Szegedi Tudományegyetem

Informatikai Tanszékcsoport

Chooser-Picker játékok

PHD Disszertáció- Tézisek

Készítette:
András Csernenszky

Témavezető:
András Pluhár
Docens

Szeged
2011

Absztrakt

Ennek a munkának az fő célja, hogy minél mélyebben megértsük a Picker-Chooser (vagy Chooser-Picker) játékokat és Beck sejtését. A dolgozatnak három fő részből áll:

Először a Picker-Chooser(P-C) és a Chooser-Picker(C-P) játékok komlexitását vizsgáltuk meg. Itt azt találtuk, hogy mind a P-C és a C-P játékok esetében NP nehéz eldönteni, hogy melyik játékos a nyerő.[24]. Ezután bemutattuk néhány ismert példán keresztül a Picker-Chooser játékokat, hogy felfedezzük az azonosságokat és eltéréseket a különböző játékok között. Megvizsgáltuk a C-P 4×4 *tic-tac-toe*-t, a P-C változatát az általánosított Shannon-féle kapcsolójátéknak, a C-P változatát a k-amőbának, valamint a C-P, M-B és P-C tórusz játékoknak. Egy kicsit javítottunk a C-P játékokra vonatkozó "Erdős-Selfridge" tételen is [21].

A második részben a Chooser-Picker 7-amőba játékot oldottuk meg. Ez a játék azért is nagyon érdekes, mert a legutolsó igazán értékes eredmény a 8-amőba játékra már több mint 30 évvel ezelőtti (a végtelen négyzetrácsos papíron a második játékos elérheti a döntetlent). A 7-amőba megoldására tett kísésletek mindeddig sikertelenek. A tézis ennek a játéknak a Chooser-Picker változatával foglalkozik. Ebben a fejezetben belátjuk, hogy a Chooser-Picker 8-amőbát és a Chooser-Picker 7-amőbát Picker nyeri. A bizonyítás egy kissé hosszadalmas, nem triviális esetvizsgálat. Eztán felvázolunk egy elképzelést, hogyan lehetne boldogulni az eredeti (M-M illetve M-B) változatával ennek a játéknak [22].

Az utolsó részben a P-C átmérő játékkal foglalkozunk. Itt nagyon érdekes megfigyelni az M-B és a P-C játékokra kapott eredmények különbözőségét [2, 23]. Megmutatjuk, hogy a valószínűségi intuiciónkhoz közel álló eredményt hoz a Picker-Chooser változat, csakúgy, mint a felgyorsítás..

Chapter 1

Definíciók, egy sejtés és néhány eszköz

1.1 A játékok gyenge változata

A játékok gyenge változatának azt nevezzük, amikor a második játékos akkor nyer, ha döntetlent tud elérni. Ez azt jelenti, hogy a kezdő játékosnak nem kell félnie/védekeznie az ellen, hogy a második játékos elfoglalhat egy nyerőhalmazt. Itt a kezdő játékost Maker-nek (építő), a másodikat Breaker-nek (romboló) hívjuk. Könnyű belátni az alábbi állítást, lásd [7].

Állítás 1.1. Ha Breaker nyeri a a játék gyenge változatát, akkor az eredeti játék döntetlen.

1.2 Chooser-Picker és a Picker-Chooser játékok

Beck [6] az igen nehéz klikk játékok tanulmányozására bevezetett egy új típusú heurisztikát, mely igen sikeresnek bizonyult. Definiálta a *Picker-Chooser* vagy röviden P-C és a *Chooser-Picker* (C-P) változatait a Maker-Breaker játékoknak, mely igen hasonló a kétszemélyes torta felosztás problémához, (lásd [70]). Ezeknél a változatoknál Picker mindig kiválaszt két mezőt, majd Chooser választ közülük egyet, a másik Pickerhez kerül. A Picker-Chooser játékokban Picker felel meg Maker-nek és Chooser Breaker-nek, míg a Chooser-Picker játékoknál fordítva. Ha $|V|$ páratlan, akkor az utolsó elem Chooser-é. Beck azt tapasztalta, hogy Maker igen sok esetben pontosan akkor nyeri meg a Maker-Breaker játékot, amikor Picker a Picker-Chooser változatot. Ráadásul Breaker nyerései a M-B játékban, illetve Picker nyerései a C-P játékban úgy tűnik, hogy egybe esnek.

Ezen játékok tanulmányozása felbecsülhetetlen rátekintést enged a Maker-Breaker változatra. Néhány hipergráfra a végeredménye a Maker-Breaker és a Chooser-Picker változatnak ugyanaz [6, 21]. Általában úgy tűnik, hogy Picker helyzete legalább olyan jó, mint Breaker-é. Ezt az alábbi sejtésben mondható ki:

Sejtés 1.2. Ha a Maker-Breaker játékot Maker nyeri, akkor a Picker - Chooser játékot (mint második játékos) Picker nyeri; ha a Maker-Breaker játékot Breaker nyeri, akkor a Chooser-Picker játékot szintén (mint második játékos) Picker nyeri [21].

