Stabilitás és periodicitás késleltetett differenciálegyenletekre

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Balázs István

Témavezető: Krisztin Tibor
tanszékvezető egyetemi tanár

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai intézet
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szeged, 2019

A disszertáció összefoglalja Balázs és Krisztin [2, 1] eredményeit. Az [2] cikket elfogadták publikálásra, elektronikus változata elérhető. Az [1] cikk be van nyújtva. A szerzőnek van még egy cikke, [3], van den Berg, Courtois, Dudás, Lessard, Vörös-Kiss, Williams és Yin társszerzőkkel, ami itt nincs bemutatva.

A [2, 1] cikkekben és a disszertációban késleltetett differenciálegyenletek két különböző típusát vizsgáljuk. Mivel a két egyenletre különböző eszközöket alkalmazunk, ezért két külön fejezetben tárgyaljuk ezeket.

A két problématípusban az a közös, hogy mindkettőt alkalmazások motiválják, és mindkettő új, nem-klasszikus elméleti technikákat követel meg. Egy másik közös jellemző az, hogy mindkét típusra nyitott problémákat oldunk meg. Továbbá, úgy hisszük, hogy a kifejlesztett módszerek hasznosnak bizonyulnak hasonló modellek széles körében.

Először egy ármodellt vizsgálunk, amelyet Erdélyi, Brunovský és Walther [5, 4, 19] vezetett be. A modellegyenlet egyetlen $a > 0$ paramétert tartalmaz. A fő eredmény az, hogy a $0 < a < 1$ esetben a zéró megoldás globálisan aszimptotikusan stabil. Ez választ ad Erdélyi, Brunovský és Walther sejtésére. Korábban lokális stabilitás volt ismert minden $a \in (0, 1)$-re, lásd [5]. Mivel a linearizálás nem működik a zérónál, centrális sokaságra való redukciót alkalmaztak. Garab, Kovács és Krisztin [8] a globális attraktivitást csak $a \in (0,\ 0.61)$-ra bizonyította. Bizonyításunk azon a kulcsfontosságú ötleten alapszik, hogy lehetséges összekötni a problémát egy másik egyenlettípussal, nevezetesen egy neutrális típusú funkcionál-differenciálegyenlettel, amelyre Ljapunov-funkcionál konstruálható.

A disszertáció második része egy késleltetett differenciálegyenletből és két segédegyenletből összeállított rendszert tekint. A késleltetett differenciálegyenlet egy negatív visszacsatolási feltételt elégít ki, amit korábban több alapvető cikk [12, 13] már tanulmányozott, amelyek a nemlineáris funkcionálanalízis olyan témáinak kifejlesztéséhez vezettek, mint a fixpont-elmélet végtelen dimenzióban. A vizsgált konkrét rendszert Ranjan, La és Abed [17, 16] vezették be egy egyszerű számítógépes hálózat rátaszabályozási mechanizmusának modellezésére. Matematikailag, a nehézség a két segédegyenlet által definiált késleltetés speciális alakjából ered. A konstans késleltetésre vonatkozó klasszikus eredmények [7, 9], az állapotfüggő késleltetésre vonatkozó, nemrég kifejlesztett módszerek [10, 18] itt nem tűnnek alkalmazhatónak. Az első nehézség egy megfelelő fázistér találása, ahol a hozzá tartozó kezdetiérték-problémának létezik és egyértelmű a maximális megoldása, és a megoldások egy folytonos szemi-dinamikai rendszert definiálnak. Valójában két különböző fázisteret konstruálunk a probléma tanulmányozására. Ezek különböző definíciókat követelnek meg a megoldásokra. Az adott kérdéstől függ, hogy melyik megközelítés felel meg jobban. A második fő eredmény az, hogy Ranjan és társai rátaszabályzási rendszere lassan oszcilláló periodikus rátához vezethet az optimális ráta körül, feltéve, hogy a stacionárius megoldás az optimális rátánál instabil. Ez megválaszolja Ranjan és társszerzői [15, 14] egy sejtését.

1. Globális stabilitás késleltetett ármodellekre

Az elsődleges célunk Erdélyi, Brunovský és Walther [5, 4, 19] globális stabilitási sejtését bizonyítani az

$$\dot{x}(t) = a[x(t) - x(t-1)] - \beta|x(t)|x(t), \tag{1.1}$$

ármodellre, ahol $a > 0, \beta > 0$. Erdélyi, Brunovský és Walther $0 < a < 1$-re megmutatták az $x = 0$ lokális aszimptotikus stabilitását, és megsejtették a globális aszimptotikus stabilitását. Nemrég Garab, Kovács és Krisztin [8] bebizonyította az $x = 0$ globális aszimptotikus stabilitását az (1.1) egyenletre, feltéve, hogy $a \in (0, 0.61)$. Mivel $x = 0$ nem hiperbolikus, már a lokális stabilitás sem triviális.

