

Tic-Tac-Toe, Amőba és egyéb állatok

Doktori értekezés

GYÖRFFY LAJOS

TÉMAVEZETŐ:

DR. PLUHÁR ANDRÁS

MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK DOKTORI ISKOLA
SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET

SZEGED

2019

Tartalomjegyzék

1. Előszó	1
2. Bevezetés	4
2.1. Hipergráf játékok	9
2.1.1. Amőba	11
2.2. Stratégiák	13
2.2.1. Párosítások	14
2.2.2. Résztáblák	15
2.2.3. Esetvizsgálat	16
2.2.4. Erdős-Selfridge	18
3. Párosítások	22
3.1. Amőba eredmények	25
3.1.1. 12-amőba	25
3.1.2. 9-amőba	25
3.2. Három irány, hatszögrács	27
3.3. Egy és két irányban	28
3.4. Harary állatok	30
4. Általánosított párosítások	33
4.1. Híd a párosítások és a kettőszínezés között	34
4.1.1. Sütik és süti-elhelyezések	35
4.2. Sütik és blokkolási erejük az amőbára	37
4.2.1. 4-süтик	38
4.2.2. Maximális blokkolási számok 2-től a 8-sütikig	39

4.3. Amőbák sütikkel	40
4.3.1. A 2-amőba	41
4.3.2. A 3-amőba	41
4.3.3. A 4-amőba	42
4.3.4. A 9-nél nagyobb amőbák	43
4.3.5. A 7- és 5-amőba	43
4.3.6. A 6-amőba	44
4.4. Amőba kevesebb irányban	45
4.4.1. 3 irány avagy a hatszögrács	45
4.4.2. Egy és két irányban	47
4.5. Harary-állatok	48
5. A 9-amőba párosításai	50
5.1. A jó párosítás feltételei	50
5.1.1. Átlós alternáló körök	55
5.1.2. A 8-tórusz párosításai	58
5.2. Nincs kvázikristály	60
5.3. Az összes jó párosítás megkeresése	62
5.4. A jó párosítások rendszerezése egy gráfban	63
5.4.1. A gráf vizsgálata	65
5.5. Hasonló eredmények	67
5.5.1. Hatszögrács	67
5.5.2. Egy- és két irányban	67
5.5.3. Magasabb dimenzióban	69
6. Nyitott kérdések	71
6.1. A 7-amőba megoldási lehetőségei	71
6.2. Résztáblák blokkolási ereje	74
6.3. Lehetőségek az esetszám csökkentésére	75
6.3.1. Általános megjegyzések	75
6.3.2. Dominálás	75
6.3.3. Kettessel kell-e kezdeni?	76
6.4. Hipergráf játékok osztályozása	77

Köszönetnyilvánítás	79
Irodalomjegyzék	80
7. Összefoglalás	84
8. Summary	88

1. fejezet

Előszó

"Játék az egész világ..."
(William Shakespeare nyomán)

Ősidők óta foglalkozunk játékokkal. Számos lelet bizonyítja, hogy már az ősemberekben is élt a játék ösztöne. Bár más népeket más-más játékok jellemeznek saját környezeti adottságaikat figyelembe véve, egy valami biztosan közös bennük. A játék életük alapvető történéseit modellezte. A körülöttük élő állatokat játszották el, a túlélésükért folytatott vadászatra készültek fel, gyűjthettek bogyókat és egyéb értékesnek vélt kincseket, előre eljátszhatták a szomszéd törzsszel vívott háborút és a nemzetségükben uralkodó hierarchiát, vagy játszhattak környezetük szórakoztatására pl. egy fűzfaágból faragott furulyán.

Nincs ez másképp a modern világban sem, noha ősi játékainkat és azok származékait már más formákban játszuk, az alapvető motivációink ugyanazok. A játékok személyes életünkben is az első mozzanatok közé tartoznak. Ahogy egy gyermek megtanulja, hogy a négyzet alakú darab a négyzet alakú lyukba passzol, hogy olykor veszíteni is tudni kell, hogy a fárasztóan sok gyakorlás és a koncentráció meghozza a gyümölcsét, mind-mind hozzájárul testi, lelki és szellemi fejlődéséhez.

Napjaink legtöbb embert megmozgató világra szóló eseményei szintén játékok, gondoljunk csak az Olimpiai Játékokra vagy a Futball Világbajnokságokra. Éppen ezért, játékokkal foglalkozni mindig központi téma volt és lesz a jövőben is.

Matematikai szempontból az egyik leginkább vizsgált terület a mátrix játékoké volt. Ezen játékok fénykora Neumann János és Emile Borel megjelenésével vette kezdetét. Neumann többek között bebizonyította a minimax tételt, követőinek (David Gale, Harold Kuhn, Alan Tucker) segítségével pedig a játékelmélet hamarosan átvezetett a lineáris programozás akkoriban friss tudományához, amely máig a játékelmélet egyik leginkább értett és számolható területe. A közgazdaságtan elméleti megalapozásában szintén nagy szerepet játszott a Neumann János és Oscar Morgenstern által bevezetett Kooperatív játékok elmélete, ld. [35], majd a John Nash által vizsgált nem kooperatív játékok, mely a Nash egyensúly felfedezéséhez és (matematikai híján) jó néhány közgazdasági Nobel-díjhoz vezetett.

A másik, matematikusok által intenzíven kutatott terület a kombinatorikus játékok (pl. NIM, Conway játék, stb.) és azokon belül egy némileg eltérő ág, a minket most leginkább érdeklő táblajátékok (noha az elmúlt időszakban pl. a futballban is egyre inkább alkalmaznak matematikai módszereket). Ezek közül a legismertebb és legnépszerűbb játék a sakk, melyről megszámlálhatatlan sok mű keletkezett már. Hasonlóan érdekes és kutatott táblajátékok emellett a Go, vagy a Go tábláján (is) játszható Go-Moku, mely az amőba típusú játékok egyik fajtája.

Kisiskolás korunktól kezdve ismerjük a Tic-Tac-Toet, vagy az Ötödölőként is ismert amőbát, angolul *5-in-a-row*, melyben két játékos egy négyzetrácsos füzetlapon felváltva X-eket és O-kat rak, amíg egyikük megszerez öt mezőt egy sorban (vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan). Bár a játék több ezer éves múltra tekint vissza és szabályai nagyon egyszerűnek tűnnek, még mindig vannak nyitott kérdések a témakörben.

Bizonyított tény (igaz, csak az emberi agy által átláthatatlan számítógépes módszerekkel), hogy az 5-amőbát a kezdő nyeri, legalábbis véges 19×19 -ös táblán, valamint a 8-amőba – ahol öt helyett nyolc mező megszerzése ér győzelmet – pedig döntetlen. A 6- és 7-amőbák esetei azonban máig megoldatlan problémát okoznak (bár sejtjük, hogy szintén döntetlent adnak).

Jelen írásban az amőba típusú játékok párosítási stratégiáival és azok általánosításával foglalkozunk, karakterizáljuk és megszámloljuk a párosítások szempontjából legérdekesebb eset, a 9-amőba összes lehetséges párosítását, melyeket

rendszerbe foglalva egy érdekes struktúrájú gráfot is megadunk. A disszertáció végén áttekintjük a nyitott kérdéseket és kísérletet teszünk a 7-amőba megoldására is.

A laikusok számára érthető, ám a matematikusok számára is megválaszolatlan kérdések közismerten a számelméletben fordulnak elő leggyakrabban (legalábbis a "köz" legtöbbször így gondolja). Emellett azonban a kombinatorikus játékok elmélete is legalább ennyi, mindenki számára érthető olyan kérdésfelvetést tartalmaz, melyek megválaszolása eddig még a legjobb matematikusoknak sem sikerült. Ne lepődjünk meg tehát, ha olykor a triviális lépések megtétele után nagyon hamar a szakadék szélén, az ún. *kombinatorikus káoszban* találjuk magunkat.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- L. Győrfy, A. Pluhár (2016), Generalized pairing strategies – A bridge from pairing strategies to colorings, *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, **8**, no. 2, 233–248.
- L. Győrfy, G. Makay, A. Pluhár (2019), Pairing strategies for the 9-in-a-row game, *Ars Math. Contemporanea*, **16**, 97–109.
- L. Győrfy, G. Makay, A. London (2017), The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games, *Acta Cybernet.*, **23**, 561–572.

2. fejezet

Bevezetés

"Akarsz-e játszani?"

(Kosztolányi Dezső)

Bár az általunk vizsgált játékokat szokás kombinatorikus vagy pozíciós játékoknak is hívni, mégis a következőkben bevezetett **hipergráf játék** lehet a legtalálhatóbb elnevezés számunkra. Míg a kombinatorikus játékok közé minden olyan játékot beleértünk, melyeknél kombinatorikus gondolkodás vezet eredményre, a pozíciós játékok már egy szűkebb területet jelentenek, melyek közé azonban még mindig beletartozik minden olyan játék, melyek elemei pozíciókkal leírhatók, pl. a sakk vagy a malom is. Az értekezésben vizsgált hipergráf játékokra egyaránt jellemző, hogy egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfon játszák, ahol a \mathcal{H} hipergráf csúcsai alkotják a táblát, míg az élei az ún. nyerő halmazokat. Két játékos, I és II felváltva választja a tábla elemeit. A *normál* verzióban amelyikük elsőként megszerzi egy nyerő halmaz összes elemét, megnyeri a játékot.

Mivel a terminológia sajnos nem egységes, itt megemlítem Beck József által a Pozíciós játékokra adott feltételrendszert [4, 37]. Egy pozíciós játékban:

1. Két játékos van, I és II , és I a kezdő.
2. Véges sok állás van, és adott egy kezdő állás.
3. Minden állásban eldönthetők a játékosok lehetséges lépései.
4. A játékosok felváltva lépnek.

5. A lépések minden szabályos sorozata véges.
6. Szabályos lépések egy teljes (a kezdőállástól a végállásig) sorozata egy játszma.
7. A kimenetel minden végállásban meghatározott, az egyik játékos nyer, vagy döntetlen.
8. Mindkét játékos rendelkezik az összes információval; ismeri a szabályokat és a lehetőségeit, emlékszik a megtett lépésekre, látja saját és az ellenfele lépéseit, stb.
9. Nincsenek a véletlentől függő lépések, szabályok.

Ezen feltételek ekvivalensek egy absztrakt Γ játékkal, $\Gamma = (T, F)$, ahol T egy irányított gyökeres fa, a *játékfa*, míg F a T levelein értelmezett függvény, mely az I, II vagy D értékeket veheti fel. Az r gyökérpont nulla befokú, minden más pont befoka egy és minden irányított út véges T -ben. A játék menete a következő: a játékosok egy érmét tologatnak a fa irányított élei mentén. I kezd r -ben és egy tetszőleges szomszédjára lép, majd ezek után felváltva lépnek. Egy q végállást elérve I (II) nyer, ha $F(q) = I(II)$, illetve a játszma döntetlen, ha $F(q) = D$. *Stratégia* alatt egy olyan függvényt értünk, amely T egy belső x pontjához egy olyan y pontot rendel, melybe vezet él x -ből. Egy s stratégia nyerő (döntetlen) valamely játékosnak, ha azt követve az ellenfél bármely játéka esetén nyer (döntetlent ér el). Egy s stratégia azonosítható a T fa egy T_s részfájával: minden x pontból induló élt törölünk, az $(x, s(x))$ kivételével.

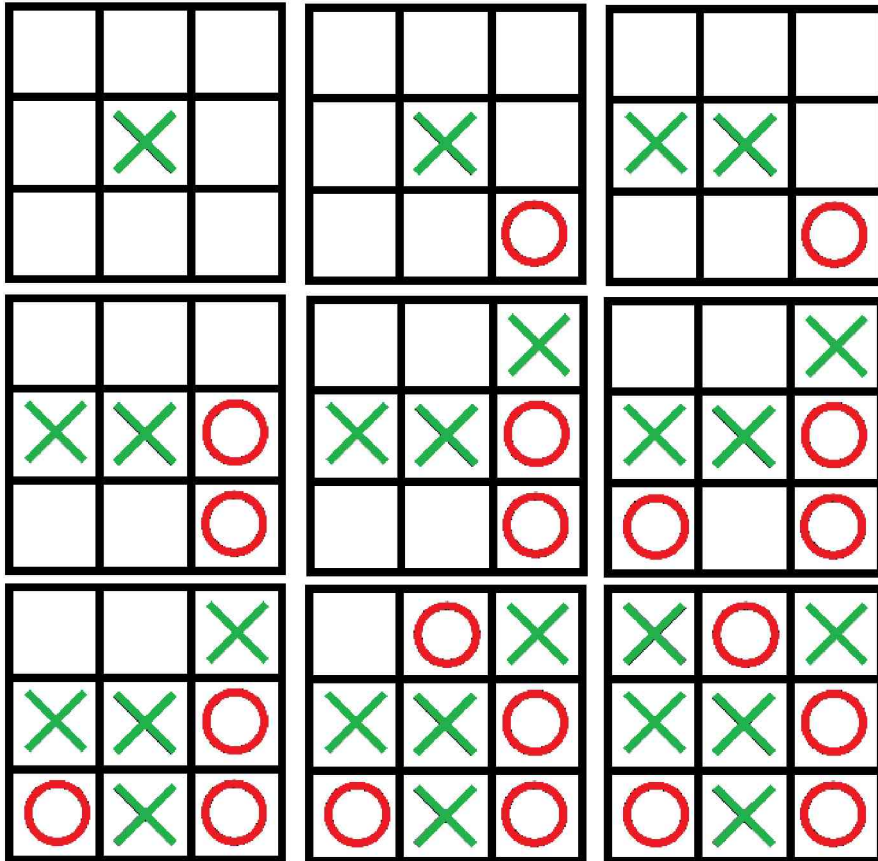
A fentiek segítségével kimondhatjuk Zermelo tételét:

2.1. Tétel. *Egy pozíciós játékban vagy valamelyik félnek van nyerő stratégiája, vagy mindkettőnek van döntetlen stratégiaja.*

A bizonyítás, mely megtalálható Pluhár András [37] jegyzetében, a visszafele címkézés módszerét használja. Konstruktív bizonyítást ad, amellyel a fa méretében lineáris időben eldönthető bármely állás kimenetele. Jegyezzük meg, hogy a tétel általánosabban is kimondható. A Zermelo által adott bizonyítás ráadásul nem volt hibátlan, azt később König Dénes, Kalmár László és Neumann János is javította, illetve erősítette, lásd [10, 44].

Ugyancsak Beck [4] vezeti be a "*Semi-infinite*" megnevezést az olyan játékokra, melyeknél a hipergráf V csúcshalmaza végtelen ugyan, de az E hipergráf élek mindegyike véges. Mivel a nyerő halmazok végesek, ha valamelyik játékos nyer, ezt véges sok lépésben teszi, így az előző bizonyítás továbbra is működik. Ezek közé a játékok közé tartozik a végtelen táblán játszott k -amőba játék is.

Ezek után tekintsünk át néhány jól ismert hipergráf játékot.



2.1. ábra. Egy végigjátszott Tic-Tac-Toe játszma

2.2. Példa (Tic-Tac-Toe). A két játékos felváltva tesz egy-egy jelet a kilenc négyzetből álló 3×3 -as tábla egy-egy mezőjére. Aki hamarabb elfoglal egy teljes sort, oszlopot vagy főátlót, az nyer. A 2.1 ábrán egy lehetséges játszma látható.

2.3. Megjegyzés. A Tic-Tac-Toe játék normál változata döntetlen. Kezdőnek a középső mezőben érdemes kezdenie, majd ha a második valamelyik sarokban

válaszol (ha nem, akkor veszít), a játék könnyen láthatóan döntetlen.

2.4. Példa (Tic-Tac-Toe). Ez a Tic-Tac-Toe 3-dimenziós változata, mely táblája a $4 \times 4 \times 4$ -es kocka. A nyerő halmazok a sorok, oszlopok, a lap-, test- és főátlók, összesen 76 db.

2.5. Megjegyzés. A játék kezdő nyerő, de a nyerő stratégia egy telefonkönyvi vastagságú, melyet Oren Patashnik talált 1977-ben és az egyik első számítógép által adott bizonyítás volt a témakörben. Az $5 \times 5 \times 5$ -ös játék pedig máig nyitott kérdés, noha a sejtés döntetlen, a teljes esetvizsgálat reménytelen.

2.6. Példa (Hales-Jewett játékok). A $HJ(n, d)$ -vel jelölt játék táblája egy d dimenziós kocka, amelyik n^d kisebb kockából áll. A nyerőhalmazok pedig a soroknak, oszlopoknak és különféle átlóknak (lap, test, stb.) megfelelő n -esek. Pl. $HJ(3, 2)$ a Tic-Tac-Toe, a $HJ(4, 3)$ a Tic-Toc-Tac-Toe.

2.7. Megjegyzés. Két dimenzióban a $HJ(2, 2)$ triviálisan kezdő nyerését adja, 3×3 -ra azonban láthattuk, hogy döntetlen az optimális stratégiák által kapott eredmény és ez minden nagyobb n -re is így van. Három dimenzióban $n = 4$ -ig a $HJ(n, 3)$ játék kezdő nyerő, a $HJ(5, 3)$ eset döntetlen gyanús, de csak $n = 8$ -ra van bizonyítva, hogy a három dimenziós változat döntetlen.

Általában véve az alábbi két részből álló Hales-Jewett tétel régóta ismert:

2.8. Tétel (Hales és Jewett [21]). (a) Ha $n \geq 3^d - 1$ (páratlan n esetén) vagy $n \geq 2^{d+1} - 2$ (páros n esetén), akkor a $HJ(n, d)$ játékra létezik döntetlen stratégia.