Szükséges a Chooser-Picker játékok végtelen változatának használhatóságához az alábbi megszorítás: Az elején Chooser kiválaszthatja egy korlátos részhalmazát a táblának, ahol majd játszanak. Erre azért van szükség, mert egy végtelen táblán Picker mindig kérhet egymástól távoleső pontokat és ez triviális nyerés Pickernek.

1.3 Eszköztár

1.3.1 Párosítási lemma

Lemma 1.3 (Cs-P)**.** Ha egy Chooser-Picker játék során (akár már a játék elején) van egy két elemű nyerőhalmaz $\{x, y\}$, akkor Picker-nek van olyan optimális nyerőstratégiája, amely $\{x, y\}$-nal kezdődik.

1.3.2 Monotonitási lemma

Korábban beláttuk, hogy végtelen tábla esetén Choosernek ki kell választania egy korlátos részhalmazát a tálának. Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy Chooser választ egy $X \in V$ részhalmazt, éa játszik az így *indukált rész-hipergráfon*, mely csak azokat az $A \in \mathcal{F}$ éleket tartalmazza, ahol $A \subset X$. Formálisabban: egy adott $(V, \mathcal{F})$ hipergráfra legyen $(V \setminus X, \mathcal{F}(X))$ az a rész-hipergráf, ahol $\mathcal{F}(X) = \{A \in \mathcal{F}, A \cap X = \emptyset\}$.

Lemma 1.4. [21] Ha Picker nyeri a Chooser-Picker játékot $(V, \mathcal{F})$-on, akkor Picker nyeri a $(V \setminus X, \mathcal{F}(X))$ hipergráfon is.

Ez a lemma hasznos lesz a következő fejezeteknél, ugyanis, ha egy korlátos S halmazt nem tudunk egyforma részekre feldarabolni, akkor megnövelhetjük S'-re, amit már fel lehet darabolni egyenlő részekre. És ha Picker nyer S'-n, akkor S-en is nyerni fog.

1.4 Néhány eredmény a Chosser-Picker játékokról

1.4.1 A Chooser-Picker játékok komplexitása

Miután a Maker-Breaker játékok (és a Maker-Maker) játékok PSPACE-teljesek, lásd [63], ezért mind a(z) 1.2 sejtés, mind a fenti heurisztika alapján a Picker-Chooser és a Chooser-Picker játékok sem ígérkeznek könyebbnek. Játékok PSPACE-teljességének beláttása többé-kevésbbé standard lásd [63, 62, 16]. Most mi ennél kevesebbet mutatunk be a vizsgált játékok asszimetrikus természete miatt.

Tétel 1.1. A Picker-Chooser játékoknál NP-nehéz eldönteni, hogy ki nyer.

Tétel 1.2. A Chooser-Picker játékoknál NP-nehéz eldönteni, hogy ki nyer.

Mindkét bizonyításban a $3 - \mathrm{SAT}$-ot vezetjük vissza Chooser-Picker, illetve Picker-Chooser játékokra.

Fontos megjegyezni, hogy a Chooser-Picker játékok NP-nehezek még azokra a (V, E) hipergráfokra is, ahol $|A| \leq 6$ minden $A \in E$.

4×4 tic-tac-toe

Állítás 1.5. Picker nyeri a Chooser-Picker 4×4 tic-tac-toe játékot.

1.4.2 Az általánosított Shannon-féle kapcsolójáték Picker-Chooser változata

Beláttuk a(z) 1.2 sejtést az általánosított Shannon-féle kapcsolójáték Picker-Chooser változatára, hasonlóan ahhoz, ahogy Lehman tette [41]. Legyen $(V, \mathcal{F})$ egy matroid, ahol $\mathcal{F}$ a bázisok halmaza, és Picker nyer ha elfoglal egy $A \in \mathcal{F}$ elemet. Jegyezzük meg, hogy ez ekvivalens egy $(V, \mathcal{C})$-on játszott Chooser-Picker játékkal a, ahol $\mathcal{C}$ a $(V, \mathcal{F})$ matroidból kivágot halmazok egy gyűjteménye minden $A \in \mathcal{F}$ és $B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \neq \emptyset$-re.

Tétel 1.3. Legyen $\mathcal{F}$ a bázisok egy gyűjteménye a V csúcshalmazon értelmezett matroidnak. Picker akkor és csak akkor nyeri meg a játékot $(V, \mathcal{F})$-en, ha van olyan $A, B \in \mathcal{F}$, hogy $A \cap B = \emptyset$.