A továbbiakban mindig feltesszük, hogy $r > 0$, $a > 0$ és

$$(\mathrm{H_g}) \qquad \begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ C^1\text{-sima},\ ug(u) > 0,\ u \neq 0\text{-ra}, \\ \int_0^s g(u)\,du \to \infty \text{ amint } |s| \to \infty. \end{cases}$$

Stieltjes-integrálokat használva az (1.1) egyenlet írható úgy, mint

$$\dot{x}(t) = a \int_0^r x(t-s)d\eta(s) - g(x(t)), \tag{1.2}$$

ahol η teljesíti a

$$(\mathrm{H}_\eta) \qquad \begin{cases} \eta : [0, r] \to [0, \infty) \text{ korlátos változású}, \\ \eta(0) = \eta(r) = 0,\ \int_0^r \eta(s)\,ds = 1 \end{cases}$$

feltételt. Az [5]-t követve, az (1.2) egyenletben $x(t)$ reprezentálhatja valaminek az árát a t időben. Ha $x : I \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható egy, a $[t - r, t]$-et tartalmazó intervallumon, akkor a $\int_0^r x(t-s)\,d\eta(s)$

Stieltjes-integrált parciálisan integrálva és az $\eta(0) = \eta(r) = 0$ feltételt használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_0^r x(t-s)\,d\eta(s) &= [x(t-s)\eta(s)]_{s=0}^{s=r} - \int_0^r \eta(s)\,d_s x(t-s) \\ &= -\int_0^r \eta(s)\tfrac{d}{ds}x(t-s)\,ds \\ &= \int_0^r \dot{x}(t-s)\,d_s\left(\int_0^s \eta\right). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mivel η nemnegatív, a $[0,r] \ni s \mapsto \int_0^s \eta \in \mathbb{R}$ függvény monoton nemcsökkenő. Ekkor (1.3) azt mutatja, hogy az $\int_0^r x(t-s)\,d\eta(s)$ kifejezés zéró, ha x konstans $[t-r,t]$-n, és pozitív (negatív), ha $\dot{x}(s) > 0$ (< 0) minden $s \in [t-r,t]$-re.

Figyeljük meg, hogy ha az (1.3) egyenlet $\int_0^r \dot{x}(t-s)\,d_s\left(\int_0^s \eta\right)$ kifejezésében szereplő $s \mapsto \int_0^s \eta(u)du$ függvényt tetszőleges $\mu : [0,r] \to \mathbb{R}$ nemcsökkenő, korlátos változású függvénnyel helyettesítjük, akkor a kapott $\int_0^r \dot{x}(t-s)\,d\mu(s)$ kifejezés még mindig interpretálható az ár tendenciájaként. Ez motiválja az

$$\dot{y}(t) = a\int_0^r \dot{y}(t-s)d\mu(s) - g(y(t)) \tag{1.4}$$

neutrális típusú differenciálegyenlet vizsgálatát szintén ármodellként, feltéve, hogy $a > 0$, $\mu : [0,r] \to \mathbb{R}$ korlátos változású és nemcsökkenő, egy további technikai feltétellel.

Van egy másik ok az (1.4) neutrális típusú egyenlet vizsgálatára. Ez alapvető szerepet játszik az (1.1), (1.2) egyenletekre vonatkozó stabilitás eredmények bizonyításában. Azonban az (1.2) és (1.4) egyenletek nem ekvivalensek. Az (1.2) egyenlet megoldása csak $t > r$-re teljesíti az (1.4) egyenletet $\mu(s) = \int_0^s \eta$-val. A fázisterek és a stabilitás definíciója szintén különböző az (1.2) és (1.4) egyenletekre.

Legyen $(c_n)_{n=0}^\infty$ nemnegatív számok egy sorozata $\sum_{n=0}^\infty c_n \le 1$-gyel, és legyen $(r_n)_{n=0}^\infty$ egy sorozat $[0,r]$-ben úgy, hogy $r_0 = 0$, és $r_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$-re. Legyen $H : [0,r] \to \mathbb{R}$ olyan, hogy $H(0) = 0$, $H(s) = 1$ $s \in (0,r]$-re. Definiáljuk a $\sigma : [0,r] \to \mathbb{R}$ függvényt a

$$\sigma(s) = c_0 H(s) + \sum_{n:\ r_n \le s} c_n, \quad s \in [-r,0]$$

képlettel és legyen adott a nemcsökkenő, abszolút folytonos $\nu : [0,r] \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $\nu(r) - \nu(s) \le 1$. A hipotézisünk μ-re az, hogy nemcsökkenő, szinguláris rész nélküli, vagyis

$$(\mathrm{H}_\mu) \quad \begin{cases} \mu : [0,r] \to \mathbb{R},\ \mu = \nu + \sigma, \\ \int_0^r d\mu = 1,\ \text{azaz } \nu(r) - \nu(0) + \sum_{n=0}^\infty c_n = 1 \end{cases}$$

teljesül. $\varphi \in C([-r,0],\mathbb{R})$-re legyen $\|\varphi\| = \max_{-r\le s\le 0}|\varphi(s)|$. Definiáljuk a $C^1([-r,0],\mathbb{R})$ tér

$$Y = \left\{ \psi \in C^1([-r,0],\mathbb{R}) \;\middle|\; \dot\psi(0) = a\int_0^r \dot\psi(-s)\,d\mu(s) - g(\psi(0)) \right\}$$

részhalmazát, és legyen $\quad \|\psi\|_Y = \left((\psi(0))^2 + \displaystyle\int_0^r (\dot\psi(-s))^2\,ds \right)^{1/2}$.

