chi)$  pont a  $\pi_2 \{p_t : t \in \mathbb{R}\}$  görbe belsejébe esik. A Mallet-Paret és Sell által kizárt szituációk és a lehetséges konstrukciók a 2.2. és 2.3. ábrákon láthatóak. Ezek az eredmények megszorítást adnak arra nézve, hogy egy adott  $f$  visszacsatolási függvényhez milyen periodikus megoldások tartozhatnak: Tegyük fel, hogy  $p^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  és  $p^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a (2.1) egyenlet periodikus megoldásai. Legyen  $E_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $f$  azon fixpontjainak halmaza, mely körül  $p^i$  oszcillál. Ekkor  $E_1 \subseteq E_2$ , vagy  $E_2 \subseteq E_1$ , vagy  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Az [53] dolgozat 3.4. Propozíciója kiterjeszti ezeket az állításokat arra az esetre is, amikor csak

$f'(u) \geq 0$  teljesül minden  $u \in \mathbb{R}$  esetén.

Vas [53]-ban igazolta, tetszőleges számú instabil egyensúlyi helyzet esetén, hogy a nagy amplitúdójú periodikus pályák minden olyan konstrukciója létezik (megfelelő  $f$  visszacsatolási függvény választásával), amelyet Mallet-Paret és Sell fenti eredménye megenged. Vas a megfelelő visszacsatolási függvényekre és a hozzájuk tartozó periodikus megoldásokra explicit konstrukciót adott. A nagy amplitúdójú periodikus megoldások lassan oszcillálnak, a periodikus pályák hiperbolikusak, instabilak, és pontosan egy Floquet együtthatóval rendelkeznek az egységkörön kívül.



2.2. ábra. Periodikus pályák és egyensúlyi helyzetek  $\pi_2$  melletti képei, Mallet-Paret és Sell által kizárt szituációk. (Az ábra forrása: [53].)



2.3. ábra. Periodikus pályák és egyensúlyi helyzetek  $\pi_2$  melletti képei, lehetséges konstrukciók. (Az ábra forrása: [53].)

Krisztin és Vas [24, 25, 53] munkái nem magyarázták meg, hogyan keletkeznek a nagy amplitúdójú pályák. Nyilvánvalóan nem Hopf-bifurkáció révén jönnek létre. A disszertáció ezen részében azt igazoljuk, hogy egy bizonyos paraméterfüggő  $f$  esetén a nagy amplitúdójú periodikus pályák nyereg-csomó bifurkáció által születnek.

## 2.2. A fejezet fő állítása

Az

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f_K(x(t-1)), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

egyenletet az alábbi, pozitív visszacsatolást megvalósító  $f_K$  visszacsatolási függvénnyel vizsgáljuk. Legyen

$$f_K|_{(-\infty, -1-\varepsilon]} = -K, \quad f_K|_{[-1, 1]} = 0 \quad \text{és} \quad f_K|_{[1+\varepsilon, \infty)} = K,$$

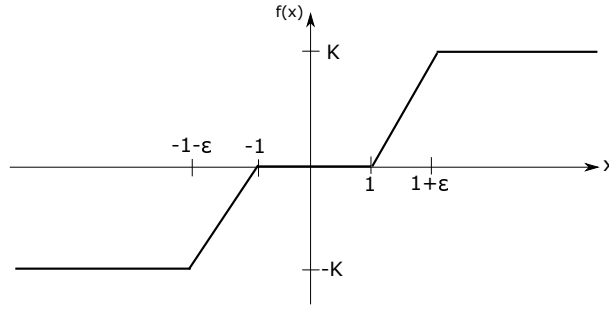
ahol  $\varepsilon > 0$  kicsi és rögzített,  $K \in (6, 7)$  pedig a bifurkációs paraméter. A későbbi számolásokat megkönnyítendő,  $f_K$  legyen szakaszonként lineáris függvény, azaz legyen

$$f_K(x) = \frac{K}{\varepsilon}(x+1) \text{ minden } x \in (-1-\varepsilon, -1) \text{ esetén,}$$

és

$$f_K(x) = \frac{K}{\varepsilon}(x-1) \text{ minden } x \in (1, 1+\varepsilon) \text{ esetén,}$$

mint ahogy a 2.4. ábrán is látható.



2.4. ábra. Az  $f_K$  visszacsatolási függvény

E fejezet eredménye akkor is érvényes, ha  $f_K$  másképp van definiálva a  $(-1-\varepsilon, -1) \cup (1, 1+\varepsilon)$  halmazon, vagy ha a (2.2) egyenlet jobb oldalán a lineáris tag együtthatója  $-\mu$ , ahol  $\mu > 0$ .

Ha  $K > 1 + \varepsilon$ , akkor  $f_K$ -nak pontosan két olyan fixpontja van, amelyekben  $f'$  nagyobb 1-nél:  $\chi_- \in (-1 - \varepsilon, -1)$  és  $\chi_+ \in (1, 1 + \varepsilon)$ . Tehát

$$\hat{\chi}_- : [-1, 0] \ni s \mapsto \chi_- \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \hat{\chi}_+ : [-1, 0] \ni s \mapsto \chi_+ \in \mathbb{R}$$

instabil egyensúlyi helyzetek. Tudjuk, hogy léteznek csak  $\chi_-$  körül, illetve csak  $\chi_+$  körül oszcilláló periodikus megoldások, ha  $K$  elég nagy [52]. Az alábbi tétel pedig olyan periodikus megoldások bifurkációjáról szól, amelyek egyszerre oszcillálnak  $\chi_-$  és  $\chi_+$  körül. Ahogy az előző szakaszban szerepelt, ezeket a periodikus megoldásokat nagy amplitúdójúnak hívjuk.

A következő tétel a [24] dolgozatban jelent meg mint sejtés.

**2.3. Tétel.** *(Periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja) Minden elég kicsi pozitív  $\varepsilon$ -hoz megadható egy  $K^* = K^*(\varepsilon) \in (6.5, 7)$  küszöbszám, a (2.2) egyenletnek egy  $p = p(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nagy amplitúdójú periodikus megoldása a  $K = K^*$  paraméterre, a  $p_0$  kezdeti szegmensnek egy  $B = B(\varepsilon)$  környezete  $C$ -ben és egy  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  konstans úgy, hogy az alábbiak teljesülnek.*

(i) *Ha  $K \in (K^* - \delta, K^*)$ , akkor a (2.2) egyenletnek nincs olyan periodikus pályája, amely áthalad  $B$ -n.*

(ii) *Ha  $K = K^*$ , akkor  $\mathcal{O} = \{p_t : t \in \mathbb{R}\}$  az egyetlen periodikus pálya, melynek szegmense van  $B$ -ben.*

(iii) *Ha  $K \in (K^*, K^* + \delta)$ , akkor pontosan két nagy amplitúdójú periodikus pályának van szegmense a  $B$  halmazban.*

Legyen  $K_0$  az

$$(K-1)(K+1)^3 = e(K^2 - 2K - 1)^2 \quad (2.3)$$

egyenletnek az a megoldása, mely a  $(6.5, 7)$  intervallumba esik. Könnyű megmutatni, hogy  $K_0$  egyértelmű, lásd a [24] dolgozat 3. szakaszát. Numerikus számítások szerint  $K_0 \approx 6.87$ . Meg fogjuk mutatni, hogy a  $K^*(\varepsilon)$  bifurkációs paraméter határértéke  $K_0$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

A bizonyítást a következőképp építjük fel. Legyen  $\varepsilon \in (0, 1)$  és  $K \in (6.5, 7)$ . A 2.3. szakaszban bevezetünk egy  $F$  egy-dimenziós leképezést, mely a  $K$  és az  $\varepsilon$  paraméterektől is függ. A 2.4. szakaszban megmutatjuk, hogy  $F(\cdot, K, \varepsilon)$  fixpontjai a (2.2) egyenlet nagy amplitúdójú periodikus megoldásainak felelnek meg. Ezután a 2.5. szakaszban megmutatjuk, hogy  $F$  nyereg-csomó bifurkáción megy át, ahogy  $K$  nő,  $\varepsilon > 0$  pedig elég kicsi fix szám. Szükségünk van arra is, hogy lokálisan minden periodikus megoldás  $F(\cdot, K, \varepsilon)$  fixpontjainak felel meg. Ennek igazolása a 2.6. szakaszban található. A 2.3. Tétel bizonyítása ezekből következik, lásd a 2.7. szakaszt. A Függelékben olyan számítások szerepelnek, amelyeket a 2.5. szakaszban használunk.

$F$  nyereg-csomó bifurkációjában a neutrális fixpont két fixpontá válik szét, egyik vonzó, a másik pedig taszító. Ez viszont nem jelenti azt, hogy egy stabil és egy instabil periodikus pályát kapunk  $K > K^*$  esetén. Tudjuk, hogy ha  $f_K$  folytonosan differenciálható függvény nemnegatív deriválttal, akkor (2.2) minden periodikus pályája instabil, lásd a 7.1. Propozíciót [53]-ban. Ezért azt feltételezzük, hogy a fenti tételben szereplő periodikus pályák is instabilak.

Krisztin és Vas a [24] dolgozatban is véges dimenziós leképezések fixpontjaiként állította elő a nagy amplitúdójú periodikus megoldásokat, de az a konstrukció lényegesen különbözik az itt bemutatottól. Ebben a dolgozatban használt megközelítés egyszerűbb, mert rövidebb számolásokat eredményez. A [24]-ben használt konstrukció előnye pedig az, hogy a véges dimenziós leképezések fixpontokban vett deriváltjainak a sajátértékei megegyeznek a periodikus pályák Floquet-együtthatóival. Tehát [24] pontos információt ad a periodikus pályák stabilitási tulajdonságairól. Ebben a munkában ez nem igaz. A [15, 32, 50] dolgozatokban további példákat találunk arra, hogyan lehet a periodikus pályák létezésének problémáját véges dimenziós kérdéssé redukálni.

## 2.3. Az $F$ leképezés

Legyen  $\varepsilon \in (0, 1)$  és  $K \in (6.5, 7)$ .

Ebben a szakaszban bevezetünk egy  $p$  periodikus függvényt valamely  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  segéd-függvények konkatenációjaként. Ha  $p$  megoldása a (2.2) késleltetett differenciálegyenletnek, akkor  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  kielégít egy bizonyos differenciálegyenlet-rendszert peremfeltételekkel. Ezt az egyenletrendszert később egyetlen egy  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$  fixpontegyenletre redukáljuk, ahol az  $L_2$  a  $p$  periodikus függvényt leíró paraméter.

Tegyük fel, hogy

**(H1)**  $L_i > 0$  minden  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$  esetén,

$$(H2) \quad 2L_1 + 5L_2 + 5L_3 + 3L_4 + 3L_5 = 1,$$

$$(H3) \quad \theta_i > 1 + \varepsilon \text{ minden } i \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ esetén, és } \theta_i \in (1, 1 + \varepsilon) \text{ minden } i \in \{5, 6\} \text{ esetén.}$$

Tekintsük a következő folytonos függvényeket:

$$(H4) \quad \begin{aligned} y_1 &\in C([0, L_1], \mathbb{R}), y_1(0) = 1 + \varepsilon \text{ és } y_1(L_1) = \theta_1, \\ y_2 &\in C([0, L_2], \mathbb{R}), y_2(0) = \theta_1 \text{ és } y_2(L_2) = \theta_2, \\ y_3 &\in C([0, L_3], \mathbb{R}), y_3(0) = \theta_2 \text{ és } y_3(L_3) = \theta_3, \\ y_4 &\in C([0, L_4], \mathbb{R}), y_4(0) = \theta_3 \text{ és } y_4(L_4) = \theta_4, \\ y_5 &\in C([0, L_5], \mathbb{R}), y_5(0) = \theta_4 \text{ és } y_5(L_5) = 1 + \varepsilon, \\ y_6 &\in C([0, L_2], \mathbb{R}), y_6(0) = 1 + \varepsilon \text{ és } y_6(L_2) = \theta_5, \\ y_7 &\in C([0, L_3], \mathbb{R}), y_7(0) = \theta_5 \text{ és } y_7(L_3) = \theta_6, \\ y_8 &\in C([0, L_4], \mathbb{R}), y_8(0) = \theta_6 \text{ és } y_8(L_4) = 1, \\ y_9 &\in C([0, L_2 + L_5], \mathbb{R}), y_9(0) = 1 \text{ és } y_9(L_2 + L_5) = -1, \\ y_{10} &\in C([0, L_3], \mathbb{R}), y_{10}(0) = -1 \text{ és } y_{10}(L_3) = -1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

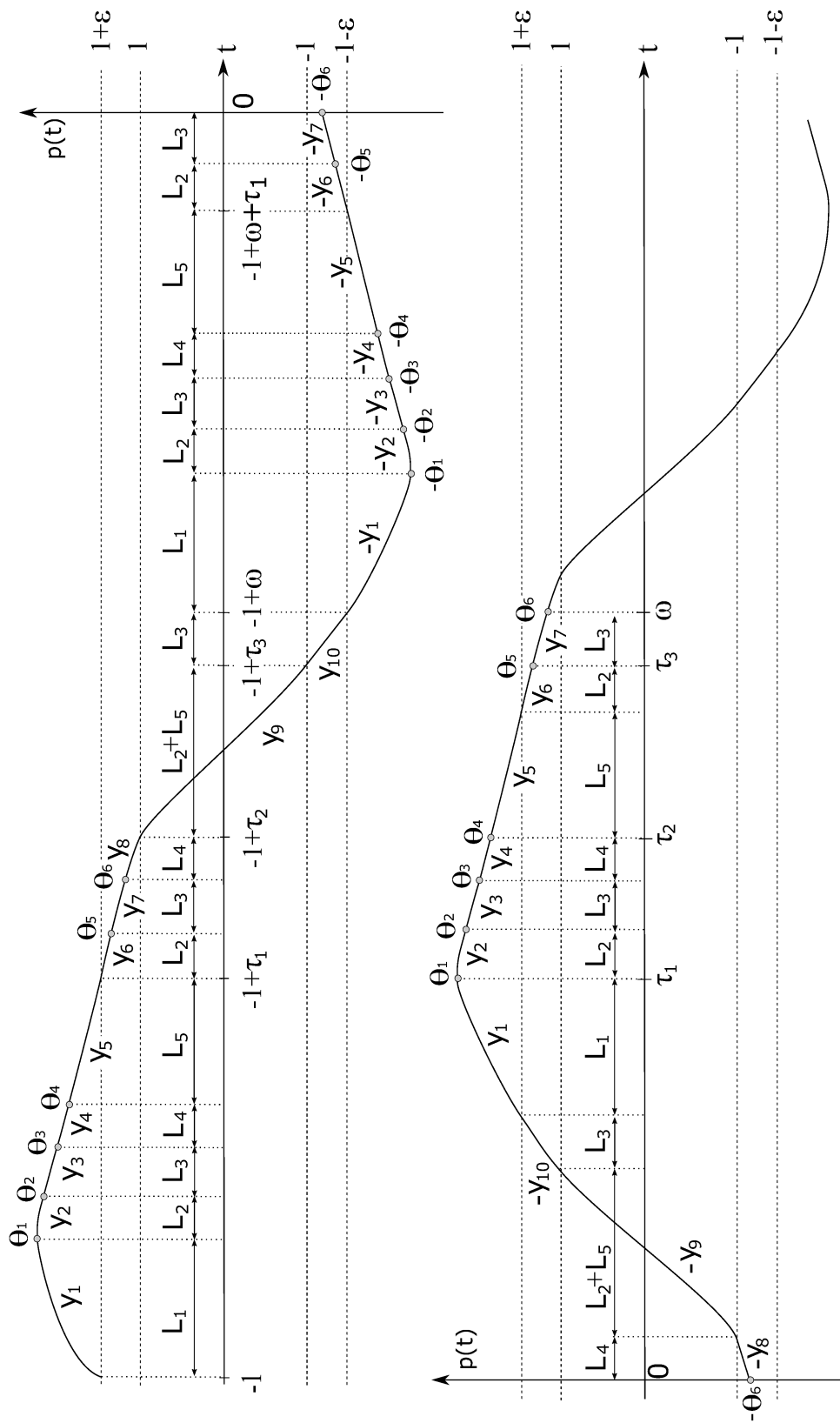
$$(H5) \quad \begin{aligned} &\text{ha } i \in \{1, 2, \dots, 5\}, \text{ akkor } y_i(s) > 1 + \varepsilon \text{ az } y_i \text{ értelmezési tartományának minden belső } s \\ &\text{pontja esetén,} \\ &\text{ha } i \in \{6, 7, 8\}, \text{ akkor } y_i(s) \in (1, 1 + \varepsilon) \text{ az } y_i \text{ értelmezési tartományának minden belső } s \\ &\text{pontja esetén,} \\ &y_9(s) \in (-1, 1) \text{ minden } s \in (0, L_2 + L_5) \text{ esetén,} \\ &y_{10}(s) \in (-1 - \varepsilon, -1) \text{ minden } s \in (0, L_3) \text{ esetén.} \end{aligned}$$

A 2.5. ábra e függvények bizonyos horizontális eltoltságait ábrázolja.

Definiáljuk a  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \omega < 1$  konstansokat az alábbi módon:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \sum_{i=1}^5 L_i, \\ \tau_2 &= \tau_1 + L_2 + L_3 + L_4, \\ \tau_3 &= \tau_2 + L_2 + L_5, \\ \omega &= \tau_3 + L_3. \end{aligned}$$

Vezessük be a  $2\omega$ -periodikus  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a következőképp. Válasszuk a  $p$  függvényt a  $[-1, -1 + \omega]$  intervallumon úgy, hogy



2.5. ábra. A  $p$  függvény grafikonja a  $[-1, 0]$  és a  $[0, 1]$  intervallumokon

$$\begin{aligned}
p(t-1) &= y_1(t), & \text{ha } t &\in [0, L_1], \\
p(t-1+L_1) &= y_2(t), & \text{ha } t &\in [0, L_2], \\
p(t-1+L_1+L_2) &= y_3(t), & \text{ha } t &\in [0, L_3], \\
p(t-1+L_1+L_2+L_3) &= y_4(t), & \text{ha } t &\in [0, L_4], \\
p(t-1+L_1+L_2+L_3+L_4) &= y_5(t), & \text{ha } t &\in [0, L_5], \\
p(t-1+\tau_1) &= y_6(t), & \text{ha } t &\in [0, L_2], \\
p(t-1+\tau_1+L_2) &= y_7(t), & \text{ha } t &\in [0, L_3], \\
p(t-1+\tau_1+L_2+L_3) &= y_8(t), & \text{ha } t &\in [0, L_4], \\
p(t-1+\tau_2) &= y_9(t), & \text{ha } t &\in [0, L_2+L_5], \\
p(t-1+\tau_3) &= y_{10}(t), & \text{ha } t &\in [0, L_3].
\end{aligned} \tag{P.1}$$

Legyen

$$p(t) = -p(t-\omega) \quad \text{minden } t \in [-1+\omega, -1+2\omega] \quad \text{esetén.} \tag{P.2}$$

Ezután terjesszük ki a  $p$ -t a valós számegyenesre  $2\omega$ -periodikusan. A 2.5. ábrán  $p$ -t látjuk a  $[-1, 1]$  intervallumon. Világos, hogy  $p$  nagy amplitúdójú.

Az első célunk az, hogy meghatározzunk, mely feltételek érvényesek az  $L_1, \dots, L_5, \theta_1, \dots, \theta_6$  paraméterekre és  $y_1, \dots, y_{10}$  függvényekre, ha  $p$  kielégíti a (2.2) egyenletet minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén. Mivel  $p(t) = -p(t-\omega)$  minden valós  $t$ -re, és  $f_K$  páratlan, így nem veszünk információt, ha a  $[0, \omega]$  intervallumra korlátozzuk a vizsgálatunkat. Tehát tekintsük a

$$\dot{p}(t) = -p(t) + f_K(p(t-1)), \quad t \in [0, \omega], \tag{2.4}$$

késleltetett differenciálegyenletet. A (2.4) egyenletet vizsgáljuk először a  $[0, \tau_1]$  intervallumon, majd sorban a  $[\tau_1, \tau_2]$ ,  $[\tau_2, \tau_3]$  és  $[\tau_3, \omega]$  intervallumokon.

1. A  $[0, \tau_1]$  intervallum. A mód, ahogy  $p$ -t kiterjesztettük a  $[-1, -1+\omega]$  intervallumról  $\mathbb{R}$ -re, és a (H2) feltétel együtt azt adja, hogy

$$\begin{aligned}
p(t) &= -y_8(t), & t &\in [0, L_4], \\
p(t+L_4) &= -y_9(t), & t &\in [0, L_2+L_5], \\
p(t+L_4+L_2+L_5) &= -y_{10}(t), & t &\in [0, L_3], \\
p(t+L_4+L_2+L_5+L_3) &= y_1(t), & t &\in [0, L_1],
\end{aligned}$$

ahogy a 2.5. ábrán is látható. (P.1)-et, (H3)-at és (H5)-öt használva szintén észrevehető, hogy

$$p(t) \geq 1 + \varepsilon \quad \text{minden } t \in [-1, -1+\tau_1] \quad \text{esetén,}$$

és ezért (2.4) felírható  $\dot{p}(t) = -p(t) + K$  formában a  $[0, \tau_1]$  intervallumon. Ebből arra kö-



vetkeztethetünk, hogy  $[0, \tau_1]$ -en (2.4) akkor és csakis akkor igaz, ha a következő négy egyenlet teljesül:

$$\dot{y}_8(t) = -y_8(t) - K, \quad t \in [0, L_4], \quad (2.5)$$

$$\dot{y}_9(t) = -y_9(t) - K, \quad t \in [0, L_2 + L_5], \quad (2.6)$$

$$\dot{y}_{10}(t) = -y_{10}(t) - K, \quad t \in [0, L_3], \quad (2.7)$$

$$\dot{y}_1(t) = -y_1(t) + K, \quad t \in [0, L_1]. \quad (2.8)$$

2.  $A [\tau_1, \tau_2]$  intervallum. A  $p$  függvény definíciója és a (H2) feltétel alapján azt kapjuk, hogy

$$p(t + \tau_1) = y_2(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_2],$$

$$p(t + \tau_1 + L_2) = y_3(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_3],$$

és

$$p(t + \tau_1 + L_2 + L_3) = y_4(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_4].$$

Szintén tudjuk a (P.1)-ből, hogy

$$p(t - 1 + \tau_1) = y_6(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_2],$$

$$p(t - 1 + \tau_1 + L_2) = y_7(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_3],$$

$$p(t - 1 + \tau_1 + L_2 + L_3) = y_8(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_4].$$

A (H3) és (H5) hipotézis garantálja, hogy

$$p(t) \in [1, 1 + \varepsilon] \quad \text{minden } t \in [-1 + \tau_1, -1 + \tau_2] \text{ esetén.}$$

Az  $f_K$  definícióját felhasználva azt kapjuk, hogy a  $[\tau_1, \tau_2]$  intervallumon (2.4) akkor és csakis akkor érvényes, ha igaz az alábbi három közönséges differenciálegyenlet:

$$\dot{y}_2(t) = -y_2(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_6(t) - 1), \quad t \in [0, L_2], \quad (2.9)$$

$$\dot{y}_3(t) = -y_3(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_7(t) - 1), \quad t \in [0, L_3], \quad (2.10)$$

$$\dot{y}_4(t) = -y_4(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_8(t) - 1), \quad t \in [0, L_4]. \quad (2.11)$$

3.  $A [\tau_2, \tau_3]$  intervallum. Vegyük észre, hogy

$$p(t + \tau_2) = y_5(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_5],$$

$$p(t + \tau_2 + L_5) = y_6(t), \quad \text{ha } t \in [0, L_2],$$

és

$$p(t) \in [-1, 1], \quad \text{ha} \quad t \in [-1 + \tau_2, -1 + \tau_3].$$

Tehát

$$\dot{y}_5(t) = -y_5(t), \quad t \in [0, L_5] \quad \text{esetén} \quad (2.12)$$

és

$$\dot{y}_6(t) = -y_6(t), \quad t \in [0, L_2] \quad \text{esetén.} \quad (2.13)$$

4. A  $[\tau_3, \omega]$  intervallum. Végül vegyük észre azt is, hogy

$$\begin{aligned} p(t + \tau_3) &= y_7(t), \quad \text{ha} \quad t \in [0, L_3], \\ p(t - 1 + \tau_3) &= y_{10}(t), \quad \text{ha} \quad t \in [0, L_3], \end{aligned}$$

és

$$p(t) \in [-1 - \varepsilon, -1], \quad \text{ha} \quad t \in [-1 + \tau_3, -1 + \omega].$$

Így a  $[\tau_3, \omega]$  intervallumon a (2.4) egyenlet ekvivalens az

$$\dot{y}_7(t) = -y_7(t) + \frac{K}{\varepsilon}(y_{10}(t) + 1), \quad t \in [0, L_3], \quad (2.14)$$

egyenlettel.

Azt látjuk, hogy a (2.4) egyenlet megfeleltethető egy lineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszernek. Először a (2.5)-(2.8), (2.12) és (2.13) egyenleteket érdemes megoldani, mivel ők függetlenek a többtől. Ezután már meg tudjuk oldani a (2.9), (2.11) és (2.14) egyenleteket, felhasználva a (2.13), (2.5) és (2.7) egyenletek megoldásait. Végül, (2.14) megoldását használva, meg tudjuk oldani a (2.10) differenciálegyenletet is. Ha alkalmazzuk azokat a peremfeltételeket, amelyeket  $t = 0$ -ra írtunk fel (H4)-ben, akkor

$$y_1(t) = K - (K - 1 - \varepsilon)e^{-t}, \quad t \in [0, L_1], \quad (\text{Y.1})$$

$$y_2(t) = \theta_1 e^{-t} + \frac{K}{\varepsilon} \left( (1 + \varepsilon)te^{-t} + e^{-t} - 1 \right), \quad t \in [0, L_2], \quad (\text{Y.2})$$

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \theta_2 e^{-t} + \frac{K}{\varepsilon} \left( (\theta_5 t + 1)e^{-t} - 1 \right) \\ &\quad - \frac{K^2}{\varepsilon^2} (K - 1) \left( 1 - \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} \right) e^{-t} \right), \quad t \in [0, L_3], \end{aligned} \quad (\text{Y.3})$$

$$y_4(t) = \theta_3 e^{-t} + \frac{K}{\varepsilon} \left( (K + \theta_6)te^{-t} - (K + 1)(1 - e^{-t}) \right), \quad t \in [0, L_4], \quad (\text{Y.4})$$

$$y_5(t) = \theta_4 e^{-t}, \quad t \in [0, L_5], \quad (\text{Y.5})$$

$$y_6(t) = (1 + \varepsilon)e^{-t}, \quad t \in [0, L_2], \quad (\text{Y.6})$$

$$y_7(t) = \theta_5 e^{-t} - \frac{K}{\varepsilon} (K - 1) \left( 1 - (1 + t)e^{-t} \right), \quad t \in [0, L_3], \quad (\text{Y.7})$$

$$y_8(t) = (K + \theta_6)e^{-t} - K, \quad t \in [0, L_4], \quad (\text{Y.8})$$

$$y_9(t) = (K + 1)e^{-t} - K, \quad t \in [0, L_2 + L_5], \quad (\text{Y.9})$$

$$y_{10}(t) = (K - 1)e^{-t} - K, \quad t \in [0, L_3]. \quad (\text{Y.10})$$

Ha alkalmazzuk a peremfeltételeket az  $y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 10\}$ , segédfüggvények értelmezési tartományainak jobb végpontjaiban is, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\theta_1 = K - (K - 1 - \varepsilon)e^{-L_1}, \quad (\text{B.1})$$

$$\theta_2 = \theta_1 e^{-L_2} + \frac{K}{\varepsilon} \left( (1 + \varepsilon)L_2 e^{-L_2} + e^{-L_2} - 1 \right), \quad (\text{B.2})$$

$$\theta_3 = \theta_2 e^{-L_3} + \frac{K}{\varepsilon} \left( (\theta_5 L_3 + 1)e^{-L_3} - 1 \right) \quad (\text{B.3})$$

$$- \frac{K^2}{\varepsilon^2} (K - 1) \left( 1 - \left( 1 + L_3 + \frac{L_3^2}{2} \right) e^{-L_3} \right),$$

$$\theta_4 = \theta_3 e^{-L_4} + \frac{K}{\varepsilon} \left( (K + \theta_6)L_4 e^{-L_4} - (K + 1)(1 - e^{-L_4}) \right), \quad (\text{B.4})$$

$$1 + \varepsilon = \theta_4 e^{-L_5}, \quad (\text{B.5})$$

$$\theta_5 = (1 + \varepsilon)e^{-L_2}, \quad (\text{B.6})$$

$$\theta_6 = \theta_5 e^{-L_3} - \frac{K}{\varepsilon} (K - 1) \left( 1 - (1 + L_3)e^{-L_3} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$1 = (K + \theta_6)e^{-L_4} - K, \quad (\text{B.8})$$

$$-1 = (K + 1)e^{-L_2 - L_5} - K, \quad (\text{B.9})$$

$$-1 - \varepsilon = (K - 1)e^{-L_3} - K. \quad (\text{B.10})$$

Az alábbiakban a (H2), (B.1)-(B.10) egyenletrendszer egyetlen  $L_2$ -t,  $K$ -t és  $\varepsilon$ -t tartalmazó egyenletre redukáljuk. Közben pedig kifejezzük az  $L_1, L_3, L_4, L_5$  és  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$  paramétereket  $L_2, K$  és  $\varepsilon$  függvényében.

(B.10)-ból következik, hogy

$$L_3 = \ln \frac{K - 1}{K - 1 - \varepsilon}. \quad (\text{C.1})$$

(B.9)-ból és (B.5)-ből azt kapjuk, hogy

$$L_5 = \ln \frac{K + 1}{K - 1} - L_2 \quad (\text{C.2})$$

és

$$\theta_4 = (1 + \varepsilon) \frac{K + 1}{K - 1} e^{-L_2}. \quad (\text{C.3})$$

(B.6)-ban már kifejeztük  $\theta_5$ -öt  $L_2$  és  $\varepsilon$  függvényeként. Annak érdekében, hogy később egyszerűbb legyen az itt szereplő összefüggésekre hivatkozni, megismételjük a (B.6)-ban szereplő eredményt – új címkével:

$$\theta_5 = (1 + \varepsilon)e^{-L_2}. \quad (\text{C.4})$$

Felhasználva ezt, (B.7)-et és (C.1)-et, kiszámolhatjuk, hogy

$$\theta_6 = (1 + \varepsilon) \frac{K - 1 - \varepsilon}{K - 1} e^{-L_2} + \frac{K}{\varepsilon} (K - 1 - \varepsilon) \ln \frac{K - 1}{K - 1 - \varepsilon} - K. \quad (\text{C.5})$$

Vegyük észre, hogy  $\theta_6 + K > 0$ . A (B.8) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$L_4 = \ln \frac{K + \theta_6}{K + 1}. \quad (\text{C.6})$$

Most használjuk (H2)-t, (C.1)-et és (C.6)-ot, hogy kifejezzük  $L_1$ -et:

$$L_1 = \frac{1}{2} - L_2 + \frac{5}{2} \ln(K - 1 - \varepsilon) - \frac{3}{2} \ln(K + \theta_6) - \ln(K - 1). \quad (\text{C.7})$$

Ezt az utolsó összefüggést (B.1)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\theta_1 = K - \frac{e^{L_2 - \frac{1}{2}} (K - 1) (K + \theta_6)^{\frac{3}{2}}}{(K - 1 - \varepsilon)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{C.8})$$

Ezután pedig, az utolsó részeredményt (B.2)-be helyettesítve, arra következtethetünk, hogy

$$\theta_2 = K e^{-L_2} - \frac{e^{-\frac{1}{2}} (K - 1) (K + \theta_6)^{\frac{3}{2}}}{(K - 1 - \varepsilon)^{\frac{3}{2}}} + \frac{K}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon) L_2 e^{-L_2} + e^{-L_2} - 1). \quad (\text{C.9})$$

A  $\theta_3$  paraméter  $K, \varepsilon, \theta_2, \theta_5$  és  $L_3$  függvényében jelent meg a (B.3)-ban. Mivel  $\theta_2$ -t,  $\theta_5$ -öt és  $L_3$ -at már kifejeztük  $L_2, K$  és  $\varepsilon$  függvényében, azt látjuk, hogy  $\theta_3$  is kifejezhető az ő függvényükben. Tehát  $\theta_3$  a következőképp írható fel:

$$\begin{aligned} \theta_3 = & \theta_2 e^{-L_3} + \frac{K}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon) L_3 e^{-L_2 - L_3} + e^{-L_3} - 1) \\ & - \frac{K^2}{\varepsilon^2} (K - 1) \left( 1 - \left( 1 + L_3 + \frac{L_3^2}{2} \right) e^{-L_3} \right), \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

ahol  $\theta_2$  és  $L_3$  (C.9)-ben és (C.1)-ben van kifejezve.

Ekkor (B.4) az egyetlen összefüggés, amit még nem használtunk. Helyettesítsük be (C.3)-at (B.4) bal oldalán, és szorozzuk meg az egyenletet  $e^{L_4} = (K + \theta_6)/(K + 1)$ -gyel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(1 + \varepsilon) \frac{K + \theta_6}{K - 1} e^{-L_2} = \frac{K}{\varepsilon} (K + 1) (1 - (1 - L_4) e^{L_4}) + \theta_3.$$

Legyen

$$U = \{(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3 : \varepsilon \in (0, 1), K \in (6.5, 7), L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Vezessük be a következő leképezést:

$$F : U \ni (L_2, K, \varepsilon) \mapsto \frac{K}{\varepsilon}(K+1) \left(1 - (1-L_4)e^{L_4}\right) + \theta_3 - (1+\varepsilon)\frac{K+\theta_6}{K-1}e^{-L_2} + L_2 \in \mathbb{R}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $F$  jól definiált és folytonos az  $U$  halmazon.

Igaz a következő állítás.

**2.4. Propozíció.** Legyen  $\varepsilon \in (0, 1)$  és  $K \in (6.5, 7)$ . Tegyük fel, hogy a  $2\omega$ -periodikus  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldása (2.2)-nek,  $p$  az  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  függvények konkatenációja (P.1)-(P.2) szerint, továbbá az  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  függvények kielégítik a (H1)-(H5) feltételeket valamilyen  $L_i > 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$  paraméterekkel. Ekkor  $L_2 \in (0, \varepsilon)$  és  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$ .

*Bizonyítás.* Idézzük fel (C.4)-ből, hogy  $\theta_5 = (1+\varepsilon)e^{-L_2}$ , ami nagyobb 1-nél a (H3) feltétel szerint. Ebből rögtön következik, hogy  $L_2 < \ln(1+\varepsilon) < \varepsilon$ . A bizonyítás többi része a fenti számolásból jön.  $\square$

Csak technikai okokból van szükségünk arra, hogy  $F$ -et  $L_2 < 0$  esetén is definiáljuk, lásd a 2.5. szakasz 2.13. Propozícióját. A következő megjegyzést is fogjuk használni.

**2.5. Megjegyzés.** Az  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$ , (C.1)-(C.10) egyenletek alkotta rendszer ekvivalens a (H2), (B.1)-(B.10) egyenletrendszerrel.

## 2.4. $F$ fixpontjai periodikus megoldásokat adnak

Az előző szakaszban levezettük: ha (H1)-(H5) teljesül, és  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan  $2\omega$ -periodikus megoldása (2.2)-nek, amely kielégíti (P.1)-(P.2)-t, akkor az  $L_2 \mapsto F(L_2, K, \varepsilon)$  leképezésnek fixpontja van. Ezt a szakaszt a fordított állítás bizonyításának szenteljük: ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi és  $K \in (6.5, 7)$ , akkor  $L_2 \mapsto F(L_2, K, \varepsilon)$  kellően kicsi pozitív fixpontjai (2.2) periodikus megoldásait adják.

Az  $L_i$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , paraméterekre úgy tekintünk ebben a szakaszban mint  $L_2$ ,  $K$  és  $\varepsilon$  függvényeire (és nem úgy mint a (H1)-(H5) feltételekben adott paraméterekre). Tehát tegyük fel, hogy

**(H6)**  $L_i$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , az  $L_2$ ,  $K$ ,  $\varepsilon$  változók (C.1)-(C.10) szerint definiált függvényei az

$$U = \{(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3: \varepsilon \in (0, 1), K \in (6.5, 7) \text{ és } L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

halmazon.

Könnyen ellenőrizhető, hogy  $L_i$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , folytonosak  $U$ -n.

Ebben a fejezetben a következőt is fel kell tennünk:

(H7)  $y_1, \dots, y_{10}$  azon megoldásai a (2.5)-(2.14) közönséges differenciálegyenleteknek, amelyeket a (Y.1)-(Y.10) pontokban adtunk meg.

Legyen

$$\theta^*(\bar{K}) = \bar{K} - \sqrt{\frac{(\bar{K}+1)^3}{e(\bar{K}-1)}} \quad \text{minden } \bar{K} \in [6.5, 7] \text{ esetén.}$$

Azt állítjuk, hogy  $\theta^*(\bar{K}) > 1$  minden  $\bar{K} \in [6.5, 7]$  esetén. Mivel ez az egyenlőtlenség ekvivalens a

$$(\bar{K}-1) \left( 1 - \sqrt{\frac{(\bar{K}+1)^3}{e(\bar{K}-1)^3}} \right) > 0$$

egyenlőséggel, ezért csak a következőt kell ellenőrizni:  $(\bar{K}+1)^3 / (\bar{K}-1)^3 < e$ . Mivel  $\bar{K} \mapsto (\bar{K}+1) / (\bar{K}-1)$  szigorúan monoton csökkenő  $\bar{K} > 1$  esetén, azt látjuk, hogy

$$\left( \frac{\bar{K}+1}{\bar{K}-1} \right)^3 \leq \left( \frac{6.5+1}{6.5-1} \right)^3 = \left( \frac{15}{11} \right)^3 = 2 + \frac{713}{1331} \leq 2 + \frac{800}{1200} = 2 + \frac{2}{3} < e, \quad (2.15)$$

ha  $\bar{K} \in [6.5, 7]$ .