A bizonyítás Oxley [50] írásában található Maker-Breaker eset bizonyításához hasonló.

1.4.3 Erdős-Selfridge típusú tételek P-C és C-P játékokra

Maker-Breaker $(V, \mathcal{F})$ játék esetén az Erdős-Selfridge tétel [25] nagyon jól használható kritériumot fogalmaz meg Breaker nyerésére. A Chooser-Picker $(V, \mathcal{F})$ játék esetében Beck [6], jóval erősebb feltételt használva, bebizonyította Picker nyerését. (A P-C változatra éles eredményt bizonyított, melyet szintén belefoglaltunk az alábbi tételbe) Legyen $||\mathcal{F}|| = \max_{A \in \mathcal{F}} |A|$ a $(V, \mathcal{F})$ hipergráf rangja.

Tétel 1.4. [6] A $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon játszott Chooser-Picker játékban, ha

$$T(\mathcal{F}) := \sum_{A \in \mathcal{F}} 2^{-|A|} < \frac{1}{8(||\mathcal{F}|| + 1)}, \tag{1.1}$$

akkor Pickernek van explicit nyerő stratégiája.

Ha $T(\mathcal{F}) < 1$, akkor Chooser nyeri a Picker-Chooser játékot a $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon.

Ezt az eredmény megjavítottuk avval, hogy beláttuk a következőt:

Tétel 1.5. A $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon játszott Chooser-Picker játékban, ha

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} 2^{-|A|} < \frac{1}{3\sqrt{||\mathcal{F}|| + \frac{1}{2}}}, \tag{1.2}$$

akkor Pickernek van explicit nyerő stratégiája.

Érdemes kiemelni egy speciális esetét a(z) 1.2 sejtésnek és az Erdős-Selfridge tételnek a Chooser-Picker játékokra.

Sejtés 1.6. Ha

$$\sum_{A \in \mathcal{F}} 2^{-|A|} < \frac{1}{2},$$

akkor Picker nyeri a Chooser-Picker játékot a $(V, \mathcal{F})$ hipergráfon.

1.4.4 Tórusz játékok

Beck paradigmáját leellenőriztük a 4×4-es tóruszon definiálható játékokon. A tóruszt a továbbiakban 4^2-nek jelöljük. Itt összeragasztjuk a négyzetháló szemközti oldalait és az 0 és ± 1 meredekségű vonalakból álló halmazokat tekintjük nyerőhalmazoknak. A tórusz játékok általános definícija megtalálható [7]-ben. A cellákra továbbiakban úgy hivatkozunk, mint ahogyan a sakkban szokták. A 4^2 tórusz hipergráfjában az élek többször is metszhetik egymást. Például a következő két nyerőhalmaznak két közös eleme is van: $\{a2, b1, c4, d3\}$ és $\{a4, b1, c2, d3\}$. Négy lehetséges játékot definiálunk a 4^2 hipergráfon. Ezek a Maker-Maker, a Maker-Breaker, a Chooser-Picker és a Picker-Chooser változatok. [7]-ől ismert, hogy a Maker-Maker változat döntetlen, a [21] cikkből, hogy Picker nyeri a Chooser-Picker játékot. Valójában, a Maker-Breaker változat eredményéből következik a Maker-Maker változaté is, valamint a Chooser-Picker bizonyítása is.

Állítás 1.7. Breaker nyeri a Maker-Breaker változatás a 4^2 tórusz játéknak.

Beck sejtésével (1.2) összhangban, Breakernek könnyebb dolga van a Maker-Breaker változatban, mint Choosernek a Picker-Chooser változatban. Bár a 4×4 tóruszon a kimenetele ugyanaz mindkét játéknak, ez utóbbit mégis sokkal nehezebb bizonyítani.

Állítás 1.8. Chooser nyeri a Picker-Chooser változatát a 4×4 tórusz játéknak.

Bizonyítás (vázlat) A teljes bizonyításhoz egy hosszú esetvizsgálatra van szükség. Noha néhány ágát a teljes játékfának le lehet vágni Beck egyik eredménye alapján [6]: Chooser nyeri a Picker-Chooser játékot a $\mathcal{H}$ halmazon, ha $T(\mathcal{H}) := \sum_{A \in E(\mathcal{H})} 2^{-|A|} < 1$.

Fontos megjegyezni, hogy fent láthattunk egy rendezést a vizsgált játékváltozatok komplexitására: könnyebb a C-P játék eredményét, mint az M-B játékét megkapni, habár (a fenti esetben legalábbis) ugyanazt adják. és sokkal nehezebb a P-C esetet meghatározni, mint a Maker-Breaker változatét.