Az (1.4) egyenlet megoldása $\psi \in Y$ kezdeti függvénnyel egy $y = y^\psi : [-r, t_\psi) \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény úgy, hogy $y_0 = \psi$, és (1.4) teljesül $t \in (0, t_\psi)$-re.

A $g(0) = 0$ egyenlőségből, $y = 0$ megoldása (1.4)-nek, és ($\mathrm{H_g}$) miatt ez az egyetlen egyensúlyi megoldás. Az $y = 0$ megoldást stabilnak nevezzük, ha bármely $\varepsilon > 0$-ra létezik $\delta(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy bármely $\psi \in Y$, $\|\psi\|_Y < \delta(\varepsilon)$-ra az y^ψ megoldás létezik $[-r,\infty)$-en, és $\|y_t^\psi\|_Y < \varepsilon$ minden $t \ge 0$-ra; illetve globálisan aszimptotikusan stabil, ha stabil, bármely $\psi \in Y$-ra az y^ψ megoldás létezik $[-r,\infty)$-en, és $\|y_t^\psi\|_Y \to 0$ amint $t \to \infty$.

1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* ($\mathrm{H_g}$), (H_μ) *Hipotézisek teljesülnek, és* $a \in (0,1)$. *Ekkor bármely* $\psi \in Y$*-ra az* (1.4) *egyenlet* y^ψ *egyértelmű maximális megoldása definiált* $[-r,\infty)$*-en, és* (1.4) *zéró megoldása globálisan aszimptotikusan stabil.*

Az 1.1 Tétel bizonyítása egy Ljapunov-funkcionálon alapszik, amelyet Kolmanovskii és Myshkis [11, Chapter 9., p. 374.] könyve inspirál.

A természetes fázistér az (1.2) egyenletre $C([-r,0],\mathbb{R})$. Az (1.2) maximális megoldása $\varphi \in C([-r,0],\mathbb{R})$ kezdeti függvénnyel egy $x = x^\varphi : [-r, t_\varphi) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $t_\varphi > 0$-val úgy, hogy $x|_{[-r,0]} = \varphi$, x differenciálható $(0, t_\varphi)$-n, (1.2) teljesül $(0, t_\varphi)$-n, és bármely más megoldás ugyanazon kezdeti függvénnyel az x^φ megszorítása.

1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* ($\mathrm{H_g}$), (H_η) *Hipotézisek teljesülnek, és* $a \in (0,1)$. *Ekkor az* (1.2) *egyenlet zéró megoldása globálisan aszimptotikusan stabil.*

1.3. Következmény. *Ha* $a \in (0,1)$, *akkor* (1.1) *zéró megoldása globálisan aszimptotikusan stabil.*

2. Egy differenciálegyenlet állapotfüggő sorbanállási késleltetéssel

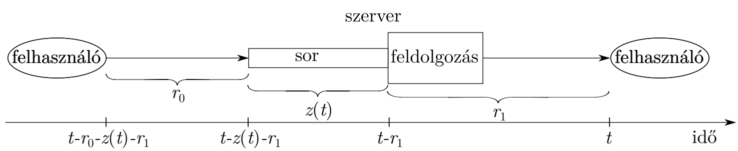
A konkrét modellt, ami a tanulmányunkat motiválta, Ranjan, La és Abed [17, 16] vezette be. Ez egy hálózat folytonos modellje, ami egyetlen felhasználót és egyetlen szervert tartalmaz. A felhasználó $x(t) \in [a, b]$ rátával küld adatokat a szervernek, $0 < a < b$. A szerver a bejövő adatokat $c \in (a, b)$ kapacitással dolgozza fel. A szerverhez érkező adatok egy $y(t) \in [0, q]$ hosszú sort alkotnak a feldolgozás előtt, $q > 0$. Legyen $r_0 \geq 0$ az átviteli idő a felhasználótól a szerverig, $z(t)$ a várakozási idő a sorban, és $r_1 > 0$ a feldolgozási idő és szervertől a felhasználóig tartó átviteli idő összege, lásd az ábrát. Ez a modell leírható az

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = \kappa\big[&x(t)U'(x(t)) \\ &- x(t - r_0 - z(t) - r_1)p(x(t - z(t) - r_1))\big]\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} x(t - r_0) - c, & \text{ha } 0 < y(t) < q \\ [x(t - r_0) - c]^+, & \text{ha } y(t) = 0 \\ -[x(t - r_0) - c]^-, & \text{ha } y(t) = q \end{cases} \tag{2.2}$$

$$z(t) = \frac{1}{c} y(t - z(t) - r_1) \tag{2.3}$$

rátaszabályozási rendszerrel, ahol $\kappa > 0$, U a hasznosság, p az egységár, (2.2)-nek majdnem mindenhol kell teljesülnie, $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \max\{-u, 0\}$.