Az alábbi propozíció első két állítása  $F$  viselkedését jellemzi kis  $\varepsilon$  esetén. A harmadik állítás  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  és  $y_4(t)$  határértékeit vizsgálja  $y_2, y_3$  és  $y_4$  értelmezési tartományainak minden  $t$  pontjában, ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Mivel  $y_2, y_3$  és  $y_4$  csak akkor jól definiált, ha  $L_i \geq 0$  minden  $i \in \{2, 3, 4\}$  esetén, ezért itt feltesszük, hogy  $L_2 \geq 0$  és  $L_4 \geq 0$ . Világos, hogy  $L_3 = \ln(K-1) - \ln(K-1-\varepsilon)$  pozitív.

**2.6. Propozíció.** *A (H6) feltétel mellett igazak az alábbiak.*

(i)  $\theta_6 = 1 + O(\varepsilon)$ ,  $L_4 = O(\varepsilon)$  és ezért

$$\frac{K}{\varepsilon}(K+1)(1 - (1-L_4)e^{L_4}) = O(\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

(ii) Ha  $K \rightarrow \bar{K} \in [6.5, 7]$  és  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , akkor  $\theta_3$  konvergál  $\theta^*(\bar{K})$ -hoz.

(iii) Tegyük fel továbbá, hogy  $L_2 \geq 0$  és  $L_4 \geq 0$ . Defináljuk az  $y_2, y_3$  és  $y_4$  függvényeket (Y.2)-(Y.4) szerint. Ha  $K \rightarrow \bar{K} \in [6.5, 7]$  és  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , akkor minden  $i \in \{2, 3, 4\}$  és  $t \in [0, L_i]$  esetén  $y_i(t)$  konvergál  $\theta^*(\bar{K})$ -hoz, és a konvergencia egyenletes  $t$ -ben.

Mielőtt elkezdenénk a bizonyítást, tisztázzuk a  $O$  jelölést. Ha  $g$  az  $L_2, K, \varepsilon, t$  változók függvénye (vagy csak valamelyikére ezen változók közül) a  $D$  halmazon, és  $k$  egy pozitív egész szám, akkor a " $g = O(\varepsilon^k)$ ", ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ " (vagy röviden a " $g = O(\varepsilon^k)$ ") kifejezés azt jelenti, hogy létezik  $M > 0$  konstans úgy, hogy  $|g(L_2, K, \varepsilon, t)| \leq M\varepsilon^k$  ha  $(L_2, K, \varepsilon, t) \in D$  és  $\varepsilon > 0$  elég kicsi. Ebben a dolgozatban az  $M$  konstans mindig független az  $L_2, K$  és  $t$  változóktól.

*Bizonyítás.* Az (i). állítás bizonyítása. Mindenki számára ismert, hogy

$$\ln(1+x) = x + O(x^2), \quad \text{ha } x \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Ha  $K \in (6.5, 7)$  és  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , akkor

$$\frac{\varepsilon}{K-1-\varepsilon} \rightarrow 0^+,$$

és ekkor

$$\ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} = \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon}{K-1-\varepsilon} \right) = \frac{\varepsilon}{K-1-\varepsilon} + O(\varepsilon^2), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.17)$$

Ezért

$$\frac{K}{\varepsilon} (K-1-\varepsilon) \ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} = K + O(\varepsilon). \quad (2.18)$$

Továbbá, mivel  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ,

$$(1+\varepsilon) \frac{K-1-\varepsilon}{K-1} e^{-L_2} = (1+\varepsilon) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{K-1} \right) (1 + O(L_2)) = 1 + O(\varepsilon). \quad (2.19)$$

Behelyettesítve (2.18)-at és (2.19)-et (C.5)-be, azt kapjuk, hogy  $\theta_6 = 1 + O(\varepsilon)$ .

Használva (C.6)-ot, az előző,  $\theta_6$ -ra vonatkozó állítást és (2.16)-ot, azt kapjuk, hogy

$$L_4 = \ln \left( 1 + \frac{\theta_6 - 1}{K+1} \right) = O(\varepsilon). \quad (2.20)$$

Az exponenciális függvény sorbafejtését alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$1 - e^{L_4} (1 - L_4) = O(L_4^2), \quad \text{ha } L_4 \rightarrow 0. \quad (2.21)$$

A 2.6. Propozíció (i). állítása ekkor a (2.20)-ból és (2.21)-ből következik.

A (iii). állítás bizonyítása három lépésben. Legyen  $L_2 \geq 0$  és  $L_4 \geq 0$ .

1.  $y_2(t)$  konvergenciája  $t \in [0, L_2]$  esetén. Az (i). állításból és (C.8)-ből látjuk, hogy

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \bar{K} \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \theta_1 = \bar{K} - \sqrt{\frac{(\bar{K}+1)^3}{e(\bar{K}-1)}} = \theta^*(\bar{K}). \quad (2.22)$$

Mivel  $e^x = 1 + x + O(x^2)$ , ha  $x \rightarrow 0$ , ezért  $0 \leq t \leq L_2 < \varepsilon$  esetén azt látjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{K}{\varepsilon} ((1+\varepsilon)te^{-t} + e^{-t} - 1) &= \frac{K}{\varepsilon} ((1+\varepsilon)t(1-t+O(t^2)) - t + O(t^2)) = \\ &= \frac{K}{\varepsilon} (\varepsilon t + O(t^2)) = O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.23)$$

(2.22)-őt és (2.23)-at (Y.2)-be helyettesítve azt kapjuk, hogy  $y_2(t)$  konvergál  $\theta^*(\bar{K})$ -hoz

minden  $t \in [0, L_2]$  esetén, és ez a konvergencia egyenletes  $t$ -ben.

2.  $y_3(t)$  konvergenciája  $t \in [0, L_3]$  esetén, az (Y.3) képlet segítségével. Vegyük észre, ha  $\theta_1$  és  $\theta_2$  a (C.8) és (C.9) képletekkel vannak megadva, akkor (Y.2) azt adja, hogy  $y_2(L_2) = \theta_2$ . Tehát az utolsó eredményünk alapján  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+, K \rightarrow \bar{K}} \theta_2 = \theta^*(\bar{K})$ . Emellett (C.4)-ből és  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ -ből azt látjuk, hogy  $\theta_5 = 1 + O(\varepsilon)$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Használva ezt és az exponenciális függvény sorbafejtését, a következőt kapjuk  $0 \leq t \leq L_3 = O(\varepsilon)$  esetén:

$$(\theta_5 t + 1)e^{-t} - 1 = ((1 + O(\varepsilon))t + 1)(1 - t + O(t^2)) - 1 = O(\varepsilon^2). \quad (2.24)$$

Szintén észrevehetjük, hogy

$$1 - e^{-t} \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) = 1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2} + O(t^3)\right) \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) = O(\varepsilon^3). \quad (2.25)$$

Összegezve, (Y.3) azt adja, hogy

$$\lim_{\substack{K \rightarrow \bar{K} \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} y_3(t) = \lim_{\substack{K \rightarrow \bar{K} \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \theta_2 e^{-t} = \theta^*(\bar{K}) \quad \text{minden } 0 \leq t \leq L_3 = O(\varepsilon) \text{ esetén.}$$

Ez a konvergencia is egyenletes  $t$ -ben.

3.  $y_4(t)$  konvergenciája  $t \in [0, L_4]$  esetén.  $y_3$ -at (Y.3)-ban,  $\theta_5$ -öt (C.4)-ben és  $\theta_3$ -at (C.10)-ben definiáltuk. Ebből következik, hogy  $\theta_3 = y_3(L_3)$ . Tehát, az előző bekezdés alapján,  $\theta_3$  konvergál  $\theta^*(\bar{K})$ -hoz, ha  $K \rightarrow \bar{K} \in [6.5, 7]$  és  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . (Vegyük észre, hogy az (ii). állítást az  $L_2 \geq 0$  esetben bizonyítottuk.) Másrésztől,  $\theta_6 = 1 + O(\varepsilon)$ -ből következik, hogy

$$\begin{aligned} (K + \theta_6)te^{-t} - (K + 1)(1 - e^{-t}) &= (K + 1 + O(\varepsilon))(t + O(t^2)) - (K + 1)(t + O(t^2)) \\ &= O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$0 \leq t \leq L_4 = O(\varepsilon)$ -ra. Ezért (Y.4) azt adja, hogy minden  $t \in [0, L_4]$  esetén  $y_4(t)$  határértéke is  $\theta^*(\bar{K})$ , ha  $K \rightarrow \bar{K}$  és  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , és ez a konvergencia egyenletes  $t$ -ben.

A (ii). állítás bizonyítása. A (ii). állítást  $L_2 \in [0, \varepsilon)$ -re már bizonyítottuk. Tegyük fel, hogy  $L_2 \in (-\varepsilon, 0)$ , és figyeljük meg, hogy (2.23) érvényben marad  $t = L_2 \in (-\varepsilon, 0)$  esetén is. Tehát (C.9) és a  $\theta_6 = 1 + O(\varepsilon)$  egyenlőség együtt azt adja, hogy  $\theta_2$  a  $\theta^*(\bar{K})$ -hoz konvergál  $L_2 < 0$  esetén is. Most (2.24)-et és (2.25)-öt  $t = L_3$ -mal használva, valamint az  $L_3 = O(\varepsilon)$  és (C.4) összefüggéseket alkalmazva arra az eredményre jutunk, hogy a (C.10)-ben definiált  $\theta_3$  a  $\theta^*(\bar{K})$  határértékhez konvergál, ha  $K \rightarrow \bar{K} \in [6.5, 7]$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  és  $L_2 \in (-\varepsilon, 0)$ .  $\square$

**2.7. Következmény.** Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0^+$ ,

$$(L_{2,n}, K_n, \varepsilon_n) \in U \quad \text{és} \quad F(L_{2,n}, K_n, \varepsilon_n) = L_{2,n} \quad \text{minden } n \geq 0 \text{ esetén.}$$

Ekkor  $(K_n)_{n=0}^\infty$  konvergens, és  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K_0$ , ahol  $K_0$  a (2.3) egyenlet egyetlen megoldása a  $[6.5, 7]$  intervallumon.



*Bizonyítás.* A [24] cikk 3. fejezetéből tudjuk, hogy (2.3)-nak pontosan egy  $K_0$  megoldása van a  $[6.5, 7]$  intervallumon.

Elég megmutatni azt, hogy  $(K_n)_{n=0}^\infty$  minden részsorozatának van olyan részsorozata, amely a  $K_0$ -hoz konvergál. Mivel  $K_n \in (6.5, 7)$  minden  $n \geq 1$  esetén, világos, hogy a  $(K_n)_{n=0}^\infty$  sorozat minden részsorozatának van  $(K_{n_l})_{l=0}^\infty$  konvergens részsorozata. Legyen

$$\bar{K} = \lim_{l \rightarrow \infty} K_{n_l} \in [6.5, 7].$$

Most tartassuk  $l$ -t a végtelenbe az  $F(L_{2,n_l}, K_{n_l}, \varepsilon_{n_l}) = L_{2,n_l}$  egyenletben. A feltételeink szerint  $\lim_{l \rightarrow \infty} L_{2,n_l} = 0$ . Ez a tény,  $F$  definíciója és a 2.6. Propozíció (i)-(ii). állításai együtt azt mutatják, hogy  $\bar{K}$  megoldása a

$$K - \sqrt{\frac{(K+1)^3}{e(K-1)}} - \frac{K+1}{K-1} = 0$$

egyenletnek. Egyszerű számolással megmutatható, hogy ez az egyenlet ekvivalens (2.3)-mal, és ezért  $\bar{K} = K_0$ . A bizonyítás teljes.  $\square$

$K \in (6.5, 7)$  és  $\varepsilon \in (0, 1)$  esetén legyen  $\hat{L}_2$  az  $L_2$  paraméter azon értéke, melyre  $L_4 = 0$ , vagyis melyre  $\theta_6 = 1$ . A (C.5) összefüggést használva ki tudjuk fejezni  $\hat{L}_2$ -ot mint  $K$  és  $\varepsilon$  függvényét:

$$\hat{L}_2(K, \varepsilon) = \ln \left( (1 + \varepsilon) \frac{K-1-\varepsilon}{K-1} \right) - \ln \left( K+1 - \frac{K}{\varepsilon} (K-1-\varepsilon) \ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} \right). \quad (2.26)$$

**2.8. Propozíció.** Ha  $K \in (6.5, 7)$  és  $\varepsilon > 0$  elég kicsi, akkor  $\hat{L}_2(K, \varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ .

*Bizonyítás.* Mindenki számára ismert, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3), \quad \text{ha } x \rightarrow 0.$$

Következésképp,

$$\begin{aligned} \ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} &= \ln \left( 1 + \frac{\varepsilon}{K-1-\varepsilon} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{K-1-\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{2(K-1-\varepsilon)^2} + O(\varepsilon^3), \end{aligned}$$

és

$$\frac{K}{\varepsilon} (K-1-\varepsilon) \ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} = K - \frac{K\varepsilon}{2(K-1-\varepsilon)} + O(\varepsilon^2), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Az  $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty x^n$  geometriai sorfejtést alkalmazva  $x = \varepsilon/(K-1)$  esetén, könnyedén

levezethetjük, hogy

$$\frac{1}{K-1-\varepsilon} = \frac{1}{K-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{K-1}} = \frac{1}{K-1} + O(\varepsilon),$$

és ezért

$$\frac{K}{\varepsilon}(K-1-\varepsilon) \ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} = K - \frac{K}{2(K-1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.27)$$

Ezt használva azt kapjuk, hogy

$$\ln \left( K+1 - \frac{K}{\varepsilon}(K-1-\varepsilon) \ln \frac{K-1}{K-1-\varepsilon} \right) = \frac{K}{2(K-1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.28)$$

Vegyük észre, hogy

$$(1+\varepsilon) \frac{K-1-\varepsilon}{K-1} = 1 + \frac{K-2}{K-1}\varepsilon - \frac{1}{K-1}\varepsilon^2,$$

és ezért

$$\ln \left( (1+\varepsilon) \frac{K-1-\varepsilon}{K-1} \right) = \frac{K-2}{K-1}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.29)$$

(2.29)-ből vonjuk ki (2.28)-at. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\widehat{L}_2 = \left( \frac{K-2}{K-1} - \frac{K}{2(K-1)} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) = \frac{K-4}{2(K-1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.30)$$

$K \in (6.5, 7)$  esetén  $(K-4)/(2K-2) \in (0, 1)$ . Ekkor azt látjuk, hogy  $\widehat{L}_2 \in (0, \varepsilon)$  minden elég kis  $\varepsilon$  esetén.  $\square$

Tekintsük az  $U$  halmaz alábbi részhalmazát:

$$V = \left\{ (L_2, K, \varepsilon) : \varepsilon \in (0, 1), K \in (6.5, 7) \text{ és } L_2 \in (0, \widehat{L}_2(K, \varepsilon)) \right\} \subset U.$$

**2.9. Megjegyzés.** Világos (C.5)-ből és (C.6)-ból, hogy  $\theta_6$  és  $L_4$  szigorúan monoton csökkenő függvényei  $L_2$ -nek. Ezért, ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi és  $(L_2, K, \varepsilon) \in V$ , akkor  $\theta_6 > 1$  és  $L_4 > 0$ .

**2.10. Propozíció.** Tegyük fel, hogy

- $(L_2, K, \varepsilon) \in V$ ,  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$  és  $\varepsilon > 0$  elég kicsi,
- az  $L_1, L_3, L_4, L_5$  és  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , paramétereket (H6) szerint definiáljuk,
- az  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq 10$ , segédfüggvényeket (H7) szerint definiáljuk.

Ekkor teljesülnek a (H1)-(H5) feltételek.

*Bizonyítás.* Mivel  $y_1, \dots, y_{10}$  függvényeket csak akkor tudjuk (Y.1)-(Y.10) szerint definiálni, ha  $L_1, L_2, L_3, L_4$  és  $L_5$  nemnegatív, ezért először bizonyítsuk (H1)-et. Világos (C.1)-ből, hogy

$L_3 > 0$ , és tudjuk a 2.9. Megjegyzésből, hogy  $L_4 > 0$ . A 2.7. Következmény és a (C.2) formula együtt azt adja, hogy ha  $\varepsilon$  (és ezáltal  $L_2$ ) 0-hoz tart, akkor  $L_5$  határértéke  $\ln((K_0+1)/(K_0-1))$ . Hasonlóan, a 2.7. Következmény és a (C.7) képlet azt adja, hogy

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} L_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{K_0+1}{K_0-1} \right)^3.$$

Ez a határérték szintén pozitív (2.15) alapján. Tehát  $L_1$  és  $L_5$  is pozitív, ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi.

A 2.5. Megjegyzés szerint az  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$  egyenlet és (C.1)-(C.10) együtt garantálja (H2)-t. Tehát (H2) teljesül a propozíció feltételei mellett.

Világos (Y.1)-(Y.10)-ből, hogy a  $y_1, \dots, y_{10}$  függvények folytonosak. Emlékezzünk vissza, ezek azon megoldásai a (2.5)-(2.14) differenciálegyenleteknek, melyek a (H4) hipotézisben  $t = 0$ -ra felsorolt peremfeltételeket kielégítik. A 2.5. Megjegyzés szerint az  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$  egyenlet és a (C.1)-(C.10) összefüggések garantálják (B.1)-(B.10)-et is. Ez azt jelenti, hogy a  $y_1, \dots, y_{10}$  függvények kielégítik a jobb oldali peremfeltételeket (H4)-ben. Összegezve, (H4) teljesül.

Még (H3)-at és (H5)-öt kell bizonyítani.

Mivel  $K - 1 - \varepsilon$  pozitív  $(L_2, K, \varepsilon) \in V$  esetén, azt látjuk (Y.1)-ből, hogy  $y_1$  szigorúan monoton növekvő a  $[0, L_1]$  intervallumon. Mivel  $y_1(0) = 1 + \varepsilon$ , ezért  $y_1(t) > 1 + \varepsilon$  minden  $t \in (1, L_1]$  esetén. Tehát  $\theta_1 = y_1(L_1) > 1 + \varepsilon$ . A 2.6. Propozíciót használva megállapíthatjuk, hogy  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  és  $y_4(t)$  nagyobb, mint  $1 + \varepsilon$  bármely  $t$  esetén, ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi. Ebből következik, hogy  $\theta_2 = y_2(L_2)$ ,  $\theta_3 = y_3(L_3)$  és  $\theta_4 = y_4(L_4)$  nagyobb  $1 + \varepsilon$ -nél, ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi. (Y.5)-ből világos, hogy  $y_5$  szigorúan monoton csökkenő. Mivel  $y_5(L_5) = 1 + \varepsilon$ , azt kapjuk, hogy  $y_5(t) > 1 + \varepsilon$  bármely  $t \in [0, L_5)$  esetén. Összegezve,  $\theta_i > 1 + \varepsilon$  bármely  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  esetén, és  $y_i(t) > 1 + \varepsilon$  az  $y_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , függvény értelmezési tartományának minden belső pontjában.

(Y.6) és (Y.8) alapján  $y_6$  és  $y_8$  szigorúan monoton csökkenő az értelmezési tartományán. Deriváljuk (Y.7)-et  $t$  szerint, és használjuk fel, hogy (C.4) alapján  $\theta_5 > 0$ . Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{y}_7(t) = -\theta_5 e^{-t} - (1 + K)te^{-t} < 0 \quad \text{bármely } t \in [0, L_3] \text{ esetén,}$$

vagyis  $y_7$  szintén szigorúan monoton csökkenő a  $[0, L_3]$  intervallumon. Tehát

$$1 + \varepsilon = y_6(0) > y_6(L_2) = \theta_5 = y_7(0) > y_7(L_3) = \theta_6 = y_8(0) > y_8(L_4) = 1,$$

és  $y_i(s) \in (1, 1 + \varepsilon)$  bármely olyan  $s$  esetén, amely  $y_i$  értelmezési tartományának belsejébe esik, ahol  $i \in \{6, 7, 8\}$ .

(Y.9)-ből és (Y.10)-ből azt kapjuk, hogy  $y_9$  és  $y_{10}$  szigorúan monoton csökkenő a  $[0, L_2 + L_5]$  és a  $[0, L_3]$  intervallumokon. Mint már tudjuk,  $y_9$  és  $y_{10}$  teljesíti a peremfeltételeket (H4)-ből, tehát  $y_9(t) \in (-1, 1)$  bármely  $t \in (0, L_2 + L_5)$  esetén, és  $y_{10}(t) \in (-1 - \varepsilon, -1)$  bármely  $t \in (0, L_3)$  esetén.

A bizonyítás teljes. □

**2.11. Következmény.** Az előző proposíció feltételei mellett a (P.1)-(P.2) egyenletek által definiált  $2\omega$ -periodikus  $p$  függvény kielégíti a (2.2) késleltetett differenciálegyenletet  $\mathbb{R}$ -en. Továbbá

$$V \ni (L_2, K, \varepsilon) \mapsto p_0 \in C$$

leképezés folytonos.

*Bizonyítás.* Mivel  $p(t) = -p(t - \omega)$  minden valós  $t$  esetén, és az  $f_K$  visszacsatolási függvény páratlan, elegendő megmutatni, hogy  $p$  megoldása a (2.2) egyenletnek  $[0, \omega]$ -n, azaz elegendő (2.4)-et igazolni. A 2.10. Propozícióból következik, hogy (H1)-(H5) teljesül. A 2.3. szakaszban pedig rámutattunk, hogy – a (H1)-(H5) feltételek mellett – a (2.4) egyenlet ekvivalens a következő közös differenciálegyenletekkel:

- $[0, \tau_1]$ -en (2.5)-(2.8)-cal,
- $[\tau_1, \tau_2]$ -n (2.9)-(2.11)-el,
- $[\tau_2, \tau_3]$ -on (2.12)-(2.13)-mal,
- és  $[\tau_3, \omega]$ -n (2.14)-el.

A (H7) feltétel biztosítja, hogy (2.5)-(2.14) igaz. Tehát (2.4) szintén teljesül.

Emlékezzünk vissza, hogy a (H6) hipotézis mellett  $L_i$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , folytonos függvényei az  $L_2, K, \varepsilon$  változóknak a  $V$  halmazon. Ebből, az (Y.1)-(Y.10) és a (P.1)-(P.2) egyenletekből levezethetjük, hogy  $V \ni (L_2, K, \varepsilon) \mapsto p_0 \in C$  szintén folytonos. A részleteket az olvasóra bízuk.  $\square$

## 2.5. $F$ nyereg-csomó bifurkációja

Adott  $\varepsilon \in (0, 1)$ -re legyen

$$U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon) \times (6.5, 7),$$

és definiáljuk  $F_\varepsilon$ -t a következőképpen:

$$F_\varepsilon : U_\varepsilon \ni (L_2, K) \mapsto F(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}.$$

Szükségünk lesz ebben a szakaszban  $F_\varepsilon$  parciális deriváltjaira, azok folytonosságára, illetve határértékére ahogy  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Az olvashatóság kedvéért az ide kapcsolódó számításokat a 2.8. szakaszba, a Függelékbe tettük. Ott megmutatjuk, hogy a  $\partial F_\varepsilon / \partial K$  és a  $\partial^2 F_\varepsilon / \partial L_2^2$  parciális deriváltak folytonosak az  $U_\varepsilon$  halmazon. Az is megmutatható, hogy  $F_\varepsilon \in C^2(U_\varepsilon)$ . Ennek a bizonyítását azonban az olvasóra hagyjuk.

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy fix és kis  $\varepsilon > 0$  esetén  $F_\varepsilon$  nyereg-csomó bifurkáción megy keresztül, ahogy  $K$  nő.

Az első két propozíció azt igazolja, hogy az  $F_\varepsilon(L_2, K) = L_2$  fixpuntegyenletnek minden  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  esetén van  $K$  megoldása.

**2.12. Propozíció.** *Ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi, akkor létezik  $K_\varepsilon \in (6.5, 7)$  úgy, hogy  $F_\varepsilon(0, K_\varepsilon) = 0$ .*

*Bizonyítás.* A 2.6. Propozícióból azt kapjuk, hogy bármely  $K \in (6.5, 7)$  esetén

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(0, K) = K - \sqrt{\frac{(K+1)^3}{e(K-1)}} - \frac{K+1}{K-1}. \quad (2.31)$$

Könnyen megmutatható, hogy (2.31) előjele megegyezik

$$w(K) = e - \frac{(K+1)^3(K-1)}{(K^2 - 2K - 1)^2}$$

előjelével, amelyet könnyebben tudunk vizsgálni. Mivel

$$w(6.5) = e - \frac{37125}{12769} < e - \frac{36400}{13000} = e - \frac{28}{10} < 0$$

és

$$w(7) = e - \frac{768}{289} > e - \frac{783}{290} = e - \frac{27}{10} > 0,$$

azt látjuk, hogy  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(0, 6.5) < 0$  és  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(0, 7) > 0$ . Tehát, ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi, akkor  $F_\varepsilon(0, 6.5) < 0$  és  $F_\varepsilon(0, 7) > 0$ . Mivel  $(6.5, 7) \ni K \mapsto F_\varepsilon(0, K) \in \mathbb{R}$  folytonos,  $K_\varepsilon$  létezése a Lagrange-féle középértéktételből következik.  $\square$

**2.13. Propozíció.** *Bármely elég kicsi  $\varepsilon > 0$  és  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  esetén az  $F_\varepsilon(L_2, K) = L_2$  egyenletnek létezik egyetlen  $K \in (6.5, 7)$  megoldása. Mi több, ez a megoldás megadható  $K = \varphi_\varepsilon(L_2)$  alakban, ahol  $\varphi_\varepsilon : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (6.5, 7)$  folytonos és  $\varphi_\varepsilon(0) = K_\varepsilon$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $J_\varepsilon = (6.5 - K_\varepsilon, 7 - K_\varepsilon)$ , és vezessük be a következő leképezést:

$$G_\varepsilon : (-\varepsilon, \varepsilon) \times J_\varepsilon \ni (L_2, K) \mapsto F_\varepsilon(L_2, K + K_\varepsilon) - L_2 \in \mathbb{R}.$$

Ekkor  $G_\varepsilon(0, 0) = 0$ , és  $G$  folytonosan differenciálható (a Függelékben szereplő 2.18. Propozíció és 2.20. Propozíció alapján). A  $G_\varepsilon(L_2, K) = 0$  egyenlet  $K$  megoldásait keressük bármely kis  $\varepsilon > 0$  és  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  esetén.

Legyen

$$A := \frac{\partial G_\varepsilon(0, 0)}{\partial K} = \frac{\partial F_\varepsilon(0, K_\varepsilon)}{\partial K}.$$

A 2.19. Következmény alapján feltehetjük, hogy  $A$  nem nulla.

A  $G_\varepsilon(L_2, K) = 0$  egyenlet  $K$  megoldása megegyezik a  $T_{\varepsilon, L_2}$  leképezés fixpontjával, ahol

$$T_{\varepsilon, L_2} : J_\varepsilon \ni K \mapsto K - A^{-1}G_\varepsilon(L_2, K) \in \mathbb{R}.$$

Válasszuk  $q \in (0, 1)$ -t függetlenül  $K$ -tól,  $\varepsilon$ -tól és  $L_2$ -től. Azt állítjuk, hogy  $T_{\varepsilon, L_2}$  egyenletes kontrakció  $J_\varepsilon$  megfelelő részhalmazán: ha  $\eta > 0$  elég kicsi, akkor  $[-\eta, \eta] \subseteq J_\varepsilon$ ,

$$|T_{\varepsilon, L_2}(K)| \leq \eta, \quad \text{ha} \quad K \in [-\eta, \eta], \quad (2.32)$$

és

$$|T_{\varepsilon, L_2}(K_1) - T_{\varepsilon, L_2}(K_2)| < q|K_1 - K_2|, \quad \text{ha} \quad K_1, K_2 \in [-\eta, \eta]. \quad (2.33)$$

Legyen  $\eta > 0$  olyan kicsi, hogy  $[-\eta, \eta] \subseteq J_\varepsilon$ . A Lagrange-féle középértéktételt alkalmazva azt kapjuk, hogy  $K_1, K_2 \in [-\eta, \eta]$  esetén

$$|T_{\varepsilon, L_2}(K_1) - T_{\varepsilon, L_2}(K_2)| \leq \sup_{|\bar{K}| < \eta} \left| 1 - A^{-1} \frac{\partial G_\varepsilon(L_2, \bar{K})}{\partial K} \right| |K_1 - K_2|.$$

A 2.18. Propozícióból azt látjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_\varepsilon(L_2, \bar{K})}{\partial K} &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K_\varepsilon + \bar{K} + 1}{K_\varepsilon + \bar{K} - 1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{K_\varepsilon + \bar{K} + 1}{K_\varepsilon + \bar{K} - 1} \right)^3} \right) \\ &\quad + \frac{2}{(K_\varepsilon + \bar{K} - 1)^2} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Tehát létezik  $\varepsilon_0 > 0$  és  $\eta_0 > 0$  úgy, hogy  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  és  $\bar{K} \in (-\eta_0, \eta_0)$  esetén

$$\left| 1 - A^{-1} \frac{\partial G_\varepsilon(L_2, \bar{K})}{\partial K} \right| < q,$$

vagyis (2.33) igaz bármely  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  és  $\eta \in (0, \eta_0)$  esetén. Ezután  $G_\varepsilon$  Taylor-sorfejtését alkalmazva, azt kapjuk, hogy

$$T_{\varepsilon, L_2}(K) = K - A^{-1} G_\varepsilon(L_2, K) = -A^{-1} \left( \frac{\partial G_\varepsilon(0, 0)}{\partial L_2} L_2 + O(L_2^2 + K^2) \right),$$

ha  $L_2 \rightarrow 0$  és  $K \rightarrow 0$ . Következésképpen, ha  $|K| \leq \eta < \eta_0$  és  $|L_2| < \varepsilon < \varepsilon_0$ , akkor

$$|T_{\varepsilon, L_2}(K)| < |A|^{-1} \left| \frac{\partial G_\varepsilon(0, 0)}{\partial L_2} \right| \varepsilon + C(\varepsilon^2 + \eta^2)$$

valamely  $C > 0$  konstanssal. Legyen  $\eta_1 < \eta_0$  olyan kicsi, hogy  $C\eta_1^2 < \eta_1/2$ . Most legyen  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  olyan, hogy

$$|A|^{-1} \left| \frac{\partial G_\varepsilon(0, 0)}{\partial L_2} \right| \varepsilon + C\varepsilon^2 < \frac{\eta_1}{2}$$

bármely  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  esetén. Ekkor (2.32) teljesül  $\eta = \eta_1$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  és  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  esetén.

Összegezve, azt kapjuk, hogy  $T_{\varepsilon, L_2}$  egyenletes kontrakció  $[-\eta_1, \eta_1]$ -ről  $[-\eta_1, \eta_1]$ -re bármely  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$  és  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  esetén. A Banach-féle fixponttétel alapján  $T_{\varepsilon, L_2}$ -nek létezik egyetlen

$\psi_\varepsilon(L_2)$  fixpontja a  $[-\eta_1, \eta_1]$  intervallumon, lásd [11] 0. fejezetének 3.1. Tételét. Mivel  $L_2 \mapsto T_{\varepsilon, L_2}(K)$  minden  $K$  esetén folytonos, a [11] könyv 0. fejezetének 3.2. Tételéből következik, hogy  $\psi_\varepsilon$  folytonos  $L_2$ -ben. Világos, hogy  $\psi_\varepsilon(0) = 0$ . Legyen  $\varphi_\varepsilon(K) := K_\varepsilon + \psi_\varepsilon(K)$ .  $\square$

Ezek után ellenőrizhetjük az  $F_\varepsilon$  leképezés fixpontjainak nyereg-csomó bifurkációját.

**2.14. Propozíció.** *Bármely elég kicsi pozitív  $\varepsilon$  esetén megadható  $K^* = K^*(\varepsilon) \in (6.5, 7)$  és  $L_2^* = L_2^*(\varepsilon) \in (0, \widehat{L}_2(K, \varepsilon))$  úgy, hogy  $F_\varepsilon$  nyereg-csomó bifurkáción megy át az  $(L_2^*, K^*)$  pontban: létezik  $\mathcal{U}$  környezete  $L_2^*$ -nak az  $(0, \widehat{L}_2(K^*, \varepsilon))$  intervallumban és  $\delta_1 > 0$  konstans úgy, hogy*

- $F_\varepsilon(\cdot, K)$ -nak nincs fixpontja az  $\mathcal{U}$  halmazban  $K \in (K^* - \delta_1, K^*)$  esetén,
- $L_2^*$  az egyetlen fixpontja  $F_\varepsilon(\cdot, K^*)$ -nak az  $\mathcal{U}$ -ban,
- $F_\varepsilon(\cdot, K)$ -nak pontosan két fixpontja van  $\mathcal{U}$  halmazban  $K \in (K^*, K^* + \delta_1)$  esetén.

*Bizonyítás.* A [63] könyv 21.1A szakasza alapján  $F_\varepsilon$  nyereg-csomó bifurkáción megy át az  $(L_2^*, K^*)$  pontban, ha

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(L_2^*, K^*) &= L_2^*, \\ \frac{\partial}{\partial L_2} F_\varepsilon(L_2^*, K^*) &= 1, \\ \frac{\partial}{\partial K} F_\varepsilon(L_2^*, K^*) &\neq 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} F_\varepsilon(L_2^*, K^*) &\neq 0. \end{aligned}$$

Mi több, ha

$$\frac{\frac{\partial^2}{\partial L_2^2} F_\varepsilon(L_2^*, K^*)}{\frac{\partial}{\partial K} F_\varepsilon(L_2^*, K^*)} < 0,$$

akkor  $F_\varepsilon$  fixpontjai  $K \geq K^*$  esetén jelennek meg.

A 2.13. Propozíció alapján bármely elég kicsi, pozitív  $\varepsilon$  esetén létezik egy  $\varphi_\varepsilon : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow (6.5, 7)$  folytonos leképezés úgy, hogy

$$F_\varepsilon(L_2, \varphi_\varepsilon(L_2)) = L_2 \quad \text{bármely } L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ esetén.}$$

Világos a 2.21. Következményből, hogy ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi, akkor

$$\frac{\partial}{\partial L_2} F_\varepsilon(0, \varphi_\varepsilon(0)) > 1 \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial L_2} F_\varepsilon(\widehat{L}_2, \varphi_\varepsilon(\widehat{L}_2)) < 1.$$

Mivel  $F_\varepsilon$  folytonosan differenciálható  $L_2$  szerint, és  $\varphi_\varepsilon$  folytonos, világos, hogy

$$(-\varepsilon, \varepsilon) \ni L_2 \mapsto \frac{\partial}{\partial L_2} F_\varepsilon(L_2, \varphi_\varepsilon(L_2)) \in \mathbb{R}$$

szintén folytonos. A középértéktételből következik: létezik  $L_2^* \in (0, \widehat{L}_2)$  úgy, hogy

$$\frac{\partial}{\partial L_2} F_\varepsilon(L_2^*, \varphi_\varepsilon(L_2^*)) = 1.$$

Legyen  $K^* := \varphi_\varepsilon(L_2^*) \in (6.5, 7)$ .

A 2.19. Következmény és 2.22. Propozíció alapján feltehetjük, hogy

$$\frac{\partial}{\partial K} F_\varepsilon(L_2^*, K^*) > 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} F_\varepsilon(L_2^*, K^*) < 0.$$

Tehát  $F_\varepsilon$  nyereg-csomó bifurkáción megy át az  $(L_2^*, K^*)$  pontban, és a fixpontok  $K \geq K^*$  esetén jelennek meg.  $\square$

## 2.6. Más típusú periodikus megoldások kizárása

Ebben a szakaszban válasszuk  $\varepsilon > 0$ -t olyan kicsinek, hogy a 2.14. Propozíció érvényes legyen, vagyis  $F_\varepsilon$  nyereg-csomó bifurkáción menjen át az  $(L_2^*(\varepsilon), K^*(\varepsilon))$  pontban.

Ezentúl legyen  $p$  az a periodikus megoldás, amelyet a 2.11. Következményben adtunk az  $(L_2^*(\varepsilon), K^*(\varepsilon), \varepsilon)$  pontra. Ekkor  $p$  minimális periódusa  $2\omega$ , és  $p$  bizonyos  $y_1, \dots, y_{10}$  segédfüggvények konkatenációjaként áll elő (P.1)-(P.2) szerint. Az  $y_1, \dots, y_{10}$  függvények kielégítik a (H1)-(H5) feltételeket valamely  $L_i > 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , paraméterekkel.

A fő tétel bizonyításához még meg kell mutatnunk, hogy a (2.2) késleltetett differenciálegyenlet összes periodikus megoldása  $F$  fixpontjaiból származik – legalább lokálisan,  $p_0$  egy környezetében.

Idézzük fel a 5.1. és 5.2. Propozíciót a [24] dolgozatból.

**2.15. Propozíció.** *Tegyük fel, hogy  $\bar{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a (2.2) egyenlet tetszőleges  $2\bar{\omega}$ -periodikus megoldása.*

(i) *Ha a  $t_0 \in \mathbb{R}$  és  $t_1 \in (t_0, t_0 + 2\bar{\omega})$  pontokat úgy választjuk, hogy  $\bar{p}(t_0) = \min_{t \in \mathbb{R}} \bar{p}(t)$  és  $\bar{p}(t_1) = \max_{t \in \mathbb{R}} \bar{p}(t)$ , akkor  $\bar{p}$  monoton nemcsökkenő a  $(t_0, t_1)$  intervallumon és monoton nemnövekvő a  $(t_1, t_0 + 2\bar{\omega})$  intervallumon.*

(ii) *Ha  $0 \in \bar{p}(\mathbb{R})$ , akkor  $\bar{p}(t) = -\bar{p}(t - \bar{\omega})$  minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén.*

Ennek a szakasznak a legfontosabb eredménye a következő.