Chapter 2

A Chooser-Picker 7-amőba

2.1 A k-amőba játék

A k-amőba olyan hipergráf játék, ahol a gráf csúcsai egy végtelen négyzetrács ($\mathbb{Z}^2$) mezőinek feleltethetők meg, illetve a nyerőhalmazok k darab egymás utáni cellának (vízszintes, függőleges, vagy átlós) felelnek meg. Ha az egyik játékos megszerez egy k hosszú vonalat, akkor nyer - máskülönben a játék döntetlen. Jegyezzük meg, hogy tökéletes játékot feltételezve vagy az első játékos nyer, vagy a játék döntetlen John Nash stratégia lopásos érvelését alkalmazva [13]. További részletek a k-amőba játékról a [57, 58]-ben találhatók.

A k-amőbának mind a Maker-Maker, mind a Maker-Breaker változata $k = 6, 7$-re nyitott kérdés. Mindenki azt gondolja, hogy ezen játékok döntetlenek (Breaker nyer), de a sok erőfeszítés ellenére jelentős eredményt eddig nem ért el senki.

2.2 A C-P k-amőba játék

Mielőtt bebizonyítottuk a C-P 7-amőbára vonatkozó zételt, igazoltuk hogy Picker nyeri a könyebb C-P 8-amőbá játékot - ehhez a 12 mezőből álló, Zetters által alkalmazott (lásd [32]) "Z" alakú résztáblát használtunk fel.

Állítás 2.1. Picker nyeri a 8-amőba játék Chooser-Picker változatát, bármely $B \subseteq \mathbb{Z}^2$ halmazon.

Tétel 2.1. Picker nyeri a 7-amőba játék Chooser-Picker változatát, bármely A részhalmazán $\mathbb{Z}^2$-nek.

A korábban már említett 1.4 lemmát alkalmazva, Chooser először kiválaszt egy véges S halmazt. Tekinkjük az egész sík felbontását résztáblákra és ezeken játszunk különkülön segédjátékot. Könnyű belátni, hogy ha Picker megnyeri az összes segédjátékot, akkor Picker nyer minden olyan K táblán játszott játékot, ahol K ezen segédtáblák uniójaként áll össze. A 1.4 lemmából következik, hogy Picker nyer $S \subset K$ -en is. Egy megfelelő segédjátékokra történő felbontást kellett találnunk. A felbontás garantálja, hogy ha Picker nyer minden részjátékban, akkor Chooser nem tud hét egymás utáni cellát elfoglalni K-n.

Minden résztábla egy 4×8-as méretű téglalap, ahol a nyerőhalmazokat (a könnyebb megértés kedvéért) négy különböző táblán ábrázoltuk:

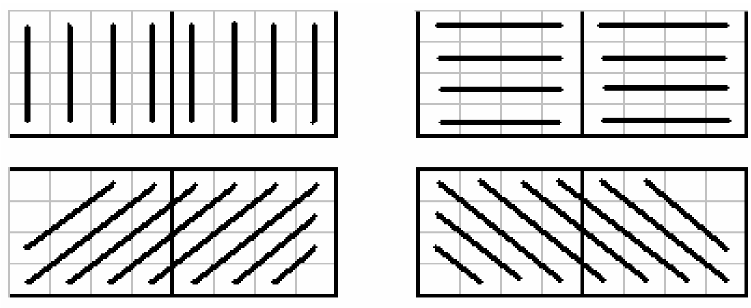

Figure 2.1: Ezek a 4×8as téglalap nyerőhalmazai. Könnyű látni, hogy pontosan egy szimmetria van benne (a dupla vonal mentén). Ezt a bizonyításban hasznosítjuk.

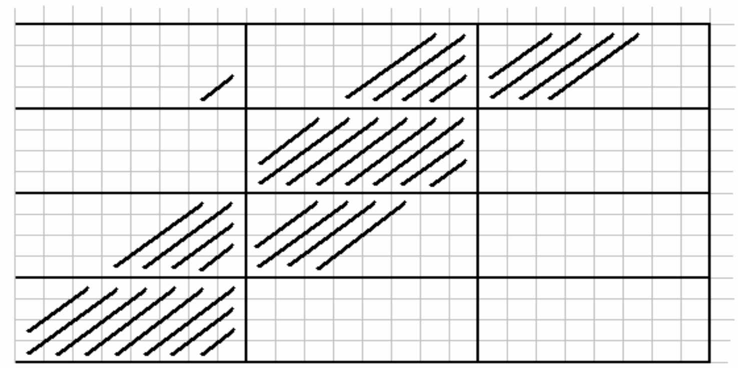

Figure 2.2: Láthatjuk, hogy hogyan következik a segédtáblákon történő játékból a döntetlen az egész táblára: sem vizszintesen, sem függőlegesen, sem átlósan (most csak egy átlós irányt részleteztünk), nincsen egymásutáni hét cella úgy, hogy ne tartalmazza egy nyerőhalmazát valamelyik segédjátáknak.