Elsődleges célunk találni egy alkalmas fázisteret a fenti típusú rátaszabályozási rendszerek tanulmányozásához. Sem a konstans késleltetésű egyenletekre vonatkozó klasszikus eredmények, sem az állapotfüggő késleltetésre nemrég kifejlesztett eredmények nem működnek itt.

A másodlagos cél a bevezetett fázistérben megmutatni, hogy a (2.1), (2.2), (2.3) rátaszabályozási rendszer az x_* optimális ráta körül lassan oszcilláló periodikus rátához vezethet, feltéve, hogy az $x = x_*$, $y = 0$, $z = 0$ stacionárius megoldás instabil és $r_0 = 0$. Ez megválaszolja Ranjan és társszerzői [15, 14] egy sejtését.

Legyen $r = r_0 + r_1 + q/c > 0$, a késleltetések felső korlátja. Egy Lipschitz-folytonos $\varphi : I \to \mathbb{R}$ függvényre legyen

$$\operatorname{lip}(\varphi) = \sup_{s\in I,\, t\in I,\, s<t} \left| \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \right| \in [0,\infty) \quad \text{és}$$
$$\operatorname{slope}(\varphi) = \left\{ \frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} : s \in I,\ t \in I,\ s \neq t \right\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Először egy valamivel általánosabb, az

$$\dot{x}(t) = F(x_t, y_t) \tag{2.4}$$

és a (2.2) egyenletekből álló rendszert tekintjük. A (2.4) egyenlet jobb oldalának abszolút értékére egy $K > 0$ felső korlát jön a probléma természetéből. Ekkor a $C_{[-r,0]}$ tér

$$X = \left\{ \varphi \in C_{[-r,0]} \;\middle|\; \varphi([-r,0]) \subseteq [a,b],\ \operatorname{lip}(\varphi) \leq K \right\} \quad \text{és}$$
$$Y = \left\{ \psi \in C_{[-r,0]} \;\middle|\; \psi([-r,0]) \subseteq [0,q],\ \operatorname{slope}(\psi) \subseteq [a-c, b-c] \right\}$$

részhalmazai tartalmazni fogják az összes lehetséges x_t és y_t szegmenst. Az $X \subset C_{[-r,0]}$, $Y \subset C_{[-r,0]}$, $X \times Y \subset C_{[-r,0]} \times C_{[-r,0]}$ halmazokon az indukált altér-topológiákat és a hozzájuk tartozó normákat használjuk. Az Arzelà–Ascoli tétel miatt, X, Y és $X \times Y$ kompakt részhalmazai $C_{[-r,0]}$-nak és $C_{[-r,0]} \times C_{[-r,0]}$-nak. Tegyük fel, hogy az $F : X \times Y \to \mathbb{R}$ leképezés rendelkezik következő tulajdonságokkal:

(H1) létezik $L > 0$ úgy, hogy minden $\varphi^1, \varphi^2 \in X$-re és $\psi^1, \psi^2 \in Y$-ra
$$\left| F(\varphi^1, \psi^1) - F(\varphi^2, \psi^2) \right| \leq L \left\| (\varphi^1, \psi^1) - (\varphi^2, \psi^2) \right\|;$$

(H2) $\max_{(\varphi,\psi)\in X\times Y} |F(\varphi,\psi)| \leq K$;

(H3) létezik $r_2 \in (0, r_1]$ úgy, hogy $F(\varphi, \psi^1) = F(\varphi, \psi^2)$ feltéve, hogy $\varphi \in X$, $\psi^1 \in Y$, $\psi^2 \in Y$, és $\psi^1|_{[-r,-r_2]} = \psi^2|_{[-r,-r_2]}$;

(H4) $F(\varphi,\psi) > 0$ ha $\varphi \in X$, $\psi \in Y$, $\varphi(0) = a$, és $F(\varphi,\psi) < 0$ ha $\varphi \in X$, $\psi \in Y$ és $\varphi(0) = b$.

A (2.4), (2.2) rendszer $x_0 = \varphi \in X$, $y_0 = \psi \in Y$ kezdeti feltételhez tartozó megoldása az $X \times Y$ fázistéren egy $x = x^{\varphi,\psi} : [-r,\omega) \to \mathbb{R}$, $y = y^{\varphi,\psi} : [-r,\omega) \to \mathbb{R}$ pár úgy, hogy $0 < \omega \leq \infty$, $x_t \in X$ minden $t \in [0,\omega)$-ra, $x_0 = \varphi$; x differenciálható $(0,\omega)$-n; $y_t \in Y$ minden $t \in$

$[0,\omega)$-ra, $y_0 = \psi$; az (2.4) egyenlet teljesül $(0,\omega)$-n; és az (2.2) egyenlet teljesül majdnem mindenhol $(0,\omega)$-n. A megoldást maximálisnak nevezzük, ha bármely másik $(\widehat{x}, \widehat{y})$ megoldás $\widehat{x}_0 = \varphi$, $\widehat{y}_0 = \psi$-vel az (x, y) megszorítása.