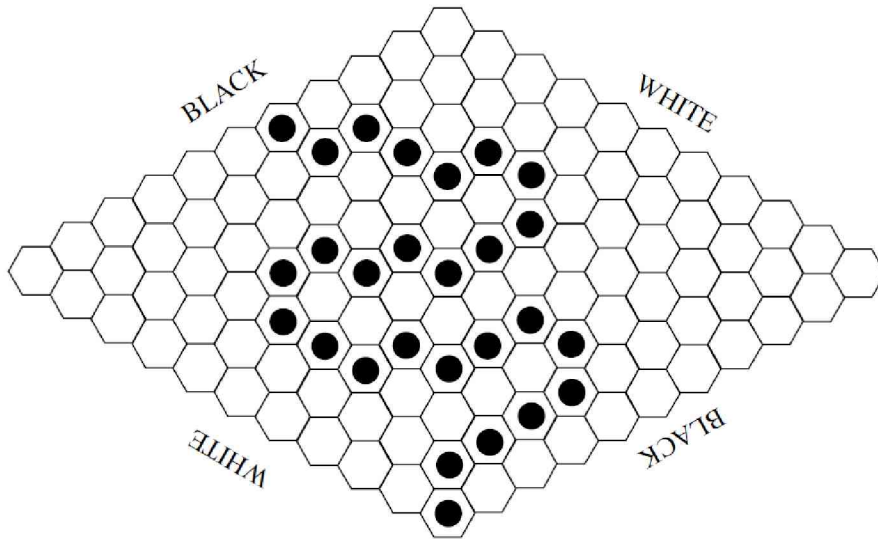
(b) Minden n természetes számra létezik olyan $d > 0$ egész, melyre a $HJ(n, d)$ kezdő nyerő.

Ezeknél az eredményeknél mára jóval több is ismert, azonban azok ismertetése meghaladná jelen értekezés kereteit.

2.9. Példa (Amőba). A végtelen négyzet rácson (gyakorlatban kiküszöbölve a végtelent, füzetlapon, vagy Go-táblán) játssza két játékos. Felváltva jelölik a mezőket, s aki hamarabb képes öt, egymást követő mezőt vízszintesen, függőlegesen vagy átlós irányban elfoglalni, az nyer.

2.10. Példa (k-amőba). Az előző játékhoz nagyon hasonló, azonban öt helyett k darab mezőt kell megszerezni a győzelemhez.

2.11. Megjegyzés. Ahogy később látni fogjuk, $k \leq 4$ -re a játék kezdő nyerő, míg $k \geq 8$ -ra döntetlen. A három köztes eset azonban máig eldöntetlen.



2.2. ábra. A hex játék [4]

2.12. Példa (Hex). A népszerű Hex játékot Piet Hein alkotta meg 1942-ben [27], majd tőle függetlenül John Nash 1948-ban, mely játék azonban azóta megoldatlan. A játék táblája egy hatszögekből álló $n \times n$ -es rombusz (általában $n = 11$). A két játékos, fehér és fekete felváltva foglal el mezőket saját színével, ahol mindkettő célja összefüggő saját színű utat létrehozni; fehérnek az északnyugati és délkeleti, míg feketének az északkeleti és délnyugati oldalak között.

2.13. Megjegyzés. A játék izgalmas, a sakkhöz hasonlóan feladványokat közölnek általában az $n = 10$ vagy $n = 11$ táblaméretre. A hexben a nyerőhalmazok nem szimmetrikusak, viszont a játszma végén biztosan nyer valamelyik fél (a stratégialopás miatt tökéletes stratégiák esetén a kezdő), mivel a teljesen kiszínezett táblán biztosan van vagy fekete, vagy fehér befejezett nyerőhalmaz. Bár ezáltal bizonyított, hogy biztosan létezik nyerő stratégia, annak hogyanjáról nem

tudunk meg semmit, és valóban, az $n \geq 8$ esetben nyitott probléma az explicit nyerő stratégia meghatározása.

2.14. Példa (Kaplansky játék). *Két játékos (piros és kék) foglal el még jeletlen pontokat a négyzetrácsos síkon. Ha a játék során egy egyenesen feltűnik n darab egyszínű pont úgy, hogy azon az egyenesen nincsen másik színű pont, akkor az ilyen konfigurációt létrehozó játékos nyeri a játékot.*

2.15. Megjegyzés. *Az $n = 1, 2, 3$ esetek triviálisan kezdő nyerők, az $n \geq 4$ esetek azonban máig megoldatlanok. 1972-ben Kleitman és Rotschild kimondták a sejtést, hogy a játék háromnál nagyobb értékekre döntetlen, ez azóta nyitott kérdés. Láthatjuk tehát, hogy már egy ilyen egyszerű játékba is - kis n esetén is - beletörhet a bicskánk.*

További példákat Pluhár András jegyzetében és cikkeiben [38, 39, 40, 12], Beck József cikkeiben [3, 5, 2] és az alábbi könyvekben, Beck [4] ill. Berlecamp, Conway, Guy [6], találhatunk.

2.1. Hipergráf játékok

Egy adott hipergráfon többféle kétszemélyes pozíciós játékot is definiálhatunk. Legyen $\mathcal{H} = (V, E)$, ahol V lehet végtelen, de egy $A \in E$ él mindig véges. A V csúcshalmazt gyakran táblának, míg az éleket **nyerő halmazoknak** is nevezzük.

A két játékos felváltva veszi V csúcshalmaz elemeit. A **normál, erős** avagy **Maker-Maker** (M-M) verzióban az a játékos nyeri a játékot, amelyik előbb megszerzi egy $A \in E$ él összes elemét. Amennyiben ez egyik játékosnak sem sikerül, a játék eredménye **döntetlen**. Mivel a kezdő játékos lépéselőnyben van, sejthetjük, hogy általában nagyobb eséllyel nyerhet. Hogy előnye mekkora egyes játékokban, azt Uiterwijk és Herik [43] vizsgálta jó néhány példára. Azonban, hogy normál hipergráf játékokban a második játékosnak egyáltalán nincs esélye nyerni, a következő tétel mondja ki.

2.16. Tétel (Hales-Jewett). *Bármely normál hipergráf játékban a kezdő nyer vagy döntetlen az eredmény [21].*

A kezdő játékos nyer (döntetlent ér el) kifejezés alatt azt értjük, hogy mindkét játékos tökéletes stratégiája esetén ez lenne az eredmény. Véges táblán akkor van döntetlen, ha már minden nyerőhalmazban van mindkét játékos által megjelölt elem, míg végtelen táblán játszott játékban azt is döntetlennnek tekintjük, ha véges sok lépésben egyik játékos sem nyer, így a tétel (Zermelo tételéhez hasonlóan) a korábban említett "Semi-infinite" játékokra is igaz.

Bizonyítás. A bizonyítás a John Nash által (a hex játéokra) bevezetett stratégiálopás elvén működik: Ha a második játékosnak lenne nyerő stratégiája, a kezdő játékos figyelmen kívül hagyva első lépését (egy játékos korábbi lépése nem lehet káros saját magának) használhatná a második játékos nyerő stratégiáját. ■

A tétel alapján, mivel a második játékosnak úgy sincs esélye nyerő stratégiát találni, definiálhatjuk a hipergráf játékok *Maker-Breaker* (avagy *gyenge*) változatát is.

Az **Építő-Romboló**, avagy **Maker-Breaker** (M-B) verzióban **Maker (Építő)** szintén nyer egy él összes elemének megszerzésével, azonban a másik játékosnak, **Breakernek (Rombolónak)** elég Maker győzelmét megakadályoznia saját győzelme érdekében, azaz elég legalább egy elemet megszereznie minden E élben. Természetesen a M-B játékokban nem fordulhat elő döntetlen.

A M-M és M-B játékok közeli kapcsolatban állnak, hiszen ha Breaker nyer második játékosként, akkor a M-M játék is döntetlen. Az állítás fordítva nem teljesül, lásd a Tic-Tac-Toet, ahol a M-M játék döntetlen, azonban ha a kezdőnek nem kell figyelembe vennie a második játékos fenyegetéseit (vagyis amikor egy lépésben elfoglalhatna egy nyerő halmazt), akkor a kezdő meg tudná nyerni a játékot. Másik oldalról, ha a kezdő játékos nyeri a M-M játékot, akkor Maker is nyeri a játék M-B verzióját (ez sem igaz fordított irányban).

Vannak **felgyorsított (accelerated)** és **elfogult (biased)** (p, q) M-B játékok is, ahol Maker p , Breaker pedig q (felgyorsított esetben $p = q$) elemet választhat a saját lépésében. Chvátal és Erdős [9], Hefetz [25], Krivelevich [29] és Pluhár [39] cikkeiben találhatók további példák és alkalmazások elfogult játékokra.

Beck József vezette be a **Picker-Chooser** és **Chooser-Picker** verzióit a Maker-Breaker játékoknak, Beck [2], (magyarul Kérdező-Választó vagy Festő-

Megbízó játéknak fordíthatnánk). A két játékos **Picker** és **Chooser**. Picker kiválaszt két elemet, amik közül még egyiket sem választotta ki korábban, Chooser pedig dönthet, hogy melyiket tartja meg a két elem közül magának (színezi kékre). Amelyiket pedig nem tartja meg, az lesz Pickeré (az piros lesz). A **Chooser-Picker** (C-P) verzióban Chooser épít és Picker rombol, míg a **Picker-Chooser** P-C játékban pont fordítva, a cél azonos a korábbiakkal: az építő játékos szerezzen meg (színezzon egy színnel) legalább egy nyerőhalmazt, a romboló játékos célja pedig ezt megakadályozni.

Az előző játékokhoz hasonlóan ezen játékokban is definiálhatunk különböző felgyorsított és elfogult verziókat.

Hipergráf játékok között beszélhetünk még **fordított** játékokról, ahol egy él elfoglalása a veszteséget jelenti vagy **újrahasznosított** játékokról, ahol egy bizonyos lépésszám után átmozgathatjuk saját jeleinket. Ezen verziókat azonban csak említés szinten jegyezzük meg.

2.1.1. Amőba

Mint az előszóban már említettük, az amőba az egyik legismertebb és legnépszerűbb hipergráf játék, melyben alkalmazott ötletek és stratégiák jó néhány matematikust vezettek mély eredményre a kombinatorika valamely másik területén is. Defináljuk most a játékhöz kapcsolódó hipergráfot egy általános k természetes számra!

2.17. Definíció. *A k -amőba (avagy k -in-a-row) hipergráfján az alábbi \mathcal{H}_k hipergráfot értjük: \mathcal{H}_k csúcsai a végtelen négyzetrács négyzetei, élei alatt pedig k darab négyzetet értünk, melyek egy sorban egymás után vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan helyezkednek el.*

A \mathcal{H}_k hipergráfon játszott M-M vagy M-B játékot nevezzük k -amőba játéknak. Noha a két verzió nem feltétlenül adja ugyanazt az eredményt, matematikai szempontból sokkal inkább a Maker-Breaker verzió vizsgálható, így az értekezés további részében azzal foglalkozunk.

Nyilvánvaló, hogy a tökéletes stratégiákat tekintve, ha Makernek van nyerő stratégiája egy adott \mathcal{H}_k hipergráfon, akkor a k -nál kisebb értékekre is nyeri a játékot. Hasonlóan ha Breaker rendelkezik a \mathcal{H}_k hipergráfon nyerő stratégiával,

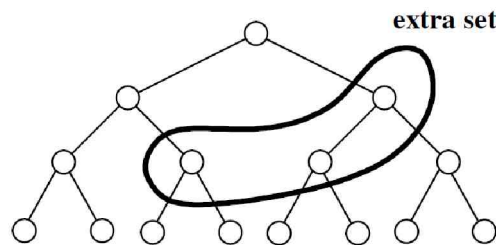
akkor minden k -nál nagyobb értékre is nyer. Így abból, hogy Maker nyeri a 4-amóbat, természetesen következik az 1-, 2- és 3-amóbák nyérése is. Hasonlóan a 8-amóba Breaker nyéréséből is következnek a $k \geq 8$ esetek Breaker nyérései.

Így csak a két küszöb eredményt említjük:

2.18. Tétel. *Breaker nyeri a 8-amóba játékot [17], míg Maker nyeri az 5-amóba játékot a végtelen táblán [1].*

Jegyezzük meg, hogy utóbbi kezdő nyérése nem bizonyított még a M-M játéokra (noha tévesen elterjedt a bizonyítás megléte), ezt kizárólag a 15×15 -ös, ill. a 19×19 -es táblákon állíthatjuk. A meglepő tény oka a 2.3 ábrán illusztrált *Extra set paradox*-nak nevezett jelenség, mely szerint újabb nyerőhalmazok vétele elronthatja a kezdő nyerési stratégiáját a M-M esetben. Noha általában a tapasztalatok szerint mégis a tábla növelése a kezdő játékosnak kedvez.

A 2.3 ábrán látható hipergráfon legyenek a nyerőhalmazok a nyolc négy hosszú út, mely a fa gyökerétől a levelekig megy. Könnyen látható, hogy a kezdő nyeri a M-M játékot. Azonban ha a nyerő halmazok közé az eddigieken felül bevesszük a bekarikázott három hosszú halmazt is, akkor a játékra már létezik a második játékosnak döntetlen stratégiája.



2.3. ábra. Az extra set paradox

A 6- és 7-amóba esetei nyitott kérdések mind a M-M, mind a M-B esetben.

2.19. Sejtés. *Breaker nyeri a 6- ill. 7-amóbat.*

A tétel bizonyításához először ismerjünk meg néhány módszert, mellyel vizsgálhatunk hasonló kérdéseket.

2.2. Stratégiák

A játékelmélet fő kérdései a lehetséges stratégiákra vonatkoznak, pontosabban arra, hogy melyik játékosnak van nyerő ill. döntetlen stratégiája egy adott játékban. De mik is ezek a stratégiák? Ahogy korábban a játékfáknál már említettük, a stratégia egy függvény, amely minden lehetséges állapotra előre megmondja az adott játékos következő lépését. (A valóságban azonban ritka, hogy a játékosok ilyen stratégiával rendelkezzenek, mivel egy konkrét játszma megnyeréséhez nem szükséges megnyerni az összes lehetséges játékot. Így stratégiák híján a játékosok leginkább csak sokkal kevésbé megfogható "taktikákat" alkalmaznak.)

Neumann János modelljében egy játék elején a két játékos csak egy-egy lépést tesz, mely az alkalmazott stratégiájának megválasztása. Ezen lépés után vége is a játéknak, hiszen a két játékos stratégiája együtt meghatározza az egész játék menetét, és így a kimenetelét is.

2.20. Definíció. [4] Vegyünk egy hipergráf játékot egy véges $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfon. Egy **stratégia** a kezdő (második) játékos számára egy Str függvény, melynek értelmezési tartománya V csúcshalmaz különböző elemeiből álló páros (páratlan) hosszú részsorozat, az értékkészlete pedig V . Ha a kezdő játékos lépéseit az x_1, x_2, x_3, \dots , a második játékosét pedig az y_1, y_2, y_3, \dots sorozat jelöli, akkor az i -edik lépés egyértelműen meghatározott a "múltból":

$$x_i = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{i-1}) \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{i-1}\},$$

ugyanígy a második játékos számára

$$y_i = Str(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i) \in V \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, y_{i-1}, x_i\}.$$

A kezdő játékos egy **nyerő** vagy **döntetlen stratégiaján** azt értjük, hogy az

$$x_1 = Str(\emptyset), \forall y_1, x_2 = Str(x_1, y_1), \forall y_2, x_3 = Str(x_1, y_1, x_2, y_2), \forall y_3, \dots$$

győzelmet (vagy döntetlent) eredményez a kezdő játékos számára, míg hasonlóan a második játékos esetén

$$\forall x_1, y_1 = Str(x_1), \forall x_2, y_2 = Str(x_1, y_1, x_2), \forall x_3, \dots$$

győzelmet (döntetlent) ad a második játékos számára.

Egy stratégia **optimális**, ha vagy nyerő stratégia, vagy ha ilyen nem létezik, akkor döntetlen stratégia.

2.2.1. Párosítások

Párosításokról valószínűleg legtöbbeknek a Stabil párosítási avagy *Stabil házasság probléma* jut eszébe, melyben adott n férfi és n nő és mindegyikük rendelkezik egy rangsorral az ellentétes nem tagjaiból, mely az ő *preferencia listája*. A feladat egy olyan n -elemű párosítás megadása, amely stabil, vagyis nem létezik olyan, a párosításon kívüli pár, akik kölcsönösen jobban preferálják egymást a jelenlegi párjukhoz képest.

Gale és Shapley belátták, hogy a stabil házasság problémának mindig van megoldása. Az eredményt egy mohó algoritmus bizonyítja [37]. Az első lépésben minden férfi ajánlatot tesz a kedvencének. Minden nő a legjobb ajánlatot fogadja el, de ez csak annyit jelent, hogy várólistára teszi a kérőt. A második lépésben az elutasított kérők újra ajánlatot tesznek, ezúttal a listájukon második kedvenc hölgynek. A nők ismét a pillanatnyilag legjobb ajánlatot fogadják el, esetlegesen lecserélve a várakozó listán lévő férfit. Az algoritmus hasonlóan folytatódik, az előző körben elutasított (vagy listáról lekerült) férfiak a soron következő jelölttel próbálkoznak, míg a nők a lehető legjobb jelöltet tartják meg. Az algoritmus legfeljebb $n^2 - 2n + 2$ lépésében minden nő kapott már ajánlatot, így véglegesítjük a párokat.

Az algoritmus stabil párosítást ad, azonban érdekesség, hogy belátható, hogy a férfiak számára a lehető legjobb párt adja, míg a nőknek a lehető legrosszabbat. Nem véletlen, hogy amikor az 1940-es években az amerikai kórházak egy idő után ezzel az algoritmussal próbálták megoldani az orvoshiányt és fiatal, éppen végzett orvosokat elcsábítani, megtartották maguknak a "férfi szerepet", vagyis a jogot a választásra, természetesen (és tévesen) hangoztatva, hogy ezzel az orvosok is jól fognak járni.