**2.16. Propozíció.** *Legyen  $\bar{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a (2.2) egyenlet  $2\bar{\omega}$ -periodikus megoldása valamilyen  $\bar{K}$  paraméterre. Ha  $|\bar{K} - K^*(\varepsilon)|$  és  $\|\bar{p}_0 - p_0\|$  elég kicsik, valamint  $\bar{p}(-1) = 1 + \varepsilon$ , akkor megadhatunk olyan  $\bar{L}_i > 0$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ,  $\bar{\theta}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ , paramétereket és  $\bar{y}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 10\}$ , folytonos függvényeket, hogy (H1)-(H5) teljesüljön, és  $\bar{p}$  az  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{10}$  függvények konkatenációjaként áll elő.*



ójaként álljon elő az alábbi módon:

$$\begin{aligned}
\bar{p}(t-1) &= \bar{y}_1(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_1], \\
\bar{p}(t-1+\bar{L}_1) &= \bar{y}_2(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_2], \\
\bar{p}(t-1+\bar{L}_1+\bar{L}_2) &= \bar{y}_3(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_3], \\
\bar{p}(t-1+\bar{L}_1+\bar{L}_2+\bar{L}_3) &= \bar{y}_4(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_4], \\
\bar{p}(t-1+\bar{L}_1+\bar{L}_2+\bar{L}_3+\bar{L}_4) &= \bar{y}_5(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_5], \\
\bar{p}(t-1+\bar{\tau}_1) &= \bar{y}_6(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_2], \\
\bar{p}(t-1+\bar{\tau}_1+\bar{L}_2) &= \bar{y}_7(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_3], \\
\bar{p}(t-1+\bar{\tau}_1+\bar{L}_2+\bar{L}_3) &= \bar{y}_8(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_4], \\
\bar{p}(t-1+\bar{\tau}_2) &= \bar{y}_9(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_2+\bar{L}_5], \\
\bar{p}(t-1+\bar{\tau}_3) &= \bar{y}_{10}(t), & ha \quad t \in [0, \bar{L}_3],
\end{aligned} \tag{2.34}$$

ahol

$$\bar{\tau}_1 = \sum_{i=1}^5 \bar{L}_i, \quad \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 + \bar{L}_4, \quad \bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_2 + \bar{L}_2 + \bar{L}_5 \quad \text{és} \quad \bar{\omega} = \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3. \tag{2.35}$$

Továbbá

$$\bar{p}(t) = -\bar{p}(t - \bar{\omega}) \quad \text{minden } t \in \mathbb{R} \text{ esetén.} \tag{2.36}$$

Következésképpen  $\bar{L}_2$  a  $(0, \varepsilon) \ni L_2 \mapsto F(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}$  leképezés fixpontja.

*Bizonyítás.* Mivel  $\|\bar{p}_0 - p_0\|$  kicsi, feltehetjük, hogy  $0 \in \bar{p}(\mathbb{R})$ . A 2.15. Propozíció (ii). állítása alapján a (2.36) szimmetria tulajdonság érvényes (2.2) bármely  $\bar{p}$  periodikus megoldására. Tehát elég, ha  $\bar{p}$ -t a  $[-1, -1+\bar{\omega}]$  intervallumon vizsgáljuk. A bizonyítást a következőképp végezzük: explicit meghatározzuk az  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{10}$  segédfüggvényeket, az  $\bar{L}_1, \dots, \bar{L}_5$  paramétereket mint az  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{10}$  függvények értelmezési tartományainak hosszát, és a  $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_6$  paramétereket mint a függvények peremértékeit.

1. Könnyen megmutatható, hogy  $|\bar{\omega} - \omega|$  tetszőlegesen kicsi, ha  $|\bar{K} - K^*(\varepsilon)|$  valamint  $\|\bar{p}_0 - p_0\|$  elég kicsi. A megoldásoperátor folytonosságát felhasználva láthatjuk, hogy ekkor  $\|\bar{p}_{-1+2\bar{\omega}} - p_{-1+2\omega}\|$  is tetszőlegesen kicsi. A periodicitás miatt  $\|\bar{p}_{-1} - p_{-1}\|$  is tetszőlegesen kicsi. Később látjuk, hogy ez a tulajdonság kulcsfontosságú.

(H2)-t, (P.1)-t és a  $p(t) = -p(t - \omega)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , összefüggést használva  $p_{-1}$  következő tulajdonságait kapjuk (lásd 2.6. ábra):

$$p(t) > 1 + \varepsilon \quad \text{minden } t \in [-2, -2 + L_1) \text{ esetén} \quad \text{és} \quad p(-2 + L_1) = 1 + \varepsilon, \tag{2.37}$$

$$p(t) \in (-1, 1) \quad \text{minden } t \in (-2 + \tau_1 - L_5, -2 + \tau_1 + L_2) \text{ esetén,}$$

$$p(-2 + \tau_1 - L_5) = 1 \text{ és } p(-2 + \tau_1 + L_2) = -1, \quad (2.38)$$

$$p(t) < -1 - \varepsilon \quad \text{minden } t \in (-2 + \tau_2 - L_4, -2 + \omega + L_1) \text{ esetén és}$$

$$p(-2 + \tau_2 - L_4) = -1 - \varepsilon. \quad (2.39)$$

2. Az  $\bar{L}_1, \bar{\theta}_1$  paraméterek és az  $\bar{y}_1$  függvény. Mivel  $\|\bar{p}_{-1} - p_{-1}\|$  tetszőlegesen kicsi és (2.37) érvényes, ezért megadható  $\bar{L}_1 > 0$  tetszőlegesen közel  $L_1$ -hez úgy, hogy:

$$\bar{p}(t) > 1 + \varepsilon \quad \text{minden } t \in [-2, -2 + \bar{L}_1) \text{ esetén és } \bar{p}(-2 + \bar{L}_1) = 1 + \varepsilon. \quad (2.40)$$

Definiáljuk az  $\bar{y}_1 \in C([0, \bar{L}_1], \mathbb{R})$  függvényt a következőképp: legyen  $\bar{y}_1(t) = \bar{p}(t - 1)$  minden  $t \in [0, \bar{L}_1]$  esetén. Mivel  $\bar{p}(-1) = 1 + \varepsilon$ , világos, hogy  $\bar{y}_1(0) = 1 + \varepsilon$ . Legyen  $\bar{\theta}_1 = \bar{y}_1(\bar{L}_1) = \bar{p}(-1 + \bar{L}_1)$ . Ekkor  $\bar{y}_1$  eleget tesz a (H4) feltétel első sorában leírtaknak  $\bar{L}_1$ -sal és  $\bar{\theta}_1$ -sal. Vegyük észre, hogy

$$\dot{\bar{y}}_1(t) = \dot{\bar{p}}(t - 1) = -\bar{p}(t - 1) + f_K(\bar{p}(t - 2)) = -\bar{y}_1(t) + K, \quad t \in [0, \bar{L}_1].$$

Megfigyelve a fenti egyenlet megoldását, világos, hogy  $\bar{y}_1$  és  $\bar{\theta}_1$  kielégíti a (H3) és (H5) feltételeket:  $\bar{\theta}_1 > 1 + \varepsilon$  és  $\bar{y}_1(t) > 1 + \varepsilon$  minden  $t \in (0, \bar{L}_1)$  esetén.

3. Ebben a lépésben még nincs elég információnk, hogy meghatározzuk  $\bar{y}_2$ -t,  $\bar{y}_3$ -at vagy  $\bar{y}_4$ -et. Most definiáljuk  $\bar{y}_5$ -öt,  $\bar{y}_6$ -ot és azokat a paramétereket, amelyek hozzájuk tartoznak (ezek  $\bar{L}_2, \bar{L}_5, \bar{\theta}_4$  és  $\bar{\theta}_5$ ). Idézzük fel, hogy  $p(-1 + \tau_1) = 1 + \varepsilon$ . A proposíció feltételei mellett megadható egy minimális  $\bar{\tau}_1 > 0$  (tetszőlegesen közel  $\tau_1$ -hez) úgy, hogy  $\bar{p}(-1 + \bar{\tau}_1) = 1 + \varepsilon$ . Mivel  $\bar{p}_{-1}$  konvergál  $p_{-1}$ -hez, és érvényes a (2.38) tulajdonság, azt kapjuk, hogy létezik  $\bar{L}_5 > 0$  és  $\bar{L}_2 > 0$  (tetszőlegesen közel  $L_5$ -höz és  $L_2$ -höz) úgy, hogy

$$\bar{p}(t) \in (-1, 1) \quad \text{minden } t \in (-2 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5, -2 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) \text{ esetén.} \quad (2.41)$$

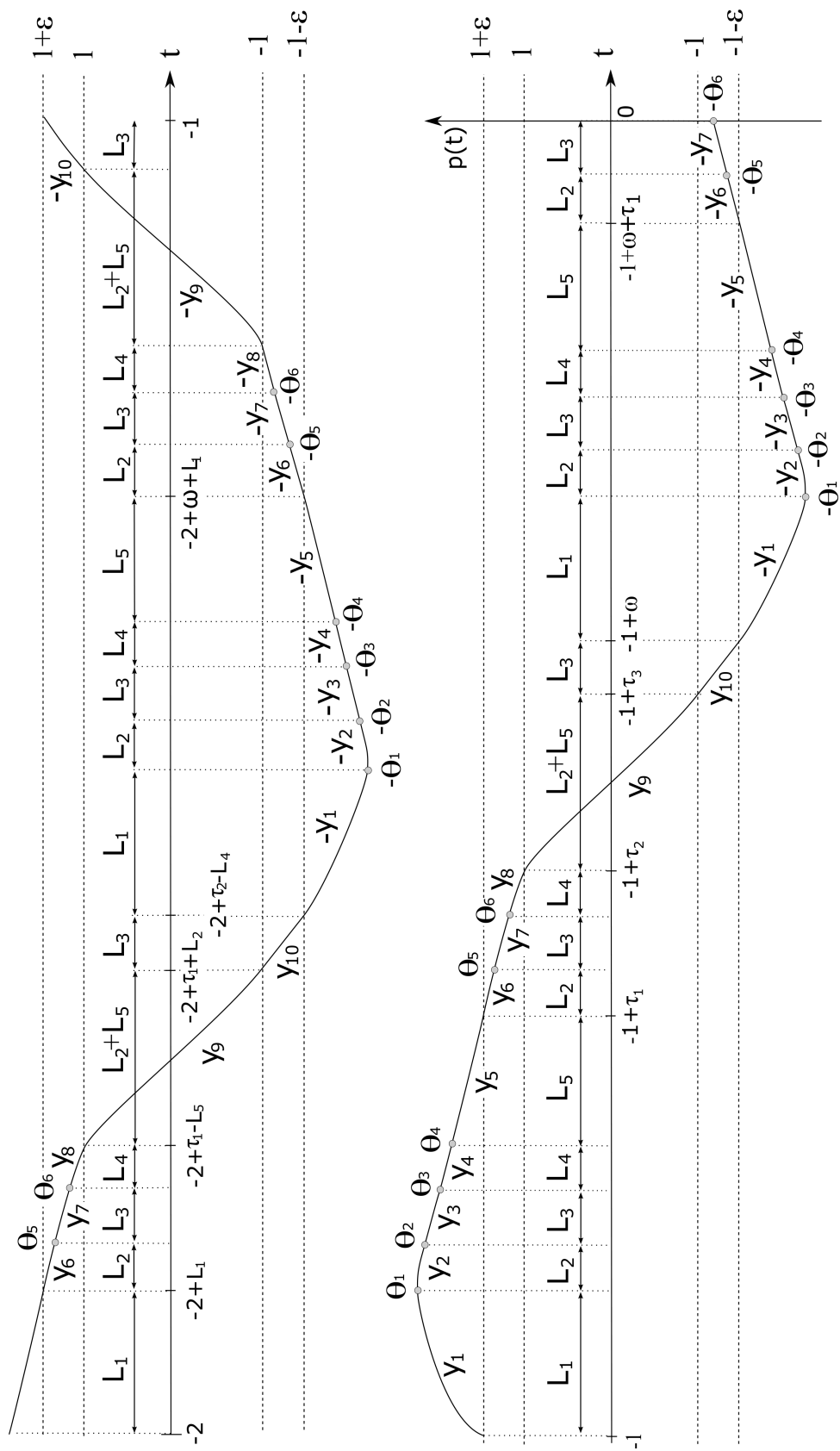
Válasszuk  $\bar{L}_2$ -t és  $\bar{L}_5$ -öt úgy, hogy a (2.41)-ben szereplő intervallum maximális legyen:

$$\bar{p}(-2 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5) = 1 \quad \text{és} \quad \bar{p}(-2 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) = -1. \quad (2.42)$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\bar{p}(t), \quad t \in (-1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5, -1 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) \text{ esetén.}$$

Mivel  $p$  pozitív a  $(-1 + \tau_1 - L_5, -1 + \tau_1 + L_2)$  intervallumon, feltehetjük, hogy  $\bar{p}$  pozitív a  $(-1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5, -1 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2)$  intervallumon, és ezért nyilvánvaló az utolsó közönséges differenciálegyenletből, hogy  $\bar{p}$  szigorúan monoton csökkenő az intervallumon. Legyen  $\bar{y}_5 \in C([0, \bar{L}_5], \mathbb{R})$  és  $\bar{y}_6 \in$



2.6. ábra. A  $p$  függvény grafikonja a  $[-2, -1]$  és a  $[-1, 0]$  intervallumokon

$C([0, \bar{L}_2], \mathbb{R})$  a következő:

$$\bar{y}_5(t) = \bar{p}(t - 1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5) \quad \text{bármely } t \in [0, \bar{L}_5] \quad \text{esetén,}$$

és

$$\bar{y}_6(t) = \bar{p}(t - 1 + \bar{\tau}_1) \quad \text{bármely } t \in [0, \bar{L}_2] \quad \text{esetén.}$$

Ekkor  $\bar{y}_5$  és  $\bar{y}_6$  szigorúan monoton csökkenő függvények, és  $\bar{y}_5(\bar{L}_5) = \bar{y}_6(0) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_1) = 1 + \varepsilon$ . Legyenek

$$\bar{\theta}_4 = \bar{y}_5(0) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5) \quad \text{és} \quad \bar{\theta}_5 = \bar{y}_6(\bar{L}_2) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) \quad (2.43)$$

olyanok, hogy  $\bar{y}_5$  és  $\bar{y}_6$  eleget tegyen a (H4) feltétel ötödik és hatodik sorában leírtaknak. Ezzel a választással  $\bar{\theta}_4$  és  $\bar{\theta}_5$  tetszőlegesen közel van  $\theta_4 = p(-1 + \tau_1 - L_5)$ -hez és  $\theta_5 = p(-1 + \tau_1 + L_2)$ -höz, és ezért  $\bar{\theta}_4 > 1 + \varepsilon$  és  $\bar{\theta}_5 \in (1, 1 + \varepsilon)$  – ahogy a (H3) feltételben szerepel. A  $\bar{y}_5$  és  $\bar{y}_6$  függvények monotonitása garantálja, hogy  $\bar{y}_5$  és  $\bar{y}_6$  kielégítik a következő feltételeket (H5)-ben:  $\bar{y}_5(t) > 1 + \varepsilon$  bármely  $t \in (0, \bar{L}_5)$  esetén, és  $\bar{y}_6(t) \in (1, 1 + \varepsilon)$  bármely  $t \in (0, \bar{L}_2)$  esetén.

4. Az  $\bar{y}_8$ ,  $\bar{y}_9$ ,  $\bar{y}_{10}$  függvények és az  $\bar{L}_3, \bar{L}_4, \bar{\theta}_6$  paraméterek. Legyen  $\bar{\tau}_2 \in (-1 + \bar{\tau}_1, -1 + \bar{\omega})$  minimális úgy, hogy  $\bar{p}(-1 + \bar{\tau}_2) = 1$ . Ilyen  $\bar{\tau}_2$  létezik, mert  $\|\bar{p}_0 - p_0\|$ ,  $|\bar{\tau}_1 - \tau_1|$  és  $|\bar{\omega} - \omega|$  tetszőlegesen kicsi. Ha  $\bar{p}_0$  konvergál  $p_0$ -hoz, akkor  $\bar{\tau}_2$  konvergál  $\tau_2$ -höz.

A  $\bar{p}_{-1}$  szegmens konvergenciája és a (2.39) tulajdonság biztosítja, hogy létezik  $\bar{L}_4 > 0$  (tetszőlegesen közel  $L_4$ -hez) úgy, hogy

$$\bar{p}(-2 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4) = -1 - \varepsilon. \quad (2.44)$$

Definiáljuk a  $\bar{y}_8 \in C([0, \bar{L}_4], \mathbb{R})$  függvényt és a  $\bar{\theta}_6$  paramétert az alábbi módon: legyen

$$\bar{y}_8(t) = \bar{p}(t - 1 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4) \quad \text{bármely } t \in [0, \bar{L}_4] \quad \text{esetén,}$$

és legyen

$$\bar{\theta}_6 = \bar{y}_8(0) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4). \quad (2.45)$$

Ekkor  $\bar{\theta}_6$  tetszőlegesen közel van  $\theta_6 = p(-1 + \tau_2 - L_4)$ -hoz, és ennél fogva feltehetjük, hogy  $\bar{\theta}_6 \in (1, 1 + \varepsilon)$  (lásd (H3)). Az  $\bar{y}_8$  függvény az értelmezési tartománya jobb végpontjában az  $\bar{y}_8(\bar{L}_4) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_2) = 1$  értéket veszi fel.

Vegyük észre, hogy  $\bar{L}_2$ -t és  $\bar{L}_5$ -öt már definiáltuk. Legyen  $\bar{y}_9 \in C([0, \bar{L}_2 + \bar{L}_5], \mathbb{R})$  olyan, hogy

$$\bar{y}_9(t) = \bar{p}(t - 1 + \bar{\tau}_2) \quad \text{bármely } t \in [0, \bar{L}_2 + \bar{L}_5] \quad \text{esetén.}$$

Világos, hogy  $\bar{y}_9(0) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_2) = 1$ . Idézzük fel (2.42)-ből, hogy létezik egy  $\bar{L}_2 + \bar{L}_5$  hosszú intervallum, amelyen a  $\bar{p}$  függvény 1-ről  $-1$ -re csökken. Ez, és a 2.15. Propozíció együtt azt adják, hogy ha  $\bar{p}$  valamely  $I$  intervallumon 1-ről  $-1$ -re csökken, akkor az  $I$  hossza  $\bar{L}_2 + \bar{L}_5$ .

Tehát  $\bar{y}_9(\bar{L}_2 + \bar{L}_5) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_2 + \bar{L}_2 + \bar{L}_5) = -1$ .

Legyen  $\bar{\tau}_3 = \bar{\tau}_2 + \bar{L}_2 + \bar{L}_5$ . Ekkor az utolsó eredményünk alapján  $\bar{p}(-1 + \bar{\tau}_3) = -1$ .

Rögzítsük  $\bar{L}_3 > 0$ -at, és legyen az az idő, amire szükség van, hogy  $\bar{p}$   $-1$ -ről  $-1 - \varepsilon$ -ra csökkenjen. Ahogy az előző bekezdésben megjegyeztük, a 2.15. Propozíció garantálja, hogy  $\bar{L}_3$  jól definiált. Válasszuk  $\bar{y}_{10}$ -et a következő módon: legyen

$$\bar{y}_{10}(t) = \bar{p}(t - 1 + \bar{\tau}_3) \quad \text{bármely } t \in [0, \bar{L}_3] \text{ esetén.}$$

Ekkor

$$\bar{y}_{10}(0) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_3) = -1 \quad \text{és} \quad \bar{y}_{10}(\bar{L}_3) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3) = -1 - \varepsilon. \quad (2.46)$$

Már ellenőriztük, hogy a  $\bar{y}_8$ ,  $\bar{y}_9$  és  $\bar{y}_{10}$  függvények eleget tesznek a (H4)-ben rájuk adott feltételeknek. Még a (H5)-ben szereplő feltételeket kell ellenőrizni:

$$\bar{y}_8(t) \in (1, 1 + \varepsilon), \quad \text{ha } t \in (0, \bar{L}_4), \quad \bar{y}_9(t) \in (-1, 1), \quad \text{ha } t \in (0, \bar{L}_2 + \bar{L}_5) \quad (2.47)$$

és

$$\bar{y}_{10}(t) \in (-1 - \varepsilon, -1), \quad \text{ha } t \in (0, \bar{L}_3). \quad (2.48)$$

Vegyük észre, hogy  $\bar{\tau}_3 + \bar{L}_3$  tetszőlegesen közel van  $\tau_3 + L_3 = \omega$ -hoz. Tehát a (2.39) tulajdonság alapján feltehetjük, hogy

$$\bar{p}(t) < -1 - \varepsilon \quad \text{bármely } t \in (-2 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4, -2 + \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3] \quad \text{esetén.} \quad (2.49)$$

Ebből, és az  $\bar{y}_8$ ,  $\bar{y}_9$  és  $\bar{y}_{10}$  függvények definíciójából azt látjuk, hogy  $\bar{y}_i$  megoldása az  $\dot{y} = -y - K$  egyenletnek bármely  $i \in \{8, 9, 10\}$  esetén. Ezért az  $\bar{y}_8$ ,  $\bar{y}_9$  és  $\bar{y}_{10}$  függvények szigorúan monoton csökkenők az értelmezési tartományaikon. Ez, és az  $\bar{y}_8$ ,  $\bar{y}_9$  és  $\bar{y}_{10}$  függvények peremértékei alapján világos, hogy (2.47) és (2.48) teljesül.

5. Az  $\bar{y}_7 \in C([0, \bar{L}_3], \mathbb{R})$  függvény. Az előző lépésekből tudjuk, hogy ha  $p$  valamely  $J$  intervallumon  $-1$ -ről  $-1 - \varepsilon$ -ra csökken, akkor  $J$  hossza  $\bar{L}_3$ . Idézzük fel a (2.42) és (2.44) tulajdonságokból, hogy

$$\bar{p}(-2 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) = -1 \quad \text{és} \quad \bar{p}(-2 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4) = -1 - \varepsilon.$$

Tehát szükségszerűen

$$\bar{\tau}_2 = \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 + \bar{L}_4, \quad (2.50)$$

és a  $[-1 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2, -1 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4]$  intervallum hossza  $\bar{L}_3$ . Definiáljuk az  $\bar{y}_7 \in C([0, \bar{L}_3], \mathbb{R})$  függvényt a következőképpen: legyen

$$\bar{y}_7(t) = \bar{p}(t - 1 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) \quad \text{bármely } t \in [0, \bar{L}_3] \text{ esetén.}$$

Ekkor  $\bar{y}_7$  teljesíti a (H4)-ben adott peremfeltételeket:

$$\bar{y}_7(0) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_1 + \bar{L}_2) = \bar{\theta}_5 \quad \text{és} \quad \bar{y}_7(\bar{L}_3) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_2 - \bar{L}_4) = \bar{\theta}_6,$$

lásd (2.43) és (2.45). Mivel  $\bar{p}_0$  tetszőlegesen közel van  $p_0$ -hoz, világos, hogy  $\bar{y}_7(t) \in (1, 1 + \varepsilon)$  bármely  $t \in (0, \bar{L}_3)$  esetén – ahogy (H5)-ben szerepel.

6. Az  $\bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$  függvények és a  $\bar{\theta}_2, \bar{\theta}_3$  paraméterek. Idézzük fel (2.40)-ből és (2.42)-ből, hogy

$$\bar{p}(-2 + \bar{L}_1) = 1 + \varepsilon \quad \text{és} \quad \bar{p}(-2 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5) = 1,$$

azaz a  $\bar{p}$  megoldás  $1 + \varepsilon$ -ról 1-re csökken a  $[-2 + \bar{L}_1, -2 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5]$  intervallumon. Idézzük fel a  $\bar{\tau}_1$  és  $\bar{\tau}_2$  definíciójából, hogy  $\bar{p}$  a  $[-1 + \bar{\tau}_1, -1 + \bar{\tau}_2]$  intervallumon is  $1 + \varepsilon$ -ról 1-re csökken. Szükségszerűen, a  $[-2 + \bar{L}_1, -2 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5]$  intervallum hossza egyenlő kell hogy legyen a  $[-1 + \bar{\tau}_1, -1 + \bar{\tau}_2]$  intervallum hosszával, ami (2.50) alapján  $\bar{L}_2 + \bar{L}_3 + \bar{L}_4$ . Ennek következtében  $\bar{\tau}_1 = \sum_{i=1}^5 \bar{L}_i$ , és a  $[-1 + \bar{L}_1, -1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5]$  intervallum hossza  $\bar{L}_2 + \bar{L}_3 + \bar{L}_4$ . Ezt használva definiáljuk az  $\bar{y}_2 \in C([0, \bar{L}_2], \mathbb{R})$ ,  $\bar{y}_3 \in C([0, \bar{L}_3], \mathbb{R})$  és  $\bar{y}_4 \in C([0, \bar{L}_4], \mathbb{R})$  függvényeket úgy, hogy minden  $i \in \{2, 3, 4\}$  esetén  $y_i$  legyen  $\bar{p}$  megszorítása  $[-1 + \bar{L}_1, -1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5]$  valamely részintervallumain:

$$\begin{aligned} \bar{y}_2(t) &= \bar{p}(t - 1 + \bar{L}_1), \quad t \in [0, \bar{L}_2], \\ \bar{y}_3(t) &= \bar{p}(t - 1 + \bar{L}_1 + \bar{L}_2), \quad t \in [0, \bar{L}_3], \\ \bar{y}_4(t) &= \bar{p}(t - 1 + \bar{L}_1 + \bar{L}_2 + \bar{L}_3), \quad t \in [0, \bar{L}_4]. \end{aligned}$$

Továbbá legyen

$$\bar{\theta}_2 = \bar{y}_2(\bar{L}_2) = \bar{y}_3(0) \quad \text{és} \quad \bar{\theta}_3 = \bar{y}_3(\bar{L}_3) = \bar{y}_4(0).$$

Világos, hogy az  $\bar{y}_2, \bar{y}_3, \bar{y}_4$  függvények kielégítik a (H4)-ben követelt peremfeltételeket, mert

$$\bar{y}_2(0) = \bar{p}(-1 + \bar{L}_1) = \bar{y}_1(\bar{L}_1) = \bar{\theta}_1$$

(lásd a bizonyítás 2. lépését), és

$$\bar{y}_4(\bar{L}_4) = \bar{p}(-1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5) = \bar{y}_5(0) = \bar{\theta}_4$$

(lásd (2.43)). Vegyük észre, hogy az  $\bar{y}_i(t) > 1 + \varepsilon$  egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül az  $y_i, i \in \{2, 3, 4\}$ , értelmezési tartományának bármely  $t$  belső pontjában, ha  $\bar{p}(t) > 1 + \varepsilon$  minden  $t \in (-1 + \bar{L}_1, -1 + \bar{\tau}_1 - \bar{L}_5)$  esetén. Mivel  $p(t) > 1 + \varepsilon$  minden  $t \in [-1 + L_1, -1 + \tau_1 - L_5]$  esetén, az utolsó egyenlőtlenség igaz akkor, ha  $\|\bar{p}_0 - p_0\|$  elég kicsi.

7. Az  $\bar{\omega} = \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3$  egyenlet bizonyítása. Mivel  $\bar{\tau}_3, \bar{L}_3$  és  $\bar{\omega}$  tetszőlegesen közel van  $\tau_3$ -hoz,  $L_3$ -hoz és  $\omega = \tau_3 + L_3$ -hoz, azt látjuk, hogy  $\bar{\omega}$  tetszőlegesen közel van  $\bar{\tau}_3 + \bar{L}_3$ -hoz. Mivel  $\bar{p}(-1) = 1 + \varepsilon$ , a (2.36) szimmetria tulajdonságból következik, hogy  $\bar{p}(-1 + \bar{\omega}) = -1 - \varepsilon$ .

Említettük már azt is, hogy  $\bar{p}(-1 + \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3) = -1 - \varepsilon$ , lásd (2.46). Ha  $\bar{\omega} \neq \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3$ , akkor létezik  $\xi$  az  $\bar{\omega}$  és  $\bar{\tau}_3 + \bar{L}_3$  paraméterek között úgy, hogy

$$\bar{p}(-1 + \xi) = -1 - \varepsilon \quad \text{és} \quad \dot{\bar{p}}(-1 + \xi) = 0$$

(itt használjuk a monotonitási feltételt a 2.15. Propozícióból). Ekkor szükségszerűen

$$f_{\bar{K}}(\bar{p}(-2 + \xi)) = \dot{\bar{p}}(-1 + \xi) + \bar{p}(-1 + \xi) = -1 - \varepsilon.$$

Ez ellentmond annak, hogy  $f_{\bar{K}}(\bar{p}(-2 + \xi))$  tetszőlegesen közel van a

$$f_{\bar{K}}(\bar{p}(-2 + \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3)) = -K$$

értékhez (lásd (2.49)). Tehát  $\bar{\omega} = \bar{\tau}_3 + \bar{L}_3$ .

Vegyük észre, hogy bizonyítottuk a (2.35)-ben szereplő összefüggéseket.

8. Összegezve,  $\bar{p}$  az  $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{10}$ , segédfüggvények konkatenációja, a (2.35)-ben szereplő egyenletek teljesülnek, valamint (H1) és (H3)-(H5) is igaz. *Még (H2)-t kell bizonyítani.*

Világos, hogy

$$\bar{L} := 2\bar{L}_1 + 5\bar{L}_2 + 5\bar{L}_3 + 3\bar{L}_4 + 3\bar{L}_5$$

tetszőlegesen közel van  $2L_1 + 5L_2 + 5L_3 + 3L_4 + 3L_5 = 1$ -hez, ha  $|\bar{K} - K^*(\varepsilon)|$  és  $\|\bar{p}_0 - p_0\|$  elég kicsi. Megmutatjuk, hogy  $\bar{L} = 1$ . A (2.36) szimmetria tulajdonságból és a (2.34)-(2.35) egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{p}(t - 1 + \bar{L}) &= -\bar{y}_8(t), \quad \text{ha } t \in [0, \bar{L}_4], \\ \bar{p}(t - 1 + \bar{L} + \bar{L}_4) &= -\bar{y}_9(t), \quad \text{ha } t \in [0, \bar{L}_2 + \bar{L}_5], \\ \bar{p}(t - 1 + \bar{L} + \bar{L}_2 + \bar{L}_4 + \bar{L}_5) &= -\bar{y}_{10}(t), \quad \text{ha } t \in [0, \bar{L}_3], \\ \bar{p}(t - 1 + \bar{L} + \bar{L}_2 + \bar{L}_3 + \bar{L}_4 + \bar{L}_5) &= \bar{y}_1(t), \quad \text{ha } t \in [0, \bar{L}_1]. \end{aligned}$$

Idézzük fel, hogy  $-\bar{y}_8, -\bar{y}_9, -\bar{y}_{10}$  és  $\bar{y}_1$  megoldásai az  $\dot{y} = -y + K$  egyenletnek. Tehát a fenti egyenletekből azt látjuk, hogy

$$\dot{\bar{p}}(t) = -\bar{p}(t) + K \quad \text{minden } t \in [-1 + \bar{L}, -1 + \bar{L} + \bar{\tau}_1] \quad \text{esetén,}$$

ami csak akkor lehetséges, ha

$$\bar{p}(t) \geq 1 + \varepsilon \quad \text{minden } t \in [-2 + \bar{L}, -2 + \bar{L} + \bar{\tau}_1] \quad \text{esetén.}$$

Már tudjuk, hogy  $\bar{p}(t) < -1 - \varepsilon$  bármely  $t \in (-1 + \bar{\tau}_1, -1 + \bar{\omega})$  esetén. Ebből  $\bar{L} \leq 1$  adódik.

Szintén vegyük észre, hogy

$$\bar{p}(t) < -1 - \varepsilon \quad \text{minden} \quad t \in [-1 - \bar{L}_3, -1) \quad \text{esetén,}$$

hiszen  $\bar{p}(t - 1 - \bar{L}_3) = -\bar{y}_{10}(t)$ ,  $t \in [0, \bar{L}_3]$  esetén. Ezért  $\bar{L} \geq 1$ . Szükségképpen  $\bar{L} = 1$ .

9. A 2.4. Propozícióból következik, hogy  $\bar{L}_2$  fixpontja a  $L_2 \mapsto F(L_2, K, \varepsilon)$  leképezésnek.  $\square$

## 2.7. A 2.3. Tétel bizonyítása

*A 2.3. Tétel bizonyítása. 1. lépés (egzisztencia):* Ha  $\varepsilon > 0$  elég kicsi, akkor a 2.14. Propozíció szerint létezik  $K^* \in (6.5, 7)$  és  $L_2^* \in (0, \hat{L}_2(K^*, \varepsilon))$  úgy, hogy  $F_\varepsilon$  nyereg-csomó bifurkáción megy át az  $(L_2^*, K^*)$  pontban: létezik egy  $\delta_1 > 0$  konstans úgy, hogy

- ha  $K \in (K^* - \delta_1, K^*)$ , akkor az  $F_\varepsilon(\cdot, K)$  leképezésnek nincs fixpontja  $L_2^*$  közelében,
- $L_2^*$  izolált fixpontja  $F_\varepsilon(\cdot, K^*)$ -nak,
- és ha  $K \in (K^*, K^* + \delta_1)$ , akkor az  $F_\varepsilon(\cdot, K)$  leképezésnek pontosan két fixpontja van  $L_2^*$  közelében (amelyek konvergálnak  $L_2^*$ -hoz, ha  $K \rightarrow K^*$ ).

A 2.11. Következmény alapján ezek a fixpontok periodikus megoldásokat adnak. Ezáltal egy periodikus pályát kapunk, ha  $K = K^*$ , és két különböző periodikus pályát minden  $K \in (K^*, K^* + \delta_1)$  esetén. Jelölje  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $K^*$  bifurkációs paraméterhez tartozó periodikus megoldást. A 2.11. Következményből látjuk, hogy a  $K \in (K^*, K^* + \delta_1)$ -hez tartozó mindkét periodikus megoldás kezdeti szegmense konvergál  $p_0$ -hoz, ha  $K \rightarrow K^*$ .

*2. lépés (unicitás):* A 2.16. Propozíció alapján létezik egy  $\delta_2 > 0$  konstans és a  $p_0$  szegmensnek egy  $N$  nyitott környezete a

$$H = \{\varphi \in C : \varphi(-1) = 1 + \varepsilon\}$$

hipersíkban úgy, hogy ha  $K \in (K^* - \delta_2, K^* + \delta_2)$  és  $\bar{p}$  periodikus megoldás  $\bar{p}_0 \in N$  kezdeti függvénnel, akkor a  $\bar{p}_0$  szegmens  $F_\varepsilon(\cdot, K)$  fixpontjából ered a 2.11. Következményben leírt módon.

Tekintsük  $p_0$  egy elég kicsi  $B$  nyitott környezetét  $C$ -ben és a szokásos  $\mathcal{P}$  Poincaré leképezést  $B$ -ről  $H$ -ra. (Az ilyen  $\mathcal{P}$  leképezés létezését igazolhatjuk az implicitfüggvény-tétel segítségével és azt a tényt használva, hogy  $\mathcal{O} = \{p_t : t \in \mathbb{R}\}$  transzverzálisan metszi  $H$ -t, lásd [8]-at, [32]-t vagy az 1. Appendixet [27]-ből). Mivel  $\mathcal{P}$  folytonosan függ  $\varphi \in C$ -től és (2.2) jobb oldalától, ezért feltehetjük, hogy  $\mathcal{P}$  a  $B$  halmazt  $N$ -be képezi bármely  $K \in (K^* - \delta_2, K^* + \delta_2)$  esetén. Ez azt jelenti, hogy, ha a  $\bar{p}$  periodikus megoldás valamely szegmense  $B$ -ben van, akkor  $\bar{p}$  megfelelő időbeli eltolta az  $F_\varepsilon(\cdot, K)$  leképezés fixpontjaként áll elő.

*3. lépés:* Válasszuk  $\delta \in (0, \min\{\delta_1, \delta_2\})$ -t olyan kicsinek, hogy  $K \in (K^*, K^* + \delta)$  esetén az 1. lépésben adott mindkét periodikus megoldásnak legyenek szegmensei  $B$ -ben. (Ez lehetséges,



mivel a periodikus megoldások kezdeti függvényei konvergálnak  $p_0$ -hoz, ha  $K \rightarrow K^*$ .) A 2.3. Tétel ezzel a  $\delta$  konstanssal és  $B$  környezettel teljesül. Világos a konstrukciónkból, hogy a fent említett periodikus megoldások nagy amplitúdójúak, vagyis oszcillálnak  $f_K$  mindkét instabil fixpontja körül.  $\square$

Mivel a nagy amplitúdójú periodikus megoldások bifurkációja megfelel az  $F_\varepsilon$  fixpontjai bifurkációjának, ezért a 2.7. Következményből látjuk, hogy  $K^*$  határértéke  $K_0$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

## 2.8. Függelék: $F$ parciális deriváltjai

Ebben a szakaszban az  $F: U \rightarrow \mathbb{R}$  leképezés parciális deriváltjait fogjuk vizsgálni a következő feltétel mellett:

**(H6)**  $L_i$ ,  $i \in \{1, 3, 4, 5\}$ , és  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq 6$ , az  $L_2$ ,  $K$ ,  $\varepsilon$  változók (C.1)-(C.10) szerint definiált függvényei az

$$U = \{(L_2, K, \varepsilon) \in \mathbb{R}^3: \varepsilon \in (0, 1), K \in (6.5, 7) \text{ és } L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$$

halmazon.

Az  $O$  jelölést ugyanúgy fogjuk használni, mint ahogy a 2.6. Propozíció bizonyítása előtt definiáltuk.