2.1. Tétel. *Minden $(\varphi, \psi) \in X \times Y$ esetén létezik egyértelműen az (2.4), (2.2) rendszer $x_0 = \varphi$, $y_0 = \psi$ kezdeti feltételt kielégítő $x^{\varphi,\psi} : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, $y^{\varphi,\psi} : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$ megoldása $[-r, \infty)$-en. A*

$$\Phi : [0, \infty) \times X \times Y \ni (t, \varphi, \psi) \mapsto \left(x_t^{\varphi,\psi}, y_t^{\varphi,\psi}\right) \in X \times Y$$

leképezés folytonos szemi-dinamikai rendszert definiál $X \times Y$-on. Továbbá, a $\Phi(t, \cdot, \cdot)$ megoldásoperátor Lipschitz-folytonos minden $t \geq 0$-ra.

Vázoljuk a bizonyítást. Legyen $(\varphi, \psi) \in X \times Y$ adott. A (H3) miatt, egy szokásos, kontrakciós gondolatmenet ad egy $T \in (0, r_2]$ konstanst és egy egyértelmű $x : [-r, T] \to \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy a (2.4) egyenlet teljesül $(0, T)$-n, ψ tetszőleges kiterjesztésére $[-r, T]$-re. Aztán újradefiniáljuk $y : [-r, T] \to \mathbb{R}$-et $(0, T]$-n úgy, hogy a (2.2) egyenlet teljesüljön majdnem mindenhol $[0, T]$-n. Ehhez kiterjesztjük (2.2) jobb oldalát egy felülről félig folytonos halmazértékű leképezéssé, és alkalmazzuk [6] differenciáltartalmazásokra vonatkozó standard eredményét. A lépések módszerével a megoldás egyértelműen kiterjeszthető a $[-r, \infty)$-en értelmezett maximális megoldássá.

Vezessük be $Z = [0, q/c] \subset \mathbb{R}$-et mint a $z(t)$ változó állapotterét.

Az Y tér megfelelő választásának köszönhetően van egy egyértelmű $\sigma : Y \to Z$ Lipschitz-folytonos leképezés úgy, hogy

$$\sigma(\psi) = \frac{1}{c}\psi(-\sigma(\psi) - r_1). \tag{2.5}$$

Tegyük fel, hogy adott a $G : X \times Z \to \mathbb{R}$ leképezés úgy, hogy a speciális $F : X \times Y \ni (\varphi, \psi) \mapsto G(\varphi, \sigma(\psi)) \in \mathbb{R}$ választással a (H1)–(H4) Hipotézisek teljesülnek. Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = G(x_t, z(t)), \tag{2.6}$$

és a (2.2)–(2.3) egyenletekből összeállított rendszert. Ekkor, az $X \times Y$ fázistéren, bármely $(\varphi, \psi) \in X \times Y$-ra, a (2.6), (2.2), (2.3) rendszernek létezik és egyértelmű az $x^{\varphi,\psi}[-r, \infty) \to \mathbb{R}$, $y^{\varphi,\psi} : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, $z^{\varphi,\psi} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ megoldása, ahol $\left(x^{\varphi,\psi}, y^{\varphi,\psi}\right)$ a (2.4), (2.2) rendszer megoldása az F fenti választásával, és $z^{\varphi,\psi}(t) = \sigma(y_t^{\varphi,\psi})$, $t \geq 0$.

Van egy egyértelmű $\gamma : X \times Z \to Y$ Lipschitz-folytonos leképezés úgy, hogy $\psi = \gamma(\varphi, \zeta)$ konstans $[-r, -\zeta - r_1]$-en és kielégíti a (2.2) egyenletet $[-\zeta - r_1, 0]$-n.

A γ függvény létezése azt jelenti, hogy a ráta múltjából és a várakozási idő pillanatnyi értékéből a sorhossz múltja rekonstruálható. Ez lehetővé teszi, hogy a problémát az $X \times Z$ fázistérben is vizsgálhatjuk, a megoldás definíciójának módosításával.

2.2. Tétel. *Minden $(\varphi, \zeta) \in X \times Z$-re létezik és egyértelmű az $x^{\varphi,\zeta} : [-r, \infty) \to \mathbb{R}$, $z^{\varphi,\zeta} : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvénypár úgy, hogy (x, z) a (2.6), (2.2), (2.3) rendszer $x_0 = \varphi$, $z(0) = \zeta$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása az $X \times Z$ fázistérben. A*

$$\Psi : [0, \infty) \times X \times Z \ni (t, \varphi, \zeta) \mapsto \left(x_t^{\varphi,\zeta}, z^{\varphi,\zeta}(t)\right) \in X \times Z$$

leképezés folytonos szemi-dinamikai rendszert definiál $X \times Z$-n. Továbbá, a $\Psi(t, \cdot, \cdot)$ megoldásoperátor Lipschitz-folytonos minden $t \geq 0$-ra.