Bár a probléma nem kötődik szorosan az értekezés témájához, a párosítások megjelenése mellett az alábbi két tanulság [37] is motiválta a dolgozatba kerülését.

- Minden problémánál érdemes meggondolni a nyilvánvalónak tűnő (vagy annak beállított) állításokat, ahogy azt Gale és Shapley tették (és a fiatal orvosok nem).
- Másrészt a modell azt sugallja, hogy ahhoz, hogy a mi preferencia listánk érvényesüljön (pl. munkahely vagy pár választásánál), érdemes elébe menni az eseményeknek és kishitűség nélkül megpróbálni a legjobbnak tűnő megoldásokat a "sült galambra várás" helyett.

A párosítási stratégia a pozíciós játékok esetében az egyik leggyakrabban alkalmazott és legeredményesebb stratégia, ahogy a következő fejezetben látni fogjuk. Itt jegyezzünk meg annyit, hogy a párosítások a 9-amőba Breaker nyerése mellett számos más hipergráf játékban bizonyultak eredményes módszernek. Általános menete röviden, hogy Breaker előre bepárosítja a tábla elemeit, és amennyiben Maker választ egy elemet, Breaker lépésében annak a párját választja.

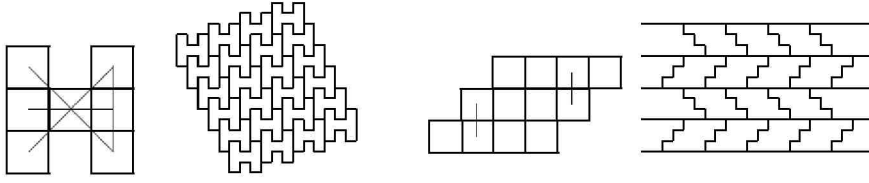
2.2.2. Résztáblák

A résztáblákra bontás stratégiáját szintén Breaker alkalmazhatja. Előzetesen felbontja a végtelen négyzetrácsot kisebb résztáblákra, melyeken új nyerőhalmazokat definiál. Breaker egy lépésben mindig azon a táblán lép, amelyiken Maker is lépett az utolsó lépésében. Ha Breakernek sikerül megakadályoznia, hogy Maker megszerezzen akár csak egy nyerőhalmazt valamelyik résztáblán, akkor a végtelen táblán is nyeri a játékot.

Erre a módszerre adott először példát C. Shannon és H. Pollak 1954-es eredménye [6] a 9-amőba esetén, majd A. Brouwer a T.G.L. Zetters álnév mögé bújva 1980-ban a 8-amőba esetére [17], melyekre Breaker rendre H-alakú heptominoakat ill. 3×4 -es paralelogrammákat használ a következőképpen:

Az ábra baloldalán látható, hogy ha felosztjuk a síkot a H-alakú hetesekre, és Maker egyik hetesben sem tudja megszerezni a négy db, 2.4 ábrán vonallal jelzett nyerőhalmaz egyikét sem, akkor az egész táblán sem szerezhet meg egy 9-hosszú nyerőhalmazt sem.

Hasonlóan, az ábra jobb oldalán látható paralelogramma alakú résztáblákkal Breaker megakadályozhatja, hogy Maker elérjen egy 8-hosszú nyerőhalmazt.



2.4. ábra. Résztáblákra bontás

Egy ilyen paralelogrammán az újonnan definiált kisebb nyerő halmazok a három vízszintes négyes, a négy átlós hármass és a két, vékony vonallal jelölt függőleges kettes. Egymás mellé téve a paralelogrammákat könnyen ellenőrizhető, hogy a végtelen négyzetláncra vett összes 8-hosszú nyerőhalmaz tartalmaz legalább egy, paralelogrammában található teljes nyerőhalmazt. Egy ilyen paralelogrammában a nyerő stratégia létezése könnyen belátható.

Jegyezzük meg, hogy A. E. Brouwer 1980-ban még nem a saját neve alatt publikálta a 8-amőba döntetlen (avagy Breaker-nyerő) stratégiáját, elképzelhető, hogy rangon alulinak találta, hogy saját nevét adja hozzá. Eredményének jelentőségét azonban mutatja, hogy bár valószínűleg létezik döntetlen stratégia a 7-amőbákra is (akár résztáblákra bontással), 1980 óta mind a mai napig nem sikerült ezt megtalálni.

Az utolsó részben még beszélünk a résztáblákra bontásról részletesebben is.

2.2.3. Esetvizsgálat

A legegyszerűbbnek gondolt módszer az, ha végignézzük egy játék összes lehetséges kimenetelét és ez alapján mondjuk meg az optimális stratégiát. Azonban már egy néhány tíz mezőn játszott játékokra is ez a mai számítási kapacitások ismeretében általában teljesen reménytelen.

Ha veszünk egy hipergráf játékot a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfon, és $|V| = N$, akkor a lehetséges végig játszott játszmák száma $N!$. Ha a részjátszmákat is számoljuk, akkor a következőt kapjuk:

$$N + N(N-1) + N(N-1)(N-2) + \dots + N! = \lfloor eN! \rfloor.$$

A lehetséges pozíciók száma nyilvánvalóan kevesebb,

$$\sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \binom{m}{\lfloor m/2 \rfloor},$$

amely ráadásul felülről becsülhető 3^N -nel, ami a 3-színezések száma $(X, O, ?)$, ahol "?" a még ki nem töltött mezőket jelöli. A pozíciók közötti kapcsolatok leírásával együtt azonban ez a szám sem kecsegtet túl sok reménnyel a nyerő stratégiák keresésekor.

Vizsgáljuk meg a korábban említett **játékfa** méretét is, amely egy címkézett irányított gyökeres fa. A csúcsok a részjátszmák, a gyökér a kezdő pozíció, a levelek a végállapotok, míg az irányított gyökér-levél utak a konkrét játszmák, melyekből $N!$ van. A címkék (I, II, D) jelölik, hogy egy adott pozíció melyik játékos számára nyerő (vagy döntetlen). A játék kimenetelének meghatározása a levelektől való visszafele címkézéssel történik, a játék kimenetelének eldöntéséhez a gyökér címkéjét kell meghatározni.

Pozíció-gráfon egy címkézett gyökeres irányított gráfot értünk, melynek csúcsai a pozíciók, a gyökér a kezdő pozíció, az irányított élek pedig egy adott pozícióból a következő lépésben elérhető pozíciókba mutatnak. A címkék és a játék kimenetelének eldöntése az előbbihez hasonló.

A lehetséges **stratégiák száma** még az előzőeknél is sokkal több, ugyanis pl. a második játékos számára már az első játékos első lépése után $(N-1)^N$ lehetőség van, majd $(N-3)^{N(N-2)}$ és így tovább, összesen

$$(N-1)^N (N-3)^{N(N-2)} (N-5)^{N(N-2)(N-4)} \dots = e^{N \log N/2 + O(N)}$$

lehetséges stratégia, ami a csúcsok számának duplán exponenciális függvénye.

A Tic-Tac-Toe-ra felírva ezeket a számokat kapjuk, hogy $9! \approx 3.6 \cdot 10^5$ lehetséges játszma, $e \cdot 9! \approx 10^6$ lehetséges részjátszma létezik.

A lehetséges pozíciók száma

$$\sum_{i=0}^9 \binom{9}{i} \binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor} \approx 7 \cdot 10^3,$$

és végül a lehetséges stratégiák száma

$$8^9 \cdot 6^{9 \cdot 7} \cdot 4^{9 \cdot 7 \cdot 5} \cdot 2^{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3} \approx 10^{500}.$$

Habár ezekkel a számokkal talán mindenkit sikerült elriasztanunk már egy közepesen nagy játék esetén is az esetvizsgálat alapú optimális stratégia kereséstől, ahogy korábban említettük, az 5-amőba esetén pl. okos megfontolásokkal és kiváló programozással Allisnek és társainak sikerült bebizonyítania, hogy a kezdő nyeri a M-M játékot a 15×15 -ös és 19×19 -es táblákon, melyből ugyan nem következik végtelen táblán játszott játékokban a kezdő nyerése, de a M-B esetben Maker nyerése igen. További részletek a [1] cikkben találhatók.

2.2.4. Erdős-Selfridge

A súlyfüggvények a matematika legtöbb ágában jelentős szerepet játszanak, a kombinatorikában és a játékelméletben pedig alapvetőt. Az inkább meglepő, hogy viszonylag későn jelentek meg pozíciós játékokban. Az áttörést Erdős Pál és John Selfridge 1973-as eredménye, lásd [16], hozta.

2.21. Tétel (Erdős-Selfridge). *Ha a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf játék Maker-Breaker változatában Maker kezd és*

$$\sum_{A \in E} 2^{-|A|+1} < 1,$$

akkor Breaker nyer.

A bizonyítás megtalálható többek között (magyar nyelven is) a [37] jegyzetben. A tétel alábbi élesítése is kimondható:

2.22. Tétel. *Tegyük fel, hogy egy $\mathcal{H} = (V, E)$ n -uniform hipergráf játék Maker-Breaker változatában Maker kezd és*

$$|E| + \text{MaxDeg}(\mathcal{H}) < 2^n,$$

ahol $\text{MaxDeg}(\mathcal{H})$ a hipergráf maximális fokszámát jelöli. Ekkor Breaker nyer.

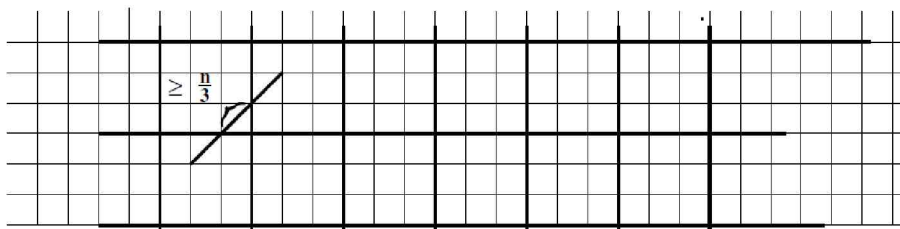
Ha egy hipergráf megfelel a feltételnek, akkor a Breaker nyerő stratégiát egy mohó algoritmus adja. A megfelelően választott súlyfüggvény alapján Breaker mindig azt a mezőt választja, amelyik a legnagyobb csökkenést okozza a súlyok összegében. Mivel a súlyfüggvények összege kezdetben is egynél kisebb és a játék során minden lépésben csökken, így a játék végére sem érheti el az 1-et, ami pedig Maker nyerési feltétele volna, tehát Maker nem nyerheti meg a játékot.

Ezen eredmények óta a párosítások mellett a súlyfüggvények módszere a másik leggyakrabban használt technika. Hogy melyik a hatékonyabb? Játékfüggő, az általunk leginkább vizsgált k -amőba játék esetén a párosítások a 9-, míg a súlyfüggvények a 13-amőba Breaker nyerését mutatják meg, itt tehát a párosítások teljesítenek jobban. Ugyanez azonban nem mondható el a később bevezetendő k^2 tóruszjátékokra, ahol az E-S tétel már $k = 5$ -re, míg a párosítások csak $k = 8$ -ra garantálnak Breaker nyerést. Összességében elmondható, hogy a súlyfüggvények a kisebb, de sűrűbb, míg a párosítások a nagyobb, de ritkább hipergráfokon teljesítenek jobban. Rengeteg mű született a súlyfüggvényekről, ezért jelen írásban – mivel a mi fő témánk a párosítások és általánosításaik – nem foglalkozunk sokkal részletesebben velük.

Illusztrációként szerepeljen azért még két példa is a használatukra, mindkettő a k -amőba döntetlen stratégiáját adja különböző k értékekre.

2.23. Példa. *A 40-amőba játék Breaker nyerő.*

Bizonyítás. Osszuk fel a síkot $n \times n$ -es négyzetekre, ahol n -t később határozzuk meg. Ha Maker az egyik négyzetbe tesz, Breaker is ott válaszol. Minden n -hosszú nyerőhalmaz metsz legalább egy $n \times n$ -es négyzetet egy $\geq n/3$ hosszú részben.



2.5. ábra. Erdős-Selfridge tétel alkalmazása a 40-amőbára [4]

Az Erdős-Selfridge tételt alkalmazva kapjuk, hogy $4n^2 < 2^{\lceil n/3 \rceil - 1}$, mivel $4n^2$ nyerőhalmaz van egy táblán, a baloldalon szereplő maximális fokszámot, ami négy, elhanyagoltuk. Az egyenlőtlenség $n \geq 40$ -re teljesül, így a bizonyítás teljes. ■

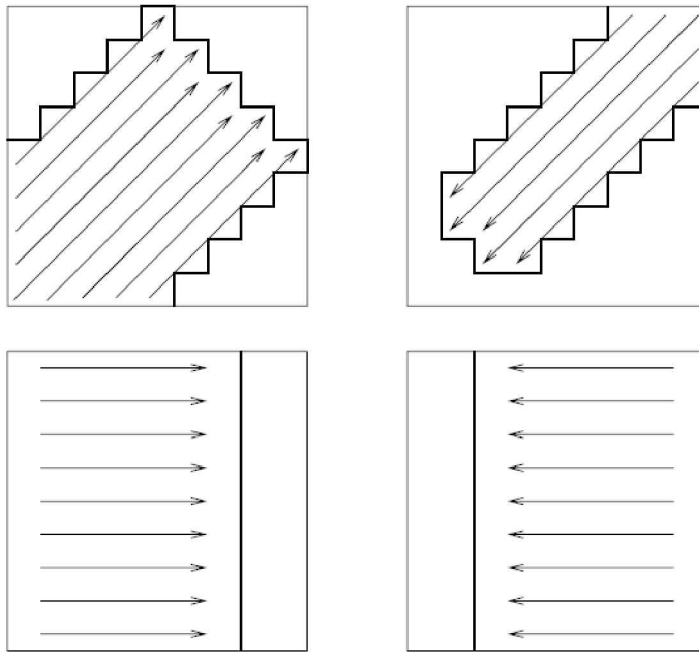
2.24. Példa. *A 13-amőba játék Breaker nyerő.*

Bizonyítás. Ezúttal a tétel egy nem uniform verzióját alkalmazzuk: Ha

$$\sum_{A \in E} 2^{-|A|} + \max_{x \in V} \sum_{A \in E: x \in A} 2^{-|A|} < 1,$$

akkor Breaker blokkolni tud minden $A \in E$ nyerőhalmazt.

Osszuk fel ismét a síkot, ezúttal 9×9 -es négyzetekre. Ismét, ha Maker az egyik négyzetbe rak, Breaker is ugyanoda tesz a következő lépésében. Minden 13-hosszú nyerőhalmaz a következő kisebb nyerőhalmazok valamelyikében metsz egy 9×9 -es négyzetet (a másik átlós és a függőleges halmazokra hasonlóan):



2.6. ábra. Erdős-Selfridge tétel alkalmazása a 13-amóbara [4]

44 db 7-hosszú, 12 db 6-hosszú és nyolc 5-hosszú nyerőhalmazunk lett, így

$$\sum_{A \in E} 2^{-|A|} = \frac{44}{2^7} + \frac{12}{2^6} + \frac{8}{2^5} = \frac{25}{32}.$$

valamint

$$\sum_{A \in E: x \in A} 2^{-|A|} \leq \frac{2}{2^5} + \frac{4}{2^7} = \frac{3}{32}.$$

Mivel $\frac{25+3}{32} = \frac{28}{32} < 1$, készen vagyunk. ■

Az előbbi négy módszer rövid említése után térjünk rá részletesen is a párosításokra, mely a továbbiakban az értekezés fő témája.

3. fejezet

Párosítások

*"Ismétlés a nyeres atyja" avagy
"tükröm, tükröm, mondd meg nékem..."*

Tekintsük a következő játékot. Egy véges méretű kör alakú asztalra felváltva rak egyforma érmeket két játékos úgy, hogy az érme nem lóghatnak egymásra és nem eshetnek le. Az veszít, aki már nem tud rakni. Ekkor a kezdő a következő stratégiát játszhatja: Elsőként az asztal közepére tesz, majd a második játékos által lerakott érme középpontra vonatkozó tükröképére teszi a következő érmét. A játék biztosan véget ér, mert az asztal betelik. A második játékos veszít, hiszen lehetetlen, hogy lépése után az első játékos már ne tudjon rakni, hiszen ha egy mező szabad volt, akkor a tükröképe is az kell, hogy legyen. Itt tehát az első játékos egy párosítási stratégiát alkalmazott. Hipergráf játékokban is gyakran alkalmazhatunk párosításokat, főként Breaker nyerő stratégiák megmutatására.

Hasonló példa a hipergráf játékok közül a tetszőleges Hales-Jewett $HJ(n, d)$ játék *fordított* változata. Mivel a tábla középpontosan szimmetrikus, páros esetben a második játékos tükrözheti a kezdő lépéseit, így biztosan nem fogja először elérni a számára veszteséget jelentő "nyerő" halmazok egyikét. Páratlan esetben a kezdő játékos a középső mező azonnali elfoglalásával ugyanígy tükrözheti a második játékos lépéseit, így biztosan nem foglalja el előbb egyik "nyerő" halmazt sem.

Egy párosítás általában is azt jelenti, hogy lehetséges lépéseket párokba állíthatjuk. Ha az egyik játékos lép egyet, a másik játékos annak párját lépi.

Egy Breaker által alkalmazott nyerő párosítási stratégia a k -amőba játékban a tábla mezőinek egy párosítása úgy, hogy minden nyerő halmaz tartalmazzon legalább egy párt. Ezt a párosítási stratégiát alkalmazva Breaker legalább egy mezőt megszerez minden nyerő halmazból és ezáltal megnyeri a játékot. Ha létezik nyerő párosítási stratégiája Breakernek, a hozzá tartozó párosítást *jó párosításnak* fogjuk nevezni az adott játékra (vagy a hozzá tartozó hipergráfra).