**2.17. Megjegyzés.** Legyen  $\alpha \in \mathbb{R}$ , és tekintsük a (C.5)-ben definiált  $\theta_6$ -ot. Idézzük fel a 2.6. Propozíció (i). állításából, hogy  $\theta_6 = 1 + O(\varepsilon)$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Tehát, a binomiális sorfejtés alapján,

$$\begin{aligned} (K + \theta_6)^\alpha &= (K + 1)^\alpha \left(1 + \frac{\theta_6 - 1}{K + 1}\right)^\alpha \\ &= (K + 1)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \left(\frac{\theta_6 - 1}{K + 1}\right)^n \\ &= (K + 1)^\alpha + O(\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Hasonlóan,

$$(K - 1 - \varepsilon)^\alpha = (K - 1)^\alpha \left(1 - \frac{\varepsilon}{K - 1}\right)^\alpha = (K - 1)^\alpha + O(\varepsilon), \tag{2.52}$$

ha  $K \in (6.5, 7)$  és  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

**2.18. Propozíció.** A (H6) feltétel mellett  $F$  folytonosan differenciálható  $K$  szerint az  $U$  halmazon. Az is igaz, hogy

$$\frac{\partial}{\partial K} F(L_2, K, \varepsilon) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{K+1}{K-1}\right)^3} \right) + \frac{2}{(K-1)^2} + O(\varepsilon), \tag{2.53}$$

ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

*Bizonyítás.* Az  $F$  leképezés négy tag összegére bontható. Kiszámoljuk ezen tagok  $K$  szerinti parciális deriváltjait, hogy megmutassuk,  $\partial F/\partial K$  folytonos az  $U$  halmazon. Közben pedig megmutatjuk, hogy

(i)  $\partial\theta_6/\partial K = O(\varepsilon)$ ,  $\partial L_4/\partial K = O(\varepsilon)$  és ezért

$$\frac{\partial}{\partial K} \left( \frac{K(K+1)}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) \right) = O(\varepsilon),$$

(ii)

$$\frac{\partial\theta_3}{\partial K} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{K+1}{K-1}\right)^3} \right) + O(\varepsilon),$$

(iii) és

$$\frac{\partial}{\partial K} \left( (1 + \varepsilon) \frac{K + \theta_6}{K - 1} e^{-L_2} \right) = \frac{-2}{(K - 1)^2} + O(\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Ebben a bizonyításban, az egyszerűség kedvéért, a  $'$  jelölést a  $K$  szerinti parciális deriváltra fogjuk használni.

(i)  $\theta_6$  parciális deriváltja  $K$  szerint:

$$\theta'_6 = \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)}{(K - 1)^2} e^{-L_2} + \frac{2K - 1 - \varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{K - 1}{K - 1 - \varepsilon} - \frac{2K - 1}{K - 1}.$$

Mivel  $L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , ezért

$$\frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)}{(K - 1)^2} e^{-L_2} = O(\varepsilon).$$

Használjuk először (2.17)-et, majd (2.52)-t  $\alpha = -1$ -gyel, és akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{2K - 1 - \varepsilon}{\varepsilon} \ln \frac{K - 1}{K - 1 - \varepsilon} = \frac{2K - 1 - \varepsilon}{K - 1 - \varepsilon} + O(\varepsilon) = \frac{2K - 1}{K - 1} + O(\varepsilon).$$

A fentiekből következik, hogy  $\theta'_6 = O(\varepsilon)$ .

Vegyük észre, hogy

$$L'_4 = \frac{1 + \theta'_6}{K + \theta_6} - \frac{1}{K + 1}.$$

Alkalmazzuk (2.51)-et  $\alpha = -1$ -gyel. Ekkor azt kapjuk, hogy  $(K + \theta_6)^{-1} = (K + 1)^{-1} + O(\varepsilon)$ . Felhasználva ezt és  $\theta'_6 = O(\varepsilon)$ -t, arra következtethetünk, hogy  $L'_4 = O(\varepsilon)$ .

Az (i). állítás bizonyításának befejezéséhez vizsgáljuk meg a

$$\left( \frac{K(K+1)}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) \right)'$$

parciális deriváltat, ami

$$\frac{2K+1}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) + \frac{K(K+1)}{\varepsilon} L_4 L_4' e^{L_4}.$$

A 2.6. Propozíció (i). állítása,  $L_4 = O(\varepsilon)$  és  $L_4' = O(\varepsilon)$  szerint a fenti kifejezés  $O(\varepsilon)$  nagyságrendű.

(ii) Idézzük fel, hogy  $\theta_3$ -at a (C.10) pontban definiáltuk. Mivel  $\theta_3$  függvénye  $\theta_2$ -nek, vizsgáljuk először  $\theta_2$  deriváltját  $K$  szerint. Ehhez használjuk (C.9)-et:

$$\begin{aligned} \theta_2' &= e^{-L_2} + \frac{1}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon)L_2 e^{-L_2} + e^{-L_2} - 1) \\ &\quad - e^{-\frac{1}{2}} \left( \left( \frac{K + \theta_6}{K - 1 - \varepsilon} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3(K-1)(K + \theta_6)^{\frac{3}{2}}}{2(K-1-\varepsilon)^{\frac{5}{2}}} \right) \\ &\quad - \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \frac{(K-1)(K + \theta_6)^{\frac{1}{2}} (1 + \theta_6')}{(K-1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Használva az  $|L_2| < \varepsilon$  egyenlőtlenséget, (2.23)-at  $t = L_2$ -vel, a 2.17. Megjegyzést, és ennek a propozíciónak az (i). állítását, azt kapjuk hogy

$$\theta_2' = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{K+1}{K-1} \right)^3} \right) + O(\varepsilon). \quad (2.54)$$

Deriváljuk  $\theta_3$  második tagját  $K$  szerint. (C.1)-ből azt kapjuk, hogy

$$L_3' = -\frac{\varepsilon}{(K-1)(K-1-\varepsilon)} \quad \text{és} \quad (e^{-L_3})' = \frac{\varepsilon}{(K-1)^2}. \quad (2.55)$$

Tehát

$$\left( \frac{K}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon)L_3 e^{-L_2-L_3} + e^{-L_3} - 1) \right)'$$

ekvivalens a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon)L_3 e^{-L_2-L_3} + e^{-L_3} - 1) \\ &+ \frac{K}{(K-1)^2} (1 - (1 + \varepsilon)e^{-L_2} + L_3(1 + \varepsilon)e^{-L_2}) \end{aligned}$$

kifejezéssel. Használjuk, hogy  $L_2 = O(\varepsilon)$ ,  $L_3 = O(\varepsilon)$ , és alkalmazzuk (2.24)-et  $t = L_3$ -ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left( \frac{K}{\varepsilon} ((1 + \varepsilon)L_3 e^{-L_2-L_3} + e^{-L_3} - 1) \right)' = O(\varepsilon). \quad (2.56)$$

$\theta_3$  utolsó tagja:

$$\frac{K^2}{\varepsilon^2} (K-1) \left( 1 - \left( 1 + L_3 + \frac{L_3^2}{2} \right) e^{-L_3} \right).$$

E tag  $K$  szerinti deriváltja:

$$\frac{3K^2 - 2K}{\varepsilon^2} \left( 1 - \left( 1 + L_3 + \frac{L_3^2}{2} \right) e^{-L_3} \right) - \frac{K^2 L_3^2}{2\varepsilon(K-1)}.$$

Mivel  $L_3 = O(\varepsilon)$ , és (2.25) érvényes  $t = L_3$  esetén, ezért

$$\left( \frac{K^2}{\varepsilon^2} (K-1) \left( 1 - \left( 1 + L_3 + \frac{L_3^2}{2} \right) e^{-L_3} \right) \right)' = O(\varepsilon). \quad (2.57)$$

Tehát a (ii). állítás (C.10)-ból,  $L_3 = O(\varepsilon)$ -ból,  $\theta_2$  korlátosságából és a (2.54)-(2.57) pontokból következik.

(iii) Világos, hogy

$$\left( (1 + \varepsilon) \frac{K + \theta_6}{K - 1} e^{-L_2} \right)' = \frac{1 + \varepsilon}{K - 1} e^{-L_2} \left( 1 + \theta_6' - \frac{K + \theta_6}{K - 1} \right).$$

Behelyettesítve az  $L_2 = O(\varepsilon)$ ,  $\theta_6 = 1 + O(\varepsilon)$  és  $\theta_6' = O(\varepsilon)$  összefüggéseket, azonnal megkapjuk a (iii). állítást.

A fenti részeredmények alapján  $F$  folytonosan differenciálható  $K$  szerint az  $U$  halmazon. A (2.53) összefüggés következik az (i)-(iii). állításokból.  $\square$

$F$  fixpontjai nyereg-csomó bifurkációjának igazolásához van szükségünk az alábbi következményre.

**2.19. Következmény.** *Tegyük fel, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0^+$ , továbbá*

$$(L_{2,n}, K_n, \varepsilon_n) \in U \quad \text{és} \quad F(L_{2,n}, K_n, \varepsilon_n) = L_{2,n} \quad \text{minden } n \geq 0 \text{ esetén.}$$

*Ekkor*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial K} F(L_{2,n}, K_n, \varepsilon_n) &= 1 - e^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K_0 + 1}{K_0 - 1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{K_0 + 1}{K_0 - 1} \right)^3} \right) \\ &\quad + \frac{2}{(K_0 - 1)^2}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

ahol  $K_0$  a (2.3) egyenlet egyetlen megoldása a  $[6.5, 7]$  intervallumon. Ez a határérték pozitív.

*Bizonyítás.* Világos a 2.7. Következményből és a 2.18. Propozícióból, hogy a határérték igaz. Tehát csak azt kell megmutatni, hogy a határérték pozitív. Ha kifejezzük  $e^{-1/2}$ -t (2.3)-ból, akkor látjuk, hogy a (2.58) állítás jobb oldalán szereplő második tag

$$\frac{K_0^2 - 2K_0 - 1}{\sqrt{(K_0 - 1)(K_0 + 1)^3}} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\frac{K_0 + 1}{K_0 - 1}} - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{K_0 + 1}{K_0 - 1} \right)^3} \right)$$

alakú, ami

$$\frac{(K_0^2 - 2K_0 - 1)(K_0 - 2)}{(K_0 - 1)^2(K_0 + 1)}.$$

Ez a kifejezés kisebb, mint  $(K_0 - 2)/(K_0 + 1) < 1$ , tehát (2.58) nagyobb, mint 0.  $\square$

**2.20. Propozíció.** *A (H6) feltétel mellett  $F$  folytonosan differenciálható  $L_2$  szerint az  $U$  halmazon. Továbbá*

$$\frac{\partial}{\partial L_2} F(0, K, \varepsilon) = \frac{K^2 + 8K + 2}{2(K^2 - 1)} + \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} + O(\varepsilon)$$

és

$$\frac{\partial}{\partial L_2} F(\widehat{L}_2, K, \varepsilon) = \frac{-K^2 + 6K + 2}{2(K-1)} + \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} + O(\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+,$$

ahol  $\widehat{L}_2$ -t (2.26)-ban definiáltuk.

*Bizonyítás.* A propozíció a következő három állításból következik.

1. *Állítás.*  $F$  első tagjának  $L_2$  szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial L_2} \left( \frac{K(K+1)}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) \right) = \frac{K}{\varepsilon} L_4 \frac{\partial \theta_6}{\partial L_2}, \quad (2.59)$$

ahol

$$\frac{\partial \theta_6}{\partial L_2} = -(1 + \varepsilon) \frac{K-1-\varepsilon}{K-1} e^{-L_2}. \quad (2.60)$$

$L_2 = 0$  esetén (2.59) egyenlő a következővel:

$$-\frac{K(K-4)}{2(K^2-1)} + O(\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.61)$$

$L_2 = \widehat{L}_2$  esetén (2.59) egyenlő nullával.

2. *Állítás.*  $\theta_3$  parciális deriváltja  $L_2$  szerint

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial L_2} = \frac{3}{2} \frac{(1 + \varepsilon) \sqrt{K + \theta_6}}{\sqrt{K-1-\varepsilon}} e^{-L_2-L_3-\frac{1}{2}} - \frac{K}{\varepsilon} (1 + \varepsilon) (L_2 + L_3) e^{-L_2-L_3}. \quad (2.62)$$

$L_2 = 0$  esetén ez

$$\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} - \frac{K}{K-1} + O(\varepsilon).$$

$L_2 = \widehat{L}_2$  esetén pedig a következőt kapjuk:

$$\frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} - \frac{K(K-2)}{2(K-1)} + O(\varepsilon).$$

3. *Állítás.* Az  $F$  leképezés harmadik tagjának  $L_2$  szerinti parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial L_2} \left( (1 + \varepsilon) \frac{K + \theta_6}{K - 1} e^{-L_2} \right) = -\frac{1 + \varepsilon}{K - 1} (K + \theta_6 - \theta'_6) e^{-L_2}. \quad (2.63)$$

Mind  $L_2 = 0$ , mind  $L_2 = \widehat{L}_2$  esetén ez a kifejezés

$$-\frac{K + 2}{K - 1} + O(\varepsilon).$$

Ebben a bizonyításban a  $'$  jelölést az  $L_2$  szerinti parciális deriváltra fogjuk használni.

Az 1. állítás bizonyítása. A  $\theta_6$  és az  $L_4$  függvények  $L_2$  szerinti deriváltjai (2.60) és

$$L'_4 = \frac{\theta'_6}{K + \theta_6}. \quad (2.64)$$

Világos, hogy

$$\left( \frac{K(K + 1)}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) \right)' = \frac{K(K + 1)}{\varepsilon} L_4 L'_4 e^{L_4}.$$

Az  $e^{L_4}$  kifejezést  $(K + \theta_6)/(K + 1)$ -vel helyettesítve és (2.64)-et használva, megkapjuk (2.59)-et.

Legyen  $L_2 = 0$ . (2.60)-ból azt kapjuk, hogy

$$\theta'_6 = -1 + O(\varepsilon), \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.65)$$

Következő lépésként  $L_4$ -et számoljuk ki  $L_2 = 0$  estén a (C.6) képlet segítségével. Tehát legyen  $L_2 = 0$ . Ekkor

$$(1 + \varepsilon) \frac{K - 1 - \varepsilon}{K - 1} e^{-L_2} = (1 + \varepsilon) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{K - 1} \right) = 1 + \frac{K - 2}{K - 1} \varepsilon - \frac{1}{K - 1} \varepsilon^2.$$

Ezen eredmény, (C.5) és (2.27) szerint

$$\theta_6 = 1 + \frac{K - 4}{2(K - 1)} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Ebből és (C.6)-ból azt kapjuk, hogy

$$L_4 = \ln \left( 1 + \frac{\theta_6 - 1}{K + 1} \right) = \frac{K - 4}{2(K^2 - 1)} \varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (2.66)$$

(2.65)-öt és (2.66)-ot behelyettesítve  $KL_4\theta'_6/\varepsilon$ -be, megkapjuk (2.61)-et.

Az  $\widehat{L}_2$  definíciója alapján  $L_4 = 0$ , ha  $L_2 = \widehat{L}_2$ . Tehát (2.59) nulla ebben az esetben, és így bizonyítottuk az 1. állítást.

A 2. állítás bizonyítása. (C.10)-ből látjuk, hogy  $\theta_3$  első tagja  $\theta_2 e^{-L_3}$ . Ennek  $L_2$  szerinti

deriváltja:

$$(\theta_2 e^{-L_3})' = \frac{3}{2} \frac{(1+\varepsilon)\sqrt{K+\theta_6}}{\sqrt{K-1-\varepsilon}} e^{-L_2-L_3-\frac{1}{2}} - \frac{K}{\varepsilon} (1+\varepsilon) L_2 e^{-L_2-L_3}.$$

$\theta_3$  második tagjának  $L_2$  szerinti deriváltja:

$$\frac{K}{\varepsilon} ((1+\varepsilon)L_3 e^{-L_2-L_3} + e^{-L_3} - 1)' = -\frac{K}{\varepsilon} (1+\varepsilon)L_3 e^{-L_2-L_3}.$$

$\theta_3$  harmadik tagja pedig független  $L_2$ -től. Összegezve, (2.62) igaz.

A 2.17. Megjegyzés alapján

$$\sqrt{K+\theta_6} = \sqrt{K+1} + O(\varepsilon)$$

és

$$\frac{1}{\sqrt{K-1-\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{K-1}} + O(\varepsilon).$$

Idézzük fel, hogy  $L_2 = O(\varepsilon)$  és  $L_3 = O(\varepsilon)$ . Tehát  $L_2 = 0$  és  $L_2 = \hat{L}_2$  esetén is

$$\frac{3}{2} \frac{(1+\varepsilon)\sqrt{K+\theta_6}}{\sqrt{K-1-\varepsilon}} e^{-L_2-L_3-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{K+1}{K-1}} + O(\varepsilon). \quad (2.67)$$

Használjuk az  $L_3$  vonatkozó (2.17) eredményt, valamint a  $(K-1-\varepsilon)^{-1} = (K-1)^{-1} + O(\varepsilon)$  összefüggést. Ekkor  $L_2 = 0$  esetén azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{K}{\varepsilon} (1+\varepsilon) (L_2 + L_3) e^{-L_2-L_3} &= \frac{K}{\varepsilon} (1+\varepsilon) \left( \frac{\varepsilon}{K-1-\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \right) (1+O(\varepsilon)) \\ &= \frac{K}{K-1} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

(2.67)-ből vonjuk ki az utolsó kifejezést. Igazoltuk  $\theta'_3$ -ra vonatkozó állítást  $L_2 = 0$  esetén.

Legyen  $L_2 = \hat{L}_2$ . Ekkor (2.30) és (2.17) alapján

$$\frac{K}{\varepsilon} (1+\varepsilon) (\hat{L}_2 + L_3) e^{-\hat{L}_2-L_3}$$

egyenlő a

$$\begin{aligned} &\frac{K}{\varepsilon} (1+\varepsilon) \left( \left( \frac{K-4}{2(K-1)} + \frac{1}{K-1} \right) \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right) (1+O(\varepsilon)) \\ &= \frac{K(K-2)}{2(K-1)} + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

kifejezéssel. Kivonva ezt (2.67)-ből, adódik a 2. állítás bizonyítása.

*A 3. állítás bizonyítása.* A 3. állítás bizonyítása hasonlóan könnyű, és az olvasóra bízunk.

Az  $F$  leképezés  $L_2$  szerinti folytonos differenciálhatósága egyértelmű a (2.59)-(2.60), (2.62)-

(2.63) állításokból és  $F$  definíciójából. Az  $F'(0, K, \varepsilon)$ -ra és  $F'(\widehat{L}_2, K, \varepsilon)$ -ra vonatkozó képletek az 1–3. állításokból következnek.  $\square$

$F$  fixpontjai nyereg-csomó bifurkációjának igazolásához használjuk az alábbi következményt.

**2.21. Következmény.** *A (H6) feltétel mellett*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial L_2} F(0, \varphi_\varepsilon(0), \varepsilon) > 1$$

és

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial L_2} F(\widehat{L}_2, \varphi_\varepsilon(\widehat{L}_2), \varepsilon) < 1,$$

ahol  $\varphi_\varepsilon$  a 2.13. Propozícióban definiált leképezés.

*Bizonyítás.* Idézzük fel a 2.7. Következményből, hogy  $\varphi_\varepsilon(0) \rightarrow K_0 \in (6.5, 7)$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . A (2.3) egyenletből tudjuk, hogy

$$e^{-\frac{1}{2}} = \frac{K_0^2 - 2K_0 - 1}{\sqrt{K_0 - 1} \sqrt{(K_0 + 1)^3}}.$$

Ezért, az előző propozíció alapján,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial L_2} F(0, \varphi_\varepsilon(0), \varepsilon) &= \frac{K_0^2 + 8K_0 + 2}{2(K_0^2 - 1)} + \frac{3(K_0^2 - 2K_0 - 1)}{2(K_0^2 - 1)} \\ &= 1 + \frac{2K_0^2 + 2K_0 + 1}{2(K_0^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Mivel  $K_0 \in (6.5, 7)$ , az utolsó hányados pozitív, és a fenti limesz nagyobb, mint 1.

Hasonlóan,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial L_2} F(\widehat{L}_2, \varphi_\varepsilon(\widehat{L}_2), \varepsilon) &= \frac{-K_0^2 + 6K_0 + 2}{2(K_0 - 1)} + \frac{3(K_0^2 - 2K_0 - 1)}{2(K_0^2 - 1)} \\ &= 1 + \frac{-K_0^3 + 6K_0^2 + 2K_0 + 1}{2K_0^2 - 2}. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Mivel  $0.5K^2 > 2K + 1$ , ha  $K > 2 + \sqrt{6}$ , azt kapjuk, hogy

$$K^3 > 6.5K^2 > 6K^2 + 2K + 1, \quad \text{ha } K > 6.5.$$

Mivel  $K_0 > 6.5$ , ez azt jelenti, hogy (2.68) utolsó hányadosa negatív, és ezért a limesz  $L_2 = \widehat{L}_2$  esetén kisebb, mint 1.  $\square$

A következő propozícióban az alábbi jelölést fogjuk használni: az  $U$  halmazon definiált  $u$  és



$v$  függvények esetén " $u(L_2, K, \varepsilon) \sim v(K, \varepsilon)$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ " azt jelenti, hogy

$$\lim_{K \rightarrow \bar{K}, \varepsilon \rightarrow 0^+, L_2 \in (-\varepsilon, \varepsilon)} \frac{u(L_2, K, \varepsilon)}{v(K, \varepsilon)} = 1.$$

**2.22. Propozíció.** A (H6) feltétel mellett  $\partial^2 F / \partial L_2^2$  folytonos az  $U$  halmazon, és

$$\frac{\partial^2}{\partial L_2^2} F(L_2, K, \varepsilon) \sim -\frac{K^2}{(K+1)\varepsilon}, \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.69)$$

*Bizonyítás.* Explicit számoljuk ki  $F$  négy tagjának  $L_2$  szerinti második deriváltjait. Eközben bizonyítjuk, hogy

$$(i) \quad \frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \left( \frac{K(K+1)}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) \right) \sim \frac{K}{(K+1)\varepsilon}$$

(ii) és

$$\frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \theta_3 \sim -\frac{K}{\varepsilon}, \quad \text{ha } \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

(iii) Továbbá megmutatjuk, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial L_2^2} \left( (1 + \varepsilon) \frac{K+1}{K-1} e^{L_4 - L_2} \right)$$

korlátos kis  $\varepsilon > 0$  esetén.

Ebben a bizonyításban a ' szimbólum az  $L_2$  szerinti parciális deriváltat fogja jelölni.

(i) (2.60)-ból világosan látszik, hogy  $\theta_6'' = -\theta_6'$ . (2.64)-ből következik, hogy  $L_4' = \theta_6' / (K + \theta_6)$ . Ezért, (2.59) alapján, azt kapjuk, hogy

$$\left( \frac{K(K+1)}{\varepsilon} (1 - (1 - L_4)e^{L_4}) \right)'' = \left( \frac{K}{\varepsilon} L_4 \theta_6' \right)' = \frac{K}{\varepsilon} \theta_6' \left( \frac{\theta_6'}{K + \theta_6} - L_4 \right),$$

ami folytonos az  $U$  halmazon. Mivel  $\theta_6' = -1 + O(\varepsilon)$ ,  $L_4 = O(\varepsilon)$  és  $(K + \theta_6)^{-1} = (K + 1)^{-1} + O(\varepsilon)$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , az (i). állítás igaz.

(ii) A  $\theta_3$  paraméter  $L_2$  szerinti második deriváltja (2.62)-ből könnyen kiszámolható. Ez szintén folytonos az  $U$  halmazon:

$$\begin{aligned} \theta_3'' &= \frac{3(1 + \varepsilon)}{2\sqrt{K-1-\varepsilon}} e^{-L_2-L_3-\frac{1}{2}} \left( \frac{\theta_6'}{2\sqrt{K+\theta_6}} - \sqrt{K+\theta_6} \right) \\ &\quad - \frac{K}{\varepsilon} (1 + \varepsilon) (1 - L_2 - L_3) e^{-L_2-L_3}. \end{aligned}$$

Az előző sorfejtéseket alkalmazva könnyen igazolhatjuk, hogy az (ii). állítás is teljesül.

(iii) (2.63)-ból és  $\theta_6'' = -\theta_6'$ -ből könnyen kiszámolhatjuk, hogy  $F$  harmadik tagjának  $L_2$

szerinti második deriváltja a következő folytonos függvény:

$$\left( (1 + \varepsilon) \frac{K + 1}{K - 1} e^{L_4 - L_2} \right)'' = \frac{1 + \varepsilon}{K - 1} (K + \theta_6 - 3\theta'_6) e^{-L_2}.$$

Mivel  $\theta_6 \rightarrow 1$ ,  $\theta'_6 \rightarrow -1$  és  $L_2 \rightarrow 0$ , ha  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , ez a kifejezés korlátos kis  $\varepsilon > 0$  esetén.

A  $\partial^2 F / \partial L_2^2$  parciális derivált folytonossága és a (2.69) összefüggés következik  $F$  definíciójából és a fenti számolásokból. □

## 3. fejezet

# Periodikus pályák egy negatív visszacsatolású egyenletre

### 3.1. Elméleti összefoglalás

Tekintsük a

$$x'(t) = -f(x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

késleltetett differenciálegyenletet, ahol  $\tau$  konstans késleltetés. Ebben a szakaszban legyen érvényes a következő három feltétel:

- (H) •  $f$  folytonos és alulról vagy felülről korlátos,  
•  $f$  negatív visszacsatolási függvény:  $xf(x) > 0$  bármely  $x \neq 0$  esetén,  
•  $f$  folytonosan differenciálható a 0 környezetében és  $f'(0) > 0$ .

Mivel számos, alább idézett dolgozatban a szerzők felteszik, hogy 1 a késleltetés, megjegyezzük, hogy a (3.1) egyenlet az  $y(t) = x(\tau t)$  transzformáció révén  $y'(t) = -\tau f(y(t - 1))$  alakban is vizsgálható.

Ahogy korábban, most is a szuprémum normával ellátott  $C = C([- \tau, 0], \mathbb{R})$  Banach-teret tekintjük a fázistérnek. Minden  $\varphi \in C$  kezdeti függvény egyértelműen meghatározza a (3.1) egyenlet egy  $x^\varphi : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  megoldását. A (3.1) egyenlet egy szemi-dinamikai rendszert definiál a  $C$ -ben:  $\Phi : [0, \infty) \times C \ni (t, \varphi) \mapsto x_t^\varphi \in C$ .

Azonnal adódik (H)-ből, hogy  $f(0) = 0$ . Ennek megfelelően  $\hat{0} \in C$  egyensúlyi helyzet, ahol  $\hat{0}(s) = 0$  bármely  $s \in [-\tau, 0]$  esetén. Nincsenek további egyensúlyi helyzetek. Minden  $\varphi \in C$  esetén  $D_2\Phi(t, \hat{0})\varphi = y_t^\varphi$ , ahol  $y^\varphi : [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a

$$y'(t) = -f'(0)y(t - \tau) \quad (3.2)$$

variációs egyenlet megoldása az  $y_0^\varphi = \varphi$  kezdeti függvénnyel. A  $D_2\Phi(t, \hat{0}) : C \rightarrow C$ ,  $t \geq 0$ , operátorok erősen folytonos félcsoportot alkotnak. Ezen félcsoport generátorának spektrumát

vizsgálva információt kapunk a  $\hat{0}$  egyensúlyi helyzet stabilitásáról [8, 13]. A generátor spektruma sajátértékekből áll, és ezeket a

$$\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda + f'(0)e^{-\lambda\tau} \in \mathbb{C}$$

karakterisztikus függvény gyökeiként kapjuk meg. Legfeljebb véges sok sajátérték valós része nemnegatív. Pontosan akkor vannak olyan sajátértékek, amelyek valós része pozitív, ha  $\tau f'(0) > \pi/2$ . Ennek megfelelően, a linearizálási elv alapján,  $\hat{0}$  lokálisan aszimptotikusan stabil, ha  $0 < \tau f'(0) < \pi/2$ , és instabil, ha  $\tau f'(0) > \pi/2$ . Az első esetben (3.2) triviális egyensúlyi helyzete globálisan vonzó, (3.1) esetén pedig legalább lokálisan vonzó.

Sokan vizsgálták a (3.1) egyenlet különböző alkalmazásait. Például, ha  $\tau = 1$  és  $f(u) = \alpha(1 - e^{-u})$ ,  $\alpha > 0$ , akkor az ún. Wright-egyenletet kapjuk. Megfelelő transzformációval ez ekvivalens az

$$y'(t) = -\alpha y(t-1)(1 + y(t))$$

egyenlettel, melyet Wright a [64] dolgozatban tanulmányozott, és amely a prímszámok eloszlásának vizsgálatában játszott szerepet [39]. Wright azt a sejtést fogalmazta meg [64]-ben, hogy  $\hat{0}$  globálisan vonzó, ha  $\alpha \in (0, \pi/2]$ . Ezt a sejtést  $\alpha \in (0, 3/2]$ -re be is bizonyította. További előrelépés Bánhelyi, Csendes, Krisztin, és Neumaier [3] cikkében található. A teljes bizonyítást pedig van der Berg és Jacqueline mutatta be [51]-ben.

Wright eredményének továbbfejlesztése Liz, Pinto, Robledo, Trofimchuk és Tkachenko [35] munkája, amely azt mutatja meg (3.1)-re, hogy ha  $f$  elég sima, van lokális szélsőértéke, a Schwarz-deriváltja mindenhol negatív és  $\tau f'(0) \in (0, 3/2]$ , akkor  $\hat{0}$  globálisan vonzó. További eredmények a  $\hat{0}$  egyensúlyi helyzet globális vonzásáról például [34, 67]-ben találhatóak.

A  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus függvény lassan oszcilláló periodikus megoldás, ha minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén teljesíti a (3.1) egyenletet, és  $p$  bármely két különböző  $z, z'$  zérushelyére igaz, hogy  $|z - z'| > \tau$ . Az  $x$  megoldást végül lassan oszcilláló megoldásnak nevezzük, ha létezik  $T \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $z' - z > \tau$  bármely  $T < z < z'$  zérushelyek esetén.

Tegyük fel, hogy  $\varphi \in C$  és  $\varphi(s) > 0$  minden  $s \in [-\tau, 0]$  esetén. Ekkor vagy  $x^\varphi(t) > 0$  minden  $t > 0$ -ra, vagy  $x^\varphi$ -nek van  $z > 0$  zérushelye. A második esetben a negatív visszacsatolásból következik, hogy  $x^\varphi$  szigorúan monoton csökkenő  $[z, z + \tau]$ -n. Tehát a következő  $z'$  zérushely, ha létezik, teljesíti a  $z - z' > \tau$  feltételt. Ezt a gondolatmenetet folytatva azt kapjuk, hogy bármely következő zérushely legalább  $\tau$  távolságra kell hogy legyen az előzőtől. Tehát léteznek végül lassan oszcilláló megoldások. Több is igaz: Ha  $f$   $C^1$ -sima és szigorúan monoton növekvő, akkor megadható  $C$ -nek egy olyan sűrű részhalmaza, hogy az abból indított megoldások végül lassan oszcillálnak, lásd Mallet-Paret és Walther [38], illetve Walther [59] dolgozatait.

A (3.1) egyenlet globális dinamikájában fontos szerepet játszanak a lassan oszcilláló periodikus megoldások, ezért is tanulmányozták őket oly sokan az utóbbi évtizedekben. A továbbiakban összefoglaljuk az ezen megoldásokra vonatkozó, korábbi eredményeket. Még részletesebb leírás található Kennedy és Stumpf [21] dolgozatában.

# Alapvető módszerek és eredmények lassan oszcilláló periodikus megoldásokra

## Egy Poincaré-leképezés

Tegyük fel, hogy  $f$  alulról korlátos. A felülről korlátos eset hasonlóan vizsgálható. Legyen  $M > 0$  olyan, hogy  $f(x) \geq -M$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén. Legyen

$$K := \{\varphi \in C : \varphi(-\tau) = 0, \varphi \text{ nemcsökkenő}, \|\varphi\| \leq M\tau\}.$$

Világos, hogy  $K$  konvex, zárt részhalmaza  $C$ -nek.

A következő állítás bizonyítása Diekmann [8] monográfiájának XV. fejezetében található.

**3.1. Propozíció.** *Legyen  $\varphi \in K, \varphi \neq \hat{0}$ . Ekkor  $x = x^\varphi$  lassan oszcillál  $[0, \infty)$ -en. Ha  $z > 0$  az  $x$  zérushelye, akkor  $|x'|$  korlátos a  $[z, z + \tau]$  intervallumon a*

$$\hat{M} = \max\{|f(\xi)| : \xi \in x([z - \tau, z])\}$$

*korláttal,  $|x|$  korlátos a  $[z, z + \tau]$  intervallumon a  $\hat{M}\tau$  korláttal, és az  $s \mapsto |x_{z+\tau}(s)|$  leképezés szigorúan monoton növekvő a  $[-\tau, 0]$  intervallumon.*

*Ha  $x|_{[0, \infty)}$  zérushelyeinek halmaza felülről nem korlátos, akkor egy  $z_j = z_j(\varphi)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , sorozatként adhatjuk meg, ahol*

$$z_j + \tau < z_{j+1} \quad \text{és} \quad x'(z_j) \neq 0 \quad \text{bármely } j \text{ esetén.} \quad (3.3)$$

*Az is igaz, hogy  $x$  monoton a  $[0, z_1 + \tau]$  intervallumon és minden  $[z_j + \tau, z_{j+1} + \tau]$  alakú intervallumon.*

*Ha  $x|_{[0, \infty)}$  zérushelyeinek halmaza felülről korlátos, akkor egy  $z_j = z_j(\varphi)$ ,  $1 \leq j \leq J = J(\varphi)$ , véges sorozatként adhatjuk meg, amelyre szintén igaz a (3.3) tulajdonság. Ekkor  $|x(t)|$  monoton csökkenő módon konvergál nullához a  $[z_J + \tau, \infty)$  intervallumon, ha  $t \rightarrow \infty$ .*

Adott  $\varphi \in K$ ,  $\varphi \neq \hat{0}$  esetén két lehetőség van: vagy van olyan  $z$  pozitív zérushelye  $x^\varphi$ -nek, amelyre  $x_{z+\tau}^\varphi \in K$ , vagy nincs ilyen zérushelye. Definiáljuk a  $P: K \rightarrow K$  leképezést a következőképpen: legyen  $P(\hat{0}) = \hat{0}$ , illetve  $P(\varphi) := x_{z+\tau}^\varphi$ , ha az előbb említett  $z$  zérushely létezik (ez esetben válasszuk  $z$ -t minimálisnak), ellenkező esetben pedig legyen  $P(\varphi) := \hat{0}$ . A következő állítás bizonyítása Nussbaum [43] dolgozatában található.

**3.2. Propozíció.** *A  $P$  leképezés folytonos, és  $P(K)$  lezártja kompakt  $C$ -ben.*

Tegyük fel, hogy  $\varphi \neq \hat{0}$  periodikus pontja  $P$ -nek  $k$  minimális periódussal. Rendezzük  $x^\varphi$  pozitív zérushelyeit sorba:  $0 < z_1 < \dots < z_{2k} < \dots$ . Azt látjuk, hogy  $x_{z_{2k}+\tau}^\varphi = \varphi$ , és ezért  $x^\varphi$  a (3.1) egyenlet periodikus megoldása  $z_{2k} + \tau$  minimális periódussal. Fordítva, (3.1) bármely lassan oszcilláló periodikus megoldásának van olyan szegmense, mely  $P$ -nek periodikus

pontja. Talán a legkiemelkedőbb technika a (3.1)-hez hasonló egyenletek lassan oszcilláló periodikus megoldásai létezésének bizonyítására, hogy megmutatjuk, egy analóg  $P$  leképezésnek van nullától különböző fixpontja.

A legismertebb ide kapcsolódó tétel Nussbaum [43] dolgozatában jelent meg 1974-ben. A tétel általánosítja Jones korábbi eredményeit a Wright-egyenletről [18]-ban.

**3.3. Tétel.** *Ha a  $(H)$  feltétel mellett az is igaz, hogy  $\tau f'(0) > \pi/2$  (és ezáltal a  $\hat{0}$  egyensúlyi helyzet instabil), akkor  $P$ -nek létezik nemtriviális fixpontja.*

Nussbaum bizonyításának az az ötlete, hogy az instabilitás miatt  $\hat{0} \in K$  a  $P$  leképezés ún. ejektív fixpontja. Browder ejektív fixpont elvét [4] alkalmazva ebből az következik, hogy  $P$ -nek van nem ejektív fixpontja is. Ezt az ötletet használták mások is, például Haderer és Tomiuk egy (3.1)-hez hasonló, azonnali csillapítást is tartalmazó egyenletre [10]-ben. További példák állapotfüggő késleltetés esetén: Nussbaum [42], Alt [1], Kuang és Smith [30], illetve Walther [55].

Visszatérve a Wright-egyenletre: Jones azt mutatta meg [18]-ban, hogy  $\alpha > \pi/2$  esetén a Wright-egyenletnek létezik legalább egy lassan oszcilláló periodikus megoldása. Azt a sejtést is megfogalmazta, hogy ez a lassan oszcilláló periodikus megoldás egyértelmű. Az egyértelműséget először csak  $\alpha \geq 1.9$  esetén sikerült igazolni [17, 66]. A sejtés bizonyítását végül Jacqueline tette teljessé [16]-ban, megbízható numerikus módszerek alkalmazásával.