Tegyük fel, hogy létezik a rátaszabályozási egyenlet stacionárius megoldásaként szolgáló $x_* \in (a, c)$. Definiálva $v(t) = x(t) - x_*$-ot és $d = c - x_* > 0$-t, a

$$\dot{v}(t) = -f(v(t)) - g(v(t - z(t) - 1)) \tag{2.7}$$

$$\dot{y}(t) = \begin{cases} v(t) - d, & \text{ha } 0 < y(t) < q \\ [v(t) - d]^+, & \text{ha } y(t) = 0 \\ -[v(t) - d]^-, & \text{ha } y(t) = q \end{cases} \tag{2.8}$$

$$z(t) = \frac{1}{c} y(t - z(t) - 1) \tag{2.9}$$

rendszer kapjuk. A (v, z) megoldást *lassan oszcillálónak* nevezzük, ha v bármely két $t_1 < t_2$ zéróhelyére a $z(t_2) + 1 < t_2 - t_1$ egyenlőtlenség teljesül.

Legyen $A = a - x_*$, $B = b - x_*$, és tegyük fel a következőket:

(S1) $f, g \in C^1([A, B], \mathbb{R})$;

(S2) $f(\xi)\xi \geq 0$ és $g(\xi)\xi > 0$ minden $\xi \in [A, B] \setminus \{0\}$-ra, $g'(0) > 0$;

(S3) $g([A, B]) \in (-f(B), -f(A))$;

(S4) a $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto \lambda + f'(0) + g'(0)e^{-\lambda} \in \mathbb{C}$ leképezésnek van pozitív valós részű zéróhelye.

Definiáljuk az $\widetilde{f}, \widetilde{g} : [A, B] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényeket a következőképpen:

$$\widetilde{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi)}{\xi}, & \text{ha } \xi \neq 0, \\ f'(0), & \text{ha } \xi = 0, \end{cases} \qquad \widetilde{g}(\xi) = \begin{cases} \frac{g(\xi)}{\xi}, & \text{ha } \xi \neq 0, \\ g'(0), & \text{ha } \xi = 0. \end{cases}$$

Vannak $f_1 \geq 0$, $g_1 > g_0 > 0$ konstansok úgy, hogy $\widetilde{f}([A, B]) \subseteq [0, f_1]$, és $\widetilde{g}([A, B]) \subseteq [g_0, g_1]$. Legyen $K_0 = (f_1 + g_1) \max\{-A, B\}$, $r = 1 + q/c$, $K_1 = rK_0$ és

$$\mathcal{X} = \left\{ \varphi \in C_{[-r,0]} \;\middle|\; \varphi([-r, 0]) \subseteq [A, B],\ \operatorname{lip}(\varphi) \leq K_1 \right\}.$$

A (2.7), (2.8), (2.9) rendszer megoldásai folytonos szemi-dinamikai rendszert definiálnak a

$$(v_t^{\varphi,\zeta}, z^{\varphi,\zeta}(t)) = \Psi(t, \varphi + x_*, \zeta) - (x_*, 0)$$

képlettel $\mathcal{X} \times Z$-n, és ugyanazon Lipschitz-folytonosság teljesül, mint Ψ-re a 2.2 Tételben.

A $(0, 0) \in \mathcal{X} \times Z$ egyensúlyi helyzet instabilitása könnyen adódik az (S4) feltételből.

Definiáljuk a

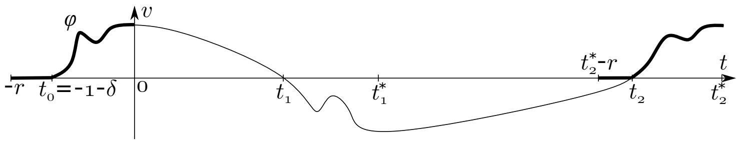
$$\begin{aligned} W = \Big\{ (\varphi, \zeta) \in \mathcal{X} \times Z \;\Big|\; & \varphi\big|_{[-r,-\zeta-1]} \equiv 0, \\ & s \mapsto \varphi(s) e^{f_1 s} \text{ nemcsökkenő},\ \varphi(0) > 0 \Big\}, \quad \text{és} \\ W_0 = W \cup \{(0, 0)\} \quad & \text{halmazokat.} \end{aligned}$$