Tehát a kulcs-lemma a bizonyításunkhoz a következő.

Lemma 2.2. Picker nyeri a 4×8-as táblán definiált segédjátékot.

Megjegyzés 2.3. A M-B esetre “brute-force" számítógépes vizsgálattal megnéztük ugyanezt a segédtáblát, de az Maker nyerést adott! Tehát mi nem haszhatjuk ugyanazt a táblát, hogy belássuk, hogy a játék gyenge változatát Breaker nyeri a 7-amőbára. Természetes gondolat, hogy akkor keressünk más segédjátékokat, de ez nem igérkezik könnyű vállalkozásnak. Mindenesetre ökölszabályként érdemes először mindig a C-P esetet megvizsgálni.

Chapter 3

A Picker-Chooser átmérőjáték

3.1 Gráf játékok

Számos Maker-Breaker játék van definiálva az n csúcsú teljes gráfon. A játékosok felváltva foglalnak el éleket; Maker akkor nyer, ha a részgráfjára teljesül egy előre meghatározott $\mathcal{P}$ (gyakran monoton) tulajdonság, lásd [8, 5, 12, 17]. Balogh és társai [2] bevezették az $(a : b)$ d-átmérő játékot, röviden $\mathcal{D}_d(a : b)$-t, ahol Maker pontosan akkor nyer, ha a részgráfjának az átmérője legfeljebb d. A [2] cikk legmeglepőbb eredménye az volt, hogy noha Maker elveszti a $\mathcal{D}_2(1 : 1)$ játékot, de Maker megnyeri a $\mathcal{D}_2(2 : \frac{1}{9}n^{1/8}/(\log n)^{3/8})$ játékot.

Ez azt jelenti, hogy a játék felgyorsítása drámaian megváltoztathatja a játék kimenetelét, [57]. A végeredmény szintén sokat módosul, amikor ugyanezen játék Picker-Chooser változatát vesszük górcső alá. Fő eredményünk a következő megfigyelés, illetve az azt követő tétel:

Megfigyelés. Picker nyeri a P-C $\mathcal{D}_2(1 : 1)$ játékot K_n-en, ha $n > 22$.

Tétel 3.1. A Chooser-Picker $\mathcal{D}_2(1 : b)$ játékot Picker nyeri, ha $b < \sqrt{n/\log_2 n}/4$, míg Chooser nyer, ha $b > 3\sqrt{n}$, ha n elég nagy.

A Chooser-Picker játékok önmagukban heurisztikái a Maker-Breaker játékoknak. Ahogyan a(z) 1.5 tétel mutatja, a Maker-Breaker és a Chooser-Picker játékok nyerési feltételei gyakran egybeesnek. Ráadásul Breaker nyerése a Maker-Breaker játékban és Chooser nyerése a Picker-Chooser játékban gyakran ugyanakkor teljesül , lásd [6]. Hogy tovább vizsgálhassuk ezt a kapcsolatot, szükségünk volt a(z) 1.5 tétel elfogult változatára is. Nem kíséreltük meg a legjobb alakot leírni, a céljainkhoz elég a következő lemma.

Lemma 3.1. Picker nyeri a Chooser-Picker $(1 : b)$ elfogult játékot a $\mathcal{H} = (V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$ hipergráfon, ha

$$\frac{v}{b+1} \sum_{A \in E(\mathcal{H})} 2^{-|A|/b} < 1,$$

ahol $v = |V(\mathcal{H})|$.

3.1.1 Átmérő és fokszám játékok

Balogh és társai a [2] cikkben észrevették, hogy a $\mathcal{D}_2(1 : 1)$ nem esik egybe a valószínűségszámítási intuíciónkkal: Ugyanis, ha a a K_n gráf élei véletlenszerűen kerülnek Makerhez és Breakerhez, akkor majdnem biztosan 2 lesz a gráf átmérője; míg Breakernek van egy egyszerű párosítási stratégiája, amivel $n > 3$, [2]. Először vesznek egy olyan uv élt, ahol semelyik ux vagy vx élt nem foglalta el Maker; majd ha Maker elfoglal egy ux élt, akkor Breaker a vx élt foglalja el (ha vx-et már korábban elfoglalta, akkor egy tetszőleges élt választ), illetve fordítva .