## Fázistér módszer páratlan visszacsatolási függvényekre

Kaplan és York teljesen más megközelítéssel vizsgálta a lassan oszcilláló periodikus megoldások létezését [20]-ban. Ez a módszer páratlan  $f$  függvények esetén működik. Legyen most  $\tau = 1$ . Ha az

$$\begin{aligned} u' &= -f(v) \\ v' &= f(u) \end{aligned} \tag{3.4}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszernek létezik olyan  $(u, v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  megoldása, amelyik 4-periodikus, akkor  $x = u$  a (3.1) egyenlet lassan oszcilláló periodikus megoldása. Erre a megoldásra érvényes az  $x(t) = -x(t-2), t \in \mathbb{R}$ , szimmetria tulajdonság. Ezeket a megoldásokat Kaplan–Yorke-megoldásoknak fogjuk nevezni.

Az alábbi, [20]-ban publikált tétel garantálja a Kaplan–Yorke-megoldás létezését.

**3.4. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $f$  folytonos, páratlan függvény,  $xf(x) > 0$  minden  $x \neq 0$  esetén, és  $\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty$ . Legyen*

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \quad \text{és} \quad A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

( $a = \infty$ , illetve  $A = \infty$  is megengedett). Ha  $A < -\pi/2 < a$  vagy  $a < -\pi/2 < A$ , akkor (3.1)-nek létezik Kaplan–Yorke-megoldása.

Nussbaum később igazolta, hogy az integrálra vonatkozó feltétel elhagyható. Nussbaum [45] dolgozatában pedig arra használta a fenti tételt és a bizonyítás ötletét, hogy olyan folytonos és páratlan  $f$  függvényeket konstruáljon, melyek esetén (3.4)-nek legalább  $n$  különböző 4-periodikus megoldása van, vagyis (3.1)-nek legalább  $n$  különböző Kaplan–Yorke-megoldása van.

## Ha $f$ szigorúan monoton nő

Sokat tudunk a lassan oszcilláló periodikus megoldásokról abban az esetben, amikor  $f$   $C^1$ -sima, és a differenciálhányadosa pozitív.

Mallet-Paret és Sell [37] dolgozatának 7.1. Tétele kimondja: ha  $z_0 < z_1 < z_2$  három egymást követő zérushelye a (3.1) egyenlet egy  $p$  lassan oszcilláló periodikus megoldásának, akkor  $p$ -nek  $z_2 - z_0$  a minimális periódusa. (Ez abból a tulajdonságból következik, hogy ha  $p$  és  $q$  két különböző nemtriviális periodikus megoldás, akkor a  $t \mapsto (p(t), p(t - \tau))$  és  $t \mapsto (q(t), q(t - \tau))$  Jordan-görbéknek nincs közös pontja.) Azonnali következmény, hogy az összes lassan oszcilláló periodikus megoldás  $P : K \rightarrow K$  fixpontjainak felel meg.

Az egyik másik fontos eredmény Kaplan és Yorke nevéhez fűződik. Ők is azokat a pályákat vizsgálták [19]-ben, amelyek a lassan oszcilláló megoldások  $(x(t), x(t - \tau))$  síkra történő levetítése által jönnek létre. A fő megfigyelésük az volt, hogy ezek a pályák igen korlátozott módon metszhetik egymást a síkon. A [19] dolgozat fő tétele azt mondja ki, ha  $\tau f'(0) > \pi/2$ , akkor ezek a görbék egy körgyűrűre "csavarodnak" fel, melynek a belső és külső határa lassan oszcilláló periodikus pálya. Ezért, ha (3.1)-nek egyetlen lassan oszcilláló periodikus pályája van, akkor az aszimptotikusan stabil.

Ahogy már korábban említettük, Nussbaum [41, 42]-ben bizonyította, hogy a (H) feltétel és  $\tau f'(0) > \pi/2$  esetén létezik lassan oszcilláló periodikus megoldás. A [45] dolgozatában pedig elegendő feltételt adott a lassan oszcilláló periodikus megoldás egyértelműségére – Kaplan és York [19]-ben kidolgozott módszere alapján. Ez a tétel következik most.

**3.5. Tétel.** *Tegyük fel, hogy  $a > 0$  ( $a = \infty$  is megengedett). Legyen  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  páratlan,  $C^1$ -sima függvény úgy, hogy  $f'(x) > 0$  minden  $x \in [-a, a]$  esetén, és  $f'(0) = 1$ . Tegyük fel, hogy  $f'(x)$  monoton csökken  $[0, a]$ -n és monoton nő  $[-a, 0]$ -n. Tegyük fel továbbá, hogy  $x \mapsto f(x)/x$  szigorúan monoton csökken a  $(0, a]$  intervallumon. Ekkor igaz a következő: ha  $0 < \tau \leq \pi/2$ , akkor az*

$$\dot{x}(t) = -\tau f(x(t - 1))$$

*egyenletnek nincs olyan lassan oszcilláló periodikus megoldása, amelynek értékkészlete a  $[-a, a]$  intervallumba esik. Ha  $\tau > \pi/2$ , akkor legfeljebb egy ilyen periodikus megoldás létezik.*

Cao egy másik konvexitási feltétellel és  $f$  páratlansága nélkül vizsgálta a (3.1) egyenlet lassan oszcilláló periodikus megoldásának egyértelműségét [6]-ban, szintén Kaplan és York [19]-ben kidolgozott módszerére támaszkodva:

**3.6. Tétel.** *Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ -sima függvény, és legyen  $f(0) = 0$ . Tegyük fel, hogy létezik  $a, b > 0$  úgy, hogy  $f'(x) > 0$  bármely  $x \in (-a, b)$  esetén, továbbá  $xf'(x)/f(x) < 1$  monoton nő  $a$   $(-a, 0)$  intervallumon és monoton csökken  $(0, b)$ -n. Ekkor minden  $\tau > \tau_0 = \pi/(2f'(0))$  esetén legfeljebb egy olyan lassan oszcilláló periodikus megoldása létezik (3.1)-nek, amely értékkészlete  $(-a, b)$ -be esik. Nincs ilyen megoldás  $\tau \leq \tau_0$  esetén.*

Malett-Paret és Sell [37]-ben Poincaré–Bendixson-típusú tételt mondott ki a (3.1) alakú egyenletekre, ha  $f$  folytonosan differenciálható és pozitív a differenciáhányadosa. Ebben az esetben a megoldások  $\omega$ -limesz halmaza vagy a  $\hat{0}$  egyensúlyi helyzet vagy egy nemtriviális periodikus megoldás.

Walther pedig azt mutatta meg [60]-ban, hogy ha  $f$  sima, szigorúan monoton növekvő, továbbá alulról vagy felülről korlátos, akkor a lassan oszcilláló megoldások attraktora vagy triviális, vagy homeomorf egy zárt körlappal.

## A lassan oszcilláló periodikus megoldások stabilitása

A stabilitás vizsgálata általában nehéz feladat. Monoton  $f$  esetén többen vizsgálták az unicitásból következő stabilitást. Cao például a Kaplan–Yorke-féle fázistér technikával elemezte a (3.1) egyenlet lassan oszcilláló periodikus megoldásainak stabilitását [5]-ben. Mások megfigyelték azt, ha  $f$  elég „lapos” egy elég hosszú intervallumon, akkor a  $P$  leképezés kontraktív, ami aszimptotikusan stabil periodikus pályák keletkezését vonja maga után. Ilyen eredmények találhatók Walther [57] és Vas [54] munkáiban.

Néhány szerző a lassan oszcilláló periodikus megoldások Floquet-együtthatóit is vizsgálta, leginkább akkor, ha  $f$  páratlan. Chow és Walther a Kaplan–York-megoldások stabilitását bizonyította [7]-ben olyan páratlan  $f$  függvények esetén, amelyek kielégítenek bizonyos monotonitási és konvexitási feltételeket. Ivanov pedig feltételeket adott a Kaplan–York-megoldások instabilitására [14]-ben. További Floquet-együtthatókra vonatkozó eredmények olvashatóak Skubachevskii és Walther [47] dolgozatában.

## Egy további eredmény Hopf-bifurkációra

Balázs és Röst [2] dolgozatában a (3.1) egyenlet Hopf-bifurkációit tanulmányozta, ha  $f \in C^3$ ,  $f(0) = 0$  és  $f'(0) \neq 0$ .

Legyen  $\mu = \tau f'(0)$  és  $\tilde{f} : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto f(\xi)/f'(0) \in \mathbb{R}$ . Ekkor  $\tilde{f}'(0) = 1$ , és  $\tilde{f}$  Taylor-sorfejtése a következő:

$$\tilde{f}(\xi) = \xi + B\xi^2 + C\xi^3 + O(\xi^4),$$

ahol  $B = \tilde{f}''(0)/2$  és  $C = \tilde{f}'''(0)/6$ .



Hozzuk a (3.1) egyenlet

$$\tilde{x}'(t) = -\mu \tilde{f}(\tilde{x}(t-1)) \quad (3.5)$$

alakúra az  $\tilde{x}(t) = x(\tau t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , transzformáció segítségével. Balázs és Röst a következő tételt igazolták a (3.5) egyenletre.

**3.7. Tétel.** *A (3.5) egyenlet triviális egyensúlyi helyzetében Hopf-bifurkáció történik a  $\mu_k = \pi/2 + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , értékekre. A  $k$ -adik bifurkáció szuperkritikus, ha  $C < H(k)B^2$ , és szubkritikus, ha  $C > H(k)B^2$ , ahol*

$$H(k) = \frac{22(4k+1)\pi - 8}{15(4k+1)\pi}.$$

*Továbbá, ha a  $k$ -adik Hopf-bifurkáció szuperkritikus, akkor  $\mu_k > 0$  ( $\mu_k < 0$ ) esetén  $\mu > \mu_k$ -ra ( $\mu < \mu_k$ -ra) jön létre az új periodikus pálya. Ha pedig a  $k$ -adik Hopf-bifurkáció szubkritikus,  $\mu_k > 0$  ( $\mu_k < 0$ ) esetén  $\mu < \mu_k$ -ra ( $\mu > \mu_k$ -ra) jelenik meg az új periodikus pálya.*

## 3.2. Tételek a Nazarenko-egyenletre

Tekintsük a

$$\dot{y}(t) + py(t) - \frac{qy(t)}{r + y^n(t-\tau)} = 0, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

késleltetett differenciálegyenletet a következő feltételek mellett:

$$p, q, r, \tau \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad \text{és} \quad \frac{q}{p} > r. \quad (3.7)$$

Ezt az egyenletet 1976-ban Nazarenko tanulmányozta [40] dolgozatában. Az  $y(t)$  mennyiség a populáció nagyságát jelöli  $t$  időpillanatban. A változás  $y'(t)$  sebessége megadható úgy, mint a  $qy(t)/(r + y^n(t-\tau))$  szaporodási ráta és a  $py(t)$  halálozási ráta különbsége. Mint látjuk, a halálozási ráta  $t$ -ben egyedül  $y(t)$ -től, azaz a rendszer jelen állapotától függ, míg a szaporodási ráta függ  $y$  egy múltbeli értékétől is. Ez egy tipikus populációdinamikai koncepció; a késleltetés azért jelenik meg, mert az élőlényeknek időre van szüksége ahhoz, hogy születésük után szaporodóképessé váljanak.

További populációdinamikai modellekről olvashatunk például [46]-ban. Az egyik leggyakrabban vizsgált model a Mackey–Glass-egyenlet:

$$\dot{y}(t) = -py(t) + \frac{qy(t-1)}{r + y^n(t-\tau)}, \quad t > 0.$$

Ebben a szaporodási ráta nagyon hasonló ahhoz, amit Nazarenko tekintett.

A korábbi fejezetekkel összhangban a szuprémum normával ellátott  $C = C([- \tau, 0], \mathbb{R})$  Banach-tér a fázistér. A (3.6) egyenlet megoldásait, illetve a megoldások szegmenseit is úgy definiáljuk, ahogy az a Bevezetésben megjelent. A (3.7) feltétel teljesülése esetén a  $\mathbb{R} \ni t \mapsto 0 \in \mathbb{R}$  és  $\mathbb{R} \ni t \mapsto K = (q/p - r)^{1/n} \in \mathbb{R}$  függvények a konstans megoldások, vagyis pontosan

egy pozitív egyensúlyi helyzet létezik a triviális mellett.

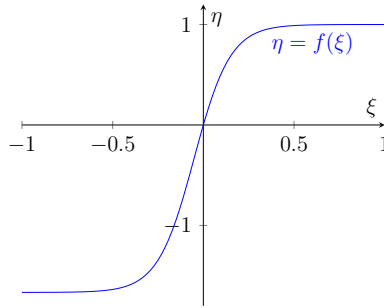
Számos kutató foglalkozott már a (3.6) egyenlettel, lásd a [29, 31, 49, 62] dolgozatokat. Ebben a fejezetben (3.6) olyan pozitív periodikus megoldásaira fókuszálunk, amelyek lassan oszcillálnak  $K$  körül. Az  $y$  megoldás lassan oszcillál  $K$  körül, ha  $y - K$  szomszédos zérushelyei  $\tau$ -nál nagyobb távolságra vannak egymástól.

Mivel a pozitív megoldásokat vizsgáljuk, ezért használhatjuk az  $x = \ln y - \ln K$  transzformációt. Ekkor az

$$x'(t) = -f(x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

egyenletet kapjuk, ahol az  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  visszacsatolási függvényt az alábbi módon definiáljuk:

$$f(x) = p - \frac{q}{r + \left(\frac{q}{p} - r\right) e^{nx}} \quad \text{minden } x \in \mathbb{R} \text{ esetén,} \quad (3.8)$$



3.1. ábra. Az  $f$  függvény  $p = 1$ ,  $q = 4$ ,  $r = 1,5$  és  $n = 10$  esetén

lásd a 3.1. ábrát. Vegyük észre, hogy  $f(0) = 0$ . A (3.7) feltételből következik, hogy  $f$  szigorúan monoton növekvő, tehát  $f$  negatív visszacsatolást valósít meg. Azt is vegyük észre, hogy a (3.6) egyenlet pozitív egyensúlyi helyzete (3.1) triviális egyensúlyi helyzetének felel meg.

Ahogy a 3.1. szakaszban már felidéztük, Nussbaum igazolta a lassan oszcilláló periodikus megoldás globális létezését a (3.1) alakú egyenletekre és a visszacsatolási függvények széles, (3.8)-at tartalmazó osztályára. A [41, 42] dolgozatokból tudjuk, hogy (3.1)-nek

$$\tau > \tau_0 = \frac{\pi}{2f'(0)} = \frac{q\pi}{2np(q - pr)}$$

esetén van legalább egy lassan oszcilláló periodikus megoldása.

A 3.1. szakaszban áttekintettük a legismertebb eredményeket a lassan oszcilláló periodikus megoldások unicitásáról (amely mindig időbeli eltolás erejéig értendő). Nussbaum [45] dolgozatában írt az egyértelműségről. Azonban ez a dolgozat megköveteli, hogy  $f$  páratlan legyen, ami (3.8)-ra nem igaz. Cao [6] dolgozatában szintén az unicitását vizsgálta. Ebben a dolgozatban, többek közt, az alábbi feltételnek kell teljesülnie: legyen  $h(x) = xf'(x)/f(x) < 1$  monoton csökkenő a  $(0, b)$  intervallumon és monoton növekvő a  $(-a, 0)$  intervallumon valamely  $a > 0$  és  $b > 0$  konstansokkal. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a feltétel sem feltétlenül teljesül (3.8)-ra.

Más megközelítésre van szükségünk, hogy garantáljuk a lassan oszcilláló periodikus megoldások egyértelműségét. Nem elegendő  $f$  monotonitása: Cao [5]-ben megmutatta, hogy létezik olyan monoton  $f$ , melyre (3.1)-nek legalább két lassan oszcilláló periodikus megoldása van.

A lassan oszcilláló periodikus pályák stabilitása egy másik fontos kérdés. Kaplan-Yorke jól ismert eredménye [19]-ből: ha egyetlen lassan oszcilláló periodikus pálya van, akkor az aszimptotikusan stabil.

Song, Wei és Han (3.6) alakban vizsgálták az egyenletet [49]-ben. Megmutatták, hogy Hopf-bifurkáció történik a következő paraméterértékekre:

$$\tau_k = \frac{1}{f'(0)} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{q}{np(q-pr)} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \geq 0.$$

Explicit képleteket adtak a bifurkáció irányának és a periodikus megoldások stabilitásának és minimális periódusának meghatározására. Ezután igazolták a bifurkált periodikus megoldások globális létezését Wu [65] dolgozata alapján. Megmutatták, hogy (3.6)-nak legalább  $k$  periodikus megoldása létezik, ha  $\tau > \tau_k$ , ahol  $k \geq 1$ . Song, Wei és Han nem tudták eldönteni, hogy a (3.6) egyenletnek van-e periodikus megoldása  $\tau \in (\tau_0, \tau_1)$  esetén. Nussbaum [42] dolgozatában már megválaszolta ezt a kérdést.

Balázs és Röst [2] dolgozatában egy egyszerűbb módszert mutatott be a bifurkáció irányának és a periodikus megoldások stabilitásának meghatározására, így mi is ezt a megközelítést alkalmazzuk. A (3.1) egyenlet

$$\tilde{x}'(t) = -\mu \tilde{f}(\tilde{x}(t-1))$$

alakúra hozható az  $\tilde{x}(t) = x(\tau t)$  transzformációval és az  $\tilde{f}(\xi) = f(\xi)/f'(0)$ , illetve  $\mu = \tau f'(0)$  választásokkal. A transzformált egyenletre alkalmazzuk az eredetileg [2]-ben publikált 3.7. Tételt a 3.1. szakaszból. Nálunk most

$$B = \frac{f''(0)}{2f'(0)} = \frac{n(2rp - q)}{2q}$$

és

$$C = \frac{f'''(0)}{6f'(0)} = \frac{n^2(q^2 - 6rpq + 6r^2p^2)}{6q^2}.$$

Ha  $B \neq 0$ , azaz  $q \neq 2rp$ , akkor

$$\frac{C}{B^2} = \frac{2q^2 - 6rpq + 6r^2p^2}{3q^2 - 4rpq + 4r^2p^2} = \frac{2}{3} \left( 1 - 2 \frac{rpq - r^2p^2}{(2rp - q)^2} \right) < \frac{2}{3}.$$

Az utolsó egyenlőtlenségnél felhasználtuk a  $q > rp$  feltételt. Másrészt tudjuk a [2] dolgozatból, hogy

$$H(k) \geq H(0) = \frac{22\pi - 8}{15\pi} > 1$$

minden  $k \geq 0$  esetén. Tehát  $C < H(k)B^2$  minden minden  $k \geq 0$ -ra, azaz a Hopf-bifurkációk szuperkritikusak, így a bifurkálódó periodikus pályák stabilak. Könnyű igazolni, hogy  $B = 0$ ,

azaz  $q = 2rp$  esetén  $C < 0$ , tehát ez ekkor is szuperkritikus Hopf-bifurkációkat kapunk. A 3.7. Tétel azt is kimondja, hogy a kritikus paraméterértékek jobb környezetében található paraméterértékekre jelennek meg az új periodikus pályák.

Song és szerzőtársai nem tudták meghatározni a periodikus pályák stabilitását a bifurkációs pontoktól távol eső  $\tau$  paraméterekre. A lassan oszcilláló periodikus megoldás unicitását sem vizsgálták. Most ezeket a kérdéseket fogjuk tanulmányozni. Fő eredményeinket a következő két tétel foglalja össze.

**3.8. Tétel.** *Legyenek a  $p, q, r$  és  $n$  paraméterek olyanok, ahogy a (3.7) feltételben szerepelnek. (i) Ha  $\tau > 0$  elég nagy, akkor (3.6)-nak egyetlen olyan pozitív  $\bar{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus megoldása létezik, amely lassan oszcillál  $K$  körül. Ez a periodikus pálya aszimptotikusan stabil, és az alábbi halmaz része a vonzási tartományának:*

$$\left\{ \phi : y^\phi(t) > 0, \text{ ha } t \geq -\tau, \text{ és } y_t^\phi - K\text{-nak legfeljebb egy előjelváltása van nagy } t \text{ esetén} \right\}.$$

(ii) Ha  $\bar{\omega}$  jelöli  $\bar{y}$  minimális periódusát, és

$$\omega = \left( 2 + \frac{q - pr}{pr} + \frac{pr}{q - pr} \right) \tau, \quad (3.9)$$

akkor  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\omega}/\omega = 1$ .

A periodikus megoldás egyértelműsége természetesen mindig időbeli eltolás erejéig értendő.

Ha rögzítjük a  $p, q, r$  és  $\tau$  paramétereket, akkor meghatározhatjuk a periodikus megoldás aszimptotikus alakját, ahogy  $n \rightarrow \infty$ .

**3.9. Tétel.** *Legyenek a  $p, q, r$  és  $n$  paraméterek olyanok, ahogy a (3.7) feltételben szerepelnek. Tegyük fel, hogy  $\tau \min\{p, q/r - p\} > 8$  is teljesül.*

(i) A 3.8. Tétel (i). állítása igaz minden elég nagy  $n$  esetén.

(ii) Defináljuk a  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a

$$[0, \omega] \ni t \mapsto \begin{cases} -pt, & 0 \leq t < \tau, \\ \left(\frac{q}{r} - p\right)t - \frac{q}{r}\tau, & \tau \leq t < \left(2 + \frac{pr}{q - pr}\right)\tau, \\ -pt + \left(\frac{q}{r} + p + \frac{p^2 r}{q - pr}\right)\tau, & \left(2 + \frac{pr}{q - pr}\right)\tau \leq t < \omega \end{cases} \in \mathbb{R}$$

függvény  $\omega$ -periodikus kiterjesztéseként, ahol  $\omega - t$  (3.9)-ben adtunk meg. Jelölje  $\bar{\omega}$  az (i). pontban kapott  $\bar{y}$  periodikus megoldás minimális periódusát. Legyen  $\eta_1 > 0$  és  $\eta_2 > 0$  tetszőleges. Ha  $n$  elég nagy, akkor létezik  $T \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $|\bar{\omega} - \omega| < \eta_1$ , és

$$\left| \ln \frac{\bar{y}(t + T)}{K} - v(t) \right| < \eta_2 \quad \text{minden } t \in [0, \bar{\omega}] \text{ esetén.}$$

A tételek bizonyításai hasonlóak, és a következőképpen építjük fel őket. A (3.6) egyenle-

tet a továbbiakban (3.1) alakban fogjuk vizsgálni a (3.8) nemlinearitással. Első lépésként a  $v'(t) = -g(v(t - \tau))$  "határegyenlet" egy lassan oszcilláló periodikus megoldását számoljuk ki, ahol  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan lépcsős függvény, mely közel van (3.8)-hoz a 0 egy környezetén kívül. Ezután úgy tekintjük (3.8)-at mint  $g$  perturbációját, és Walther [58]-ban (némileg más differenciálegyenlet-osztályra) bemutatott technikáját fogjuk követni, hogy információt nyerjünk a (3.1) egyenlet megoldásairól. Megmutatjuk, hogy  $C$ -nek létezik egy  $\mathcal{A}(\beta)$  konvex, zárt részhalmaza úgy, hogy (3.1) minden  $\mathcal{A}(\beta)$ -ból induló megoldása visszatér  $\mathcal{A}(\beta)$ -ba. Bevezetjük a  $P : \mathcal{A}(\beta) \rightarrow \mathcal{A}(\beta)$  Poincaré-leképezést. Ezután meghatározzuk ehhez a leképezéshez egy  $L(P)$  Lipschitz-konstanst. Ha  $\tau$  vagy  $n$  elég nagy, akkor  $L(P) < 1$ , azaz  $P$  kontrakció. A  $P$  leképezés egyetlen fixpontja egy lassan oszcilláló periodikus megoldás kezdeti szegmense. Emellett szükségünk van Nussbaum [44] dolgozatára, hogy megmutassuk, minden lassan oszcilláló periodikus megoldásnak van szegmense  $\mathcal{A}(\beta)$ -ban, tehát a lassan oszcilláló periodikus megoldás eltolás erejéig egyértelmű. A stabilitás Kaplan és Yorke [19] dolgozatából következik. A többi állítás ezután könnyen igazolható.

Teljes bizonyítást adunk, ha

$$\frac{q}{pr} \quad \text{és} \quad \frac{pr}{q - pr} \quad (3.10)$$

nem egész számok. Ebben az esetben explicit megadunk  $\tau_*$  és  $n_*$  küszöbértékeket úgy, hogy  $\tau > \tau_*$ , illetve  $n > n_*$  esetén teljesülnek a tételek állításai. Kisebbs módosításra van szükség a bizonyításban, ha  $q/(pr)$  vagy  $pr/(q - pr)$  egész, ezekre később kitérünk.

A (3.8) nemlinearitás Schwarz deriváltja  $-n^2/2$  minden  $x \in \mathbb{R}$ -ben. Ezért Liz és Röst [33] dolgozatának 2. Propozíciója becslést ad a globális attraktor méretére: Ha  $\tau f'(0) > 3/2$ , akkor

$$\alpha \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \beta$$

a (3.1) egyenlet bármely  $x$  megoldása esetén, ahol  $\{\alpha, \beta\}$  az  $x \mapsto -\tau f(x)$  leképezés egyetlen 2-periodikus pályája (ami azt jelenti, hogy  $\beta = -\tau f(\alpha)$  és  $\alpha = -\tau f(\beta)$ ). Következésképpen

$$Ke^\alpha \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq Ke^\beta$$

a (3.6) egyenlet minden pozitív  $y$  megoldása esetén. Ha  $\tau f'(0) \leq 3/2$ , akkor a [33] dolgozat 2. Propozíciójából az következik, hogy (3.1) minden megoldása konvergál 0-hoz (ezért (3.6) minden pozitív megoldása konvergál  $K$ -hoz)  $t \rightarrow \infty$  esetén. Ez az eredmény továbbfejleszti azt a jól ismert tényt, hogy (3.1) triviális egyensúlyi helyzete (és ezáltal (3.6) pozitív egyensúlyi helyzete) lokálisan aszimptotikusan stabil, ha  $\tau f'(0) < \pi/2$ .

### 3.3. A határegyenlet

Tekintsük a (3.1) egyenletet a (3.8) visszacsatolási függvénnyel. Legyen  $A = q/r - p > 0$  és  $B = p > 0$ .

Vegyük észre, hogy ha  $p, q, r$  rögzítve van (3.7) szerint, akkor  $f(x)$  konvergál  $p - q/r = -A$ -hoz, ha  $nx \rightarrow -\infty$ , és  $f(x)$  konvergál  $p = B$ -hez, ha  $nx \rightarrow \infty$ . Ezért vizsgáljuk az

$$v'(t) = -g^{A,B}(v(t - \tau)) \quad (3.11)$$

"határegyenletet", ahol  $g^{A,B} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a következő függvény:

$$g^{A,B}(v) = \begin{cases} -A, & v < 0, \\ 0, & v = 0, \\ B, & v > 0. \end{cases}$$

Bármely  $\phi \in C$  kezdeti függvény esetén a (3.11) egyenlet megoldása egy olyan abszolút folytonos  $v^\phi : [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, melyre  $v^\phi|_{[-\tau, 0]} = \phi$ , és amelyre teljesül az

$$v^\phi(t) = v^\phi(0) - \int_0^t g^{A,B}(v^\phi(s - \tau)) ds$$

integrálegyenlet minden  $t > 0$  esetén. Hasonlóan, egy abszolút folytonos  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény megoldása (3.11)-nek, ha az integrálegyenlet teljesül minden  $t \in \mathbb{R}$  esetén.

**3.10. Propozíció.** *A (3.11) egyenletnek periodikus megoldása az alábbi módon definiált  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény:*

$$v(t) = \begin{cases} -Bt, & \text{ha } t \in [0, \tau], \\ At - (A + B)\tau, & \text{ha } t \in [\tau, \sigma + \tau], \\ -Bt + \left(A + 2B + \frac{B^2}{A}\right)\tau, & \text{ha } t \in [\sigma + \tau, \omega], \end{cases}$$

ahol  $\sigma = (1 + B/A)\tau$  az első pozitív zérushelye, és  $\omega = (2 + A/B + B/A)\tau$  a második pozitív zérushelye, illetve a minimális periódusa  $v$ -nek.

*Bizonyítás.* Legyen  $\phi \in C$  olyan, hogy  $\phi(t) > 0$  minden  $t \in [-\tau, 0)$  esetén és  $\phi(0) = 0$ . Tekintsük a (3.11) egyenlet  $v = v^\phi$  megoldását.

Bármely  $t \in [0, \tau)$  esetén  $v'(t) = -B$ . Ezért  $v(t) = -Bt$  minden  $t \in [0, \tau]$  esetén. Szükszerűen  $v$  negatív egy  $(0, T)$  alakú intervallumon, ahol  $T > \tau$ . Ekkor  $v'(t) = A$  minden  $t \in (\tau, T + \tau)$ -ra, és

$$v(t) = At - (A + B)\tau \quad \text{minden } t \in [\tau, T + \tau] \text{ esetén.} \quad (3.12)$$

Ennek a függvénynek  $\sigma = (1 + B/A)\tau$  a zérushelye. Tehát (3.12) érvényes a  $T = \sigma$  választással. A  $v$  megoldás pozitív a  $(\sigma, \sigma + \tau]$  intervallumon és  $v(\sigma + \tau) = A\tau$ . Ha  $\omega > \sigma + \tau$ -t úgy választjuk, hogy  $v$  pozitív  $(\sigma, \omega)$ -n, akkor  $v'(t) = -B$  minden  $t \in (\sigma + \tau, \omega + \tau)$  esetén. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$v(t) = -Bt + \left(A + 2B + \frac{B^2}{A}\right)\tau \quad \text{minden } t \in [\sigma + \tau, \omega + \tau] \text{ esetén.}$$

Ebből látjuk, hogy  $\omega$ -t a következőképpen választhatjuk:

$$\omega = \left(2 + \frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right) \tau.$$

Vegyük észre, hogy  $v_\omega(t) > 0$  minden  $t \in [-\tau, 0)$  esetén és  $v_\omega(0) = 0$ . Tehát, ha  $\phi = v_\omega$  és  $v|_{[-\tau, \omega]}$ -t  $\omega$ -periodikusan kiterjesztjük  $\mathbb{R}$ -re, akkor (3.11) periodikus megoldását kapjuk a számegegyenesen.  $\square$

### 3.4. Becslések

Tetszőleges  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $\beta > 0$  és  $0 < \varepsilon < \min\{A, B\}/2$  esetén jelölje  $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  azon folytonos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvények halmazát, melyekre igaz, hogy

$$-A \leq f(x) \leq -A + \varepsilon, \quad \text{ha } x < -\beta,$$

$$-A \leq f(x) \leq B, \quad \text{ha } -\beta \leq x \leq \beta,$$

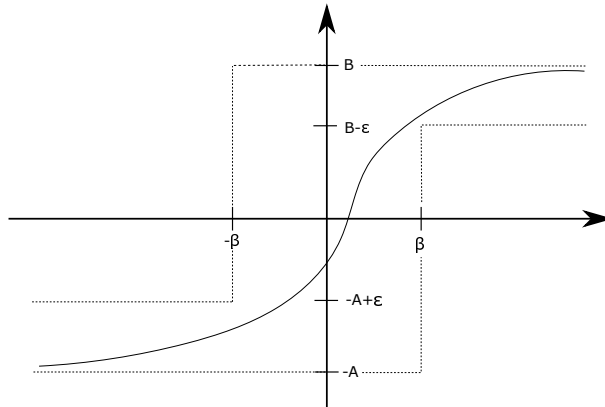
és

$$B - \varepsilon \leq f(x) \leq B, \quad \text{ha } x > \beta.$$

A 3.2. ábra  $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  egy elemét ábrázolja. A (3.8) függvény eleme a  $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  halmaznak, ha  $A = q/r - p$ ,  $B = p$ ,  $0 < \varepsilon < \min\{A, B\}/2$  és

$$\beta \geq \max\{f^{-1}(B - \varepsilon), -f^{-1}(-A + \varepsilon)\}.$$

Ez igaz, mivel  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -A$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$  és  $f$  szigorúan monoton növekvő függvény.



3.2. ábra.  $\mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  egy eleme

Legyen

$$\mathcal{A}(\beta) = \{\phi \in C : \phi(t) \geq \beta \quad \text{minden } -\tau \leq t \leq 0 \text{ esetén, } \phi(0) = \beta\}.$$

Ebben a szakaszban a (3.1) egyenlet  $x = x^\phi$  megoldásait vizsgáljuk, ha  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  és  $\phi \in \mathcal{A}(\beta)$ . Célunk bizonyítani, hogy létezik  $q > 0$  és  $\tilde{q} > 0$  úgy, hogy

$$x_q \in -\mathcal{A}(\beta) = \{\phi \in C : \phi(t) \leq -\beta, \quad \text{ha } -\tau \leq t \leq 0, \phi(0) = -\beta\},$$

és  $x_{q+\tilde{q}} \in \mathcal{A}(\beta)$ .

Legyen  $N$  az az egész szám, amelyre  $(N-1)\tau < \sigma \leq N\tau$ , ahol  $\sigma$  a 3.10. Propozícióban adott  $v$  periodikus megoldás első zérushelye. Mivel  $\sigma = (1+B/A)\tau$ , azt kapjuk, hogy  $N = \lceil 1+B/A \rceil$ . A következő propozícióban  $|x(t) - v(t)|$ -re adunk becslést minden  $t \in [0, N\tau]$  esetén.

**3.11. Propozíció.** *Legyen  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \varepsilon < \min\{A, B\}/2$ ,  $\delta = 2\beta/(B - \varepsilon)$ ,  $N = \lceil 1 + B/A \rceil$ ,  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  és  $\phi \in \mathcal{A}(\beta)$ . Tegyük fel, hogy*

$$c_1 = \tau - \delta > 0, \tag{c.1}$$

$$0 < c_2 = \begin{cases} (B - 2\varepsilon)\tau - (2A + B)\delta - 2\beta, & \text{ha } N = 2, \\ (A + B)(\tau - \delta) - (A + \varepsilon)(N - 1)\tau - 2\beta, & \text{ha } N > 2. \end{cases} \tag{c.2}$$

*Ekkor*

$$|x(t) - v(t)| \leq \beta + \varepsilon\tau \quad \text{minden } t \in [0, \tau] \text{ esetén} \tag{3.13}$$

*és*

$$|x(t) - v(t)| \leq \beta + k\varepsilon\tau + (A + B)\delta \quad \text{minden } 2 \leq k \leq N, t \in [(k-1)\tau, k\tau] \text{ esetén.} \tag{3.14}$$

*Bizonyítás. (3.13) igazolása.* Tudjuk, hogy  $v(0) = 0$  és  $v(t) > 0$  minden  $t \in [-\tau, 0)$  esetén. Ha  $t \in [0, \tau]$ , akkor

$$\begin{aligned} |x(t) - v(t)| &= \left| \beta - \int_0^t f(x(s - \tau)) ds + \int_0^t B ds \right| \\ &\leq \beta + \int_0^t |B - f(x(s - \tau))| ds \\ &\leq \beta + \varepsilon t \leq \beta + \varepsilon\tau. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Tehát (3.13) teljesül.

Világos a  $\phi$  választásából, hogy  $x'(t) < 0$  minden  $t \in (0, \tau)$  esetén.

(3.14) bizonyítása  $k = 2$  esetén. A (c.1) feltétel garantálja, hogy  $\delta < \tau$ . Ez, és a 3.10.



Propozíció együtt azt adja, hogy  $v(\delta) = -B\delta$ . Ekkor (3.15)-ből és  $\delta$  definíciójából következik, hogy

$$x(\delta) \leq v(\delta) + \beta + \varepsilon\delta = -B\delta + \beta + \varepsilon\delta = -\beta.$$

Mivel  $x$  monoton csökkenő a  $[0, \tau]$  intervallumon, ezért

$$x(t) < -\beta \quad \text{minden } t \in (\delta, \tau] \text{ esetén.} \quad (3.16)$$

Minden  $t \in [0, \delta]$  esetén  $-A \leq f(x(t)) \leq B$ , és ezért  $|f(x(t)) + A| \leq A + B$ . Minden  $t \in [\delta, \tau]$  esetén  $|f(x(t)) + A| \leq \varepsilon$ , mivel  $x(t) \leq -\beta$ . Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^\tau |f(x(s)) + A| ds &= \int_0^\delta |f(x(s)) + A| ds + \int_\delta^\tau |f(x(s)) + A| ds \\ &\leq (A + B)\delta + \varepsilon(\tau - \delta) \leq (A + B)\delta + \varepsilon\tau. \end{aligned}$$

Ez a fenti összefüggés és (3.13) együtt adja, hogy

$$\begin{aligned} |x(t) - v(t)| &\leq |x(\tau) - v(\tau)| + \int_\tau^t |f(x(s - \tau)) + A| ds \\ &\leq \beta + \varepsilon\tau + (A + B)\delta + \varepsilon\tau = \beta + 2\varepsilon\tau + (A + B)\delta \end{aligned}$$

minden  $t \in [\tau, 2\tau]$  esetén. Igazoltuk (3.14)-et  $k = 2$  esetén.

(3.14) bizonyítása minden  $2 < k \leq N$  esetén  $k$  szerinti indukcióval, ha  $N > 2$ . Tegyük fel, hogy (3.14) érvényes  $k \in \{2, 3, \dots, N - 1\}$  esetén. Megmutatjuk, hogy érvényes  $k + 1$  esetén is. Idézzük fel, hogy

$$v(t) = At - (A + b)\tau \leq A(N - 1)\tau - (A + B)\tau < 0 \quad \text{minden } t \in [\tau, (N - 1)\tau] \text{ esetén.} \quad (3.17)$$

Ezt, (c.2)-t és (3.14)-et erre a  $k$ -ra felhasználva azt kapjuk, hogy minden  $t \in [(k - 1)\tau, k\tau]$  esetén

$$x(t) \leq v(t) + \beta + k\varepsilon\tau + (A + B)\delta \leq A(N - 1)\tau - (A + B)\tau + \beta + (N - 1)\varepsilon\tau + (A + B)\delta < -\beta.$$

Ekkor  $t \in [k\tau, (k + 1)\tau]$  esetén

$$\begin{aligned} |x(t) - v(t)| &\leq |x(k\tau) - v(k\tau)| + \int_{k\tau}^t |f(x(s - \tau)) + A| ds \leq |x(k\tau) - v(k\tau)| + \varepsilon\tau \\ &\leq \beta + (k + 1)\varepsilon\tau + (A + B)\delta. \end{aligned}$$

Összegezve, (3.14) igaz minden  $2 \leq k \leq N$  esetén. □

A következő propozíció, többek között, azt mutatja meg, hogy minden  $\phi \in \mathcal{A}(\beta)$ -hoz tartozik egy  $q \in (0, N\tau)$ , melyre  $x_q \in -\mathcal{A}(\beta)$ .