A párosítások a széleskörű alkalmazhatóság mellett roppant nagy erővel is rendelkeznek. Több játék esetén is látni fogjuk (ahogy a fenti feladatban is), hogy a párosításoknál bizonyos esetekben nincs is hatékonyabb módszer. Ugyanakkor a legtöbb esetben könnyen interpretálható, számolható konstruktív megoldásokat ad. Nézzük is a párosítások és hozzá kapcsolódó fogalmak pontos definícióját!

3.1. Definíció. *Adott egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf, ahol $V = V(\mathcal{H})$ és $E = E(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{P}(V) = \{S : S \subseteq V\}$ rendre a csúcsok és élek. Egy $X \subset V$ csúcshalmaz diszjunkt reprezentáns rendszer (SDR), ha $|X| = |E|$ és létezik egy $\phi : X \rightarrow E$ bijekció úgy, hogy minden $x \in X$ esetén $x \in \phi(x)$.*

3.2. Tétel (Kőnig D.-Ph. Hall). *A véges \mathcal{H} hipergráfnak pontosan akkor létezik diszjunkt reprezentáns rendszere, ha minden $\mathcal{G} \subseteq E$ esetén $|\cup_{A \in \mathcal{G}} A| \geq |\mathcal{G}|$.*

Ez a tétel sajnos csak véges hipergráfokra alkalmazható. A kevésbé ismert Marshall Hall Jr. tétele azonban általánosabb esetben is működik, ugyanis csak lokális végeességet követel meg, vagyis akár végtelen sok él is lehet a hipergráfban, ha minden csúcs foka véges (vagyis egy csúcs csak véges sok élben szerepel).

3.3. Tétel (M. Hall). *[22] A lokálisan véges \mathcal{H} hipergráfnak pontosan akkor létezik diszjunkt reprezentáns rendszere, ha minden $\mathcal{G} \subseteq E$ esetén $|\cup_{A \in \mathcal{G}} A| \geq |\mathcal{G}|$.*

Így már kimondhatjuk a Hales és Jewett által 1963-ban a párosítások létezésére kimondott elegendőségi tételt (annak erősített változatát):

3.4. Tétel (Hales-Jewett). *[21] Breaker nyeri a Maker-Breaker játékot a (lokálisan) véges \mathcal{H} hipergráfon, ha minden $\mathcal{G} \subseteq E$ esetén $|\cup_{A \in \mathcal{G}} A| \geq 2|\mathcal{G}|$.*

A bizonyítás magját a kettős diszjunkt reprezentáns rendszer adja: Amennyiben létezik két különböző SDR, X és Y , a \mathcal{H} hipergráfon rendre a ϕ és ψ bijekciókkal úgy, hogy $X \cap Y = \emptyset$, akkor a $\rho : X \rightarrow Y, \rho = \psi^{-1}\phi$ szintén bijekció.

3.5. Definíció. *Adott egy (lokálisan véges) $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf az előbbieket szerinti. A $\rho : X \rightarrow Y$ bijekciót, ahol $X, Y \subset V(\mathcal{H})$ és $X \cap Y = \emptyset$ **párosításnak** nevezzük a \mathcal{H} hipergráfon.*

3.6. Definíció. *Egy $(x, \rho(x))$ pár **blokkol** egy $A \in E(\mathcal{H})$ élt, ha A a pár mindkét elemét tartalmazza. Ha a ρ párosítás párvai blokkolják a hipergráf összes élt, azt mondjuk, hogy ρ egy **jó párosítás** a \mathcal{H} hipergráfon.*

A párosítások így egy lehetséges Breaker nyerő stratégiát adhatnak a hipergráf játékokon. A ρ jó párosítás a \mathcal{H} hipergráfon a következőképpen alkalmazható nyerő stratégiaként Breaker számára: Követve a ρ -beli párokat a M-B játékban, minden Maker által választott $x \in X \cup Y$ elem után Breaker $\rho(x)$ -et, x párját választja, vagy $x \in Y$ esetén fordítva (ha $x \notin X \cup Y$, akkor Breaker tetszőleges csúcsot választhat). Így Breaker blokkolja az összes élt és nyeri a játékot.

Jegyezzük meg, hogy a 3.4 tétel feltétele szükséges, ha a \mathcal{H} hipergráf majdnem diszjunkt (vagyis két különböző élének legfeljebb egy közös csúcsa van). A majdnem diszjunkt esetben a feltétel (vagyis a párosítás léte ezen feltétel ellenőrzésével) polinom időben ellenőrizhető. Általában véve azonban a párosítások létezésének kérdése sokkal nehezebb probléma.

3.7. Tétel. *[13] Általában egy \mathcal{H} hipergráfról eldönteni, hogy létezik-e Breaker-nyerő párosítása, egy NP-teljes probléma.*

Az NP-teljesség már olyan hipergráfokra is fennállhat, melyre $|A| \leq 6$ minden $A \in E$ -re. Hegyháti és Tuza [26] eredménye alapján viszont az $|A| \leq 3$ esetben a párosítás léte már polinom időben is meghatározható. Az $|A| \leq 4$ és $|A| \leq 5$ esetek a mai napig nyitott problémák.

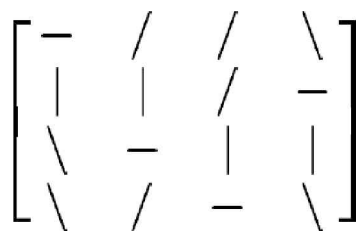
A következő részben áttekintjük, hogy a párosítások milyen eredményeket adnak az amőba típusú játékokra. Tekintsük tehát a \mathcal{H}_k hipergráfot, melynek csúcsai a végtelen négyzetrács mezői, élei pedig a k -hosszú egymást követő mezői egy sorban.

3.1. Amőba eredmények

A párosításokat jól illusztrálhatjuk a különböző méretű és típusú amőbákkal, melyek a továbbiakban kutatásaink tárgyát képezik.

3.1.1. 12-amőba

3.8. Tétel. *Breakernek létezik nyerő párosítási stratégiája a 12-amőbára.*



3.1. ábra. Párosítás a 12-amőbára [4]

A bizonyítás lényege, hogy 4×4 -es négyzetekre osztja a végtelen síkot és minden mezőhöz egy párt rendel, a szomszédos 4×4 -es négyzet ugyanazon helyen lévő mezőjét, a 3.1 ábrán látható módon. Így Maker legfeljebb 11 szomszédos mezőt tud elfoglalni, 12-öt sosem.

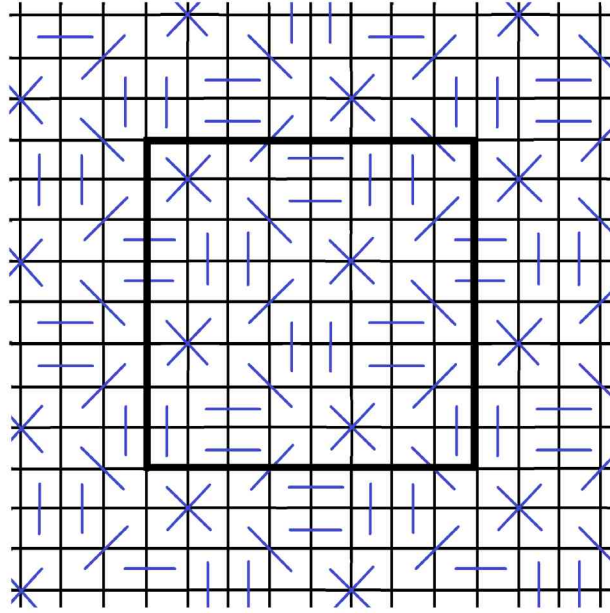
3.1.2. 9-amőba

Számunkra legfontosabb eredmény a fejezetben, melyet a későbbi fejezetekben továbbgondolunk, hogy Breaker párosítással nyeri a 9-amőba játékot.

3.9. Tétel. [21] *Breakernek létezik nyerő párosítási stratégiája a 9-amőbára.*

Bizonyítás. A 3.2 ábra egy kiterjesztése a 8×8 tórusznak (bekeretezve), ahol a párok minden egyenesen 8-periodicitással rendelkeznek. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy minden 9 hosszú nyerőhalmazban pontosan egy pár található, melyek ezáltal blokkolják a 9-amőbát. ■

Egy párosítás **dominó párosítás** a négyzetrácson, ha minden pár csak szomszédos mezőket tartalmaz (vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan). Az ilyen párokat **dominóknak** nevezzük.



3.2. ábra. Hales-Jewett párosítás a 9-amőbára

Jegyezzük meg, hogy a 3.2 ábrán látható Hales-Jewett párosítás egy dominó párosítás.

A következő állítás [13] megmutatja, hogy nem létezhet jó párosítás a k -amőba hipergrádjára, ha $k < 9$.

Egy \mathcal{H} hipergráfra legyen $d_2(\mathcal{H})$ (röviden d_2) az a szám, ahány élt legfeljebb blokkolhat egy két csúcsból álló pár, vagyis d_2 a maximális közös fok (co-degree). Ezt az értéket szemléletesen nevezhetjük a pár **blokkolási erejének** is.

3.10. Állítás. [13] *Ha létezik egy ρ jó párosítás a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfra, akkor $d_2|X|/2 \geq |\mathcal{G}|$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell minden $X \subset V$ esetben, ahol $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$.*

Bizonyítás. Az X részhalmazra mint résztábla fogunk utalni. \mathcal{G} éleit csak X -beli párokkal blokkolhatjuk. Legfeljebb $|X|/2$ ilyen pár van ρ -ban az $|X|$ méretű résztáblán. Mivel egy pár legfeljebb d_2 élt blokkol, $|X|/2$ pár legfeljebb $d_2|X|/2$ élt. Tehát ha ennél több élt van a résztáblán, nem létezhet jó párosítás. ■

A 3.10 állítás segítségével megkapjuk, hogy nincs jó párosítás \mathcal{H}_k -ra, ha $k < 9$. A \mathcal{H}_k hipergráfban $d_2 = k - 1$, vagyis egy pár legfeljebb $k - 1$ élt

blokkolhat. Ennyit is csak abban az esetben, ha a pár dominó. Ha X egy $n \times n$ résztábla egy elég nagy n -re, akkor $|G| = 4n^2 + O(n)$ mivel minden négyzetből négy él kezdődik (egy vízszintes, egy függőleges és két átlós, kivéve a határokat). A 3.10 állításból kapjuk, hogy $(k-1)n^2/2 \geq 4n^2 + O(n)$; vagyis $k \geq 9 + O(1/n)$. Ahol az $O(n)$ tag is pontosan kiszámolható: $O(n) = -48n + 128$.

John Selfridge meg is adott egy jó, és rendkívül szép szimmetriákkal rendelkező Hales-Jewett párosítást $k = 9$ -re, ahogy [6]-ben vagy a 3.2 ábrán láthatjuk. Azonban az irodalomban sehol nem találtunk nyomot sem arról, hogy ez az egyedüli lehetséges jó párosítás, sem egyéb lehetséges jó párosítások létezéséről. Amennyiben vannak még ilyenek, azok vajon ugyanilyen szép szimmetrikusak, vagy teljesen szabálytalan párosítások is lehetségesek? Ezeket a kérdéseket egy teljes fejezeten át fogjuk taglálni, és még a 9-amőba párosításainak történetét is lekerekítjük, mely a disszertáció egyik fő eredményének is tekinthető.

Mielőtt továbbmennénk, vizsgáljuk meg, hogy ha az eredeti amőba játékból elveszünk egy-két-három irányt, vagyis kevesebb irányú nyerőhalmazokat engedünk meg, akkor milyen eredményeket kapunk.

3.2. Három irány, hatszögrács

Ha elhagyjuk az egyik átlós irányt és csak három irányban engedünk meg nyerőhalmazokat (vízszintes, függőleges és az egyik átló; koordinátákkal $(1,0)$, $(0,1)$ és $(1,1)$), akkor a hatszögráccsal ekvivalens hipergráfot kapunk. Defináljuk ezt a hipergráfot először.

3.11. Definíció. *A három irányú k -amőba hipergráfján az alábbi h_k hipergráfot értjük: h_k csúcsai a végtelen négyzetrács négyzetei, élei alatt pedig k darab négyzetet értünk, melyek egy sorban egymás után vízszintesen, függőlegesen vagy egyik irányban átlósan (tehát az $(1,0)$, $(0,1)$ és $(1,1)$ irányvektorok mentén) helyezkednek el.*

Vizsgáljuk meg a különböző k értékeket.

Ha $k \leq 4$, Maker itt is nyer. Ha $k \geq 7$, Breaker nyer párosítással. Az 5 és 6 eset máig megoldatlan problémák [7, 28].

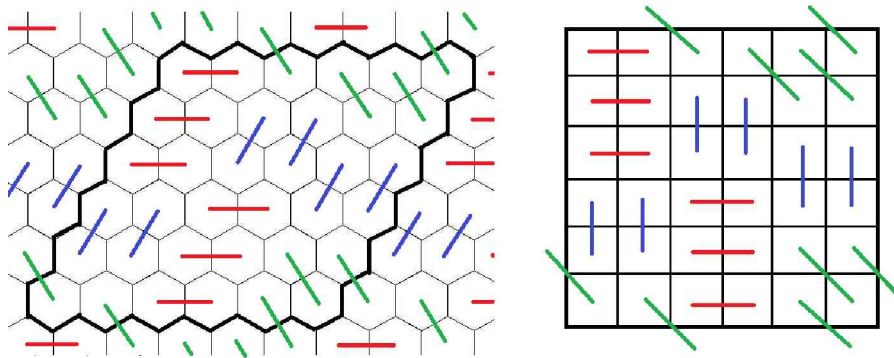
3.12. Sejtés. *Breaker nyeri a négyzetrácson játszott három irányú (vízszintes, függőleges, egyik átlós) és így a vele ekvivalens, a hatszögrácson játszott 5- ill. 6-amóbát.*

A 3.10 állításból kapjuk, hogy $(k-1)n^2/2 \geq 3n^2 + O(n)$; vagyis most $k \geq 7 + O(1/n)$, mely azt jelenti, hogy 7-nél kisebb nyerőhalmazok esetén biztosan nincs jó párosítás a három irányú verzióban.

$k = 7$ -re viszont van, ahogy a 3.3 ábrán látható.

3.13. Tétel. *Létezik jó párosítás h_7 -re.*

Az ábra segítségével magunk is ellenőrizhetjük, hogy a négyzetrácsos sík a fenti három irányú nyerőhalmazokkal ekvivalens a hatszögrácscsal. Érdekes kérdés lehet, hogy vajon van-e másik, az ábrán láthatóval nem ekvivalens jó párosítás is? Erre a kérdésre Mezei [33] ad is egy választ, egy a fentitől különböző példával. Hogy összesen hány ilyen jó párosítás létezik azonban még nyitott kérdés volt vizsgálataink előtt.



3.3. ábra. Jó párosítás a 7-amóbára

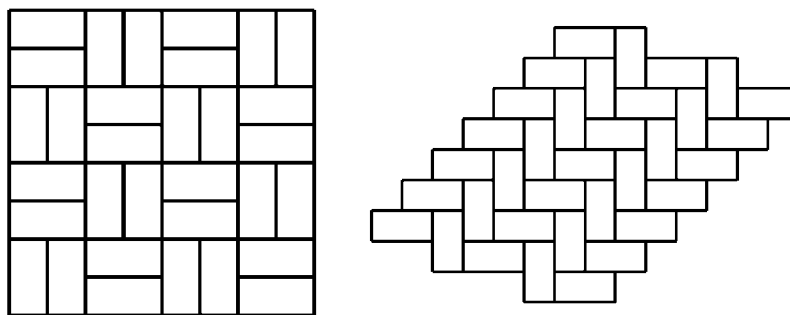
3.3. Egy és két irányban

Ha csak a függőleges és vízszintes irányokat nézzük, akkor nincsen több nyitott kérdés. Maker nyeri a játékot, ha $k \leq 4$, Breaker nyer párosítással, ha $k \geq 5$. Egy irányban ez a küszöb a 2 és 3 értékek között jelenik meg.

3.14. Definíció. A két irányú k -amőba hipergráfját P_k -val, az egy irányúját pedig E_k -val jelöljük. Előbbinél az $(1,0)$ és $(0,1)$, utóbbinál csak az $(1,0)$ irányvektorok menti k -asokat tekintjük nyerőhalmazoknak.

3.15. Tétel. Létezik jó párosítás P_5 -re. Mégpedig pontosan két különböző.

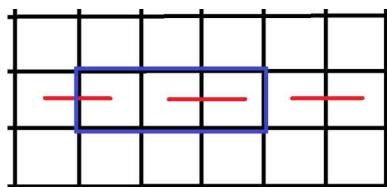
Bizonyítás. A 3.4 ábra adja a két megoldást. Csernenszky és társai [13]-ben a Snaky (ld. 3.6 ábra) lehetséges párosításainak vizsgálata során mellékes eredményként megmutatták, hogy egyéb jó párosítás nem létezik. ■



3.4. ábra. A két lehetséges jó párosítás az 5-amőbára

3.16. Megjegyzés. A fenti [13] eredményben a szerzők azt mutatják meg, hogy ha létezik a Snaky poliominoóra jó párosítás, akkor az P_5 -re is jó párosítást ad. A P_5 -nek azonban csak a fenti két jó párosítása létezik, melyek egyike sem jó a Snakyra, így Snakyre biztosan nem létezhet jó párosítás.