A $\mathcal{D}_2(2:2)$ játékot játszva nincsen ilyen párosítási stratégiája Breakernek, és Maker nyeri a játékot, sőt a $\mathcal{D}_2(2:b)$ játékot is, ahol b polimonikusan nő n-nel, ha n elég nagy:

Tétel 3.2. [2] Maker nyeri a $\mathcal{D}_2(2:\frac{1}{9}n^{1/8}/(\ln n)^{3/8})$ játékot. és Breaker nyeri a $\mathcal{D}_2(2:(2+\epsilon)\sqrt{n/\ln n})$ játékot, minden $\epsilon > 0$-ra, amennyiben n elég nagy.

A 3.1 Tétel bizonyításához, szükséges a *fokszám játékok* ismerete. Székely, Beck, Balogh és társai [71, 5, 2] megmutatták, hogy ezen játékok önmagukban is érdekesek.

Ezeknél a játékoknál az egyik játékos próbál éleket minnél egyenletesebben elfoglalni, míg a másik célja hogy minél több élet foglaljon el valamelyik csúcsnál. Egy adott G gráfnál és egy előre megadott d fokszámnál, Maker és Breaker egy (a,b) elfogult játékot játszanak G élein. Maker akkor nyer, ha legalább d éle van minden csúcsnál.

Minket a $G = K_n$ eset érdekel. Balogh és társai [2] belátták a következő lemmát:

Lemma 3.2. [2] Legyen $a \leq n/(4\ln n)$ és n elég nagy. Maker nyeri az $(a:b)$ fokszámjátékot K_n-en ha $d < \frac{a}{a+b}n - \frac{6ab}{(a+b)^{3/2}}\sqrt{n\ln n}$.

Nem akarjuk a teljes P-C (C-P) fokszám játék elméletet felépíteni, csak egy egyszerű állítást mondunk ki, mely céljainknak megfelel.

Lemma 3.3. Legyen $b < n/(8\ln n)$ és n elég nagy. Chooser nyeri az $(1:b)$ Chooser-Picker fokszámjátékot K_n-en, ha $d < n-1-3n/b$.

A 3.1 tétel bizonyításához, legelőször a 3.1 lemmát láttuk be.

A 3.3 tétel második felét láttuk be először, vagyis, hogy Chooser nyer, ha $b > 3\sqrt{n}$, ami a 3.3 lemmából jön. Játszon Chooser a lemma szerint, akkor Pickernek legfeljebb $(3n/b)-1$ éle lesz bármelyik csúcsot is nézzük $x \in K_n$-re, tehát a csúcsok száma, mely x-hez van kapcsolva (2-átmérőnyire) kevesebb, mint $((3n/b)-1)^2 < n-1$.

A tétel első felének belátásához több munka kellett. Felbontjuk a gráf csúcsait három körülbelül azonos méretű részre: X_1, X_2 és X_3. (Továbbiakban legyen $X_i = X_{i \bmod 3}$, ha $i > 3$.) Az X_i csúcsai legyenek rendre $1, 2, \ldots, n/3$. [1] $E(X_i, X_j)$ legyen az élek halmaza X_i és X_j között.

Két külön játékot játszunk az egyes részeken belüli, illetve az egyes részek közötti összekötés érdekében. Az első játákban összekötjük az X_i-n belüli pontokat az $E(X_i, X_{i+1})$ éleket használva ($i = 1, 2, 3$-ra). A második játékban összekötjük X_i-et X_{i+1}-vel az X_{i+1} élein játszva.

[1] Ez lehet $\lfloor n/3 \rfloor$ és $\lceil n/3 \rceil$ is. A bizonyításban mi a $\lceil n/3 \rceil$-vel számoltunk és a $\lfloor n/3 \rfloor$ eset könnyen jön ebből.

Bibliography

[1] L. V. Allis, H. J. van den Herik and M. P. Huntjens, Go-Moku solved by new search techniques. Proc. 1993 AAAI Fall Symposium on Games: Planning and Learning, AAAI Press Technical Report FS93-02, pp. 1-9, Menlo Park, CA.

[2] J. Balogh, R. Martin and A. Pluhár, The diameter game, *Random Structures and Algorithms*, Volume **35**, (2009), 369–389.

[3] J. Beck, Van der Waerden and Ramsey games. *Combinatorica* **1** (1981), 103–116.

[4] J. Beck, Remarks on positional games. *Acta Math Acad Sci Hungar* **40** (1982), 65–71.

[5] J. Beck, Deterministic graph games and a probabilistic intuition. *Combinatorics, Probability and Computing* **3** (1994), 13–26.

[6] J. Beck, Positional games and the second moment method. *Combinatorica* **22** (2) (2002) 169–216.

[7] J. Beck, Positional Games. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005), 649–696.

[8] J. Beck, Random graphs and positional games on the complete graph. Random graphs ’83 (Poznań, 1983), 7–13, *North-Holland Math. Stud.*, **118**, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[9] J. Beck, *Combinatorial games. Tic-tac-toe theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **114.** Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xiv+732 pp.