**3.12. Propozíció.** Az előző propozíció feltételei mellett tegyük fel, hogy

$$c_3 = (A - \varepsilon)N\tau - (A + B)(\tau + \delta) > 0. \quad (\text{c.3})$$

Ekkor

$$x(t) < -\beta \quad \text{minden } \delta < t \leq \max\{\tau + \delta, (N - 1)\tau\} \text{ esetén,} \quad (3.18)$$

$$x(N\tau) > -\beta, \quad (3.19)$$

$$x'(t) < 0 \quad \text{minden } t \in (0, \tau) \text{ esetén,} \quad (3.20)$$

$$x'(t) > 0 \quad \text{minden } t \in (\tau + \delta, N\tau) \text{ esetén,} \quad (3.21)$$

és az  $x(t) = -\beta$ ,  $t \in (\tau + \delta, N\tau)$  egyenlet egyetlen  $q = q(\phi)$  megoldására

$$x_q \in -\mathcal{A}(\beta).$$

Ha  $\psi \in \mathcal{A}(\beta)$  olyan, hogy  $x_{\delta+\tau}^\psi = x_{\delta+\tau}^\phi$ , akkor  $q(\phi) = q(\psi)$ . Továbbá, ha  $\tau B/A > \delta$ , akkor

$$|q(\phi) - \sigma| \leq \frac{1}{A - \varepsilon}(2\beta + N\varepsilon\tau + (A + B)\delta), \quad (3.22)$$

ahol  $\sigma$  a legkisebb pozitív zérushelye  $v$ -nek.

*Bizonyítás.* (3.18) bizonyítása. Ahogy már említettük a 3.11. Propozícióban,  $x(t) < -\beta$  minden  $t \in (\delta, \tau]$  esetén, lásd (3.16)-ot.  $N = 2$  esetén  $\max\{\tau + \delta, (N - 1)\tau\} = \tau + \delta$ . A (3.14) becslés  $k = 2$ -vel, (c.2) első sora és

$$v(t) = At - (A + B)\tau \leq A\delta - B\tau, \quad t \in [\tau, \tau + \delta],$$

együtt azt adja, hogy

$$x(t) < v(t) + \beta + 2\varepsilon\tau + (A + B)\delta \leq A\delta - B\tau + \beta + 2\varepsilon\tau + (A + B)\delta < -\beta$$

minden  $t \in [\tau, \tau + \delta]$  esetén. Ha  $N > 2$ , akkor  $\max\{\tau + \delta, (N - 1)\tau\} = (N - 1)\tau$ . Hasonlóan az előzőhöz, (c.2) második sora, a (3.14) becslés  $2 \leq k \leq N - 1$ -gyel és (3.17) azt adja, hogy  $x(t) < -\beta$  minden  $t \in [\tau, (N - 1)\tau]$  esetén.

(3.19) bizonyítása. Alkalmazzuk (3.14)-et a  $t = N\tau$  választással, a  $v(N\tau) = AN\tau - (A + B)\tau$  összefüggést és (c.3)-at:

$$x(N\tau) > v(N\tau) - (\beta + N\varepsilon\tau + (A + B)\delta) = c_3 - \beta > -\beta. \quad (3.23)$$

(3.20) és (3.21) bizonyítása. A  $\phi$  kezdeti függvény választásából világos, hogy  $x'(t) < 0$  minden  $t \in (0, \tau)$  esetén. A (3.18) egyenlőtlenségből következik, hogy  $x(t - \tau) < -\beta$  minden

$t \in (\delta + \tau, N\tau]$  esetén. Ezért az is világos, hogy

$$x'(t) = -f(x(t - \tau)) \geq A - \varepsilon > 0, \quad \text{ha } t \in (\delta + \tau, N\tau]. \quad (3.24)$$

*Állítások  $q$ -val kapcsolatban.* Az  $x^\phi(t) = -\beta$  egyenlet  $q = q(\phi) \in (\tau + \delta, N\tau)$  megoldásának létezése és egyértelmősége világos a (3.18), (3.19) és (3.21) állításokból. Azt látjuk, hogy  $x_q^\phi \in -\mathcal{A}(\beta)$ .

Az is könnyen látható, hogy ha  $\psi \in \mathcal{A}(\beta)$  és  $x_{\delta+\tau}^\psi = x_{\delta+\tau}^\phi$ , akkor  $q(\phi) = q(\psi)$ . Valóban, ez abból következik, hogy  $x^\phi(t) = x^\psi(t)$  a  $[\tau + \delta, \infty)$  intervallumon,  $q(\phi) > \tau + \delta$  és  $q(\psi) > \tau + \delta$ .

Továbbá, ha  $\tau B/A > \delta$ , akkor  $\sigma = \tau + \tau B/A > \tau + \delta$ . Ezért alkalmazhatjuk (3.24)-et minden  $\sigma \in (\delta + \tau, N\tau]$  és  $q \in (\delta + \tau, N\tau]$  közé eső  $t$  esetén:

$$\begin{aligned} (A - \varepsilon)|\sigma - q| &\leq \left| \int_q^\sigma f(x(t - \tau)) dt \right| = |x(\sigma) - x(q)| \\ &\leq |x(\sigma) - v(\sigma)| + |x(q)| \leq |x(\sigma) - v(\sigma)| + \beta. \end{aligned}$$

Ebből, (3.14)-et alkalmazva  $t = \sigma \in [(N - 1)\tau, N\tau]$  esetén, megkapjuk (3.22)-et.  $\square$

Hasonló eredmények igazak azon megoldásokra, melyek kezdeti szegmensei  $-\mathcal{A}(\beta)$ -ben vannak. Ez szerepel a következő két proposícióban. Bizonyításuk visszavezethető a 3.11. Propozíció és 3.12. Propozíció bizonyítására.

**3.13. Propozíció.** *Legyen  $A > 0$ ,  $B > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $0 < \varepsilon < \min\{A, B\}/2$ ,  $\tilde{\delta} = 2\beta/(A - \varepsilon)$ ,  $\tilde{N} = \lceil 1 + A/B \rceil$ ,  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  és  $\phi \in -\mathcal{A}(\beta)$ . Tegyük fel, hogy*

$$c_4 = \tau - \tilde{\delta} > 0, \quad (c.4)$$

és

$$0 < c_5 = \begin{cases} (A - 2\varepsilon)\tau - (A + 2B)\tilde{\delta} - 2\beta, & \text{ha } \tilde{N} = 2, \\ (A + B)(\tau - \tilde{\delta}) - (B + \varepsilon)(\tilde{N} - 1)\tau - 2\beta, & \text{ha } \tilde{N} > 2. \end{cases} \quad (c.5)$$

*Ekkor*

$$|x(t) - v(t + \sigma)| \leq \beta + \varepsilon\tau \quad \text{minden } t \in [0, \tau] \text{ esetén,}$$

és

$$|x(t) - v(t + \sigma)| \leq \beta + k\varepsilon\tau + (A + B)\tilde{\delta} \quad \text{minden } 2 \leq k \leq \tilde{N}, t \in [(k - 1)\tau, k\tau] \text{ esetén.} \quad (3.25)$$

**3.14. Propozíció.** *Az előző proposíció feltételei mellett tegyük fel, hogy*

$$c_6 = (B - \varepsilon)\tilde{N}\tau - (A + B)(\tau + \tilde{\delta}) > 0. \quad (c.6)$$

Ekkor

$$x(t) > \beta \quad \text{minden} \quad \tilde{\delta} < t \leq \max\{\tau + \tilde{\delta}, (\tilde{N} - 1)\tau\} \quad \text{esetén,}$$

$$x(\tilde{N}\tau) < \beta,$$

$$x'(t) > 0 \quad \text{minden} \quad t \in (0, \tau) \quad \text{esetén,}$$

$$x'(t) < 0 \quad \text{minden} \quad t \in (\tau + \tilde{\delta}, \tilde{N}\tau) \quad \text{esetén,}$$

és az  $x(t) = \beta$ ,  $t \in (\tau + \tilde{\delta}, \tilde{N}\tau)$  egyenlet egyetlen  $\tilde{q} = \tilde{q}(\phi)$  megoldása esetén

$$x_{\tilde{q}} \in \mathcal{A}(\beta).$$

Ha  $\psi \in -\mathcal{A}(\beta)$  olyan, hogy

$$x_{\tilde{\delta}+\tau}^{\psi} = x_{\tilde{\delta}+\tau}^{\phi},$$

akkor  $\tilde{q}(\phi) = \tilde{q}(\psi)$ . Továbbá, ha  $\tau A/B > \tilde{\delta}$ , akkor

$$|\tilde{q}(\phi) - (\omega - \sigma)| \leq \frac{1}{B - \varepsilon} \left( 2\beta + \tilde{N}\varepsilon\tau + (A + B)\tilde{\delta} \right). \quad (3.26)$$

A 3.13. Propozíció és 3.14. Propozíció bizonyítása a következő.

*Bizonyítás.* Tekintsük  $\phi \in -\mathcal{A}(\beta)$ -t és az  $x = x^{\phi}: [-\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  megoldást. Ekkor  $\tilde{x} := -x$  esetén  $\tilde{x}_0 \in \mathcal{A}(\beta)$  és

$$\tilde{x}'(t) = -h(\tilde{x}(t - \tau)), \quad \text{ha } t > 0,$$

ahol  $h: \mathbb{R} \ni x \mapsto -f(-x) \in \mathbb{R}$ . Vegyük észre, hogy  $h$  eleme az  $\mathcal{N}(B, A, \beta, \varepsilon)$  függvényosztálynak.

Definiáljuk továbbá az  $\omega$ -periodikus  $\tilde{v}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a  $[0, \omega]$  intervallumon a következőképpen:

$$\tilde{v}(t) = -v(t + \sigma) = \begin{cases} -At, & t \in [0, \tau], \\ Bt - (A + B)\tau, & t \in [\tau, (2 + \frac{A}{B})\tau], \\ -At + \left(B + 2A + \frac{A^2}{B}\right)\tau, & t \in [(2 + \frac{A}{B})\tau, \omega]. \end{cases}$$

A 3.10. Propozíció alapján  $\tilde{v}$  a  $\tilde{v}'(t) = -g^{B,A}(\tilde{v}(t - \tau))$  egyenlet megoldása. Vegyük észre, hogy  $\tilde{v}$  legkisebb pozitív zérushelye  $\omega - \sigma$ .

Felcserélve  $A$  és  $B$  szerepét a 3.11. Propozíció és 3.12. Propozíció bizonyításában, megkapjuk a kívánt becsléseket  $|\tilde{x} - \tilde{v}|$ -re,  $\tilde{x}$ -ra,  $\tilde{x}'$ -ra és  $|\tilde{q} - (\omega - \sigma)|$ -re.  $\square$

A (c.1)-(c.2) és (c.4)-(c.5) feltételek teljesülnek bármely  $A > 0$  és  $B > 0$  esetén, ha  $\beta > 0$  és  $\varepsilon > 0$  elég kicsi. Ha azonban  $B/A$  egész szám, akkor  $N = 1 + B/A$ , és ezért

$$c_3 = (A - \varepsilon)N\tau - (A + B)(\tau + \delta) = \left(A - \varepsilon + \frac{A - \varepsilon}{A}B\right)\tau - (A + B)\left(\tau + \frac{2\beta}{B - \varepsilon}\right)$$

negatív bármely  $\beta > 0$  és  $\varepsilon > 0$  esetén. Ennélfogva a 3.12. Propozícióban szereplő (3.23) becslés nem igaz ebben az esetben, vagyis nem tudjuk garantálni a (3.19) egyenlőtlenséget (ami kulcsfontosságú tulajdonság a  $q$  létezésének bizonyításánál).

Hasonlóan, a 3.14. Propozícióban szereplő (c.6) feltétel sem teljesül bármely  $\beta > 0$  és  $\varepsilon > 0$  esetén, ha  $A/B$  egész szám.

A következő megjegyzésben leírjuk a szükséges módosításokat erre a két esetre.

**3.15. Megjegyzés.** A 3.12. Propozíciót a következőképp módosíthatjuk, ha  $B/A$  egész.

A (3.18) állítás független  $c_3$ -tól, ezért igaz abban az esetben is, ha  $B/A$  egész szám. Először terjesszük ki (3.18)-at egy nagyobb intervallumra. Tegyük fel, hogy

$$T = 1 - \frac{N\varepsilon\tau + 2\beta + (A+B)\delta}{A\tau} > 0.$$

Világos, hogy  $T < 1$ . Ekkor (3.14) és a  $v$  definíciója együtt azt adják  $t \in [(N-1)\tau, (N-1+T)\tau]$  esetén, hogy

$$\begin{aligned} x(t) &\leq v(t) + \beta + N\varepsilon\tau + (A+B)\delta \\ &= At - (A+B)\tau + \beta + N\varepsilon\tau + (A+B)\delta \\ &\leq A(N-1+T)\tau - (A+B)\tau + \beta + N\varepsilon\tau + (A+B)\delta = -\beta. \end{aligned}$$

Ez és (3.18) együtt azt adja, hogy

$$x(t) \leq -\beta \quad \text{minden } \delta \leq t \leq \max\{\tau + \delta, (N-1+T)\tau\} \text{ esetén.} \quad (3.27)$$

A következő lépésként vegyük észre, hogy ha  $B/A$  egész szám, akkor  $N\tau = (1+B/A)\tau = \sigma$  a  $v$  megoldás első pozitív zérushelye, vagyis  $v$  negatív az  $[(N-1)\tau, (N-1+T)\tau]$  intervallumon. Ebből és a (3.27) állításból következik, hogy minden  $t \in [N\tau, (N+T)\tau]$  esetén

$$\begin{aligned} |x(t) - v(t)| &\leq |x(N\tau) - v(N\tau)| + \int_{N\tau}^t |f(x(s-\tau)) + A| ds \\ &\leq |x(N\tau) - v(N\tau)| + \varepsilon T\tau. \end{aligned}$$

(3.14)-ből következik, hogy az egyenlőtlenség jobb oldala nem nagyobb, mint  $\beta + (N+T)\varepsilon\tau + (A+B)\delta$ .

Az  $N\tau = \sigma$  és  $T < 1$  tulajdonságokból nyilvánvaló, hogy a 3.10. Propozícióban szereplő  $v$  definíciójának a második sorát kell tekintenünk, hogy kiszámoljuk  $v((N+T)\tau)$  értékét:

$$v((N+T)\tau) = A(N+T)\tau - (A+B)\tau = AT\tau.$$

Az utolsó két eredményből láthatjuk, hogy

$$x((N+T)\tau) > -\beta, \quad (3.28)$$

ha  $\beta > 0$  és  $\varepsilon > 0$  elég kicsi.

(3.27) és (3.28) garantálja  $q$  létezését. Ezután egyszerű a 3.12. Propozíció többi részét módosítani.

A 3.14. Propozíciót hasonlóan kell módosítani, ha  $A/B$  egész szám. A későbbi bizonyításokat is módosítani kell némileg, ha  $B/A$  vagy  $A/B$  egész szám, de ezt az olvasóra hagyjuk.

### 3.5. Lipschitz-folytonos leképezések

Legyenek  $A, B, \beta, \varepsilon, \delta, \tilde{\delta}, N, \tilde{N}$  ugyanazok, mint az előző szakaszban. Tegyük fel, hogy a (c.1)-(c.6) feltételek teljesülnek. Tegyük fel továbbá, hogy  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$  Lipschitz-folytonos az  $L(f)$  Lipschitz-konstanssal. Legyenek  $L_\beta = L_\beta(f)$  és  $L_{-\beta} = L_{-\beta}(f)$  Lipschitz-konstansok az  $f|_{[\beta, \infty)}$  és  $f|_{(-\infty, -\beta]}$  függvényekhez.

A 2. fejezetben használt jelöléshez igazodva a  $\Phi$  jelölést fogjuk használni a (3.1) egyenlet által indukált szemi-dinamikai rendszerre:

$$\Phi: [0, \infty) \times C \ni (t, \phi) \mapsto x_t^\phi \in C.$$

Ekkor a  $\Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta)) \subset C$  részhalmaz azon megoldások  $\tau + \delta$ -szegmenseiből áll, melyek kezdeti szegmense az  $\mathcal{A}(\beta)$  halmazban van:

$$\Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta)) = \left\{ x_{\tau+\delta}^\phi : \phi \in \mathcal{A}(\beta) \right\}.$$

Vezessük be a következő leképezést:

$$s : \Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta)) \ni \psi \mapsto q(\phi) - \tau - \delta \in (0, (N - 1)\tau - \delta),$$

ahol  $\psi = \Phi(\tau + \delta, \phi)$ . Másképp fogalmazva,  $\psi \in \Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta))$  esetén  $s(\psi)$  az az idő a  $(0, (N - 1)\tau - \delta)$  intervallumban, melyre  $x_{s(\psi)}^\psi \in -\mathcal{A}(\beta)$ . A 3.12. Propozíció garantálja, hogy  $s$  jól definiált.

Tekintsük az

$$R : \mathcal{A}(\beta) \ni \phi \mapsto \Phi(q(\phi), \phi) = x_{q(\phi)}^\phi \in -\mathcal{A}(\beta)$$

leképezést.  $R$  felírható  $R = \Phi_s \circ \Phi_\delta \circ \Phi_\tau$  alakban, ahol

$$\Phi_\tau = \Phi(\tau, \cdot)|_{\mathcal{A}(\beta)},$$

$$\Phi_\delta = \Phi(\delta, \cdot)|_{\Phi(\tau, \mathcal{A}(\beta))},$$

$$\Phi_s = \Phi(s(\cdot), \cdot)|_{\Phi(\tau+\delta, \mathcal{A}(\beta))}.$$

A továbbiakban Lipschitz-konstansokat határozunk meg e leképezésekhez.

**3.16. Propozíció.**  $\tau L_\beta$  Lipschitz-konstans a  $\Phi_\tau$  leképezéshez, míg  $1 + \delta L(f)$  Lipschitz-konstans

a  $\Phi_\delta$  leképezéshez.

*Bizonyítás.* Legyen  $\phi, \bar{\phi} \in \mathcal{A}(\beta)$  és legyen  $t \in [-\tau, 0]$ . Alkalmazva  $\phi(0) = \bar{\phi}(0) = \beta$ -t és a  $\phi(u) \geq \beta, \bar{\phi}(u) \geq \beta$  tulajdonságot minden  $u \in [-\tau, 0]$  esetén, azt kapjuk, hogy  $\tau L_\beta$

$$|\Phi(\tau, \phi)(t) - \Phi(\tau, \bar{\phi})(t)| \leq \int_0^{\tau+t} |f(\phi(u-\tau)) - f(\bar{\phi}(u-\tau))| du \leq L_\beta \tau \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

Ez igazolja, hogy  $\tau L_\beta$  Lipschitz-konstans  $\Phi_\tau$ -hoz.

Ezután tekintsük  $x = x^\phi$ -t és  $\bar{x} = x^{\bar{\phi}}$ -t tetszőleges  $\phi, \bar{\phi} \in C$  esetén. Ha  $t \in [-\tau, -\delta]$ , akkor

$$|\Phi(\delta, \phi)(t) - \Phi(\delta, \bar{\phi})(t)| = |\phi(\delta+t) - \bar{\phi}(\delta+t)| \leq \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

Ha  $t \in [-\delta, 0]$ , akkor

$$\begin{aligned} |\Phi(\delta, \phi)(t) - \Phi(\delta, \bar{\phi})(t)| &= |x(\delta+t) - \bar{x}(\delta+t)| \\ &\leq |\phi(0) - \bar{\phi}(0)| + \int_0^{\delta+t} |f(\phi(u-\tau)) - f(\bar{\phi}(u-\tau))| du \\ &\leq \|\phi - \bar{\phi}\| + \delta L(f) \|\phi - \bar{\phi}\|. \end{aligned}$$

Ez pedig  $\Phi_\delta$  Lipschitz-konstansának igazolása. □

Az  $s$  és  $\Phi_s$  leképezések egy-egy Lipschitz-konstansának meghatározásához szükségünk van  $|x^\phi(t) - x^{\bar{\phi}}(t)|$  becslésére a  $[-\tau, (N-2)\tau]$  intervallumon, ha  $\phi, \bar{\phi} \in \Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta))$ .

**3.17. Propozíció.** Ha  $\phi, \bar{\phi} \in \Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta))$ , akkor igaz az  $x = x^\phi$  és  $\bar{x} = x^{\bar{\phi}}$  megoldásokra, hogy

$$\max_{u \in [-\tau, (N-2)\tau]} |x(u) - \bar{x}(u)| \leq (1 + \tau L_{-\beta})^{N-2} \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

*Bizonyítás.*  $N = 2$  esetén az állítás nyilvánvalóan igaz, ezért tegyük fel, hogy  $N > 2$ . Ellenőrizni fogjuk a következőt  $k$  szerinti teljes indukcióval:

$$\max_{u \in [(k-1)\tau, k\tau]} |x(u) - \bar{x}(u)| \leq (1 + \tau L_{-\beta})^k \|\phi - \bar{\phi}\| \quad (3.29)$$

minden  $k \in \{0, 1, \dots, N-2\}$  esetén. A (3.29) becslés igaz  $k = 0$  esetén. Meg kell mutatnunk, hogy igaz  $k+1$ -re is, ha igaz valamely  $k \in \{0, 1, \dots, N-3\}$ -ra. A (3.18) állításból következik, hogy  $x(t) \leq -\beta$  és  $\bar{x}(t) \leq -\beta$  minden  $t \in [-\tau, (N-3)\tau]$  esetén. Ezért minden  $u \in [k\tau, (k+1)\tau]$  esetén

$$\begin{aligned} |x(u) - \bar{x}(u)| &\leq |x(k\tau) - \bar{x}(k\tau)| + \int_{k\tau}^{(k+1)\tau} |f(x(t-\tau)) - f(\bar{x}(t-\tau))| dt \\ &\leq (1 + \tau L_{-\beta}) \max_{u \in [(k-1)\tau, k\tau]} |x(u) - \bar{x}(u)| \\ &\leq (1 + \tau L_{-\beta})^{k+1} \|\phi - \bar{\phi}\|. \end{aligned}$$

□

Ezután már meg tudjuk határozni az  $s$  és  $\Phi_s$  leképezések egy-egy Lipschitz-konstansát.

**3.18. Propozíció.** *Az  $s$  leképezés Lipschitz-folytonos a*

$$L(s) = \frac{1 + (N-1)\tau L_{-\beta}(1 + \tau L_{-\beta})^{N-2}}{A - \varepsilon}$$

*Lipschitz-konstanssal.*

*Bizonyítás.* Legyen  $\phi, \bar{\phi} \in \Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta))$  és legyen  $\eta = s(\phi), \bar{\eta} = s(\bar{\phi})$ . Jelölje  $x = x^\phi$  és  $\bar{x} = x^{\bar{\phi}}$  a hozzájuk tartozó megoldásokat, ahogy az előbb is használtuk. Az  $x(\eta) = -\beta$  tulajdonságot felhasználva azt kapjuk, hogy

$$-\beta = \phi(0) - \int_0^\eta f(x(t-\tau))dt.$$

Hasonló egyenletet kapunk  $\bar{\phi}$  és  $\bar{\eta}$  esetén. Ebből arra következtethetünk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \left| \phi(0) - \bar{\phi}(0) - \int_{\bar{\eta}}^\eta f(x(t-\tau))dt - \int_0^{\bar{\eta}} [f(x(t-\tau)) - f(\bar{x}(t-\tau))]dt \right| \\ &\geq \left| \int_{\bar{\eta}}^\eta f(x(t-\tau))dt \right| - \|\phi - \bar{\phi}\| - \int_0^{\bar{\eta}} |f(x(t-\tau)) - f(\bar{x}(t-\tau))| dt. \end{aligned}$$

Idézzük fel (3.18)-ból, hogy  $\phi(t) \leq -\beta$  és  $\bar{\phi}(t) \leq -\beta$  minden  $t \in [-\tau, 0]$  esetén. Ezért, ha  $\eta, \bar{\eta} \in (0, \tau)$ , akkor

$$\left| \int_{\bar{\eta}}^\eta f(x(t-\tau))dt \right| \geq |\eta - \bar{\eta}| (A - \varepsilon)$$

és

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{\eta}} |f(x(t-\tau)) - f(\bar{x}(t-\tau))|dt &= \int_0^{\bar{\eta}} |f(\phi(t-\tau)) - f(\bar{\phi}(t-\tau))|dt \\ &\leq \tau L_{-\beta} \|\phi - \bar{\phi}\|. \end{aligned}$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$|\eta - \bar{\eta}| \leq \frac{1 + \tau L_{-\beta}}{A - \varepsilon} \|\phi - \bar{\phi}\|. \quad (3.30)$$

Ha  $\eta > \tau$  vagy  $\bar{\eta} > \tau$ , akkor az  $\eta, \bar{\eta} < (N-1)\tau - \delta$  egyenlőtlenségből az következik, hogy  $N > 2$ . A (3.18) állítás és  $\phi, \bar{\phi} \in \Phi(\tau + \delta, \mathcal{A}(\beta))$  alapján  $x(t) \leq -\beta$  és  $\bar{x}(t) \leq -\beta$  minden  $t \in [-\tau, (N-2)\tau - \delta]$  esetén. Ez a tulajdonság az  $\bar{\eta} < (N-1)\tau - \delta$  egyenlőtlenséggel együtt adja, hogy

$$\int_0^{\bar{\eta}} |f(x(t-\tau)) - f(\bar{x}(t-\tau))|dt \leq (N-1)\tau L_{-\beta} \max_{u \in [-\tau, \bar{\eta}-\tau]} |x(u) - \bar{x}(u)|,$$



ami a 3.17. Propozíció alapján kisebb, mint

$$(N-1)\tau L_{-\beta}(1+\tau L_{-\beta})^{N-2} \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

Ezért

$$|\eta - \bar{\eta}| \leq \frac{1 + (N-1)\tau L_{-\beta}(1+\tau L_{-\beta})^{N-2}}{A - \varepsilon} \|\phi - \bar{\phi}\|. \quad (3.31)$$

A (3.30) és (3.31) becslések együtt teszik teljessé a bizonyítást.  $\square$

**3.19. Propozíció.** A  $\Phi_s$  leképezés Lipschitz-folytonos a

$$L(\Phi_s) = 3(1 + (N-1)\tau L_{-\beta}(1+\tau L_{-\beta})^{N-2})$$

Lipschitz-konstanssal.

*Bizonyítás.*  $\Phi_s$  definíciója alapján

$$\begin{aligned} \Phi_s(\phi) - \Phi_s(\bar{\phi}) &= (\Phi(\eta, \phi) - \Phi(\bar{\eta}, \phi)) + (\Phi(\bar{\eta}, \phi) - \Phi(\bar{\eta}, \bar{\phi})) \\ &= (x_\eta - x_{\bar{\eta}}) + (x_{\bar{\eta}} - \bar{x}_{\bar{\eta}}). \end{aligned}$$

Mivel  $\eta, \bar{\eta} < (N-1)\tau - \delta$  és  $x(u) \leq -\beta$  minden  $u \in [-\tau, (N-2)\tau - \delta]$  esetén, azt látjuk, hogy ha  $t \in [-\tau, 0]$ , akkor

$$\begin{aligned} |x_\eta(t) - x_{\bar{\eta}}(t)| &= \left| \int_{\bar{\eta}+t}^{\eta+t} x'(u) du \right| = \left| \int_{\bar{\eta}+t}^{\eta+t} -f(x(u-\tau)) du \right| \\ &\leq A|\eta - \bar{\eta}| \leq AL(s) \|\phi - \bar{\phi}\|. \end{aligned}$$

Mivel  $\varepsilon < A/2$ , ezért az  $L(s)$  konstans behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$|x_\eta(t) - x_{\bar{\eta}}(t)| \leq 2 \left( 1 + (N-1)\tau L_{-\beta}(1+\tau L_{-\beta})^{N-2} \right) \|\phi - \bar{\phi}\| \quad \text{minden } t \in [-\tau, 0] \text{ esetén.}$$

Ha  $t + \bar{\eta} \geq 0$  valamely  $t \in [-\tau, 0]$  esetén, akkor

$$\begin{aligned} |x_{\bar{\eta}}(t) - \bar{x}_{\bar{\eta}}(t)| &\leq \left| \phi(0) - \bar{\phi}(0) - \int_0^{\bar{\eta}+t} (f(x(u-\tau)) - f(\bar{x}(u-\tau))) du \right| \\ &\leq \|\phi - \bar{\phi}\| + (N-1)\tau L_{-\beta} \max_{u \in [-\tau, \bar{\eta}-\tau]} |x(u) - \bar{x}(u)| \\ &\leq \left( 1 + (N-1)\tau L_{-\beta}(1+\tau L_{-\beta})^{N-2} \right) \|\phi - \bar{\phi}\|. \end{aligned}$$

Ha pedig  $t + \bar{\eta} \leq 0$  valamely  $t \in [-\tau, 0]$  esetén, akkor

$$|x_{\bar{\eta}}(t) - \bar{x}_{\bar{\eta}}(t)| = |\phi(\bar{\eta}+t) - \bar{\phi}(\bar{\eta}+t)| \leq \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

Az utolsó három becslés együtt adja a  $\Phi_s$  leképezés Lipschitz-konstansát.  $\square$

Igazoltuk az alábbi következményt.

**3.20. Következmény.** *Az  $R$  leképezés Lipschitz-folytonos az alábbi Lipschitz-konstanssal:*

$$L(R) = 3\tau L_\beta (1 + \delta L(f)) (1 + (N - 1)\tau L_{-\beta}(1 + \tau L_{-\beta})^{N-2}).$$

Tekintsük most a

$$Q : -\mathcal{A}(\beta) \ni \phi \mapsto \Phi(\tilde{q}(\phi), \phi) \in \mathcal{A}(\beta)$$

leképezést, ahol  $\tilde{q}$ -t a 3.14. Propozícióban vezettük be.

**3.21. Propozíció.** *A  $Q$  leképezés egy Lipschitz-konstansa:*

$$L(Q) = 3\tau L_{-\beta} (1 + \tilde{\delta} L(f)) (1 + (\tilde{N} - 1)\tau L_\beta(1 + \tau L_\beta)^{\tilde{N}-2}).$$

Ezen állítás bizonyítása hasonló a korábbi érvelésekhez, így az olvasóra hagyjuk. A 3.14. Propozíciót kell használni hozzá.

Következményként az alábbi állíthatjuk.

**3.22. Propozíció.** *A  $P : \mathcal{A}(\beta) \ni \phi \mapsto Q(R(\phi)) \in \mathcal{A}(\beta)$  Poincaré-leképezés Lipschitz-folytonos, és Lipschitz-konstansa a következő:*

$$\begin{aligned} L(P) &= L(R)L(Q) \\ &= 3\tau L_\beta(1 + \delta L(f)) (1 + (N - 1)\tau L_{-\beta}(1 + \tau L_{-\beta})^{N-2}) \\ &\quad \times 3\tau L_{-\beta} (1 + \tilde{\delta} L(f)) (1 + (\tilde{N} - 1)\tau L_\beta(1 + \tau L_\beta)^{\tilde{N}-2}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

## 3.6. A periodikus megoldások értékkészletéről

Ebben a szakaszban megmutatjuk, hogy ha  $\tau$  elég nagy és  $\beta$  elég kicsi, akkor (3.1) bármely  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lassan oszcilláló periodikus megoldásának van szegmense  $\mathcal{A}(\beta)$ -ban.

Nussbaum [44] dolgozatát fogjuk követni, ezért tekintsük a (3.1) egyenletet az

$$\tilde{x}'(t) = -\tau f(\tilde{x}(t - 1)), \tag{3.33}$$

alakban, ahol  $\tilde{x}(t) = x(\tau t)$ , és az  $f$  függvényt (3.8)-ban definiáltuk. Vegyük észre, hogy  $f$  teljesíti a [44] dolgozatban szereplő (H1) és (H2) feltételeket.

Definiáljuk a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a következőképpen:

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du, \quad \text{ha } x \neq 0,$$

és  $g(0) = 0$ . A [44] dolgozat 1. Lemmája alapján  $g$  folytonos és nemcsökkenő  $\mathbb{R}$ -en, és létezik

$d > 0$  úgy, hogy  $|g(x)| \geq d|x|$  minden  $|x| \leq 1$  esetén, és  $|g(x)| \geq d$  minden  $|x| \geq 1$  esetén. A  $d$  konstans a következőképpen választhatjuk.

**3.23. Propozíció.** *Legyen*

$$d = \frac{1}{2} \min\{-f(-1), f(1), f'(0)\}.$$

*Ekkor*

- (i)  $|f(x)| \geq 2d|x|$  minden  $|x| \leq 1$  esetén, és  $|f(x)| \geq 2d$  minden  $|x| \geq 1$  esetén,
- (ii)  $|g(x)| \geq d|x|$ , ha  $|x| \leq 1$ , és  $|g(x)| \geq d$ , ha  $|x| \geq 1$ .

*Bizonyítás.* Az (i). állítás bizonyítása. Mivel  $f$  szigorúan monoton növekvő, ezért nyilvánvaló, hogy  $|f(x)| \geq 2d$  minden  $|x| \geq 1$  esetén. Ezután bizonyítsuk az (i). állítást  $x \in [0, 1]$  esetén.

Az  $f$  függvény második deriváltját vizsgálva azt kapjuk, hogy  $f''(x) > 0$  minden  $x \in (-\infty, x^*)$  esetén, és  $f''(x) < 0$  minden  $x \in (x^*, \infty)$  esetén, ahol

$$x^* = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{pr}{q - pr} \right) \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Ez azt jelenti, hogy  $f$  konvex a  $(-\infty, x^*]$  intervallumon, konkáv az  $[x^*, \infty)$  intervallumon, és  $x^*$ -ban inflexiós pontja van.

Ha  $f$  konkáv a  $[0, 1]$  intervallumon, azaz  $x^* \leq 0$ , akkor – mivel  $f$  grafikonja a  $(0, 0)$  és  $(1, f(1))$  pontokat összekötő egyenes fölött van – azt látjuk, hogy

$$f(x) \geq f(1)x \geq 2dx \quad \text{minden } x \in [0, 1] \text{ esetén.}$$

Most tegyük fel, hogy  $x^* > 0$ , azaz  $f$  konvex a  $[0, x^*]$  intervallumon. Ekkor a  $(0, x^*]$  intervallumon a függvény grafikonja az  $x = 0$  pontba húzott érintője fölött van:

$$f(x) > f'(0)x \geq 2dx \quad \text{minden } x \in (0, x^*] \text{ esetén.}$$

Ha  $x^* \geq 1$  vagy  $f(x) > f'(0)x$  teljesül minden  $x \in (0, 1]$  esetén, akkor bizonyítottuk az (i). állítást minden  $x \in [0, 1]$  esetén.

Tegyük fel, hogy  $x^* < 1$  és létezik  $\hat{x} \in (x^*, 1)$  úgy, hogy

$$f(x) > f'(0)x \quad \text{minden } x \in (0, \hat{x}) \text{ esetén, és } f(\hat{x}) = f'(0)\hat{x}.$$

Mivel  $f'$  szigorúan monoton csökkenő a  $[x^*, \infty)$  intervallumon, ez azt jelenti, hogy  $f(x) < f'(0)x$  minden  $x \in (\hat{x}, \infty)$  esetén. Speciálisan,  $f(1) < f'(0)$ . Azt állítjuk, hogy

$$f(x) \geq f(1)x \quad \text{minden } x \in [\hat{x}, 1] \text{ esetén,}$$

vagyis

$$w(x) := f(x) - f(1)x \geq 0 \quad \text{minden } x \in [\hat{x}, 1] \text{ esetén.}$$

Vegyük észre, hogy  $w(\hat{x}) > 0$  (mert  $f(\hat{x}) = f'(0)\hat{x} > f(1)\hat{x}$ ) és  $w(1) = 0$ . Mivel  $w''(x) = f''(x) < 0$  minden  $x \in [\hat{x}, 1]$  esetén, a  $w'$  derivált szigorúan monoton csökkenő az  $[\hat{x}, 1]$  intervallumon, és ezért  $w$  nem vehet fel negatív értékeket az  $(\hat{x}, 1)$  intervallumon.

Összegezve,

$$f(x) \geq \min\{f'(0), f(1)\}x \geq 2dx \quad \text{minden } x \in [0, 1] \text{ esetén.}$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy  $|f(x)| \geq 2d|x|$  minden  $x \in [-1, 0)$  esetén.

*A (ii). állítás bizonyítása.*

Az (i). állításból következik, hogy  $x \in [-1, 0)$  esetén

$$|g(x)| = \frac{1}{-x} \int_x^0 (-f(u))du \geq \frac{1}{-x} \int_x^0 (-2du)du = d|x|.$$

Szintén az (i). állításból következik, hogy ha  $x < -1$ , akkor

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{|x|} \left| \int_0^x f(u)du \right| = \frac{1}{-x} \left( \int_x^{-1} (-f(u))du + \int_{-1}^0 (-f(u))du \right) \\ &\geq \frac{1}{-x} \left( \int_x^{-1} (2d)du + \int_{-1}^0 (-2du)du \right) = 2d + \frac{d}{x} \geq d. \end{aligned}$$

Hasonlóan bizonyítható, hogy  $g(x) \geq dx$ , ha  $0 < x \leq 1$ , és  $g(x) \geq d$ , ha  $x \geq 1$ . □

A [44] dolgozat 2. Lemmája alapján létezik egy  $h: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  függvény úgy, hogy

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} h(\tau) = \infty, \tag{3.35}$$

és

$$\text{ha } x/f(x) > \tau \quad \text{minden } x \neq 0 \text{ esetén, akkor } |x| > h(\tau). \tag{3.36}$$

### 3.24. Propozíció. A

$$h: [0, \infty) \ni \tau \mapsto \begin{cases} 0, & 2d\tau \leq 1, \\ 2d\tau, & 2d\tau > 1 \end{cases} \in [0, \infty)$$

*függvény teljesíti a (3.35) és (3.36) feltételeket.*

*Bizonyítás.* Világos, hogy (3.35) teljesül.