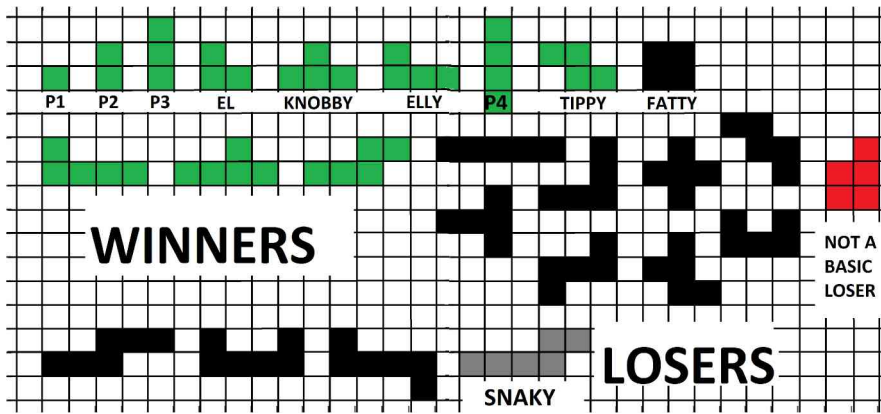
3.17. Tétel. Létezik egyetlen jó párosítás E_3 -ra.



3.5. ábra. A jó párosítás az egy irányú 3-amőbára

3.4. Harary állatok

Frank Harary [24] vezette be a *Harary-poliominó* vagy *Harary-állat*, esetleg *Animal Tic-Tac-Toe*-nak is nevezett játékokat. Adva van egy oldalszomszédos négyzetekből álló alakzat, melyet (vagy izomorf képét) az amőba játékhoz hasonlóan Maker-Breaker verzióban játszva Maker szeretne elérni a végtelen négyzetrácsos síkon. A játékoknál a vizsgált kérdés, hogy egy adott alakzatot meg tud-e szerezni Maker – ezeket hívjuk **Winner poliominóknak** – vagy meg tudja-e akadályozni ezt Breaker – **Loser poliominók**.



3.6. ábra. A 6-nál nem nagyobb méretű lehetséges Harary-poliominók

Természetesen, ha egy poliominó Loser, akkor bármely négyzetekkel való bővítése szintén Loser poliominót eredményez. Így a legkisebb méretű Loser poliominókat, azokat amelyek tehát nem tartalmaznak kisebb Loser alakzatot, megkülönböztetjük és **Alap Losernek** nevezzük. Ha egy poliominó Winner, akkor annak bármely rész poliominója is Winner.

Az egy, kettő és három méretű poliominók mindannyian a Winner osztályba tartoznak. Jegyezzük meg, hogy az egy, kettő és három egymás melletti négyzetet tartalmazó poliominó játékok az átlók nélküli 1-, 2- és 3-amőba játékokkal.

A négy méretű alakzatokból ötöt különböztethetünk meg, Skinny (P_4), Tippy, Elly, Knobby és Fatty; melyek közül csak utóbbi Loser, a másik négy Winner. A Fattyt megakadályozó Breaker-stratégia egy párosítási stratégia.

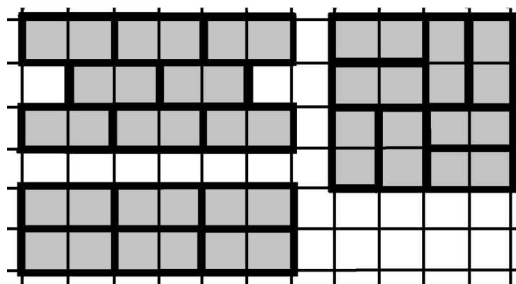
Az öt méretű alakzatokból 12 féle van, melyek között kilenc Loser és három

Winner található. A hat méretű Harary-állatokból 35 különböző van, ám négy kivételével mind tartalmazza a kilenc korábbi Alap Loser poliominót. A négy alakzatból három bizonyítottan Loser, az egyetlen, Snaky-nek nevezett állatka a mai napig eldöntetlen kérdés. A 107 darab hét méretű állat mindegyike tartalmazza az eddigi 12 Alap Loser egyikét, így a Harary-állatok körében a Snaky-t kivéve minden állatról tudjuk, hogy a Winner vagy a Loser kategóriába tartozik-e.

A 3.6 ábrán ábrázoltuk az összes hatnál nem nagyobb méretű Winner (zöld) és Alap Loser (fekete) alakzatot. A piros 5-ös Loser, de nem Alap Loser; míg a szürke Snaky megoldatlan probléma.

3.18. Sejtés. *Snaky Winner, vagyis Maker el tudja érni egy izomorf mását a négyzetrácsos síkon.*

Érdekesség, hogy Sieben [41]-ben megmutatta, hogy a Snaky 41-dimenzióban nyerő poliominó, majd később ezt 3 dimenzióra is bebizonyították [23]. Jegyezzük meg továbbá, hogy az összes Loser poliominóra való Breaker nyerés párosításokkal mutatható meg. Ez a tény ismét a párosítások erejét és fontosságát jelzi. A párosítások közül néhányat bemutatunk a 3.7 ábrán. További részletek Beck [4] könyvében találhatók.



3.7. ábra. Néhány jó párosítás Harary-poliominók ellen

További a Harary-állatokhoz hasonlóan bevezetett háromszög- és hatszögrácson vett alakzatokról, valamint a fenti Winner poliominók nyerési stratégiáiról Bode és Harborth [7] cikkében olvashatunk többet.

Ezen cikkből megtudhatjuk, hogy a hatszögrács állatai közül az 1 db egyes, 1 db kettes, 3 db hármas és 7 db négyes mindegyike Winner. Az öt méretűekből

összesen 22 féle létezik, melyek közül 18 Winner, 2 Loser és 2 eldöntetlen van (köztük h_5 is). A hat méretű hatszög-poliominók között 5 ismert Alap Loser található, a többi eldöntetlen. Míg a legnagyobb eldöntetlen méretű poliominó 18 kis hatszögből áll (hat ilyen van köztük). A legalább 19 méretű poliominókról biztosan tudjuk, hogy mindegyik alakzat Loser. Nem Loser (tehát Winner vagy eldöntetlen) alakzatokból pedig kevesebb, mint 14 000 példány létezhet.

A fejezetben láthattuk, hogy a párosítási stratégiáknak is vannak korlátai, hiszen vannak olyan Breaker nyerő hipergráfok, melyek párosításokkal nem blokkolhatók (pl. a \mathcal{H}_k a $k < 9$). Azonban ha a párokat általánosítva, helyettük nagyobb alakzatokat veszünk és párosítás helyett azokkal parkettázzuk ki a négyzetrácsos síkot, akkor nemcsak a Breaker nyerő egyéb hipergráfok, de a Winner alakzatok sem jelentenek többé blokkolhatatlan problémát. Egy végtelen sakktábla színezés például nemhogy P_4 -et, de már P_2 -t is blokkolja. De nem szükséges ekkorát ugranunk, a párosítások és színezések közti átmenetben, "hídon" is sok érdekes eredmény rejtőzik. Természetesen ezek a módszerek már nem adnak nyerő stratégiát Breakernek a M-B vagy C-P játékok eredeti verziójában, azonban a felgyorsított vagy elfogult esetekben kiválóan alkalmazhatók, ahogy látni fogjuk a következő fejezetben, amely a [18] cikkünkre támaszkodik.

4. fejezet

Általánosított párosítások

"Minden általánosítás veszélyes. Még ez is."

(A. Dumas)

Képzeljünk el egy olyan játékot, ahol a végtelen négyzetrácsos sík fel van osztva legfeljebb t mezőt tartalmazó sütikre, melyek további két (egyenlő) részre osztottak. Az építő játékos egy tetszőleges süti egyik felét szürkére (X), míg a másik részét fehérre (O) színezheti. Milyen legkisebb t -re tudja az előzetes felosztást végző másik játékos legfeljebb t méretű sütikkel megakadályozni, hogy a táblán az építő játékos elérhessen egy k db egymást követő (vízszintes, függőleges vagy átlós), csupa egyszínű mezőt tartalmazó nyerőhalmazt? A játékot természetesen tetszőleges véges vagy végtelen hipergráfon is játszhatjuk.

Ez a játék általánosítása a széles körben ismert hipergráf párosításoknak és kettőszínezéseknek. $t = 2$ esetben ugyanis a Maker-Breaker hipergráf játék egy Breaker által alkalmazott párosítási stratégiáját kapjuk vissza. Itt a 2-sütik pontosan a Maker-Breaker játékban Breaker által alkalmazott párok, melyek egy elemet párosítanak össze egy másik elemmel. Ezekből lépésenként az egyik elemet választva, jó párosítás esetén Maker soha nem tudja egy nyerőhalmaz összes elemét sem csak saját színével színezni. Korábbi eredményekből tudjuk, hogy a k -in-a-row játék esetén ez a felosztó (Breaker) játékosnak csak $k \geq 9$ -re sikerülhet.

A t értéket a hipergráf csúcsszámára (négyzetrács esetén végtelenre) növelve viszont az osztó játékos felosztása után a teljes hipergráf egy kettőszínezését

kapjuk vissza. Ekkor az építő játékos egyetlen lépésben választhatja a neki megfelelőbb színosztályt. Ha az osztó játékos el tudta osztani a csúcsokat úgy, hogy az építő nem talált egyetlen egyszínű nyerőhalmazt sem, akkor a hipergráf egy jó kettőszínezését kaptuk vissza. Ilyen színezés játékunkban már $k \geq 3$ -ra is létezik.

A továbbiakban arra keressük a választ, hogy t milyen legkisebb értékeire tudjuk t -sütikkel blokkolni a 4-, 5-, 6-, 7- és 8-amóba, valamint egyéb (pl. Harary-animal) játékok hipergráfjait.

Az eredmények alkalmazhatók felgyorsított Chooser-Picker játékokra is.

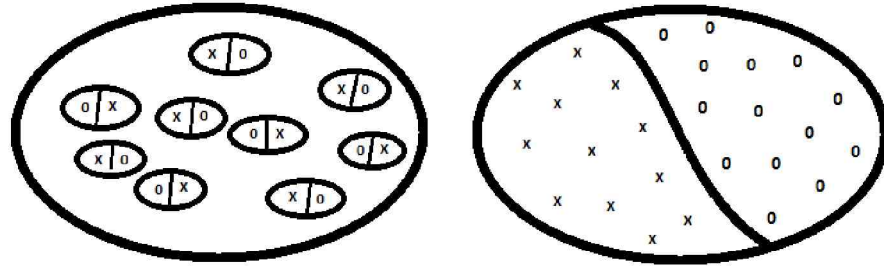
4.1. Híd a párosítások és a kettőszínezés között

Idézzük fel még egyszer a hipergráf párosításainak valamint kettőszínezéseinek fogalmát: Adott egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf a $V = V(\mathcal{H})$ csúcshalmazzal és $E = E(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{S : S \subseteq V\}$ élhalmazzal. Egy $\rho : X \rightarrow Y$ bijekció **párosítás** a \mathcal{H} hipergráfon, ha $X, Y \subset V(\mathcal{H})$ és $X \cap Y = \emptyset$. Az $(x, \rho(x))$ pár **blokkolja** az $A \in E(\mathcal{H})$ élt, ha a pár mindkét elemét tartalmazza az A él. Ha a ρ párpai blokkolják az összes $A \in E(\mathcal{H})$ élt, azt mondjuk, hogy ρ egy **jó párosítása** a \mathcal{H} hipergráfnak.

Bizonyos szempontból szorosan kapcsolódó másik alapvető fogalom a hipergráfok színezése, ahol színezés alatt mostantól csak a két színnel való színezéseket értjük: A $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf **színezése** a V csúcshalmaznak egy partíciója két diszjunkt színosztályba. Itt is hasonlóan definiálhatunk blokkolást: Egy színezés **blokkolja** az $A \in E$ élt, ha mindkét színosztálynak van nemüres metszete az éllel. Egy színezés **jó színezés**, ha blokkolja az összes $A \in E$ élt.

Vegyük észre, hogy a két fogalom között egy közeli kapcsolat van, amely fontos számunkra és amelyet a 4.1 ábrán is szemléltetünk.

Jegyezzük meg, hogy egy párosításból létrehozható színezések egy egész családja. Ugyanis *ahelyett, hogy egy lépésben kiszíneznénk a hipergráf összes elemét, minden lépésben csak egy párt színezzünk ki, az egyik elemét az egyik színnel, a másikat a másikkal addig, amíg az összes elem színt nem kap (ahogy a 4.1 ábrán láthatjuk)*. A különböző párok színezése független egymástól és a nem párosított elemeket tetszőlegesen színezhettük. Könnyen átgondolható, hogy ha a kezdeti



4.1. ábra. Párosítások és színezések

párosítás jó párosítás, akkor az így kapott színezés is jó színezés lesz.

A másik oldalról, *ahelyett, hogy egy-egy elemet párosítunk egymással, egy színezés felfogható a két csúcshalmaz (két színosztály) párosításaként.*

Hasonlóan a színezésekhez, bevezethetünk egy új fogalmat, a t -sütiket (t -cakes), mely egyfajta hidat képez a párosítások és a színezések között. Míg egy színezésnél az egész tábla egy színezése adott, ellenkező színekkel színezve a két színosztályt, ebben az esetben "részenként színezzük", vagyis az "ellenkező színűség" követelménye csak a sütin belülre vonatkozik. Egy süti színezése nem függ a többi süti színezésétől. A sütik felfoghatók pároknak is, ahol nem egy-egy csúcsot párosítunk, hanem egy-egy csúcshalmazt. A *süti (cake)* elnevezést az ún. *cake cutting* problémák elnevezése motiválta.

A következő részben precízen definiáljuk a sütiket és megvizsgáljuk az alkalmazásait a felgyorsított Chooser-Picker játékokra.

4.1.1. Sütik és süti-elhelyezések

4.1. Definíció. Nevezzük t -sütinek a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf egy részhalmazát, ha az pontosan t csúcsot tartalmaz, mely magában foglalja a részhalmaz elemeinek egy p, q két részre osztását is, ahol $t \in \mathbb{N}, t \geq 2$ és $1 \leq p, q \in \mathbb{N} < t, p + q = t$. A t -sütiket azonosíthatjuk két része alapján is (p, q) -sütiknek. Egy süti **kiegyensúlyozott**, ha a két részben egyenlő számú elem szerepel, vagyis $p = q$.

Végtelen hipergráfok esetén, pl. ahol a hipergráf csúcsai a végtelen négyzet-rács, t végtelen nagy is lehet.

Jegyezzük meg továbbá, hogy $t = 2$ esetén visszkapjuk a csúcspárokat,

vagyis egy pár tekinthető 2-sütinek vagy (1,1)-sütinek is. Míg a végtelen négyzetrács színezése esetén egy darab ∞ -sütiről beszélhetünk.

4.2. Definíció. Egy hipergráf t -süti elhelyezésén (*cake-placement*), vagy röviden t -elhelyezésén a sütik egy nem átfedő elhelyezését értjük a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf csúcsaira, ahol minden süti mérete **maximum** t . Ha a t -elhelyezés egy páros t esetén csak kiegyensúlyozott t -sütiket tartalmaz, akkor **p -párosításról** beszélünk, ahol $p = t/2$.

Egy t -elhelyezésben a különböző sütiknek lehetnek különböző méretű részei, vagyis p és q nem feltétlenül azonos minden egyes sütire. Habár példáink nagy részében csak p -párosításokkal foglalkozunk.

Természetesen egy párosítás tekinthető 2-elhelyezésnek vagy 1-párosításnak is ($t = 2, p = 1$), ahol minden pár csak egyféleképpen értelmezhető sütiként. Egy színezés szintén egy speciális t -elhelyezés, ahol egy darab $t = |V|$ sütin van csak, és a süti két része a színezés két színosztálya.

Hasonlóan a párosításokhoz és a színezésekhez a t -elhelyezésekhez is értelmezhetjük a blokkolás fogalmát.

4.3. Definíció. Egy t -süti **blokkol** egy $A \in E$ nyerőhalmazt, ha a süti mindkét részének van nemüres metszete A -val. Egy \mathcal{T} t -elhelyezés **jó t -elhelyezés** a \mathcal{H} hipergráfon, ha \mathcal{H} összes élét blokkolja \mathcal{T} valamely sütije. Egy $A \in E$ él **blokkolatlan él**, ha \mathcal{T} egyik sütije sem blokkolja.

Látható egy bizonyos monotonitás: Ha létezik jó t -elhelyezés a \mathcal{H} hipergráfra, akkor létezik jó $(t + 1)$ -elhelyezés is, definíció szerint.

A párosításokhoz hasonlóan a t -elhelyezések is tekinthetők egy lépésről lépésre való színezésként. Ahelyett, hogy egy párt színeznénk egy-egy lépésben (ahogy a párosításoknál tettük), most egy sütit színezzük minden lépésben, egyik részét az első színnel, másikat a másodikkal. Egy jó t -elhelyezés esetén ez a lépésről lépésre való színezés egy jó-színezést fog eredményezni.

4.4. Definíció. Az **elfogult(t) Chooser-Picker játékokban** egy lépésben *Picker*, mint *Breaker* két elem helyett választhat maximum t elemet és szétosztja azokat két nemüres, diszjunkt részre. *Chooser* megtartja az egyik részt, a másik pedig *Pickeré* lesz. *Chooser* célja megszerezni egy nyerőhalmazt.

Ahogy a párosítások segítik Breakert a M-B illetve Pickert a C-P játékokban, a t -sütik szintén segítik Pickert az elfogult(t) C-P játékokban. Ha létezik jó t -elhelyezés egy adott hipergráfra, akkor az Pickernek nyerő stratégiát ad úgy, hogy Picker éppen a sütitet adja tetszőleges sorrendben Choosernek.

Számoljuk meg ezek után, hogy egy adott süti legfeljebb hány nyerőhalmazt tud blokkolni, nevezzük ezt a számot a süti **blokkolási erejének**. Egy adott süti blokkolási erejét persze nem csak a süti mérete, hanem alakja és felosztása is meghatározza.