[10] J. Beck, *Combinatorial games. Tic-Tac-Toe Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 114. Cambridge University Press, Cambridge, 2008. xiv+732 pp.

[11] M. Bednarska, and T. Łuczak, Biased positional games for which random strategies are nearly optimal. *Combinatorica* **20** (2000), 477–488.

[12] M. Bednarska, and T. Łuczak, Biased positional games and the phase transition. *Random Structures and Algorithms* **18** (2001), 141–152.

[13] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways for your mathematical plays*, Academic Press, New York 1982.

[14] B. Bollobás, *Random Graphs*. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **73** xviii+498 pp.

[15] de Bruijn, ?? *Recreational Mathematics* ??

[16] J. M. Byskov, Maker-Maker and Maker-Breaker Games are PSPACE-complete. *Technical Report, BRICS Research Series* RS-04-14, Dept. Comp. Sci., Univ. Aarhus, August 2004.

[17] V. Chvátal and P. Erdős, Biased positional games. Algorithmic aspects of combinatorics (Conf., Vancouver Island, B.C., 1976). *Ann. Discrete Mathematics* **2** (1978), 221–229.

[18] J. H. Conway, *On Numbers and Games*. London: Academic Press, 1976.

[19] B. Csákány, A form of the Zermelo-von Neumann theorem under minimal assumptions. *Acta Cybernetica* **15** (2002), no. 3, 321–325.

[20] Csákány Béla, *Diszkrét Matematikia Játékok*. Polygon, Szeged, 1998.

[21] A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games, *Discrete Mathematics* Volume **309** (2009), 5141–5146.

[22] A. Csernenszky, The Chooser-Picker 7-in-a-row-game, *Publicationes Mathematicae* **76** (2010), 431– 440

[23] A. Csernenszky, The Picker-Chooser diameter game, *Theoretical Computer Science* **411** (2010), pp. 3757–3762

[24] A. Csernenszky, R. Martin and A. Pluhár, On the Complexity of Chooser-Picker Positional Games, *submitted*.

[25] P. Erdős and J. L. Selfridge, On a combinatorial game. *J. Combinatorial Theory Series A* **14** (1973), 298–301.

[26] S. Even and R. E. Tarjan, A combinatorial problem which is complete in polynomial space. *J. Assoc. Comput. Mach.* **23** (1976), no. 4, 710–719.

[27] A. S. Fraenkel, Complexity of Games. *Combinatorial games* (Columbus, OH, 1990), 111–153, Proc. Sympos. Appl. Math., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[28] A. S. Fraenkel, Combinatorial games: selected bibliography with a succinct gourmet introduction. *The Electronic Journal of Combinatorics* Dynamic Surveys (2009) 88pp.

[29] D. Gale, H. Kuhn and A. Tucker, Linear programming and the theory of games, in T. Koopmans, ed., *Activity Analysis of Production and Allocation*, John Wiley and Sons, New York, (1951) pp. 317–329.

[30] D. Gale, The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem. *American Mathematical Monthly* **86** (1979), no. 10, 818–827.

[31] J. J. Gik, *Sakk és matematika*. Gondolat, Budapest (1989).

[32] R. K. Guy and J. L. Selfridge, Problem S.10, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979); solution T.G.L. Zetters **87** (1980) 575–576.

[33] A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games. *Trans Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222–229; M.R. # 1265

[34] D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojaković and T. Szabó, Planarity colorability and minor games. *SIAM Journal on Discrete Math* **22** (2008), 194–212.

[35] F. Harary, Is Snaky a winner? *Geombinatorics* **2** (1993) 79–82.

[36] H. Harborth and M. Seemann, Snaky is a paving winner. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **19** (1997), 71–78.

[37] M. Hegyháti, Colorability of mixed hypergraphs and their chromatic inversions, manuscript.

[38] R. Hochberg, C. McDiarmid and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles. *Discrete Mathematics* **138** (1995) 261–265.

[39] J. P. Jones, Some undecidable determined games. *Internat. J. Game Theory* **11** (1982), no. 2, 63–70.

[40] M. Krivelevich, Positional games and probabilistic considerations, Oberwolfach Report 20/2007 16–17.

[41] A. Lehman, A solution of the Shannon switching game. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **12** 1964 687–725.

[42] Hall, Marshall, Jr. Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54**, (1948). 922–926.

[43] J. F. Nash, Noncooperative games. *Ann. of Math.* **54** (2), (1951) 284–295.

[44] J. F. Nash, The bargaining problem. *Econometrica* **18**, (1950) 155–162.

[45] J. F. Nash, Two-person cooperative games. *Econometrica* 21, (1953) 128–140.