Ezután megmutatjuk, hogy (3.36) teljesül minden  $x < 0$  esetén. Ha  $x \leq -1$ , akkor az előző propozíció alapján  $|f(x)| \geq 2d$ . Ezért a  $x/f(x) > \tau$  tulajdonságból következik, hogy

$$|x| > |f(x)|\tau \geq 2d\tau \geq h(\tau).$$

Az előző propozíció és az  $x/f(x) > \tau$ ,  $x \in (-1, 0)$ , egyenlőtlenség együtt azt adja, hogy

$$\tau \leq \frac{|x|}{|f(x)|} \leq \frac{|x|}{2d|x|} = \frac{1}{2d}.$$

Ekkor  $h(\tau) = 0$  és nyilvánvalóan  $|x| > h(\tau)$ . Hasonlóan bizonyítható a (3.36) feltétel  $x > 0$  esetén.  $\square$

Legyen  $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a (3.33) egyenlet bármely lassan oszcilláló periodikus megoldása, vagyis olyan periodikus megoldás, melynek a zérushelyei közötti távolság nagyobb 1-nél. Feltehetjük, hogy  $\tilde{x}(t) < 0$  minden  $t \in [-2, -1)$  esetén, és  $\tilde{x}(-1) = 0$ . Ekkor (3.33) alapján  $\tilde{x}$  szigorúan monoton növekvő a  $[-1, 0]$  intervallumon. Legyen  $z_2 > z_1 > 0$  minimális úgy, hogy  $\tilde{x}(z_2) = \tilde{x}(z_1) = 0$ . Vegyük észre, hogy Nussbaum [44] dolgozata csak azon  $\tilde{x}$  lassan oszcilláló periodikus megoldásokat tanulmányozza, melyek minimális periódusa  $z_2 + 1$ . A mi esetünkben ez a tulajdonság következik abból, hogy  $f'$  pozitív, lásd Mallet-Paret és Sell [37] dolgozatát. Az is könnyen látható, hogy

$$\tilde{x}_0 := \tilde{x}(0) = \tilde{x}(z_2 + 1) = \max_{t \in \mathbb{R}} \tilde{x}(t) \quad \text{és} \quad \tilde{x}_1 := \tilde{x}(z_1 + 1) = \min_{t \in \mathbb{R}} \tilde{x}(t).$$

Legyen  $z = z_2 - (z_1 + 1)$ .

A [44] dolgozat 10. Lemmáját követve az alábbi becsléseket kapjuk  $\tilde{x}_0$ -ra és  $\tilde{x}_1$ -re.

**3.25. Propozíció.** *Ha  $\tau d > 4$ , akkor  $\tilde{x}_0 \geq \tau d/2$  és  $\tilde{x}_1 \leq -\tau d/2$ .*

Mivel a bizonyításban használni fogjuk a [44] dolgozat (24) eredményét, jegyezzük meg, hogy (24) második sorában gépelési hiba található. A [44] dolgozat jelölését használva a helyes becslés: ha  $1 \leq z \leq 3/2$ , akkor

$$x(t) \geq \alpha(2 - z)c^{-3} |g((2 - z)x_1 c^{-1})| \quad \text{minden } z_1 + 3 \leq t \leq z_2 + 1 \text{ esetén.} \quad (3.37)$$

Még egy gépelési hiba van a [44] dolgozat 9. Lemmájában: a (33) becslés akkor igaz, ha  $z_1 \geq 3/2$ .

*Bizonyítás.* A bizonyításhoz a [44] dolgozat eredményeit fogjuk használni  $\alpha = \tau$ ,  $\varepsilon = 1/2$  és  $x_0 = \tilde{x}_0$ ,  $x_1 = \tilde{x}_1$  paraméterekkel. A mi esetünkben a  $c$  és  $k$  1-nek választható. Három esetet kell vizsgálnunk  $z$  és  $z_1$  nagyságától függően.

1. eset:  $\max\{z_1, z\} \leq 3/2$ .

A [44] dolgozatban szereplő 6. Lemmából következik, hogy

$$|\tilde{x}_1| \geq \tau g(\tilde{x}_0), \quad \text{ha } z_1 \leq 1,$$

és

$$\tilde{x}_0 \geq \tau |g(\tilde{x}_1)|, \quad \text{ha } z \leq 1.$$

A [44] dolgozat 7. Lemmájában szereplő (23) becslés második sorából azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{x}_1| \geq \frac{\tau}{2} g\left(\frac{\tilde{x}_0}{2}\right), \quad \text{ha } 1 \leq z_1 \leq 3/2.$$

(3.37) alapján

$$\tilde{x}_0 \geq \frac{\tau}{2} \left| g\left(\frac{\tilde{x}_1}{2}\right) \right|, \quad \text{ha } 1 \leq z \leq 3/2.$$

2. eset:  $z_1 \geq 3/2$ . Mivel  $\tau d > 1$ , a [44] dolgozat (33) becslésének első sorából azt látjuk, hogy

$$\tilde{x}_0 \geq h\left(\frac{\tau}{2}\right) = \tau d.$$

Mivel  $f$  monoton növény, a (33) becslés utolsó sorából azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{x}_1| \geq \frac{1}{2} \tau f\left(h\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \tau f(\tau d) \geq \frac{1}{2} \tau f(1) \geq \tau d.$$

3. eset:  $z \geq 3/2$ . Felhasználva  $f$  monotonitását, a  $\tau d > 1$  egyenlőtlenséget és a [44] dolgozat (34) becslését, azt kapjuk, hogy

$$|\tilde{x}_1| \geq h\left(\frac{\tau}{2}\right) = \tau d$$

és

$$\tilde{x}_0 \geq \frac{1}{2} \tau f\left(h\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \tau f(\tau d) \geq \frac{1}{2} \tau f(1) \geq \tau d.$$

Összegezve a fenti becsléseket, és használva, hogy  $g$  monoton növény, azt látjuk, hogy

$$\tilde{x}_0 \geq \min \left\{ \tau d, \frac{\tau}{2} \left| g\left(\frac{\tilde{x}_1}{2}\right) \right| \right\} \quad (3.38)$$

és

$$|\tilde{x}_1| \geq \min \left\{ \tau d, \frac{\tau}{2} g\left(\frac{\tilde{x}_0}{2}\right) \right\}. \quad (3.39)$$

Idézzük fel, hogy  $|g(x)| \geq \min\{d, d|x|\}$  minden  $x \in \mathbb{R}$  esetén. Alkalmazva ezt (3.38)-ban, arra következtethetünk, hogy

$$\tilde{x}_0 \geq \min \left\{ \tau d, \frac{\tau d}{2}, \frac{\tau d}{4} |\tilde{x}_1| \right\} = \min \left\{ \frac{\tau d}{2}, \frac{\tau d}{4} |\tilde{x}_1| \right\}.$$

Az  $|g(x)| \geq \min\{d, d|x|\}$  egyenlőtlenség és (3.39) azt adja, hogy

$$\tilde{x}_0 \geq \min \left\{ \frac{\tau d}{2}, \frac{\tau^2 d^2}{4}, \frac{\tau^2 d}{8} g\left(\frac{\tilde{x}_0}{2}\right) \right\} \geq \min \left\{ \frac{\tau d}{2}, \frac{\tau^2 d^2}{8}, \frac{\tau^2 d^2}{16} \tilde{x}_0 \right\}.$$

Hasonlóan megmutatható, hogy

$$|\tilde{x}_1| \geq \min \left\{ \frac{\tau d}{2}, \frac{\tau^2 d^2}{8}, \frac{\tau^2 d^2}{16} |\tilde{x}_1| \right\}.$$

Mivel  $\tau d > 4$ , ezért szükségképpen  $\tilde{x}_0 \geq \tau d/2$  és  $|\tilde{x}_1| \geq \tau d/2$ . □

Ezután alsó korlátot tudunk adni  $\tilde{x}$ -ra egy 1 hosszúságú intervallumon.

**3.26. Propozíció.** *Ha  $\tau d > 4$ , és  $B$  az  $f$  függvény egy felső korlátja, akkor (3.33) minden lassan oszcilláló periodikus  $\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  megoldásához adható egy 1 hosszúságú  $I$  intervallum úgy, hogy*

$$\tilde{x}(t) \geq \frac{\tau(\sqrt{B^2 + d^2} - B)}{2} \quad \text{minden } t \in I \quad \text{esetén.}$$

*Bizonyítás.* Valójában azt mutatjuk meg, hogy ha  $\gamma \in (0, 1)$ , akkor

$$\tilde{x}(t) \geq \min \left\{ \frac{\tau d(1 - \gamma)}{2}, \frac{\gamma \tau d^2}{2(2B - \gamma d)} \right\} \quad \text{minden } t \in \left[ -1 + \frac{\gamma d}{2B}, \frac{\gamma d}{2B} \right] \quad \text{esetén.} \quad (3.40)$$

Ismét Nussbaum [44] dolgozatát fogjuk alkalmazni.

Vegyük észre, hogy ha  $\tau d > 4$ , és  $B$  az  $f$  függvény egy felső korlátja, akkor  $d \leq B/2$  és  $0 < \gamma d/(2B) < 1/4$ .

Először a  $[0, \gamma d/(2B)]$  intervallumon bizonyítjuk (3.40)-et. A 3.25. Propozíció alsó korlátot ad  $\tilde{x}$ -ra a  $[0, 1]$  intervallumon:

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}(0) - \tau \int_0^t f(\tilde{x}(s-1)) ds \geq \frac{\tau d}{2} - \tau B t, \quad \text{ha } t \in [0, 1].$$

Ezért  $\tilde{x}$  pozitív a  $[0, d/(2B))$  intervallumon és  $z_1 \geq d/(2B)$ . Továbbá, ha  $\gamma \in (0, 1)$ , akkor

$$\tilde{x} \left( \frac{\gamma d}{2B} \right) \geq \frac{\tau d(1 - \gamma)}{2}.$$

Mivel  $\tilde{x}'(t) = -\tau f(\tilde{x}(t-1)) < 0$  minden  $t \in (0, z_1]$  esetén, ezért  $\tilde{x}$  szigorúan monoton csökkenő a  $[0, z_1]$  intervallumon. Tehát

$$\tilde{x}(t) \geq \frac{\tau d(1 - \gamma)}{2} \quad \text{minden } t \in \left[ 0, \frac{\gamma d}{2B} \right] \quad \text{esetén.} \quad (3.41)$$

Ezután a  $[z_2 + \gamma d/(2B), z_2 + 1]$  intervallumon adunk becslést  $\tilde{x}$ -ra. Négy esetre bontjuk a bizonyítást  $z$  nagyságától függően.

*1. eset:*  $0 \leq z \leq 1 - \gamma d/(2B)$ . A [44] dolgozat (10) becslésének első sorából és a 3.25. Propozícióból azt kapjuk, hogy

$$\tilde{x}(t) \geq (t - z_2) \frac{1}{z} |\tilde{x}_1| \geq (t - z_2) \frac{2B}{2B - \gamma d} |\tilde{x}_1| \geq (t - z_2) \frac{B \tau d}{2B - \gamma d}, \quad \text{ha } t \in [z_2, z_1 + 2].$$

A  $t = z_2 + \gamma d/(2B) \in [z_2, z_1 + 2]$  értéket behelyettesítve adódik, hogy

$$\tilde{x} \left( z_2 + \frac{\gamma d}{2B} \right) \geq \frac{\gamma \tau d^2}{2(2B - \gamma d)}.$$

2. eset:  $1 - \gamma d/(2B) \leq z \leq 1$ . A [44] dolgozat 5. Lemmájának utolsó becslését alkalmazva látjuk, hogy

$$\tilde{x}(t) \geq \tau(t - z_2)|g(\tilde{x}_1)| \quad \text{minden } t \in [z_1 + 2, z_2 + 1] \text{ esetén.}$$

Mivel  $\tilde{x}_1 \leq -\tau d/2 < -1$ , ezért  $|g(\tilde{x}_1)| \geq d$ . A  $t = z_2 + \gamma d/(2B) \in [z_1 + 2, z_2 + 1]$  értéket behelyettesítve, azt látjuk, hogy

$$\tilde{x}\left(z_2 + \frac{\gamma d}{2B}\right) \geq \frac{\gamma \tau d^2}{2B}.$$

3. eset:  $1 \leq z \leq 3/2$ . A [44] dolgozat (24) becslésének első sorát használva azt kapjuk, hogy

$$\tilde{x}(t) \geq \tau(t - z_2)|g((2 - z)\tilde{x}_1)| \quad \text{minden } t \in [z_2, z_1 + 3] \text{ esetén.}$$

Mivel  $\tilde{x}_1 \leq -\tau d/2$  és  $\tau d \geq 4$ ,

$$|g((2 - z)\tilde{x}_1)| \geq \left|g\left(-\frac{\tau d}{4}\right)\right| \geq d.$$

Vegyük észre, hogy  $z_2 \leq z_2 + \gamma d/(2B) \leq z_1 + 3$ . Ezért

$$\tilde{x}\left(z_2 + \frac{\gamma d}{2B}\right) \geq \frac{\gamma \tau d^2}{2B}.$$

4. eset:  $z \geq 3/2$ . A [44] dolgozat (34) becslésének második sorából következik, hogy

$$\tilde{x}(t) \geq \tau(t - z_2)f\left(h\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) \quad \text{minden } t \in \left[z_2, z_2 + \frac{1}{2}\right] \text{ esetén.}$$

Használva  $\tau d > 4$ -et,  $h$  definícióját és a 3.23. Propozíciót, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{x}(t) \geq \tau(t - z_2)f(\tau d) \geq 2\tau d(t - z_2), \quad \text{ha } t \in \left[z_2, z_2 + \frac{1}{2}\right].$$

Speciálisan,

$$\tilde{x}\left(z_2 + \frac{\gamma d}{2B}\right) \geq \frac{\gamma \tau d^2}{B}.$$

Összegezve a négy esetet, és használva a  $B < 2B - \gamma d$  tulajdonságot, arra következtethetünk, hogy

$$\tilde{x}\left(z_2 + \frac{\gamma d}{2B}\right) \geq \frac{\gamma \tau d^2}{2(2B - \gamma d)}.$$

Mivel  $\tilde{x}'(t) = -\tau f(\tilde{x}(t - 1)) > 0$  minden  $t \in (z_2, z_2 + 1)$  esetén,  $\tilde{x}$  szigorúan monoton növekvő a  $[z_2, z_2 + 1]$  intervallumon. Ezért

$$\tilde{x}(t) \geq \frac{\gamma \tau d^2}{2(2B - \gamma d)} \quad \text{minden } t \in \left[z_2 + \frac{\gamma d}{2B}, z_2 + 1\right] \text{ esetén.}$$



A  $\tilde{x}$  megoldás  $z_2 + 1$ -periodicitása azt adja, hogy a fenti becslés érvényes a  $[-1 + \gamma d/(2B), 0]$  intervallumon is.

Ez és a (3.41) becslés együtt adják (3.40)-et.

Vegyük észre, hogy  $\tau d(1 - \gamma)/2$  csökken, és  $\gamma \tau d^2/(4B - 2\gamma d)$  nő, ha  $\gamma$  nő. A (3.40)-ben adott becslés maximális, ha  $\gamma$ -t úgy választjuk, hogy ez a fenti két érték egyenlő legyen, vagyis ha

$$\gamma = \frac{B + d - \sqrt{B^2 + d^2}}{d} \in (0, 1).$$

A  $\gamma$  segédparaméter ezen választásával teljes a bizonyítás.  $\square$

E szakasz fő eredménye az előző propozícióból következik.

**3.27. Következmény.** *Ha  $\tau d > 4$  és  $\beta \leq \tau(\sqrt{B^2 + d^2} - B)/2$ , ahol  $B$  az  $f$  függvény egy felső korlátja, akkor a (3.1) egyenlet bármely lassan oszcilláló periodikus megoldásának van szegmense  $\mathcal{A}(\beta)$ -ban.*

*Bizonyítás.* A 3.26. Propozíció garantálja, hogy a (3.1) egyenlet bármely  $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lassan oszcilláló periodikus megoldásához létezik egy  $\tau$  hosszúságú  $J$  intervallum úgy, hogy  $x(t) \geq \beta$  minden  $t \in J$  esetén. Legyen  $q^* \geq \sup J$  minimális úgy, hogy  $x(q^*) = \beta$ . Világos, hogy  $q^*$  létezik (mivel  $x$  folytonos, és tetszőlegesen nagy zérushelyei vannak), és akkor  $x_{q^*} \in \mathcal{A}(\beta)$ .  $\square$

## 3.7. A fejezet legfontosabb eredményeinek bizonyítása

A 3.8. és 3.9. Tételek az előző szakaszok eredményeiből következnek.

*A 3.8. Tétel bizonyítása.* Tekintsük a (3.1) egyenletet a (3.8) nemlinearitással, ahol a  $p, q, r, n$  paramétereket (3.7) szerint rögzítjük. Meg fogjuk mutatni, hogy ha  $\tau$  elég nagy, akkor (3.1)-nek egyetlen lassan oszcilláló periodikus megoldása van, melyre az  $\bar{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jelölést fogjuk használni. Ez a periodikus pálya aszimptotikusan stabil, és az alábbi halmaz a vonzási tartománya:

$$\{\phi: x^\phi\text{-nek legfeljebb egy előjelváltása van minden elég nagy } t \text{ esetén}\}.$$

Azt is megmutatjuk, hogy ha  $\bar{\omega}$  jelöli  $\bar{x}$  minimális periódusát, akkor  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\omega}/\omega = 1$ , ahol  $\omega$ -t a (3.9) pontban definiáltuk. A 3.8. Tétel ebből következik az  $\bar{y} = Ke^{\bar{x}}$  választással.

Legyen  $A = q/r - p > 0, B = p > 0, N = \lceil 1 + B/A \rceil$  és  $\tilde{N} = \lceil 1 + A/B \rceil$ . Csak azt az esetet tekintjük, amikor

$$\frac{A}{B} = \frac{q - pr}{pr} \notin \mathbb{N} \quad \text{és} \quad \frac{B}{A} = \frac{pr}{q - pr} \notin \mathbb{N}. \quad (3.42)$$

Ekkor

$$1 + \frac{B}{A} < N < 2 + \frac{B}{A} \quad \text{és} \quad 1 + \frac{A}{B} < \tilde{N} < 2 + \frac{A}{B}. \quad (3.43)$$

*Az  $\bar{x}$  lassan oszcilláló periodikus megoldás létezése.* Idézzük fel a (c.1)-(c.6) pontokból a  $c_i, i \in \{1, \dots, 6\}$ , függvényeket. Ha  $\delta$  és  $\tilde{\delta}$  definícióját behelyettesítjük  $c_i$ -be, akkor  $c_i$ -t minden

$i \in \{1, \dots, 6\}$  esetén fel tudjuk írni  $c_i = a_i\tau + b_i\beta$  alakban, ahol az  $a_i$  és  $b_i \neq 0$  együtthatók az  $A, B$  és  $\varepsilon$  paraméterek függvényei, függetlenek  $\tau$ -tól és  $\beta$ -tól. Rögzítsük  $\varepsilon > 0$ -t úgy, hogy

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{B}{2}, \frac{A+B}{N-1} - A, A - \frac{A+B}{N}, \frac{A}{2}, \frac{A+B}{\tilde{N}-1} - B, B - \frac{A+B}{\tilde{N}} \right\}. \quad (3.44)$$

A (3.43) egyenlőtlenségek garantálják, hogy a jobb oldali minimum pozitív, vagyis  $\varepsilon$  megválasztható (3.44) szerint. Könnyen ellenőrizhető, hogy ilyen  $\varepsilon$  esetén minden  $a_i$  együttható pozitív. Következésképpen, ha  $\tau$  tetszőleges pozitív szám és  $\beta = \alpha\tau$ , ahol

$$0 < \alpha < \min \left\{ \frac{a_1}{|b_1|}, \frac{a_2}{|b_2|}, \dots, \frac{a_6}{|b_6|} \right\}, \quad (3.45)$$

akkor  $c_i$  pozitív minden  $i \in \{1, \dots, 6\}$  esetén, vagyis a (c.1)-(c.6) feltételek teljesülnek.

A továbbiakban rögzítsük  $\varepsilon$ -t a fent leírt módon, és legyen  $\beta = \alpha\tau$ .

Mivel a (3.8) pontban definiált  $f$  visszacsatolási függvény szigorúan monoton nő,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -A$  és  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = B$ , ezért világos, hogy  $f \in \mathcal{N}(A, B, \alpha\tau, \varepsilon)$ , ha

$$\alpha\tau \geq \max \{f^{-1}(B - \varepsilon), -f^{-1}(-A + \varepsilon)\}.$$

Ez az egyenlőtlenség teljesül, ha  $\tau \geq \tau_1$ , ahol  $\tau_1 = \max \{f^{-1}(B - \varepsilon), -f^{-1}(-A + \varepsilon)\} / \alpha$ .

Idézzük fel, hogy  $f$ -nek egyetlen  $x^* \in \mathbb{R}$  inflexiós pontja van (lásd (3.34)-et),  $f'$  szigorúan monoton nő a  $(-\infty, x^*]$  intervallumon és szigorúan monoton csökken  $[x^*, \infty)$ -en. Ezért  $f$  Lipschitz-folytonos az

$$L(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = f'(x^*) = \frac{qn}{4r} \quad (3.46)$$

Lipschitz-konstanssal.

Következésképpen alkalmazni tudjuk a 3.4. és 3.5. szakaszok eredményeit  $\tau \geq \tau_1$ -ra. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} L(P) &= L(R)L(Q) = 3\tau L_{\alpha\tau}(1 + \delta L(f)) \left(1 + (N-1)\tau L_{-\alpha\tau}(1 + \tau L_{-\alpha\tau})^{N-2}\right) \\ &\quad \times 3\tau L_{-\alpha\tau} \left(1 + \tilde{\delta} L(f)\right) \left(1 + (\tilde{N}-1)\tau L_{\alpha\tau}(1 + \tau L_{\alpha\tau})^{\tilde{N}-2}\right) \end{aligned}$$

a  $P$  Poincaré-leképezés egy Lipschitz-konstansa.

Ha  $\tau \geq \tau_2 = x^*/\alpha$ , akkor  $\alpha\tau \geq x^*$ . Mivel  $f'$  csökkenő  $[x^*, \infty)$ -en,  $L_{\alpha\tau}$ -t választhatjuk az alábbi módon:

$$L_{\alpha\tau} = \sup_{x \in [\alpha\tau, \infty)} f'(x) = f'(\alpha\tau) = \frac{q \left(\frac{q}{p} - r\right) n}{r^2 e^{-n\alpha\tau} + 2r \left(\frac{q}{p} - r\right) + \left(\frac{q}{p} - r\right)^2 e^{n\alpha\tau}}.$$

Világos a fenti formulából, hogy  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^k L_{\alpha\tau} = 0$  bármely  $k$  pozitív egész esetén. Hasonlóan,  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau^k L_{-\alpha\tau} = 0$  bármely  $k$  pozitív egész esetén.

$p =$	$q =$	$r =$	$n =$	$\tau \geq$
2.8	6	1.3	19	5.16
2.8	6.9	0.9	25	2.41
2.8	6.9	0.9	2	23.68
1.9	4.2	0.8	20	3.88
0.7	1.3	0.7	30	8.84
1.9	6.9	0.8	15	8.16
6.6	9.3	0.4	10	2.63
3	5.3	1.3	15	9.71
8.8	5.9	0.5	20	8.52
9	6.4	0.4	5	6.62
9	6.4	0.4	2	16.54

3.1. táblázat. Olyan paraméterértékek, melyekre igaz a 3.8. Tétel

Mivel  $L(f)$ ,  $N$ ,  $\tilde{N}$  független  $\tau$ -tól, valamint  $\delta$  és  $\tilde{\delta}$  lineáris függvényei  $\beta = \alpha\tau$ -nak, azt kapjuk, hogy  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} L(P) = 0$ . Ezért létezik  $\tau_3 \geq \max\{\tau_1, \tau_2\}$  úgy, hogy  $L(P) < 1$  minden  $\tau > \tau_3$  esetén, és ennél fogva  $P$  kontrakció  $\mathcal{A}(\alpha\tau)$ -n.  $P$  egyetlen  $\mathcal{A}(\alpha\tau)$ -beli fixpontja egy  $\bar{x}$  periodikus megoldás kezdeti szegmense. Világos a konstrukcióból, hogy  $\bar{x}$  lassan oszcilláló periodikus megoldás.

*Egyértelműség.* Feltehetjük, hogy korábban úgy rögzítettük az  $\alpha$  paramétert, hogy az  $\alpha \leq (\sqrt{B^2 + d^2} - B)/2$  egyenlőtlenség is teljesül. Ha  $\tau d > 4$ , ahol  $d$ -t a 3.23. Propozícióban definiáltuk, akkor a 3.27. Következmény alapján (3.1) minden lassan oszcilláló periodikus megoldásának van szegmense  $\mathcal{A}(\alpha\tau)$ -ban. Ezért minden lassan oszcilláló periodikus megoldás  $P$  fixpontjából származik. A  $P$  leképezés fixpontjainak egyértelműségéből következik a lassan oszcilláló periodikus megoldások egyértelműsége  $\tau > \max\{\tau_3, 4/d\}$  esetén.

*Stabilitás.* Kaplan és Yorke bizonyította, hogy a lassan oszcilláló periodikus megoldás egyértelműségéből  $\tau > \pi/(2f'(0))$  esetén következik az orbitális aszimptotikus stabilitás, lásd a [19] dolgozat 2.1. Tételét és 2.5. Megjegyzését. Vegyük észre, hogy a korábban szereplő  $\tau > 4/d$  feltétel és  $d$  definíciója garantálja, hogy  $\tau > \pi/(2f'(0))$ . A vonzási tartományt [19] szintén meghatározta.

*Minimális periódus.* Az  $\bar{x}$  megoldás minimális periódusára vonatkozó állítás a [44] dolgozat 1. Tételéből következik.

A 3.8. Tétel bizonyítását könnyen módosíthatjuk a 3.15. Megjegyzés alapján abban az esetben, amikor  $A/B$  vagy  $B/A$  egész szám.  $\square$

Az 3.1. táblázat olyan paraméterértékeket sorol fel, amelyekre igaz a 3.8. Tétel.

Csak kisebb módosításokra van szükségünk a 3.9. Tétel (i). állításának igazolásához.

*A 3.9. Tétel (i). állításának bizonyítása.* Tekintsük a (3.1) egyenletet a (3.8) nemlinearitással, ahol a  $p, q, r, n$  paramétereket a (3.7)-ben leírt módon rögzítjük úgy, hogy  $\tau \min\{p, q/r - p\} > 8$  is teljesül. Legyen  $A, B, N, \tilde{N}$  olyan, mint eddig, és tegyük fel (3.42)-t.

Az  $\bar{x}$  lassan oszcilláló periodikus megoldás létezése. Válasszuk  $\varepsilon$ -t és  $\beta$ -t úgy, mint az előző bizonyításban: legyen  $\varepsilon > 0$  olyan kicsi, hogy (3.44) teljesül, továbbá legyen  $\beta = \alpha\tau$ , ahol  $\alpha$  kielégíti (3.45)-öt, és

$$\alpha < \frac{1}{2} \left( \sqrt{B^2 + \frac{\min\{A, B\}^2}{4}} - B \right). \quad (3.47)$$

Ekkor teljesülnek a (c.1)-(c.6) feltételek. Hangsúlyozzuk, hogy most nem csupán  $\varepsilon$ , de  $\beta$  és  $\tau$  is rögzítve van.

Vegyük észre, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(-\beta) = -A$  és  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\beta) = B$ . Ez és  $f$  monotonitása együtt azt adja, hogy  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ , ha  $n$  elég nagy.

A 3.4. és 3.5. szakasz alapján a  $P$  Poincaré-leképezés Lipschitz-folytonos a (3.32)-ben megadott  $L(P)$  Lipschitz-konstanssal. Azt állítjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P) = 0$ . Először idézzük fel (3.46)-ból, hogy  $L(f)$ -et tudjuk úgy választani, hogy  $n$  lineáris függvénye legyen. Továbbá, ha  $n$  elég nagy, akkor  $\beta > x^*$  (lásd (3.34)-et), és ennél fogva

$$L_\beta = \sup_{x \in [\beta, \infty)} f'(x) = f'(\beta) = \frac{q \left( \frac{q}{p} - r \right) n}{r^2 e^{-n\beta} + 2r \left( \frac{q}{p} - r \right) + \left( \frac{q}{p} - r \right)^2 e^{n\beta}}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k L_\beta = 0$  bármely pozitív egész  $k$  esetén. Hasonlóan igaz, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k L_{-\beta} = 0$  bármely pozitív egész  $k$  esetén. Mivel  $\tau, N, \tilde{N}, \delta$  és  $\tilde{\delta}$  független  $n$ -től, ezért (3.32) alapján azt látjuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} L(P) = 0$ . Tehát  $L(P) < 1$ , ha  $n$  elég nagy. A  $P$  leképezés egyetlen fixpontja  $\mathcal{A}(\beta)$ -ban egy  $\bar{x}$  lassan oszcilláló periodikus megoldás kezdeti szegmense.

*Egyértelműség.* Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} \min\{-f(-1), f(1), f'(0)\} \\ &= \frac{1}{2} \min \left\{ -p + \frac{q}{r + \left( \frac{q}{p} - r \right) e^{-n}}, p - \frac{q}{r + \left( \frac{q}{p} - r \right) e^n}, \frac{pn(q - pr)}{q} \right\} \end{aligned}$$

konvergál  $\min\{p, q/r - p\}/2 = \min\{A, B\}/2$ -hez, ha  $n \rightarrow \infty$ . Ezért a  $\tau \min\{p, q/r - p\} > 8$  feltételből következik, hogy  $\tau d > 4$ , ha  $n$  elég nagy. Emellett a (3.47) egyenlőtlenség garantálja, hogy  $\beta = \alpha\tau \leq \tau(\sqrt{B^2 + d^2} - B)/2$ , ha  $n$  elég nagy. Így a 3.27. Következmény biztosítja a lassan oszcilláló periodikus megoldás egyértelműségét nagy  $n$  esetén.

*Stabilitás.* A periodikus megoldás stabilitása pont úgy igazolható, mint a 3.8. Tételben.

Legyen  $\bar{y} = Ke^{\bar{x}}$ . Összegezve a fenti gondolatmenetet, létezik egy  $n_0$  küszöbszám úgy, hogy a 3.8. Tétel (i). állítása teljesül minden  $n > n_0$  esetén. A bizonyítás könnyen módosítható, ha a (3.42) feltétel nem igaz.  $\square$

Végül igazoljuk a minimális periódusra és a periodikus megoldás aszimptotikus alakjára vonatkozó állításokat.

A 3.9. Tétel (ii). állításának bizonyítása. A 3.9. Tétel (i). állításának bizonyításában úgy választottuk a  $\beta, \varepsilon$  és  $n_0$  paramétereket, hogy  $n > n_0$  esetén  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta, \varepsilon)$ , és a (3.1) egyenletnek egyetlen lassan oszcilláló periodikus megoldása van:  $\bar{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Most legyen  $\eta_1 > 0$  és  $\eta_2 > 0$  tetszőleges. Válasszuk a  $\beta' \in (0, \beta]$  és  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$  paramétereket úgy, hogy

$$\delta = \frac{2\beta'}{B - \varepsilon'} < \frac{B}{A} \tau \quad \text{és} \quad \tilde{\delta} = \frac{2\beta'}{A - \varepsilon'} < \frac{A}{B} \tau, \quad (3.48)$$

$$\frac{1}{A - \varepsilon'}(2\beta' + N\varepsilon'\tau + (A + B)\delta) + \frac{1}{B - \varepsilon'}(2\beta' + \tilde{N}\varepsilon'\tau + (A + B)\tilde{\delta}) < \eta_1 \quad (3.49)$$

és

$$\left(1 + \frac{\max\{A, B\}}{A - \varepsilon'}\right)(2\beta' + N\varepsilon'\tau + (A + B)\delta) < \eta_2. \quad (3.50)$$

A 3.11., 3.12., 3.13. és 3.14. Propozíciókat szeretnénk használni a  $\beta'$  és  $\varepsilon'$  paraméterekkel. Idézzük fel, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = -A \quad \text{minden } x < 0 \text{ esetén,}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = B \quad \text{minden } x > 0 \text{ esetén.}$$

Az  $f$  függvény monotonitásából következik, hogy létezik  $n_1 = n_1(\beta', \varepsilon') > n_0$  úgy, hogy  $f \in \mathcal{N}(A, B, \beta', \varepsilon')$  bármely  $n > n_1$ -re. Továbbá, mivel  $\bar{x}$  kezdeti szegmense  $\mathcal{A}(\beta)$  eleme (bármely  $n > n_1$  esetén), és az  $\bar{x}$  megoldás 0 körül oszcilláló folytonos függvény, ezért létezik  $T = T(\beta')$  úgy, hogy  $\bar{x}_T \in \mathcal{A}(\beta')$ . Ezért valóban alkalmazhatjuk a 3.11., 3.12., 3.13. és 3.14. Propozíciókat minden  $n > n_1$  esetén a fent választott  $\beta'$ -vel és  $\varepsilon'$ -vel.

A konstrukcióból következik, hogy  $\bar{x}$  minimális periódusa  $\bar{\omega} = q + \tilde{q}$ . A (3.48) feltétel biztosítja, hogy használhatjuk a (3.22) és a (3.26) becsléseket a 3.12. és 3.14. Propozíciókból. Ezek és a (3.49) feltétel együtt azt adják, hogy minden  $n > n_1$  esetén

$$|\bar{\omega} - \omega| = |q + \tilde{q} - \omega| \leq |q - \sigma| + |\tilde{q} - (\omega - \sigma)| < \eta_1.$$

A 3.11. Propozíció (3.14) állításából és (3.50)-ból következik, hogy

$$|\bar{x}(t + T) - v(t)| \leq \beta' + N\varepsilon'\tau + (A + B)\delta < \eta_2 \quad \text{minden } t \in [0, N\tau] \text{ esetén,}$$

ahol  $v$  az 3.10. Propozícióban definiált  $\omega$ -periodikus függvény. A 3.10. Propozícióból látjuk,

hogy  $v$  Lipschitz-folytonos a  $\max\{A, B\}$  Lipschitz-konstanssal. Ennélfogva, (3.25) alapján,

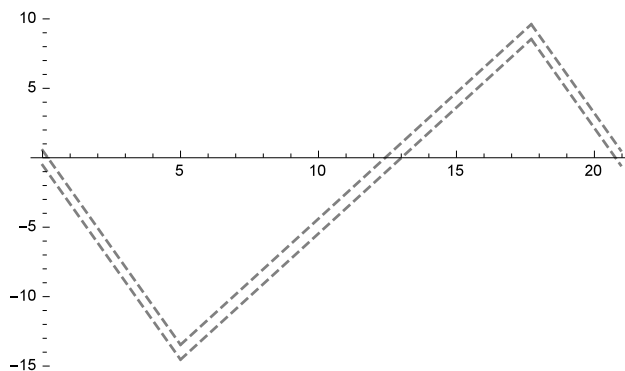
$$\begin{aligned} |\bar{x}(t+q+T) - v(t+q)| &\leq |\bar{x}(t+q+T) - v(t+\sigma)| + |v(t+q) - v(t+\sigma)| \\ &\leq \beta' + \tilde{N}\varepsilon'\tau + (A+B)\tilde{\delta} + \max\{A, B\}|q-\sigma| \end{aligned}$$

minden  $t \in [0, \tilde{q}] \subset [0, \tilde{N}\tau]$  esetén. Az (3.22) és (3.50) egyenlőtlenségek alapján ez kisebb, mint

$$\beta' + \tilde{N}\varepsilon'\tau + (A+B)\tilde{\delta} + \frac{\max\{A, B\}}{A-\varepsilon'}(2\beta' + N\varepsilon'\tau + (A+B)\delta) < \eta_2.$$

Az utolsó két becslés azt adja, hogy  $|\bar{x}(t+T) - v(t)| \leq \eta_2$  minden  $t \in [0, \bar{\omega}]$  esetén. Mivel  $\bar{y} = Ke^{\bar{x}}$ , a bizonyítás teljes.  $\square$

A 3.3. ábrán egy konkrét példában alkalmazzuk a 3.9. Tétel (ii). állítását.



3.3. ábra. A (3.1) egyenlet lassan oszcilláló  $\bar{x}$  periodikus megoldásának alsó és felső becslése  $p = 2,8$ ,  $q = 6$ ,  $r = 1,3$ ,  $\tau = 5$  és  $n = 350$  esetén. Ezekre a paraméterértékekre  $|\bar{x}(t) - v(t)| < 0.54$  minden  $t \in [0, \bar{\omega}]$  esetén.

## 4. fejezet

# Összefoglalás

A disszertáció a

- Beretka Sz., Vas G., Saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation, *J. Differential Equations* 269 (2020), no. 5, 4215-4252.
- Beretka Sz., Vas G., Stable periodic solutions for Nazarenko's equation, *Communications on Pure & Applied Analysis* 19 (2020), no. 6, 3257-3281.

publikációkra épül. Ezeket a dolgozatokat egy rövid bevezetés után a 2. és 3. fejezetekben ismertetjük.