Egy adott $t \in \mathbb{N}$ értékre legyen d_t a maximális blokkolási erő az összes lehetséges t -süti között. Egy t -sütit, amely felveszi a d_t értékét, **legjobb** t -sütinek nevezzük. Jegyezzük meg, hogy a d_t egy monoton függvénye t -nek, mert ha egy t -süti blokkol d_t élt egy hipergráfban, akkor hozzáadva egy újabb csúcsot a süti bármely részéhez, a megkapott $(t + 1)$ -süti szintén blokkol minden korábban blokkolt élt is.

Ezzel szemben könnyen láthatjuk, hogy a d_t/t arány – vagyis a legjobb blokkolási erő egy csúcsra levetítve – már nem feltétlenül monoton t -ben. Mégis, egy egyszerű esetanálízissal látni fogjuk később, hogy a \mathcal{H}_k hipergráfra a d_t/t arány monoton t -ben, legalábbis ha $t \leq 8$ ($t \geq 9$ -re nem eldöntött a kérdés). Ezen ismeretek birtokában kimondhatjuk a 3.10 állítás általánosítását.

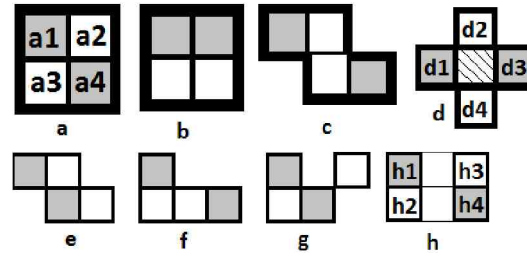
4.5. Állítás. *Legyen egy jó t -elhelyezésünk a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfra úgy, hogy $d_2/2 \leq d_3/3 \leq \dots \leq d_t/t$. Ekkor $|X|d_t/t \geq |\mathcal{G}|$ minden $X \subset V$ -re, ahol $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$.*

A következőkben tegyük fel, hogy V a végtelen négyzetrács négyzeteit jelenti. Ebben az esetben egy t -süti geometria alakjával is jellemezhető. A következő fejezetben megvizsgálunk néhány lehetséges t -sütit a \mathcal{H}_k hipergráfon, és megadjuk a lehetséges legjobb t -sütiket minden $t \leq 8$ értékre.

4.2. Sütik és blokkolási erejük az amőbára

A legszemléletesebb és legkezelhetőbb példák a 4-sütik, ezért velük kezdjük a sütik tárgyalását.

4.2.1. 4-sütik



4.2. ábra. Néhány 4-süti

A 4.2 ábrán láthatunk néhány 4-sütit. A süti felosztása fehérrel és szürkével van jelölve. A 4.2 ábra első sorában mindegyik 4-süti pontosan $4k - 4$ darab \mathcal{H}_k élt blokkol, ezzel szemben az alsó sorban lévők mind kevesebbet blokkolnak.

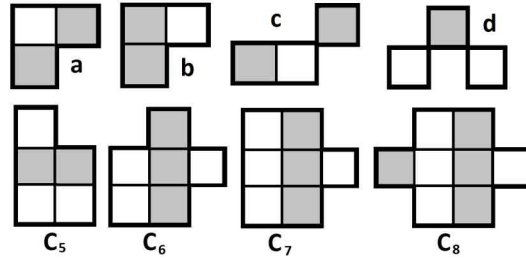
Például az *a* 4-süti két vízszintes és két függőleges irányban blokkol. Az $(a1, a3)$ és $(a2, a4)$ irányok mentén függőlegesen, az $(a1, a2)$ és $(a3, a4)$ irányok mentén pedig vízszintesen. Részletesebben, az $(a1, a3)$ pár blokkol $k - 1$ élt, akárcsak egy sima dominó pár, ahogy korábban láttuk a párosításoknál, mivel $a1$ és $a3$ szomszédos négyzetek és az *a* süti különböző részeiben (az $a1$ a szürke, az $a2$ a fehér) helyezkednek el. Ugyanez igaz az $(a2, a4)$, $(a1, a2)$ és $(a3, a4)$ párokra. Összeadva őket az *a* süti $4(k - 1)$ élt blokkol. Vegyük észre, hogy az $(a1, a4)$ és $(a2, a3)$ párok nem blokkolnak egy k -amőba élt sem, mert bár szomszédosak, az *a* süti ugyanazon (szürke ill. fehér) részeiben vannak. Emiatt az *a* süti nem blokkol egy átlós élt sem.

A *b* és *c* süti (vagy a belőlük forgatással kapott süti) két átlós és két vízszintes (elforgatva függőleges) irányban blokkolnak, míg a *d* süti (amely nem tartalmazza a középső négyzetet) négy átlós irányban blokkol. Mivel minden sorban szomszédos négyzetek (dominók) blokkolnak, így egyenként $k - 1$ élt, összesen pedig $4(k - 1)$ élt blokkolnak.

Az *e* és *f* süti csak három irányban blokkolnak összesen $3(k - 1)$ élt. A *g* és *h* süti pedig négy irányban blokkolnak, de nem kizárólag szomszédos mezőkkel, így kisebb lesz a blokkolási erejük, mint a maximális. Látható, hogy a *g* süti $4k - 5$, a *h* süti pedig $4k - 6$ élt blokkol.

4.2.2. Maximális blokkolási számok 2-től a 8-sütikig

A 2-sütik a már jól ismert párok. Egy pár maximum $k - 1$ élt blokkol. Emiatt a \mathcal{H}_k csak $k \geq 9$ esetén blokkolható párokkal, ahogy a 3.10 állításban láttuk.



4.3. ábra. A legjobb 3-sütik (első sor) és a legjobb 5-, 6-, 7- és 8-sütik

Könnyen látható, hogy a 3-sütik (melyek csak 1+2-es felosztásúak lehetnek) nem blokkolhatnak $2k - 2$ -nél több élt \mathcal{H}_k -ban. A 4.3 ábra első sorában megadtuk a legjobb 3-sütiket. Az a süti $(k - 1) + (k - 1)$ élt blokkol vízszintes és függőleges irányokban, a d két átlós irányban, a b és c sütik pedig egy átlós és egy vízszintes (elforgatva függőleges) irányban. Mivel minden más 3-süti kevesebb élt blokkol, mint ez a négy, $d_t = 2k - 2$.

Alkalmazva a 4.5 állítást egy $X = n \times n$ táblán elég nagy n -re, azt kapjuk, hogy $(2k - 2)n^2/3 \geq 4n^2 + O(n)$, átrendezve $k \geq 7 + O(1/n)$, vagyis egy 3-elhelyezés nem blokkolhatja a \mathcal{H}_6 hipergráfot, de elméletileg blokkolhatná \mathcal{H}_7 vagy \mathcal{H}_8 hipergráfokat. Mindazonáltal ez egy nyitott kérdés, hogy létezik-e jó 3-elhelyezés a 7- és 8-amőba hipergráfjaira.

Az előző alfejezet 4.2 ábráján listáztuk az összes 4-sütit, ami $4k - 4$ élt blokkol. Jegyezzük meg, hogy ez a legnagyobb szám, ahány élet egy 4-süti blokkolhat. Egyébként a 4.2 ábra felső sora tartalmazza a legjobb 4-sütik teljes listáját. Tehát megkaptuk, hogy $d_4 = 4k - 4$. Alkalmazva a 4.5 állítást kapjuk, hogy $(4k - 4)n^2/4 \geq 4n^2 + O(n)$, átrendezve $k \geq 5 + O(1/n)$. Vagyis elméletileg létezik jó 4-elhelyezés a \mathcal{H}_5 és \mathcal{H}_6 hipergráfok ellen, azonban ez a kérdés szintén eldöntetlen még. A 7-amőba ellen viszont létezik jó 4-elhelyezés, ahogy látni is fogjuk később.

A 4.3 ábra második sorában felsoroltuk a legjobb t -sütiket az $5 \leq t \leq 8$ esetekre, melyeket rendre C_5, C_6, C_7 és C_8 -cal jelöltünk. A következő táblázat-

ban minden $t \leq 8$ -ra összegeztük a d_t és d_t/t értékeket és a k értékének a 4.5 állításból kapott alsó becslését, amelyre a t -elhelyezés elméletileg blokkolhatja a \mathcal{H}_k hipergráfot.

t	2	3	4	5	6	7	8
d_t	$k - 1$	$2k - 2$	$4k - 4$	$5k - 4$	$7k - 6$	$9k - 8$	$11k - 9$
$\frac{d_t}{t}$	$\frac{1}{2}k - \frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}k - \frac{2}{3}$	$k - 1$	$k - \frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}k - 1$	$\frac{9}{7}k - \frac{8}{7}$	$\frac{11}{8}k - \frac{9}{8}$
$k \geq$	9	7	5	4.8	4.29	4	3.73

Ezek után rátérhetünk a \mathcal{H}_k eredményeire. A másik irányból, vagyis egy rögzített k értékre melyik a legkisebb értéke t -nek, melyre létezik jó t -elhelyezés a \mathcal{H}_k hipergráfra.

4.3. Amőbák sütikkel

Először foglaljuk össze eredményeinket egy táblázatba [18], melyeken ebben a fejezetben végigmegyünk. A sorok és oszlopok jelentik rendre a t és k értékeit. Az "Igen" jelenti az ismert jó elhelyezés létezését, a "Nem" jelenti, ha 4.5 állításból következően biztosan nem lehetséges jó elhelyezés, míg a "?" az eldöntetlen eseteket jelzi.

$k \setminus t$	2	3	4	5	6	7	8	$t \geq 9$	∞
2	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem
3	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Igen
4	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	Nem	?	Igen
5	Nem	Nem	?	?	?	?	Igen	Igen	Igen
6	Nem	Nem	?	?	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen
7	Nem	?	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen
8	Nem	?	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen
9	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen	Igen

Észrevehetjük ismét mind a t -ben, mind a k -ban való monotonitást. Ugyanis ha létezik jó t -elhelyezés egy megadott k értékre, akkor $(t+1)$ -elhelyezés is létezik

rá, hiszen a t -elhelyezés már maga is $(t+1)$ -elhelyezés is egyben. Hasonlóan, ha létezik jó t -elhelyezés k -ra, akkor $k+1$ -re is létezik.

A táblázatban található "Nem"-ek nagy része szimpla következménye a 4.5 állításnak. A következőkben bizonyítjuk a fennmaradó állításokat, melyek a táblázatban szerepelnek. A továbbiakban a fehér és szürke színeket használjuk a süti két részének megkülönböztetésére; valamint az X és O jelöléseket fogjuk használni a játékosok által választott négyzetekre, ahogy általában a Tic-Tac-Toe játékban szokás.

4.3.1. A 2-amőba

4.6. Észrevétel. *Nem létezik jó színezés \mathcal{H}_2 -re a végtelen táblán.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen jó színezés. Válasszunk egy tetszőleges mezőt, melynek X színe van. Ha szomszédai között van még egy X színű mező, máris ellentmondásra jutottunk. Ha mind a nyolc szomszédja O színt kapott, akkor viszont köztük lesz két egyszínű mező egymás mellett. ■

Megjegyezzük, hogy a \mathcal{H}_2 hipergráf jó színezéséhez három szín is kevés, négy színnel azonban már kiszínezhetjük jól a végtelen négyzetrácsos síkot.

4.3.2. A 3-amőba

A következő tétel egy speciális esete a Dumitrescu és Radoičić [15] által írt cikk 2. tételének. Az értekezésben leírjuk a bizonyítás vázlatát is.

O_4		
X_1	?	X_5
X_1	X_1	O_3
		O_2

X	X	O	O
O	O	X	X
X	X	O	O
O	O	X	X

X	O	O	O	X	O	O	O
O	O	X	O	O	O	X	O
O	X	X	X	O	X	X	X
O	X	X	X	O	X	X	X
X	O	O	O	X	O	O	O
O	O	X	O	O	O	X	O
O	X	X	X	O	X	X	X
O	X	X	X	O	X	X	X

4.4. ábra. Jó színezések a 3- és 4-amőba blokkolására

4.7. Tétel. *Létezik pontosan egy jó színezés \mathcal{H}_3 hipergráfra.*

Bizonyítás. Követve a 4.4 ábra bal oldalát, van legalább két élszomszédos mező a síkon, melyek színe ugyanaz (szürke az ábrán). Ellenkező esetben a végtelen sakktábla színezést kapnánk, amely tetszőlegesen hosszú egyszínű átlós egyenest tartalmaz.

Tekintsük a három X -et 1-es indexszel. O_2, O_3, O_4 valamint X_5 ekkor kényszerített színek, ha el akarjuk kerülni az egyszínű hármasok felbukkanását. A "?"-lel jelölt mező adja az ellentmondást.

Ez bizonyítja, hogy ha veszünk két oldalszomszédos X négyzetet, akkor bármely fölöttük vagy alattuk található négyzet csak O színű lehet. Ez biztosítja, hogy csak a 4.4 ábrán középen látható színezés lehet jó. ■

4.8. Következmény. *Nem létezik jó t -elhelyezés véges t -re a \mathcal{H}_3 hipergráfra.*

Bizonyítás. Ez következik az előbbi egyértelműségből. Ha volna jó t -elhelyezés véges t -re, akkor ahhoz tartozna több jó színezés is, melyekben az egyes süti részek színei felcserélhetők lennének, amely végtelen sok jó színezést eredményezne. ■

4.3.3. A 4-amőba

Természetesen a k monotonitása miatt az előző színezés \mathcal{H}_3 -ra jó színezés \mathcal{H}_4 -re is. \mathcal{H}_4 -re azonban létezik más jó kettőszínű színezés is, ahogy a [15] cikkben és a 4.4 ábra jobb oldalán látható. Jegyezzük meg, hogy ez a színezés minden négy hosszú egyszínű halmazt blokkol, beleértve minden racionális meredekségű egyenest! Megkérdezhetnénk, hogy hány különböző jó színezés létezik \mathcal{H}_4 -re?

Szintén nyitott kérdés, hogy létezik-e jó t -elhelyezés véges t esetén \mathcal{H}_4 -re. A 4.5 állítás szerint ismertek alsó korlátok, vagyis $t \leq 6$ esetén biztosan nem létezik ilyen. A másik oldalról a 4.9 észrevétel szerint nem létezik jó t -elhelyezés, ha $t=7$ vagy 8.

4.9. Észrevétel. *Nem létezik jó t -elhelyezés \mathcal{H}_4 -re, ha $t=7$ vagy 8.*

Bizonyítás. $t = 7, 8$ esetekben egy jó elhelyezésnek tartalmaznia kell legalább egy sütit a 4.3 ábrán látható C_7 és C_8 közül. (Minden más 7- és 8-süti kevesebb

élt blokkol, mint amennyi elég lenne \mathcal{H}_4 blokkolásához.) De a C_7 és C_8 is tartalmaz vízszintesen három egymást követő négyzetet egy sorban a süti azonos részéből. A három egyszínű négyzet jobb és bal oldalán szereplő egy-egy négyzet viszont bármilyen színű lehet, amely egy blokkolatlan négyest eredményez. ■

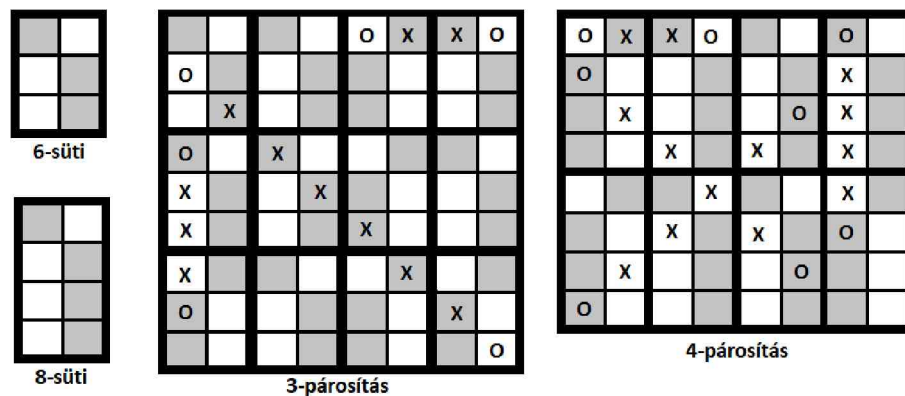
4.3.4. A 9-nél nagyobb amőbák

Láthattuk korábban, hogy a $t = 2, k = 9$ esetben pl. a Hales-Jewett párosítás megfelelő. Monotonitás miatt pedig minden $k \geq 9$ -re is van párosítás, vagyis 2-elhelyezés, amelyből ráadásul következnek a t -elhelyezések $t \geq 3$ -ra is.

4.3.5. A 7- és 5-amőba

4.10. Tétel. *Létezik jó 6-elhelyezés – mely egyben jó 3-párosítás is – a 7-amőbára.*

Bizonyítás. Vegyük a 4.5 ábrán látható 6-elhelyezést, ahol az egyes sütik különböző részei szürkével és fehérrel vannak színezve. Könnyen ellenőrizhető, hogy vízszintesen már minden hármast, függőlegesen minden négyest, míg átlósan minden hetest blokkol, bármelyik sort is nézzük. ■

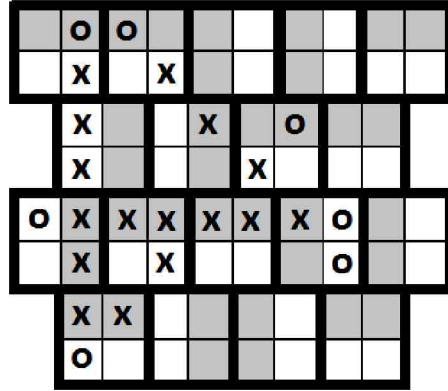


4.5. ábra. Jó 6- és 8-elhelyezések a 7- és 5-amőbákra

4.11. Tétel. *Létezik jó 8-elhelyezés – mely egyben jó 4-párosítás – az 5-amőbára.*

Bizonyítás. Hasonlóan az előző eredményhez a 4.5 ábrán látható 4-párosítás blokkol minden ötöst a végtelen táblán. ■

4.12. Következmény. *A fenti két tételből következik, hogy Picker (mint Romboló) nyeri az elfogult(6) ill. elfogult(8) Chooser-Picker 7- ill. 5-amőba játékot.*



4.6. ábra. 2-párosítás blokkolja a 7-amőbát

4.13. Tétel. *Létezik jó 4-elhelyezés – mely egyben jó 2-párosítás is – a 7-amőbára.*

Bizonyítás. A 4.6 ábra 2-párosítása blokkolja a 7-amőba összes élet. ■

Jegyezzük meg, hogy a monotonitás miatt ugyanez a 2-párosítás blokkolja a 8-amőbát is.