A g-re feltett, (S2)-beli visszacsatolási feltételt alkalmazva kapjuk, hogy minden $(\varphi, \zeta) \in W$, $v = v^{\varphi,\zeta}$, $z = z^{\varphi,\zeta}$ esetén léteznek a (φ, ζ)-tól folytonosan függő

$$t_1 = \min\{t > 0 \mid v(t) = 0\}, \quad t_2 = \min\{t > t_1 \mid v(t) = 0\}$$

és t_2^* időpontok úgy, hogy $t_2^* - z(t_2^*) - 1 = t_2$. Továbbá, létezik egy egyenletes felső korlát t_2^*-ra. Ez lehetővé teszi, hogy definiáljuk a $P : W_0 \to \mathcal{X} \times Z$ visszatérési leképezést a

$$P(\varphi, \zeta) = \begin{cases} (0, 0), & \text{ha } (\varphi, \zeta) = (0, 0) \\ \big(\widehat{v_{t_2^*}}, z(t_2^*)\big) & \text{különben} \end{cases}$$



képlettel, ahol $\widehat{v_{t_2^*}} \in \mathcal{X}$ a következő: $\widehat{v_{t_2^*}}(s) = v(t_2^* + s)$, $s \in [t_2 - t_2^*, 0]$-ra és $\widehat{v_{t_2^*}}(s) = 0$, $s \in [-r, t_2 - t_2^*]$-ra.

P folytonos, és $P(W_0) \subseteq W_0$, $P(W) \subseteq W$. Alapvető eredmény, hogy $P(\varphi, \zeta)$ nem csökkenhet túl gyorsan: léteznek $\theta > 0$, $\rho > 0$ konstansok, hogy $v^{\varphi,\zeta}(t_2^*) \geq \theta\,(\varphi(0))^{\rho}$ minden $(\varphi, \zeta) \in W$-re. Ez a tény lehetővé teszi, hogy konstruáljunk egy α C^2-függvényt $[0, q/c]$-n úgy, hogy $\alpha(0) = 0$, $\alpha' > 0$, $\alpha'' > 0$ $(0, q/c]$-n, $\alpha(q/c)$ elég kicsi, és az $\alpha(\xi - d/c) \geq \theta\,(\alpha(\xi))^{\rho}$ késleltetett egyenlőtlenség teljesül $\xi \in [d/c, q/c]$-re. Definiálva $\mathcal{X} \times Z$

$$W_{\alpha,K_1} = \left\{(\varphi, \zeta) \in W_0 \;\middle|\; \varphi(0) \geq \alpha(\zeta)\right\},$$
$$W_{\alpha,K_0} = \left\{(\varphi, \zeta) \in W_{\alpha,K_1} \;\middle|\; \mathrm{lip}(\varphi \leq K_0)\right\}$$

kompakt részhalmazait, a $P(W_{\alpha,K_1}) \subseteq W_{\alpha,K_0}$ tartalmazás teljesül. Ennek igazolása a periodikus megoldás létezését állító tétel bizonyításának legnehezebb része. Azonban W_{α,K_1} és W_{α,K_0} nem konvex. A $C_{[-1,0]} \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} V_{\alpha,K_1} = \Big\{(\psi, \zeta) \in C_{[-1,0]} \times Z \,\Big|\, & \psi([-1,0]) \subseteq [0, B],\ \mathrm{lip}(\psi) \leq K_1, \\ & [-1,0] \ni s \mapsto \psi(s)e^{f_1 r s} \in \mathbb{R} \text{ is nemcsökkenő}, \\ & \psi(-1) = 0,\ \psi(0) \geq \alpha(\zeta)\Big\} \end{aligned}$$

részhalmaza kompakt és konvex. A V_{α,K_1} halmaz W_{α,K_1}-be képezhető a Q nyújtó leképezéssel, amit $Q(\psi, \zeta) = (\varphi, \zeta)$, $\varphi(s) = \psi(s/(\zeta + 1))$, $s \in [-\zeta - 1, 0]$, és $\varphi|_{[-r,-\zeta-1]} \equiv 0$ ad meg. Az R zsugorító leképezés, amit $R(\varphi, \zeta) = (\psi, \zeta)$ definiál $\psi(s) = \varphi((\zeta + 1)s)$, $s \in [-1, 0]$-val, a W_{α,K_0} halmazt V_{α,K_1}-be képezi. Browder tétele alkalmazható a

$$\Pi : V_{\alpha,K_1} \in (\psi, \zeta) \mapsto R \circ P \circ Q(\psi, \zeta) \in V_{\alpha,K_1}$$

leképezés nem-taszító fixpontjának megtalálására. Ez a P egy nemtaszító fixpontját adja W_{α,K_1}-ben, ami nemtriviális, feltéve, hogy $(0, 0) \in W_{\alpha,K_1}$ taszító. A $(0, 0) \in W_{\alpha,K_1}$ taszító tulajdonsága a szokásos módon következik a $\dot{v}(t) = -f(v(t)) - g(v(t-1))$ konstans késleltetésű egyenlet zéró megoldásának taszításából.

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (S1)–(S4) Feltételek teljesülnek. Ekkor a* (2.7), (2.8), (2.9) *rendszernek van lassan oszcilláló periodikus megoldása.*

Publikációs lista

[1] I. Balázs és T. Krisztin. "A Differential Equation with a State-Dependent Queueing Delay". *SIAM Journal on Mathematical Analysis* (submitted for publication).