### Periodikus pályák bifurkációja pozitív visszacsatolás esetén

A 2. fejezetben a *Saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation* című dolgozatot mutatjuk be. Az

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f_K(x(t-1)), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

egyenlet periodikus megoldásait vizsgáljuk, ahol az  $f_K$  visszacsatolási függvény folytonos, nem-csökkenő, és függ egy  $K$  paramétértől. Ha  $f_K$ -nak több olyan fixpontja van, amelyben  $f'_K$  nagyobb 1-nél (és ezáltal a dinamikai rendszer több instabil egyensúlyi helyzettel rendelkezik), akkor nagy amplitúdójúnak hívjuk azon periodikus megoldásokat, amelyek legalább két ilyen fixpont körül oszcillálnak. A 2. fejezet legfontosabb eredménye, hogy – egy adott, szakaszonként lineáris  $f_K$  esetén – nagy amplitúdójú periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja megy végbe  $K$  növelésével.

A 2.1. szakaszban a kutatásunkat motiváló korábbi eredményeket tekintjük át. Részletesebben foglalkozunk Krisztin Tibor és Vas Gabriella [24, 25, 53] dolgozataival. A [24] dolgozatban Krisztin és Vas egy pár nagy amplitúdójú periodikus pálya létezését bizonyította egy speciális, folytonosan differenciálható és szigorúan monoton  $f_K$  esetén. A [25] dolgozatban e nagy amplitúdójú periodikus pályák instabil halmazainak geometriai tulajdonságait írták le. A [53] dolgozatban pedig Vas mutatta be nagy amplitúdójú periodikus pályák összetettebb konstrukcióit.

Krisztin és Vas ezen munkái nem magyarázták meg, hogyan keletkeznek a nagy amplitúdójú pályák. Nyilvánvalóan nem jöhetnek létre Hopf-bifurkáció révén valamely egyensúlyi helyzet kis környezetében.

A 2.2. szakaszban ismertetjük a 2. fejezet fő eredményét, miszerint a nagy amplitúdójú periodikus pályák nyereg-csomó bifurkáció által születnek, ha

$$f_K(x) = \begin{cases} K, & x \geq 1 + \varepsilon, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x - 1), & 1 \leq x < 1 + \varepsilon, \\ 0, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x + 1), & -1 - \varepsilon \leq x < -1, \\ -K, & x < -1 - \varepsilon. \end{cases}$$

A következő tételt igazoljuk a fenti visszacsatolási függvényre:

**2.3. Tétel.** *(Periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációja) Minden elég kicsi pozitív  $\varepsilon$ -hoz megadható egy  $K^* = K^*(\varepsilon) \in (6.5, 7)$  küszöbszám, a (2.2) egyenletnek egy  $p = p(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nagy amplitúdójú periodikus megoldása a  $K = K^*$  paraméterre, a  $p_0$  kezdeti szegmensnek egy  $B = B(\varepsilon)$  környezete  $C$ -ben és egy  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  konstans úgy, hogy az alábbiak teljesülnek.*

(i) *Ha  $K \in (K^* - \delta, K^*)$ , akkor a (2.2) egyenletnek nincs olyan periodikus pályája, amely áthalad  $B$ -n.*

(ii) *Ha  $K = K^*$ , akkor  $\mathcal{O} = \{p_t : t \in \mathbb{R}\}$  az egyetlen periodikus pálya, melynek szegmense van  $B$ -ben.*

(iii) *Ha  $K \in (K^*, K^* + \delta)$ , akkor pontosan két nagy amplitúdójú periodikus pályának van szegmense a  $B$  halmazban.*

A tételben szereplő periodikus megoldások lassan oszcillálnak abban az értelemben, hogy egy vagy két előjelváltásuk van minden egy hosszú intervallumon. Sejtésünk szerint ezek a periodikus pályák instabilak. Ezt az az eredmény támasztja alá, hogy (2.2) minden periodikus pályája instabil, ha  $f_K$  folytonosan differenciálható, és a deriváltja nemnegatív [53].

Tudomásunk szerint ez az első olyan eredmény, amely periodikus pályák nyereg-csomó bifurkációját igazolja pozitív visszacsatolású késleltetett differenciálegyenletek esetén. Hasonló, publikálás előtt álló eredménye van López Nietonak késleltetett differenciálegyenletek egy másik osztályára [36].

A bizonyítás a következő lépésekből áll. Legyen  $K \in (6.5, 7)$  és  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

A 2.3. szakaszban bevezetünk egy olyan nagy amplitúdójú  $p$  periodikus függvényt, amely előáll valamely  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  segédfüggvények konkatenációjaként. Ha  $p$  megoldása a (2.2) késleltetett differenciálegyenletnek, akkor  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  kielégít egy közönséges differenciálegyenlet-rendszert peremfeltételekkel. Ezt az egyenletrendszert végül egyetlen  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$  fixpontegyenletre redukáljuk, ahol az  $L_2$  a  $p$  periodikus függvényt leíró paraméter. Tehát (2.2) bizonyos periodikus megoldásai  $F(\cdot, K, \varepsilon)$  fixpontjait adják.



A 2.4. szakaszban igazoljuk a fordított állítást:  $F(\cdot, K, \varepsilon)$  minden elég kicsi pozitív fixpontja a (2.2) egyenlet egy nagy amplitúdójú periodikus megoldásának felel meg.

Ezután a 2.5. szakaszban megmutatjuk, hogy  $F$  nyereg-csomó bifurkáción megy át, ahogy  $K$  nő,  $\varepsilon > 0$  pedig elég kicsi fix szám. Itt szükségünk van  $F$  parciális deriváltjainak vizsgálatára. Ezek a számítások a Függelékben szerepelnek.

A fenti lépéseken kívül fontos az a részeredmény is, hogy lokálisan (egy  $C$ -beli nyitott gömbben) minden periodikus megoldás  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  segédfüggvények konkatenációjaként áll elő, és ezáltal  $F(\cdot, K, \varepsilon)$  fixpontjának felel meg. Ennek igazolása a 2.6. szakaszban található.

A 2.7. szakasz röviden igazolja, hogy a 2.3. Tétel következik a felsorolt részeredményekből.

## Periodikus pályák egy negatív visszacsatolású egyenletre

A 3. fejezetben a *Stable periodic solutions for Nazarenko's equation* című dolgozatot mutatjuk be. Tekintsük a

$$\dot{y}(t) + py(t) - \frac{qy(t)}{r + y^n(t - \tau)} = 0, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

Nazarenko-egyenlet [40] a

$$p, q, r, \tau \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad \text{és} \quad \frac{q}{p} > r \quad (3.7)$$

feltételek mellett. Könnyen látható, hogy  $K = (q/p - r)^{1/n}$  adja az egyetlen pozitív egyensúlyi helyzetet. A  $K$  körül lassan oszcilláló pozitív periodikus megoldásokat vizsgáljuk, tehát olyan  $y$  pozitív periodikus megoldásokat, amelyekre  $t \mapsto y(t) - K$  szomszédos zérushelyeinek távolsága nagyobb  $\tau$ -nál.

Az  $x = \ln y - \ln K$  transzformációval a fenti egyenlet felírható

$$x'(t) = -f(x(t - \tau)) \quad (3.1)$$

alakban, ahol

$$f(x) = p - \frac{q}{r + \left(\frac{q}{p} - r\right) e^{nx}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

A transzformált egyenlet esetén értelemszerűen a 0 körüli lassan oszcilláló periodikus megoldásokra összpontosítunk.

A 3. fejezet felépítése a következő.

A 3.1. szakaszban összefoglaljuk a (3.1) egyenlettel kapcsolatos ismereteinket számos különböző típusú  $f$  visszacsatolási függvény esetén. Egy fontos eredmény: Nussbaum igazolta a lassan oszcilláló periodikus megoldás globális létezését a (3.1) alakú egyenletekre és a visszacsatolási függvények széles, (3.8)-et tartalmazó osztályára. Nussbaum [42, 41] dolgozataiból tudjuk, hogy (3.1)-nek  $\tau > \tau_0 = \pi/(2f'(0))$  esetén van legalább egy lassan oszcilláló periodikus

megoldása.

A részletes elméleti összefoglaló után a 3.2. szakaszban rátérünk a (3.6) Nazarenko-egyenlettel kapcsolatos eredmények ismertetésére. Song, Wei és Han [49]-ban belátták, hogy Hopf-bifurkáció történik a következő paraméterértékekre:

$$\tau_k = \frac{1}{f'(0)} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{q}{np(q - pr)} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \geq 0.$$

Igazolták a periodikus megoldások globális létezését is: (3.6)-nek legalább  $k$  periodikus megoldása van, ha  $\tau > \tau_k$ ,  $k \geq 1$ . Balázs és Röst [2] dolgozata alapján könnyen kiszámolható, hogy az összes Hopf-bifurkáció szuperkritikus.

Song és szerzőtársai nem tudták meghatározni a periodikus pályák stabilitását a bifurkációs pontoktól távol eső  $\tau$  paraméterekre. A lassan oszcilláló periodikus megoldás unicitását sem vizsgálták. (A periodikus megoldás egyértelműsége természetesen időbeli eltolás erejéig értendő.) Megjegyezzük, hogy bár (3.1) lassan oszcilláló periodikus megoldásának unicitásával kapcsolatban számos eredmény ismert (például a [6, 45] dolgozatok), ezek egyike sem alkalmazható a (3.8) nemlinearitásra.

A 3. fejezetben az egyértelműség és a stabilitás kérdését tanulmányozzuk, és az alábbi két tételt igazoljuk.

**3.8. Tétel.** *Legyenek a  $p, q, r$  és  $n$  paraméterek olyanok, ahogy a (3.7) feltételben szerepelnek. (i) Ha  $\tau > 0$  elég nagy, akkor (3.6)-nek egyetlen olyan pozitív  $\bar{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodikus megoldása létezik, amely lassan oszcillál  $K$  körül. Ez a periodikus pálya aszimptotikusan stabil, és az alábbi halmaz része a vonzási tartományának:*

$$\left\{ \phi : y^\phi(t) > 0, \text{ ha } t \geq -\tau, \text{ és } y_t^\phi - K\text{-nak legfeljebb egy előjelváltása van nagy } t \text{ esetén} \right\}.$$

(ii) Ha  $\bar{\omega}$  jelöli  $\bar{y}$  minimális periódusát, és

$$\omega = \left( 2 + \frac{q - pr}{pr} + \frac{pr}{q - pr} \right) \tau, \quad (3.9)$$

akkor  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\omega}/\omega = 1$ .

A 3. fejezet második legfontosabb tételében a  $p, q, r$  és  $\tau$  paramétereket rögzítjük, és meghatározzuk a periodikus megoldás aszimptotikus alakját, ahogy  $n \rightarrow \infty$ .

**3.9. Tétel.** *Legyenek a  $p, q, r$  és  $n$  paraméterek olyanok, ahogy a (3.7) feltételben szerepelnek. Tegyük fel továbbá, hogy  $\tau \min\{p, q/r - p\} > 8$  is teljesül.*

(i) A 3.8. Tétel (i). állítása igaz minden elég nagy  $n$  esetén.

(ii) Defináljuk a  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt a

$$[0, \omega] \ni t \mapsto \begin{cases} -pt, & 0 \leq t < \tau, \\ \left(\frac{q}{r} - p\right)t - \frac{q}{r}\tau, & \tau \leq t < \left(2 + \frac{pr}{q-pr}\right)\tau, \\ -pt + \left(\frac{q}{r} + p + \frac{p^2r}{q-pr}\right)\tau, & \left(2 + \frac{pr}{q-pr}\right)\tau \leq t < \omega \end{cases} \in \mathbb{R}$$

függvény  $\omega$ -periodikus kiterjesztéseként, ahol  $\omega - t$  (3.9)-ben adtuk meg. Jelölje  $\bar{\omega}$  az (i). pontban kapott  $\bar{y}$  periodikus megoldás minimális periódusát. Legyen  $\eta_1 > 0$  és  $\eta_2 > 0$  tetszőleges. Ha  $n$  elég nagy, akkor létezik  $T \in \mathbb{R}$  úgy, hogy  $|\bar{\omega} - \omega| < \eta_1$ , és

$$\left| \ln \frac{\bar{y}(t+T)}{K} - v(t) \right| < \eta_2 \quad \text{minden } t \in [0, \bar{\omega}] \text{ esetén.}$$

A két tétel hasonlóan igazolható; a bizonyítások lépéseit a 3.3.–3.7. szakaszokban olvashatjuk. A bizonyítás során az egyenletet (3.1) alakban vizsgáljuk a (3.8) nemlinearitással.

Mivel  $\lim_{nx \rightarrow -\infty} f(x) = p - q/r$  és  $\lim_{nx \rightarrow \infty} f(x) = p$ , ezért először a  $v'(t) = -g(v(t - \tau))$  "határegyenlet" egy lassan oszcilláló periodikus megoldását számoljuk ki a 3.3. szakaszban, ahol

$$g(v) = \begin{cases} p - \frac{q}{r}, & v < 0, \\ 0, & v = 0, \\ p, & v > 0. \end{cases}$$

Ezután úgy tekintjük a (3.8) nemlinearitást mint  $g$  perturbációját. A 3.4. szakaszban Walter [56]-ban bemutatott módszerét követjük, hogy információt nyerjünk (3.1) azon megoldásairól, amelyek kezdeti szegmensei az

$$\mathcal{A}(\beta) = \{\phi \in C : \phi(t) \geq \beta \text{ minden } -\tau \leq t \leq 0 \text{ esetén, } \phi(0) = \beta\} \subseteq C$$

halmazba esnek. Becslést adunk ezen megoldások és határegyenlet periodikus megoldásának különbségére egy véges intervallumon. Megmutatjuk, hogy a paraméterek megfelelő választása esetén az  $\mathcal{A}(\beta)$ -ból induló megoldások visszatérnek  $\mathcal{A}(\beta)$ -ba.

Az előző szakasz alapján bevezethetjük a  $P : \mathcal{A}(\beta) \rightarrow \mathcal{A}(\beta)$  Poincaré-leképezést. Világos, hogy a  $P$  leképezés tetszőleges fixpontja egy lassan oszcilláló periodikus megoldás kezdeti szegmense. A 3.5. szakaszban igazoljuk, hogy  $P$  Lipschitz-folytonos, és meghatározunk egy  $L(P)$  Lipschitz-konstanst  $P$ -hez.

A 3.6. szakaszban Nussbaum [44] eredményeit felhasználva megmutatjuk, hogy minden lassan oszcilláló periodikus megoldásnak van szegmense  $\mathcal{A}(\beta)$ -ban, és ezáltal előáll  $P$  fixpontjaként.

A 3.7. szakaszból kiderül, hogy ha  $\tau$  vagy  $n$  elég nagy, akkor  $L(P) < 1$ , azaz  $P$  kontrakció. Tehát  $P$ -nek pontosan egy fixpontja van  $\mathcal{A}(\beta)$ -ban. A tételek többi állításai is könnyen levezethetőek a fenti szakaszok részeredményeiből. A stabilitás – Kaplan és Yorke [19] dolgozata alapján – az unicitás azonnali következménye.

## 5. fejezet

### Summary

The dissertation is based on the following two papers:

- Sz. Beretka, G. Vas, Saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation, *J. Differential Equations* 269 (2020), no. 5, 4215-4252.
- Sz. Beretka, G. Vas, Stable periodic solutions for Nazarenko's equation, *Communications on Pure & Applied Analysis* 19 (2020), no. 6, 3257-3281.

We give a review of these papers in Chapters 2 and 3.

#### Bifurcation of periodic orbits in case of positive feedback

In Chapter 2 we expound the paper with title *Saddle-Node Bifurcation of Periodic Orbits for a Delay Differential Equation*.

We investigate the periodic solutions of the equation

$$\dot{x}(t) = -x(t) + f_K(x(t-1)), \quad t > 0, \quad (2.2)$$

where the feedback function  $f_K$  is a nondecreasing continuous function depending on parameter  $K$ . If  $f_K$  has more fixed points at which its derivative is greater than 1 (and hence the dynamical system has more unstable equilibria), then we say that a periodic solution has large amplitude if it oscillates about at least two such fixed points. The main result of Chapter 2 is that – for a given piecewise linear function  $f_K$  – large-amplitude periodic orbits of (2.2) arise via saddle-node bifurcation as  $K$  increases.

In Section 2.1 we summarize the most relevant previous results motivating our research. We discuss the works [24, 25, 53] of Krisztin and Vas in detail. The existence of a pair of large-amplitude periodic orbits has been first shown in [24] by Krisztin and Vas for a continuously differentiable and strictly decreasing  $f_K$ . The paper [25] has described the complicated geometric structure of the unstable set of a large-amplitude periodic orbit in detail. More complicated configurations of such periodic orbits have appeared in [53]. These works have not

explained how these periodic orbits bifurcate as the parameter  $K$  changes. Apparently they cannot appear via Hopf bifurcation in a neighborhood of an equilibrium.

One can read the main result of Chapter 2 in Section 2.2, which states that the large amplitude periodic orbits arise via a saddle-node bifurcation if

$$f_K(x) = \begin{cases} K, & x \geq 1 + \varepsilon, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x - 1), & 1 \leq x < 1 + \varepsilon, \\ 0, & -1 \leq x < 1, \\ \frac{K}{\varepsilon}(x + 1), & -1 - \varepsilon \leq x < -1, \\ -K, & x < -1 - \varepsilon. \end{cases}$$

We prove the following theorem with the feedback function given above.

**Theorem 2.3.** (*Saddle-node bifurcation of periodic orbits*) *For all sufficiently small positive  $\varepsilon$ , one can give a threshold parameter  $K^* = K^*(\varepsilon) \in (6.5, 7)$ , a large-amplitude periodic solution  $p = p(\varepsilon) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  of (2.2) for parameter  $K = K^*$ , an open neighborhood  $B = B(\varepsilon)$  of its initial segment  $p_0$  in  $C$ , and a constant  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  such that*

- (i) *if  $K \in (K^* - \delta, K^*)$ , then no periodic orbit for (2.2) has segments in  $B$ ;*
- (ii) *if  $K = K^*$ , then  $\mathcal{O} = \{p_t : t \in \mathbb{R}\}$  is the only periodic orbit with segments in  $B$ ;*
- (iii) *if  $K \in (K^*, K^* + \delta)$ , then there are exactly two periodic orbits with segments in  $B$ , and both of them are of large-amplitude.*

The periodic solutions in the theorem oscillate slowly in the sense that they change sign one or two times in any interval of length one. We suspect that these periodic orbits are unstable. This conjecture is based on a result in [53] stating that all periodic orbits for (2.2) are unstable if  $f_K$  is continuously differentiable and its derivative is non-negative.

By our current knowledge, Theorem 2.3 is the first result that proves a saddle-node bifurcation of periodic orbits for a delay differential equation with positive feedback. López Nieto has come to a similar result for a different class of delay differential equations [36].

The proof is organized as follows. Let  $K \in (6.5, 7)$  and  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

In Section 2.3 we introduce a large amplitude periodic function  $p$  as a concatenation of auxiliary functions  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ . If  $p$  is a solution of the delay differential equation (2.2), then  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$  satisfy a system of ordinary differential equations with boundary conditions. We reduce this system to a fixed point equation  $F(L_2, K, \varepsilon) = L_2$ , where  $L_2$  is a parameter characterizing  $p$ . Therefore certain periodic solutions of (2.2) give fixed points of  $F(\cdot, K, \varepsilon)$ .

In Section 2.4 we verify the converse statement: all sufficiently small positive fixed points of  $F(\cdot, K, \varepsilon)$  yield large amplitude periodic solutions of (2.2).

Then we show in Section 2.5 that  $F$  undergoes a saddle-node bifurcation as  $K$  varies and  $\varepsilon$  is a fixed sufficiently small positive number. Here we need to examine the partial derivatives of  $F$ . These calculations are found in the Appendix.

We also need to show that locally (in an open ball in  $C$ ) all periodic solutions can be obtained as concatenation of some auxiliary functions  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ , and hence they come from fixed points of  $F(\cdot, K, \varepsilon)$ . This is done in Section 2.6.

In Section 2.7 we show that Theorem 2.3 easily follows from these partial results.

## Periodic orbits for an equation with negative feedback

In Chapter 3 we study the paper *Stable periodic solutions for Nazarenko's equation*. Consider the Nazarenko-equation [40]

$$\dot{y}(t) + py(t) - \frac{qy(t)}{r + y^n(t - \tau)} = 0, \quad t > 0, \quad (3.6)$$

under the assumption that

$$p, q, r, \tau \in (0, \infty), \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\} \quad \text{and} \quad \frac{q}{p} > r. \quad (3.7)$$

It is easy to see that there is a unique positive equilibrium besides the trivial one, and it is given by  $K = (q/p - r)^{1/n}$ . We focus on those positive periodic solutions that oscillate slowly about  $K$ , i.e., only those positive periodic solutions  $y$ , for which all zeros of  $t \mapsto y(t) - K$  are spaced at distances greater than the delay  $\tau$ .

We apply the transformation  $x = \ln y - \ln K$ . Thereby we obtain the equation

$$x'(t) = -f(x(t - \tau)), \quad (3.1)$$

where the feedback function  $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  is defined as

$$f(x) = p - \frac{q}{r + \left(\frac{q}{p} - r\right) e^{nx}} \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Then we focus on those periodic solutions which oscillate slowly about 0 (SOP solutions).

Chapter 3 is organized as follows.

In Section 3.1 we give a general theoretical overview for equation (3.1) with different feedback functions  $f$ . An important result: Nussbaum has verified the global existence of SOP solutions for equations of the form (3.1) and for a wide class of feedback functions containing (3.8). From papers [42, 41] of Nussbaum we know that equation (3.1) has at least one SOP solution if  $\tau > \tau_0 = \pi/2f'(0)$ .

After this detailed introduction, we summarize the most relevant results regarding equation (3.6) in Section 3.2. Song, Wei and Han showed in [49] that a series of Hopf bifurcations takes

place at the positive equilibrium as  $\tau$  passes through the critical values

$$\tau_k = \frac{1}{f'(0)} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = \frac{q}{np(q - pr)} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \quad k \geq 0.$$

They also verified the global existence of the bifurcating periodic solutions: equation (3.6) has at least  $k$  periodic solutions if  $\tau > \tau_k$ ,  $k \geq 1$ . Using paper [2] of Balázs and Röst, it is easy to show that all Hopf bifurcations are supercritical.

Song and his coauthors could not determine the stability of the periodic orbits for  $\tau$  far away from the local Hopf bifurcation values. Uniqueness of the SOP solution has not been studied either. (Of course, uniqueness of the periodic solution is always meant up to time translation.) One can find many results on uniqueness in the literature (see e.g. [6, 45]), but these are not applicable for the nonlinearity (3.8). In Chapter 3 we focus on these questions and verify the following two theorems.

**Theorem 3.8.** *Set  $p, q, r$  and  $n$  as in (3.7).*

(i) *If  $\tau > 0$  is large enough, then equation (3.6) has a unique positive periodic solution  $\bar{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oscillating slowly about  $K$ . The corresponding periodic orbit is asymptotically stable, and it attracts the set*

$$\left\{ \phi : y^\phi(t) > 0 \text{ for } t \geq -\tau, y_t^\phi - K \text{ has at most one sign change for large } t \right\}.$$

(ii) *If  $\bar{\omega}$  denotes the minimal period of  $\bar{y}$ , and*

$$\omega = \left( 2 + \frac{q - pr}{pr} + \frac{pr}{q - pr} \right) \tau, \quad (3.9)$$

*then  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\omega}/\omega = 1$ .*

In the second main theorem of Chapter 3, we fix  $p, q, r$  and  $\tau$ , and we determine the asymptotic shape of the periodic solution as  $n \rightarrow \infty$ .

**Theorem 3.9.** *Set  $p, q, r$  and  $\tau$  such that (3.7) and  $\tau \min\{p, q/r - p\} > 8$  hold.*

(i) *Theorem 3.8.(i) is true for all sufficiently large  $n$ .*

(ii) *Define  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as the  $\omega$ -periodic extension of the piecewise linear function*

$$[0, \omega] \ni t \mapsto \begin{cases} -pt, & 0 \leq t < \tau, \\ \left(\frac{q}{r} - p\right)t - \frac{q}{r}\tau, & \tau \leq t < \left(2 + \frac{pr}{q - pr}\right)\tau, \\ -pt + \left(\frac{q}{r} + p + \frac{p^2 r}{q - pr}\right)\tau, & \left(2 + \frac{pr}{q - pr}\right)\tau \leq t < \omega \end{cases} \in \mathbb{R},$$

*where  $\omega$  is given by (3.9). Let  $\eta_1 > 0$  and  $\eta_2 > 0$  be arbitrary. If  $n$  is large enough, then there*

exists  $T \in \mathbb{R}$  for the  $\bar{\omega}$ -periodic solution  $\bar{y}$ , such that  $|\bar{\omega} - \omega| < \eta_1$ , and

$$\left| \ln \frac{\bar{y}(t+T)}{K} - v(t) \right| < \eta_2 \quad \text{for all } t \in [0, \bar{\omega}].$$

The proofs of these theorems are similar, and they are given in Sections 3.3-3.7. In the proofs we consider the Nazarenko equation in the form (3.1) with feedback function (3.8).

Since  $\lim_{nx \rightarrow -\infty} f(x) = p - q/r$  and  $\lim_{nx \rightarrow \infty} f(x) = p$ , we calculate an SOP solution  $v$  for the "limit equation"  $v'(t) = -g(v(t - \tau))$  in Section 3.3, where

$$g(v) = \begin{cases} p - \frac{q}{r}, & v < 0, \\ 0, & v = 0, \\ p, & v > 0. \end{cases}$$

Then we consider (3.8) as a perturbation of  $g$ . In Section 3.4 we follow the technique used by Walther in [56] to obtain information about those solutions of equation (3.1) which have initial segments in

$$\mathcal{A}(\beta) = \{\phi \in C : \phi(t) \geq \beta \text{ for all } -\tau \leq t \leq 0, \phi(0) = \beta\} \subseteq C.$$

We estimate the difference between these solutions and the periodic solution of the limit equation on a finite interval. We show that for wisely chosen parameters, solutions coming from  $\mathcal{A}(\beta)$  return to  $\mathcal{A}(\beta)$ .

By the previous section, a return map  $P: \mathcal{A}(\beta) \rightarrow \mathcal{A}(\beta)$  can be introduced. It is clear that any fixed point of  $P$  is the initial segment of an SOP solution. In Section 3.5 we show that  $P$  is Lipschitz continuous, and we explicitly evaluate a Lipschitz constant  $L(P)$  for  $P$ .

In Section 3.6 we apply the results of paper [44] of Nussbaum to show that all SOP solutions have segments in  $\mathcal{A}(\beta)$ , and hence all SOP solutions arise as fixed points of  $P$ .

We learn from Section 3.7 that if  $\tau$  or  $n$  is large enough, then  $L(P) < 1$ , i.e.,  $P$  is a contraction. Therefore  $P$  has only one fixed point. The rest of the theorems will follow easily from the results in the sections above. In particular, stability comes from uniqueness, see work [19] of Kaplan and Yorke.



# Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Vas Gabriellának a sok segítségért és értékes tanácsért, amit tőle kaptam az elmúlt években kutatómunkám során.

Szeretném megköszönni a Bolyai Intézet és a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola támogatását, az Intézet munkatársainak és hallgatótársaimnak pedig a kiváló szakmai közegét és a hasznos eszmecseréket.

Végül, de nem utolsósorban, hálás vagyok férjemnek, szüleimnek és testvéremnek, valamint tágabb családomnak és barátaimnak a sok szeretetért, bátorításért és segítségért, amit tőlük kaptam.

# Irodalomjegyzék

- [1] W. Alt, Periodic solutions of some autonomous differential equations with variable time delay, H.O. Peitgen and H.-O. Walther (eds.), *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points* (Bonn, 1978), Lecture Notes in Math. 730, Springer, Berlin, 1979, 16–31.
- [2] I. Balázs, G. Röst, Hopf bifurcation for Wright-type delay differential equations: The simplest formula, period estimates, and the absence of folds., *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 84 (2020), 105188. 34 (37)
- [3] B. Bánhelyi, T. Csendes, T. Krisztin, A. Neumaier, Global attractivity of the zero solution for Wright’s equation, *SIAM J. Appl. Dynam. Systems* 13 (2014), 537–563.
- [4] F. E. Browder, A further generalization of the Schauder fixed point theorem, *Duke Math. J.* 32 (1965), 575–578.
- [5] Y. Cao, Multiexistence of slowly oscillating periodic solutions for differential delay equations, *SIAM J. Math. Anal.* 26 (1995), 436–445.
- [6] Y. Cao, Uniqueness of periodic solution for differential delay equations, *J. Differential Equations* 128 (1996), 46–57.
- [7] S.-N. Chow, H.-O. Walther, Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of  $\dot{x}(t) = g(x(t-1))$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* 307 (1988), 127–142.
- [8] O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, H.-O. Walther, Delay Equations: Functional, Complex, and Nonlinear Analysis, *Appl. Math. Sci.* 110, Springer, 1995.
- [9] T. Erneux, *Applied delay differential equations*, Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2009.
- [10] K. P. Hadeler, J. Tomiuk, Periodic solutions of difference-differential equations, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 65 (1977), 87–95.
- [11] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Huntington, N.Y., 1980.

- [12] J. K. Hale, *Asymptotic behavior of dissipative systems*, Mathematical Surveys and Monographs, 25. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.
- [13] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional-differential equations*, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] A. F. Ivanov, B. Lani-Wayda, H.-O. Walther, Unstable hyperbolic periodic solutions of differential delay equations, *Recent Trends in Differential Equations*, World Sci. Ser. App. Anal., World Sci., River Edge, NJ, 1992, 301–316.
- [15] A. F. Ivanov, J. Losson, Stable rapidly oscillating solutions in delay differential equations with negative feedback, *Differential Integral Equations*, 12 (1999), 811–832.
- [16] J. Jaquette, A proof of jones’s conjecture, *J. Differential Equations*, 266 (2019), no. 6, 3818–3859.
- [17] J. Jaquette, J.-P. Lessard, K. Mischaikow, Stability and uniqueness of slowly oscillating periodic solutions to Wright’s equation, *J. Differential Equations* 263 (2017), no. 11, 7263—7286.
- [18] G. S. Jones, The existence of periodic solutions of  $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1+f(x)\}$ , *J. Math. Anal. Appl.* 5 (1962), 435–450.
- [19] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, On the stability of a periodic solution of a differential delay equation, *SIAM J. Math. Anal.* 6 (1975), 268–282.
- [20] J. L. Kaplan, J. A. Yorke, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations, *J. Math. Anal. Appl.* 48 (1974), 317–324.
- [21] B. Kennedy, E. Stumpf, Multiple slowly oscillating periodic solutions for  $x'(t) = f(x(t-1))$  with negative feedback., *Ann. Polon. Math.* 118 (2016), no. 2-3, 113–140.
- [22] T. Krisztin, Global dynamics of delay differential equations, *Period. Math. Hungar.*, 56 (2008), 83–95
- [23] T. Krisztin, Unstable sets of periodic orbits and the global attractor for delayed feedback, *Topics in functional differential and difference equations*, Fields Institute Communications 29 (2001), 267–296.
- [24] T. Krisztin, G. Vas, Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback, *J. Dynam. Differential Equations*, 23 (2011), 727–790.
- [25] T. Krisztin, G. Vas, The Unstable Set of a Periodic Orbit for Delayed Positive Feedback, *J. Dynam. Differential Equations*, 28 (2016), 805–855.

- [26] T. Krisztin, H.-O. Walther, Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor, *J. Dynam. Differential Equations*, 13 (2001), 1–57.
- [27] T. Krisztin, H.-O. Walther, J. Wu, *Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback*, Fields Institute Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [28] T. Krisztin, J. Wu, The global structure of an attracting set, előkészületben.
- [29] Y. Kuang, *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*, Academic Press, Boston, 1993.
- [30] Y. Kuang, H. L. Smith, Slowly oscillating periodic solutions of autonomous state-dependent delay equations, *Nonlinear Anal.* 19 (1992), 855–872.
- [31] I. Kubiacyk, S. H. Saker, Oscillation and stability in nonlinear delay differential equations of population dynamics, *Math. Comput. Modelling* 35 (2002), no. 3-4, 295–301.
- [32] B. Lani-Wayda, Persistence of Poincaré mappings in functional-differential equations (with application to structural stability of complicated behavior), *J. Dynam. Differential Equations*, 1995, 1–71.
- [33] E. Liz, G. Röst, Dichotomy results for delay differential equations with negative Schwarzian derivative, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 11 (2010), no. 3, 1422–1430.
- [34] E. Liz, V. Tkachenko, S. Trofimchuk, Yorke and Wright 3/2-stability theorems from a unified point of view, *Discrete Contin. Dynam. Systems* (2003), Suppl. Vol., 580–589.
- [35] E. Liz, M. Pinto, G. Robledo, S. Trofimchuk, V. Tkachenko, Wright type delay differential equations with negative Schwarzian, *Discrete Contin. Dynam. Systems* 9 (2003), 309–321.
- [36] A. López Nieto, Periodic orbits of delay equations with monotone feedback and even-odd symmetry, <https://arxiv.org/abs/2002.01313>
- [37] J. Mallet-Paret, G. R. Sell, The Poincaré-Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay, *J. Differential Equations*, 125 (1996), no. 2, 441–489.
- [38] J. Mallet-Parret, H.-O. Walther, Rapid oscillations are rare in scalar systems governed by monotone negative feedback with a time lag, előkészületben.
- [39] S. H. Marshall, D. R. Smith, Feedback, control, and the distribution of prime numbers, *Math. Mag.* 86 (2013), 189–203.
- [40] V. G. Nazarenko, Influence of delay on auto-oscillations in cell populations, *Biofizika* 21 (1976), 352–356.

- [41] R. D. Nussbaum, A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations, *J. Funct. Anal.* 19 (1975), 319–338.
- [42] R. D. Nussbaum, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations, *Ann. Mat. Pura Appl.* 101 (1974), 263–306.
- [43] R. D. Nussbaum, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations II, *J. Differential Equations* 14 (1973), 360–394.
- [44] R. D. Nussbaum, The range of periods of periodic solutions of  $x'(t) = -\alpha f(x(t-1))$ . *J. Math. Anal. Appl.* 58 (1977), no. 2, 280–292.
- [45] R. D. Nussbaum, Uniqueness and nonuniqueness for periodic solutions of  $x'(t) = -g(x(t-1))$ , *J. Differential Equations* 34 (1979), 25–54.
- [46] S. Ruan, Delay differential equations in single species dynamics, *Delay differential equations and applications*(eds. O. Arino, M. L. Hbid and E. Ait Dads), NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., 205, Springer, Dordrecht, (2006), 477–517.
- [47] A. L. Skubachevskii, H.-O. Walther, On the Floquet multipliers of periodic solutions to non-linear functional differential equations, *J. Dynam. Differential Equations* 18 (2006), 257–355.
- [48] H. Smith, *An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences*, Texts in Applied Mathematics, 57. Springer, New York, 2011.
- [49] Y. Song, J. Wei, M. Han, Local and global Hopf bifurcation in a delayed hematopoiesis model, *Internat. J. Bifur. ChaosAppl. Sci. Engrg.* 14 (2004) 3909–3919.
- [50] D. Stoffer, Delay equations with rapidly oscillating stable periodic solutions, *J. Dynam. Differential Equations*, 20(2008), 201–238.
- [51] J. B. van den Berg, J. Jaquette, A proof of Wright’s conjecture, *J. Differential Equations* 264 (2018), no. 12, 7412—7462.
- [52] G.Vas, Asymptotic constancy and periodicity for a single neuron model with delay, *Non-linear Anal.*, 71 (2009), 2268–2277.
- [53] G. Vas, Configurations of periodic orbits for equations with delayed positive feedback, *J. Differential Equations*, 262 (2017), 1850–1896.
- [54] G. Vas, Infinite number of stable periodic solutions for an equation with neative feedback, *Electron. J. Qual. Theory Differential Equations* (2011), no. 18, 20 pp.
- [55] H.-O. Walther, A periodic solution of a differential equation with state-dependent delay, *J. Differential Equations* 244 (2008), 1910–1945.

- [56] H.-O. Walther, Bifurcation of periodic solutions with large periods for a delay differential equation, *Ann. Mat. Pura Appl.* 4, (2006), 577–611.
- [57] H.-O. Walther, Contracting return maps for monotone delayed feedback, *Discrete. Contin. Dynam. Systems* 7 (2001), 515–540.
- [58] H.-O. Walther, Contracting return maps for some delay differential equations, Topics in functional differential and difference equations (Lisbon, 1999), *Fields Inst. Commun.*, 29, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), 349–360.
- [59] H.-O. Walther, Density of slowly oscillating solutions of  $\dot{x}(t) = -f(x(t-1))$ , *J. Math. Anal. Appl.* 79 (1981), 127–140.
- [60] H.-O. Walther, The 2-dimensional attractor of  $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$ , *Mem. Amer. Math. Soc.* 113 (1995), no. 544.
- [61] H.-O. Walther, Topics in delay differential equations, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* 116 (2014), 87–114.
- [62] Q. Wang, J. Wen, S. Qiu, C. Guo, Numerical oscillations for first-order nonlinear delay differential equations in a hematopoiesis model, *Adv. Difference Equ.* (2013), 2013:163, 17 pp.
- [63] S. Wiggins, Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, *Texts in Applied Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2003.
- [64] E. M. Wright, A nonlinear difference-differential equation, *J. Reine Angew. Math.* 194 (1955), 66–87.
- [65] J. Wu, Symmetric functional-differential equations and neural networks with memory, *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), no. 12, 4799–4838.
- [66] X. Xie, Uniqueness and stability of slowly oscillating periodic solutions of delay equations with unbounded nonlinearity, *J. Differential Equations* 103 (1993), 350–374.
- [67] J. A. Yorke, Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations, *J. Differential Equations* 7 (1970), 189–202.