[46] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.

[47] Neukomm Gyula, Egy híres sakkprobléma matematikai megfejtése. *Magyar Sakkvilág* 1941 December.

[48] K. Noshita, Union-Connections and Straightforward Winning Strategies in Hex. *ICGA Journal*, 2005 28(1): cover, 3–12.

[49] R. Nowakowski eds. *Games of No Chance*

[50] J. G. Oxley, *Matroid Theory.* New York: Oxford University Press, 1992.

[51] C. H. Papadimitriou, *Computational Complexity* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1994.

[52] O, Patashnik, Qubic: $4 \times 4 \times 4$ tic-tac-toe. *Math. Mag.* **53** (1980), no. 4, 202–216.

[53] Y. Peres, *Game Theory, Alive.* electronic lecture note (created 2008.01.24 2:54:38)

[54] A. Pluhár, Játékelmélet, *egyetemi jegyzet (2010)*

[55] A. Pluhár, Generalized Harary Games. *Acta Cybernetica* **13** no. 1, (1997) 77–83.

[56] A. Pluhár, *Positional Games on the Infinite Chessboard.* Ph.D. dissertation, Rutgers University 1994.

[57] A. Pluhár, The accelerated k-in-a-row game. *Theoretical Computer Science* **270** (2002), 865–875.

[58] A. Pluhár, Pozíciós játékok, Szigma, vol 3-4, Pécs, 2007, 111–130

[59] P. Hein, Vil de laere Polygon? *Politiken newspaper*, Denmark, 26 December 1942.

[60] Norman Do, How to Win at TicTacToe. *The Australian Mathematical Society, Gazette*, Volume **32** Number 3, July 2005, 151–161.

[61] O, Patashnik, Qubic: 444 tic-tac-toe. *Mathematical Magazine* **53** (1980), no. 4, 202–216.

[62] S. Reisch, Hex ist PSPACE-vollständig. *Acta Inform.* **15** (1981), no. 2, 167–191.

[63] T. J. Schaefer, On the complexity of some two-person perfect-information games. *J. Comput. System Sci.* **16** (1978), no. 2, 185–225.

[64] Székely Gábor, Paradoxonok a véletlen matematikájában, *Műszaki Könyvkiadó*, Budapest (1982).

[65] S. Shelah, Primitive recursive bounds for van der Waerden numbers. *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), no. 3, 683–697.

[66] N. Sieben, Hexagonal polyomino weak $(1, 2)$-achievement games. *Acta Cybernetica* **16** (2004), no. 4, 579–585.

[67] N. Sieben, Snaky is a 41-dimensional winner. *Integers* **4** (2004), G5, 6 pp.

[68] H. Steinhaus, The problem of fair division, *Econometrica* **16** (1948) 101–104.

[69] J. Spencer, Randomization, derandomization and antirandomization: three games. *Theoretical Computer Science* **131** (1994), no. 2, 415–429.

[70] H. Steinhaus, *Matematikai kaleidoszkóp.* Gondolat Budapest (1984).

[71] L. A. Székely, On two concepts of discrepancy in a class of combinatorial games. Finite and Infinite Sets, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 37, North-Holland, 1984, 679–683.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Csernenszky András PhD fokozatra pályázó ***The Chooser-Picker games*** című disszertációját.
A disszertációban szereplő közös eredményekre vonatkozóan kijelentem, hogy a következő eredményekhez való hozzájárulásunk oszthatatlan:

- **A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games**, *Discrete Mathematics* Volume **309** (2009), 5141–5146.
- **Csernenszky, R. Martin and A. Pluhár, On the Complexity of Chooser-Picker Positional Games**, *submitted to Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*

Szeged, 2011-05-30, ...
dr. Pluhár András

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Csernenszky András PhD fokozatra pályázó ***The Chooser-Picker games*** című disszertációját.
A disszertációban szereplő közös eredményekre vonatkozóan kijelentem, hogy a következő eredményekhez való hozzájárulásunk oszthatatlan:

- **A. Csernenszky, C. I. Mándity and A. Pluhár, On Chooser-Picker Positional Games**, *Discrete Mathematics* Volume **309** (2009), 5141–5146.

2011.05.30, Csizmárkné dr. Ibett
..........., ...
dátum, aláírás

Coauthor's declaration

I hereby certify that I am familiar with the thesis of the applicant Mr ***András Csernenszky*** entitled ***The Chooser-Picker games***
Regarding our joint results referred to in this thesis, the following ones were obtained as the result of joint contribution by the applicant and myself:

- **Csernenszky, R. Martin and A. Pluhár, On the Complexity of Chooser-Picker Positional Games**, *submitted to Integers Journal*

30/05/2011 ....
date signature