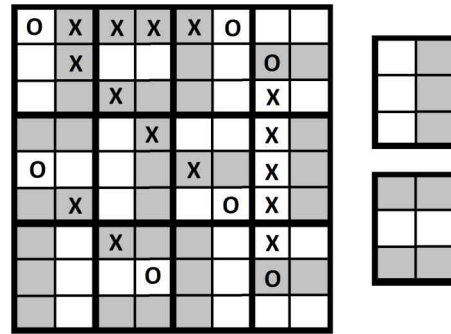
4.14. Következmény. *4.13 tételből következik, hogy Picker (mint Romboló) nyeri az elfogult(4) Chooser-Picker 7- amőba játékot.*

Ennél több is igaz, Csernenszky és társai [11] megmutatták, hogy Picker nyeri a normál C-P 7-amőba játékot is.

Eddig az összes t -elhelyezés egyben $t/2$ -párosítás is volt. Utolsó példánkban azonban \mathcal{H}_6 -ra adunk egy nem kiegyensúlyozott 6-elhelyezést (mely tehát nem 3-párosítás).

4.3.6. A 6-amőba

4.15. Tétel. *Létezik jó 6-elhelyezés a \mathcal{H}_6 -ra.*



4.7. ábra. 6-sütik blokkolják a 6-amőbát

Bizonyítás. A 4.7 ábrán látható két típusú sütit felváltva helyezzük el. Ez a konfiguráció nyilvánvalóan adja a kívánt eredményt. ■

4.16. Következmény. 4.15 tétel szerint *Picker* nyeri az elfogult(6) Chooser-*Picker* 6-amőba játékot.

Összefoglalva az eredményeket, láthattuk korábban, hogy a 9- vagy több amőbára létezik jó párosítás, a 8-amőbára azonban biztosan nem. A 7- és 8-amőbákra viszont létezik jó 2-párosítás (ami egyben jó 4-elhelyezés is). 6-amőbára létezik jó 6-elhelyezés (mely nem 3-párosítás), míg az 5-amőbára jó 4-párosítás (jó 8-elhelyezés). 4-amőbára nem ismert véges süti-elhelyezés, azonban létezik többféle jó kettőszínezés is, 3-amőbára pedig csak egyetlen egy. Végül 2-amőbára nem létezik jó kettőszínezés.

4.4. Amőba kevesebb irányban

Hasonlóan a párosításokhoz, az általánosított párosítások is adnak eredményeket, ha a megszokott négy irány helyett csak egy, kettő vagy három irányt tekintünk.

4.4.1. 3 irány avagy a hatszögrács

Az előző fejezetben a négy irányú verzióra adott színezések és t -elhelyezések pedig szintén jók a három irányú játék esetén is. Így csak az ezektől különböző eredményeket érdemes emlitenünk.

Láthattuk korábban, hogy ez esetben a **7-amőbára** is létezik már jó párosítás, vagyis 2-elhelyezés. **2-amőbára** továbbra sincs jó színezés, a **3-amőbára** viszont lehetséges lehetne az előző feladatban megadotthoz képest egyéb jó színezés is, vagy akár véges sütikkel való lefedés.

4-amőbára szintén létezhetne véges t -elhelyezés, hiszen ez esetben az előző fejezet a és c típusú 4-sütije szintén $4k-4$ blokkolási erővel rendelkezik (a b és d nem, mivel azok olyan átlós irányban is blokkoltak, amik közül az egyik biztosan kiesik három irány esetén). A 4.5 állításból következő $(4k-4)n^2/4 \geq 3n^2 + O(n)$ egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy $k \geq 4 + O(1/n)$, vagyis már a fenti a és c 4-sütikkel is blokkolható lenne a 4-amőba. Ez azonban mégis így.

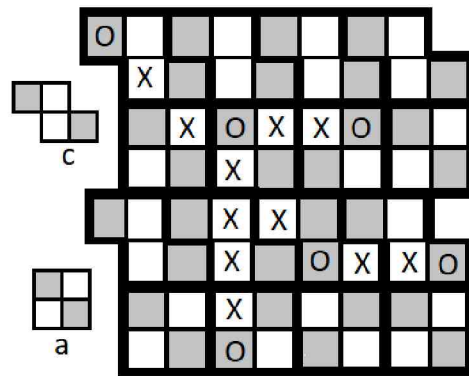
4.17. Tétel. *Nem létezik jó 4-elhelyezés a h_4 -re.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy mind az a , mind a c 4-süti egy példánya csak két irányt képes blokkolni a háromból, amivel marad egy blokkolatlan iránya. Ezt az irányt tekintve egy adott sütinél és meghosszabbítva egy-egy négyzettel mindkét irányba (mely négyzetek biztosan különböző sütikben lesznek) már kaptunk is egy blokkolatlan négyest. ■

Azonban az h_5 blokkolására már megfelelők lesznek az a és c sütik.

4.18. Tétel. *Létezik jó 4-elhelyezés – 2 párosítás – a h_5 -re.*

Bizonyítás. A 4.8 ábrán látható 4-süti elhelyezés, mely az a és c 4-sütiket tartalmazza jó 4-elhelyezés. ■



4.8. ábra. 4-sütik blokkolják a három irányú 5-amőbát

4.19. Megjegyzés. Természetesen a h_5 blokkolására adott 4-elhelyezés h_6 hipergráfra is jó elhelyezést ad.

4.5 állítás szerint létezhetne jó 3-elhelyezés is h_6 hipergráfra, hiszen egy 3-sütinek három irány esetén is $2k - 2$ a maximális blokkolási ereje, melyből az $(2k - 2)n^2/3 \geq 3n^2 + O(n)$ egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy $k \geq 5, 5 + O(1/n)$, ami szerint 5-re még nem, de 6-ra már létezhetne jó 3-süti elhelyezés. Ilyet azonban nem találtunk még.

Összefoglalva a három irányú verziót, a 7-amőbát már párosítással, az 5- és 6-amőbát 2-párosítással, a 3- és 4-amőbát pedig csak színezéssel tudjuk eddig blokkolni. Azonban a 3-amőbát blokkoló színezés unicitása, a 4-amőbát blokkolni képes véges t -elrendezés létezése, valamint a 6-amőba 3-elhelyezéssel való blokkolhatósága továbbra is nyitott kérdés.

4.4.2. Egy és két irányban

Egy irányban természetesen egyszerű a helyzet, E_2 -re létezik jó színezés, melyben a színek soronként felváltva szerepelnek, míg E_3 -ra párosítás is van.

Két irányban azonban az elhelyezések adnak új eredményeket. Láthattuk a 3.15 tételben, hogy P_5 -re, vagyis a két irányban játszott (függőleges, vízszintes) 5-amőbára létezik párosítási stratégia, 2-elhelyezés.

Másik oldalról P_2 ellen pedig jó színezés (∞ -elhelyezés) létezik, egészen pontosan csak egy, a végtelen sakktábla színezés. A két fennmaradó eset, P_3 és P_4 lesz tehát számunkra érdekes, melyekre a korábbiakból tudjuk, hogy párosítás nem létezhet. A színezéseknél azonban sokkal többet mondhatunk.

4.20. Tétel. *Létezik jó 4-elhelyezés – 2 párosítás – a P_3 -ra, vagyis a két irányú 3-amőbára.*

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a 4.9 ábra 4-süti elhelyezése blokkol minden három hosszú függőleges és vízszintes élt. ■

Természetesen ez a 4-elhelyezés jó P_4 -re is, azonban a párosítás (2-elhelyezés) és a 2-párosítás (4-elhelyezés) között egyedülként megbúvó 3-elhelyezés – páratlan t -re való egyetlen példaként – szolgáltat egy még kisebb jó elhelyezést P_4 ellen.

4.22. Tétel. *Létezik végtelen sok különböző jó színezés El -re.*

Bizonyítás. Mivel P_2 része El -nek, a végtelen sakktábla színezése itt is ki-elégítő. Azonban vegyük észre, hogy minden olyan színezés alkalmas, ahol a sakktáblát egyik irányba megnyújtjuk, egészen odáig, hogy minden végtelen sor egyszínű és soronként váltakoznak a színek. Könnyen látható, hogy a tetszőlegesre nyújtott sakktábla színezések kombinálásán kívül viszont nincsen más jó színezés. Ha ugyanis van valahol két egyszínű élszomszédos mező (pl. vízszintesen) egymás mellett, akkor a két mező fölötti és alatti függőleges oszlopokat ez a két mező felfele és lefele meghatározza egyértelműen, hiszen felváltva kell lenniük a színeknek. Ez kettőnél több egy sorban lévő élszomszédos mezőre is igaz. ■

4.23. Tétel. *Nem létezik véges süti elhelyezés El -re.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy véges sütikkel kivédhető El . Vegyük egy tetszőleges véges süti jobboldali elemei közül a legalsót. Ez az a mező, melynek három szomszédja jobbra, lefele és jobbra-le átlósan egy vagy több másik sütiben szerepel. E három mező közül legalább kettő a skatulyaelv szerint azonos színt kap. Mivel az először kiválasztott süti színezése független a többitől, bármelyik kettő mező is azonos színű, a süti jobb-alsó elemével együtt megjelenik El . ■

A továbbiakban térjünk vissza a párosításokhoz, azon belül is a 9-amőba párosításához, melyről még nem tudjuk, hogy csak egy (a Hales-Jewett) párosítás létezik, vagy több; és ha több, akkor hány és vajon milyen típusúak lehetnek? Ezen kérdésekre keressük a választ a következő fejezetben, mely a [19, 20] cikkeinkre támaszkodik.

5. fejezet

A 9-amőba párosításai

"A játék a művészetek rokona."

(N. Bartha Károly nyelvész, etnográfus)

Ebben a fejezetben a végtelen amőba párosítások szempontjából legkisebb és legérdekesebb esetét, a 9-amőbát vizsgáljuk. Kísérletet teszünk az összes lehetséges párosításának leírására, megszámlálására, felsorolására és valamely struktúrába rendezésére. Mint látni fogjuk, a dolog egyáltalán nem triviális, a kézi vizsgálat, elméleti megfontolások és ötletek mellett programozásra is szükség lesz a fejezet során. A $k = 9$ eset élességéből adódóan kapott szigorú feltételek olyan szimmetriák létrejöttéhez vezetnek, melyben talán a művészetek iránt fogékony olvasó is talál valamilyen szépséget.

Érdekességként jegyezzük meg, hogy a párosítások keresésének első fázisához egy nagyobb méretű sakktáblát, valamint 32 gyufaszálat használtunk a párosítások kereséséhez; mely bár elavult módszernek tűnhet, mégis rengeteg ötletet és később hasznosítható megfigyelést adott.

A fejezet elején vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételeknek kell teljesülniük egy jó párosításra, mellyel blokkolni szeretnénk a 9-amőbát.

5.1. A jó párosítás feltételei

Vegyük a végtelen négyzetrácsos sík egy $n \times n$ résztábláját. A 3.10 állítás szerint $(k-1)n^2/2 \geq 4n^2 + O(n)$ amiből $k \geq 9 + O(1/n)$ következik. Az eredmény

azt sejteti, hogy a párokat valamilyen értelemben "optimálisan" kell használni \mathcal{H}_9 blokkolásához, vagyis egy párnak a lehető legtöbb \mathcal{H}_9 élt blokkolnia kellene. Az optimalitást precízebben is definiálhatjuk:

5.1. Definíció. *Egy párosítás optimális, ha:*

1. Minden pár pontosan $k - 1$ élt blokkol.
2. Nincsen túlblokkolás, vagyis minden él pontosan egy pár által blokkolt.
3. Nincsenek párosítatlan mezők, vagyis minden mező része a párosításnak.

5.2. Következmény. *Vegyük \mathcal{H}_9 egy optimális jó párosítását. Ez a párosítás dominó-párosítás, ahol a dominók 8-periodicitással követik egymást minden sorban és minden mező része pontosan egy párnak.*

Bizonyítás. Az első pont az 5.1 Definícióból következik, amely szerint a párosítás dominó-párosítás, a második pont adja a 8-periodicitást, hiszen másképpen túlblokkolást vagy blokkolatlan élt kapnánk. A párosítatlan mező hiánya egy az egyben az optimalitás definíciójának harmadik pontja. ■

5.3. Definíció. *A párosítás egy mezőjét **anomáliának** nevezzük, ahol a 8-periodicitás sérül, egy nem dominó típusú pár vagy egy párosítatlan mező feltűnik.*

Könnyen ellenőrizhető, hogy a Hales-Jewett párosítás anomáliamentes.

5.4. Megjegyzés. *A 3.10 állítás következményében szereplő $O(n)$ miatt megtörténhet, hogy \mathcal{H}_9 egy jó párosításában is előforduljon anomália. Egy jó párosítást, melyben anomália fordul elő "kvázi-kristálynak" fogunk nevezni, utalva az anomáliamentes párosítások magas fokú szimmetriáira és kristályra emlékeztető megjelenésére, amit a Hales-Jewett párosításban vagy a [13] cikk két párosításában láthattunk. A későbbi 5.2 fejezetben részletesebben is foglalkozunk a kvázi-kristályokkal, melyről végül bebizonyítjuk, hogy \mathcal{H}_9 jó párosításai közül mindegyik anomáliamentes.*

Az első lépésünk a továbbiakban a következő lemma:

5.5. Lemma. \mathcal{H}_9 minden jó párosításához létezik egy tetszőlegesen nagy, anomáliamentes résztábla.

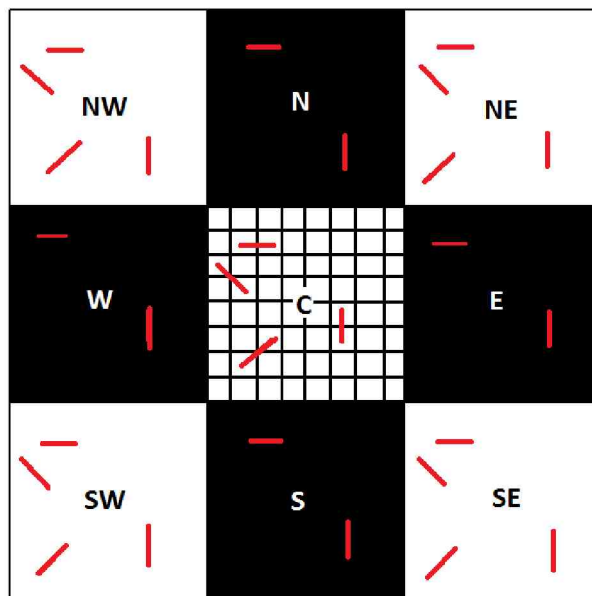
Bizonyítás. Vegyünk egy tetszőleges $n \times n$ résztáblát, melyet X -nek nevezünk. Majd vágjuk fel sok kisebb, $\sqrt{n}/100 \times \sqrt{n}/100$ -as résztáblára. A 3.10 állítás szerint legfeljebb $48n - 128$ anomália lehet X -ben. Mivel most $10000n$ résztáblára osztottuk fel X -et, ezek közül a legtöbb anomáliamentes lesz. ■

A következőkben \mathcal{H}_9 anomáliamentes párosításainak struktúráját kísérreljük meg leírni. Osszuk \mathcal{H}_9 egy jó párosítását 8×8 méretű résztáblákra és jelöljük ki ezen résztáblák közül egyet, melyet középső, avagy *Centrális négyzetnek*, röviden C -nek nevezünk. Ezután csak a C négyzetet (egy vagy két mezőben) érintő (dominó-)párokat hagyjuk meg. Vizsgáljuk meg, hogy a C 8×8 -as résztábla szomszéd résztábláin milyen párok szerepelhetnek. Annak érdekében, hogy beszélni tudjunk ezekről a 8×8 -as résztáblákról, nevezzük őket égtájak szerint (angol rövidítésekkel) keleti (E), északkeleti (NE), stb. résztábláknak, míg egy-egy résztábla mezőit pedig a szokásos sakk jelölésekkel ($A1-H8$), ahogy az 5.1 ábrán láthatók.

5.6. Lemma. Tegyük fel, hogy létezik egy anomáliamentes jó párosításunk \mathcal{H}_9 -re a végtelen síkon és azon kijelölünk kilenc darab 8×8 -as négyzetet, (C, E, NE, \dots) , ahogy fentebb.

A C résztáblát érintő függőleges és vízszintes dominóknak meg kell jelenniük a C mind a nyolc szomszédos résztáblájának azonos mezőin. Az átlós dominóknak meg kell jelenniük az NE, NW, SW, SE résztáblák azonos mezőiben. Habár C átlós mintája kiterjedhet a másik négy résztáblára, név szerint a E, S, W, N táblákra, ez nem biztosított. Ennek következményeként az egész négyzetrácsos sík a periodikus másolata vagy a C résztáblának vagy annak a 16×16 -os résztáblának, amely a C, S, SE, E négy darab 8×8 -as résztáblából áll.