[2] I. Balázs és T. Krisztin. "Global Stability for Price Models with Delay". *Journal of Dynamics and Differential Equations* (accepted, electronically available).

[3] I. Balázs, J. B. van den Berg, J. Courtois, J. Dudás, J.-P. Lessard, A. Vörös-Kiss, JF Williams és X. Y. Yin. "Computer-Assisted Proofs for Radially Symmetric Solutions of PDEs". *Journal of Computational Dynamics* 5.1&2 (2018), 61–80. old.

Hivatkozások

[4] P. Brunovský, A. Erdélyi és H.-O. Walther. "Erratum to: "On a Model of a Currency Exchange Rate - Local Stability and Periodic Solutions"". *Journal of Differential Equations* 20.1 (2008), 271–276. old.

[5] P. Brunovský, A. Erdélyi és H.-O. Walther. "On a Model of a Currency Exchange Rate - Local Stability and Periodic Solutions". *Journal of Differential Equations* 16.2 (2004), 393–432. old.

[6] K. Deimling. *Multivalued Differential Equations*. Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[8] Á. Garab, V. Kovács és T. Krisztin. "Global Stability of a Price Model With Multiple Delays". *Discrete & Continuous Dynamical Systems* 36.12 (2016), 6855–6871. old.

[9] J. K. Hale és S. M. Verduyn Lunel. *Introduction to Functional-Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993.

[10] F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther és J. Wu. "Functional Differential Equations with State-Dependent Delays: Theory and Applications". *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations* 3 (2006), 435–545. old.

[11] V. Kolmanovskii és A. Myshkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Netherlands: Springer-Verlag, 1999.

[12] J. Mallet-Paret és R. D. Nussbaum. "Boundary Layer Phenomena for Differential-Delay Equations with State-Dependent Time Lags, I." *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 120.2 (1992), 99—146.

[13] J. Mallet-Paret, R. D. Nussbaum és P. Paraskevopoulos. "Periodic Solutions for Functional-Differential Equations with Multiple State-Dependent Time Lags". *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 3.1 (1994), 101–162. old.

[14] P. Ranjan. *Greed Considered Harmful: Nonlinear (in)stabilities in network resource allocation.* 2009.

[15] P. Ranjan, R. J. La és E. H. Abed. “Delay, Elasticity, and Stability Trade-Offs in Rate Control” (2003).

[16] P. Ranjan, R. J. La és E. H. Abed. “Global Stability in the Presence of State-Dependent Delay in Rate Control”. *Proceedings of the Conference on Information Sciences and Systems* (2004), 1099–1104. old.

[17] P. Ranjan, R. J. La és E. H. Abed. “Global Stability with a State-Dependent Delay in Rate Control”. *Proceedings of the Conference on Time-Delay Systems* (2004).

[18] H.-O. Walther. “A Periodic Solution of a Differential Equation with State-Dependent Delay”. *Journal of Differential Equations* 244.8 (2008), 1910–1945. old.

[19] H.-O. Walther. “Convergence to Square Waves for a Price Model with Delay”. *Discrete & Continuous Dynamical Systems* 13.5 (2005), 1325–1342. old.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Balázs István Ph.D. fokozatra pályázó Stabilitás és periodicitás késleltetett differenciálegyenletekre című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be. A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

[1] I. Balázs és T. Krisztin. “A Differential Equation with a State-Dependent Queueing Delay”. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* (submitted for publication).

[2] I. Balázs és T. Krisztin. “Global Stability for Price Models with Delay”. *Journal of Dynamics and Differential Equations* (accepted, electronically available).

Balázs István hozzájárulása a fent felsorolt cikkekhez 50-50%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2019. május 8.

Krisztin Tibor
Szegedi Tudományegyetem
tanszékvezető egyetemi tanár

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Balázs István Ph.D. fokozatra pályázó Stabilitás és periodicitás késleltetett differenciálegyenletekre című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be. A következő cikk eredményeiben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

[3] I. Balázs, J. B. van den Berg, J. Courtois, J. Dudás, J.-P. Lessard, A. Vörös-Kiss, JF Williams és X. Y. Yin. "Computer-Assisted Proofs for Radially Symmetric Solutions of PDEs". *Journal of Computational Dynamics* 5.1&2 (2018), 61–80. old.

Balázs István hozzájárulása a fenti cikkhez 12,5%.

Kijelentem, hogy a fenti eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2019. május 8.

Jan Bouwe van den Berg
Vrije Universiteit, Amsterdam

Julien Courtois
Université de Montréal

Dudás János
Szegedi Tudományegyetem

Jean-Philippe Lessard
McGill University, Montreal

Vörös-Kiss Anett
Szegedi Tudományegyetem

JF Williams
Simon Fraser University, Vancouver

Xi Yuan Yin
McGill University, Montreal