Bizonyítás. Elég ellenőriznünk a következő négy lépést. Egy általános mezőjét a 8×8 résztábláknak $X_i \in \{A1, \dots, H8\}$ -vel jelölünk az említett sakk jelölés szerint. Ha egy d dominó ugyanazokat a mező párokat fedi pl. C -ben és E -ben, akkor azt mondjuk, hogy a d pár kiterjed C -ről E -re.

5.1. ábra. C párjainak kiterjedése a szomszéd résztáblákra

1. A vízszintes (függőleges) párok 8-periodicitása miatt C párjai egyértelműen kiterjednek a W és E (N és S) résztáblákra. A $+1$ meredekségű átlós dominók hasonlóan kiterjednek SW és NE , a -1 meredekségű átlós dominók pedig a SE és NW négyzetekre.
2. Ahhoz, hogy lássuk a függőleges dominók kiterjedését C -ről W -re és E -re, egy kis esetvizsgálatra lesz szükségünk. Korábban láttuk ahogy a C függőleges dominói kiterjedtek északra és délre. Vegyünk egy v függőleges dominót a C tábla X_i négyzetében. Ha a W tábla X_i négyzete egy $+1$ (vagy -1) átlós dominót tartalmazna, akkor a 8-periodicitás miatt N (vagy S) X_i négyzete szintén egy ugyanolyan átlós dominót tartalmazna. Ez viszont ellentmondás, hiszen az előző pontból tudjuk, hogy az N (vagy S) tábla X_i négyzete a v függőleges dominót tartalmazza. Ugyanez igaz az E résztábla X_i négyzetére is. Ha a W (vagy E) tábla X_i négyzete vízszintes dominóval fedett, akkor viszont C -nek kellene tartalmaznia egy vízszintes dominót X_i -ben, ami szintén ellentmondás, mert ott már a v függőleges dominó van feltevésünk szerint. Így azt kaptuk, hogy a v függőleges dominó kiterjedt C -ről W -re és E -re, továbbá a 8-periodicitás

miatt v kiterjed az SW, NW, NE, SE táblákra is. Tehát azt láttuk, hogy a C függőleges dominói kiterjednek mind a nyolc szomszédos résztáblára. Ugyanez igaz C vízszintes dominóira is.

3. Most vizsgáljuk az átlós dominókat. Az első és második lépésekben C $+1$ meredekségű átlós dominói kiterjedtek SW -re és NE -re. Mivel nincsenek párosítatlan mezők és túlblokkolások, az SW és NE fennmaradó mezői csak -1 átlós dominókkal fedettek lehetnek. Ugyanez igaz az SE és NW négyzetek mezőire is. Vagyis C összes dominója kiterjed az SW, SE, NE, NW táblákra, továbbá a vízszintes és függőleges dominók C -ről kiterjedtek az S, E, N, W résztáblákra.
4. Láthattuk, hogy C átlós dominói nem feltétlenül terjedtek ki az S, E, N, W résztáblákra (feketével színezve az 5.1 ábrán). Habár a 8-periodicitás miatt E átlós párijai kiterjedtek az S, N és W táblákra, tehát a S, E, N, W fekete résztáblák teljesen azonos párosítási struktúrával rendelkeznek.

■

5.7. Megjegyzés. C átlós párijai kiterjedhetnek az S, E, N, W résztáblákra is (ahogy a Hales-Jewett párosítás esetében), ezzel minden 8×8 -as résztábla a végtelen síkon a C pontos másolata lenne. Ennek ellenére lehetséges, hogy a végtelen síkon két különböző átlós struktúra szerepel, egy a C, NW, NE, SE és SW típusú 8×8 -as résztáblákön (fehérrel színezve az 5.1 ábrán) egy ettől különböző átlós struktúra pedig az S, E, N, W típusú (fekete) résztáblákön. Látni fogunk néhány példát a következő részben.

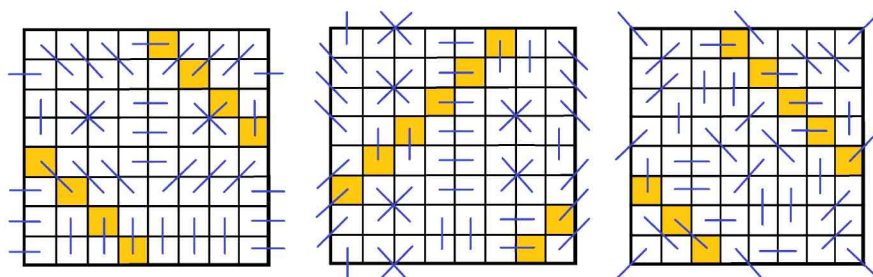
5.8. Definíció. A végtelen sík (vagy annak egy anomáliamentes részének) egy párosítása **k -tórusz**os, ha az éppen egy $k \times k$ -as tórusz kiterjesztése a végtelen síkra, de k -nál kisebb értékekre ez nem teljesül.

Így már egyszerűbben is megfogalmazhatjuk az előző lemmát és megjegyzést egy központi tételben:

5.9. Tétel. Tegyük fel, hogy van egy anomáliamentes jó párosításunk \mathcal{H}_9 -re. Ekkor ez a párosítás vagy 8-tóruszos vagy 16-tóruszos.

5.10. Észrevétel. *Vannak olyan 8-tóruszos párosítások \mathcal{H}_9 -re, melyek nem izomorfak a Hales-Jewett párosítással.*

Bizonyítás.



5.2. ábra. Néhány eddig nem ismert párosítás

Ezen 8×8 -as négyzetek párosításait a végtelen síkra kiterjesztve három másik 8-tóruszos párosítást kapunk. Jegyezzük meg, hogy a baloldali párosítás tükrözési, a jobb oldali pedig forgatási szimmetriával rendelkezik. ■

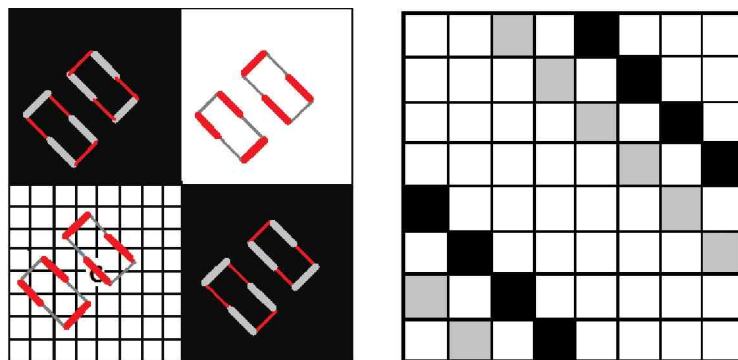
Valamelyest meglepő tény, hogy létezik néhány 16-tóruszos párosítás is \mathcal{H}_9 -re. Ahhoz, hogy megértsük a struktúrájukat, kicsit finomítjuk az 5.6 lemma gondolatmenetét a következő részben.

Egy 16-tóruszos párosítás tehát két különböző szomszédos 8×8 -as résztáblából van összerakva, melyek függőleges és vízszintes párjai megegyeznek, átlós struktúrái viszont biztosan eltérnek (különben 8-tóruszos lenne). Egy 16-tóruszos párosítás két különböző átlós struktúrával rendelkező 8×8 -as résztábláját jelöljük ezentúl a C és W jelölésekkel!

5.1.1. Átlós alternáló körök

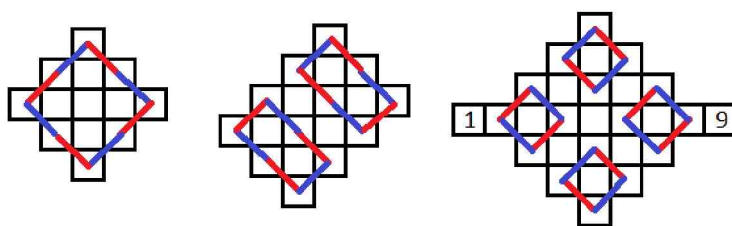
\mathcal{H}_9 8-tóruszos és 16-tóruszos jó párosításai tekinthetők úgy is, mint speciális teljes párosítások (a párosítás szó gráfelméleti értelmében) a \mathcal{H}_9 alapú egyszerű gráfon: A G gráf csúcshalmaza az alap tórusz csúcsai, melyek mindegyike egy-egy éllel van összekötve a nyolc szomszédos négyzet által reprezentált csúcsokkal. Egy párosítás dominói is élek, és egy jó párosítás nem csak teljes párosítás a gráfon, hanem rendelkezik azzal a tulajdonsággal is, hogy pontosan egy (16-tóruszos esetben két) élt tartalmaz minden tóruszegyenesen.

Ismert, hogy két teljes párosítás uniója az azonos csúcshalmazon párhuzamos élekből és alternáló körökből áll. Tehát ha vesszük egy 16-tóruszos jó párosításból kivágott két különböző C és W résztábla unióját akkor a kapott nemtriviális alternáló körök csak átlós éleket tartalmazhatnak. Ezen átlós alternáló körök vizsgálatával juthatunk el néhány 16-tóruszos jó párosításokhoz. (Ha C és W átlós élei megegyeznének, akkor 8-tóruszos párosításokat kapnánk.)



5.3. ábra. 16-tóruszos párosítás (balra) és néhány tóruszegyenes (jobbra)

5.11. Tétel. *Egy 8-tóruszos C jó párosításból akkor és csak akkor származtatható 16-tóruszos jó párosítást, ha létezik egy másik, különböző 8-tóruszos jó párosítás, W , mely csak néhány átlós dominóban különbözik C -től úgy, hogy az uniójuk egy átlós alternáló körrendszert ad. Összesen két ilyen lehetséges alternáló körrendszer fordulhat elő, melyek az 5.4 ábra baloldalán és közepén láthatók.*



5.4. ábra. Az alternáló körrendszerek

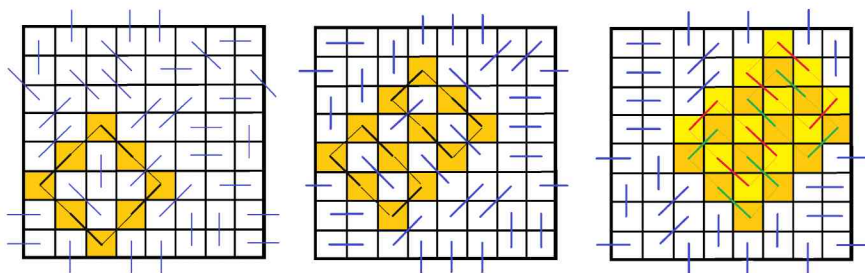
Bizonyítás. Mivel minden tóruszegyenesen pontosan egy dominó lehet egy 8-tóruszos jó párosítás tetszőlegesen választott 8×8 -as résztáblán, ezért a C és W uniójában szereplő átlós dominókból álló alternáló körök vagy nulla vagy

két dominóban találkozhatnak minden tóruszegyenessel. (Ha csak egyben találkoznának, akkor vagy C -ben vagy W -ben lenne blokkolatlan tóruszegyenes. Kettőnél több dominóban való találkozás pedig túlblokkolást eredményezne.)

Esetvizsgálattal kaphatjuk, hogy csak az 5.4 ábrán látható konfigurációk jöhetnek számításba. Az első egy egy körből álló rendszer, a második szintén egy körrendszer, de két átlós körből áll, a harmadik rendszer pedig négy körből áll. Közülük viszont a harmadik felbukkanásakor keletkezne egy vízszintes egyenes (1-9-ig számozva), melyet nem tudnánk blokkolni vízszintes dominóval. ■

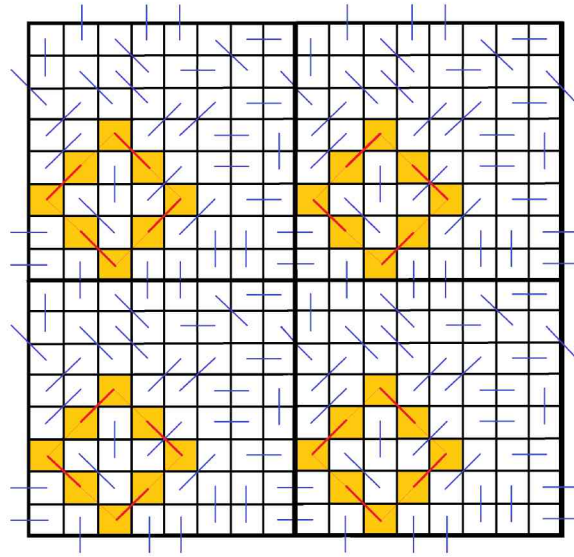
5.12. Észrevétel. *Léteznek olyan jó párosítások, melyek tartalmazzák a két lehetséges alternáló körrendszer egyikét.*

Bizonyítás. Az 5.5 ábrán találhatunk példát. A vastag (vékony) párokat véve az alternáló körökből C -be (W -be) egy 16-tóruszos párosítást kapunk. Természetesen a C és W összetételével kapott 16-tóruszos párosítás nem 8-tóruszos, definíció szerint. ■



5.5. ábra. Példák alternáló körökre

5.13. Megjegyzés. *Egy 16-tóruszos párosítás csak a két lehetséges körrendszer tartalmazása által jöhet létre. Ekkor a C típusú 8×8 -as négyzet az alternáló körrendszer egyik állapotában, míg W -ben a másik állapot (mely a kör mentén az átlós élek eltolásával kapható) szerepel, pl. az 5.6 ábrán. Egy ilyen 16-tóruszos párosításban ha pl. a C táblarész W -től különböző átlós éleit eggyel visszatolva a W állapotba alakítjuk, akkor egy 8-tóruszos párosítást kapunk. Ugyanez igaz, ha W táblarészt alakítjuk C -vel egyformára, ekkor egy másik 8-tóruszos megoldás származik.*



5.6. ábra. Egy 16-tóruszos párosítás

5.14. Megjegyzés. Csak két különböző alternáló körrendszer lehetséges, azonban előfordulhat, hogy egy 16-tóruszos párosításban több ilyen alternáló körrendszer is megtalálható legyen. Ezen esetekben kettőnél több (négy, nyolc) 8-tóruszos párosítás is származtatható a 16-tóruszos párosításból, aszerint, hogy melyik körrendszer melyik állapotban van éppen. Erre mutat egy példát az 5.5 ábra jobb oldali párosítása. Itt a két elkülönülő alternáló körrendszerek egyike a (normál) sakktábla szerinti fekete, másikuk a fehér mezőkön fut.

5.15. Megjegyzés. Jegyezzük meg továbbá, hogy egy átlós alternáló körrendszerben egy 8×8 -as táblán a lehetséges 32 egyszínű mező közül (hiszen egy átlós alternáló körrendszer sosem válthat színt) 16 mindenképpen foglalt a vízszintes és függőleges dominó párok számára. Így egy átlós körrendszer legfeljebb 16 egyszínű mezőt érinthet.

5.1.2. A 8-tórusz párosításai

Foglalkozzunk most egy látszólag teljesen új M-B játékkal, amely azonban szoros kapcsolatban van a 9-amőbával.

5.16. Definíció. A $k \times k$ -as Maker-Breaker tórusz játékot a k^2 négyzetből álló

diszkrét tórusz mezőin játszuk (hipergráf csúcsai), ahol $4k$ nyerőhalmaz van, a k darab sor és oszlop valamint az átlós tóruszegyenesek a ± 1 meredekséggel. Ezen nyerőhalmazok a hipergráf élei. A játék hipergráfját \mathcal{T}_k -val jelöljük.

Az 5.2 ábrán sárgával színezve láthatunk néhány átlós tóruszegyenest.

5.17. Megjegyzés. A \mathcal{T}_8 esetében 32 nyerőhalmaz és 64 négyzet (csúcs) van, melyeken 32 pár fér el. Így ha tekintjük a négy irányt (vízszintes, függőleges, átlósak), akkor a $k = 8$ az egyetlen k érték, melyre lehetséges jó párosítás olyan módon, hogy minden nyerőhalmaz egyetlen párt tartalmazzon.

5.18. Megjegyzés. Egy tetszőleges 8-tóruszos párosítás \mathcal{H}_9 -re, jó párosítást ad \mathcal{T}_8 -ra is.

Bizonyítás. A 8×8 tórusz négyzeteinek azonosítására rögzítsünk egy mezőt és nevezzük $a1$ -nek, majd használjuk a szokásos sakk jelölést. Válasszunk egy tetszőleges 8-tóruszos jó párosítást \mathcal{H}_9 -re és vágjunk ki egy 8×8 -as négyzetet belőle. A 8-periodicitás miatt minden 8 hosszú egyenes tartalmaz egy dominó párt (pl. $e4 - e5$) vagy két fél párt (pl. $e1$ és $e8$), amelyek szomszédosak a tóruszon. ■

5.19. Megjegyzés. A fordított állítás nem igaz, mert a 8×8 -as tórusznak van olyan jó párosítása is, amely nem dominó típusú. Továbbá vannak (nem dominó) párok, amelyek több, mint egy élt blokkolnak (pl. $a4 - d8$ blokkol egy-egy $+1$ és -1 meredekségű tóruszegyenest is), ami megenged túlblokkolást vagy párosítatlan mezőket. Ha viszont csak dominó párokat engedünk meg, akkor \mathcal{T}_8 egy jó párosítása kiterjeszthető \mathcal{H}_9 jó párosításának a triviális módon.

5.20. Megjegyzés. A M - B tóruszjáték egyébként külön is érdekes. Ismert, hogy $k = 3$ -ra a k -tórusz játék Maker nyerő. $k = 8$ -ra Breaker párosítással nyer. $k \geq 5$ -re szintén Breaker nyer, ezt az Erdős-Selfridge tétel adja. A $k = 4$ eset Breaker nyerése pedig egy közepesen hosszú esetvizsgálattal kapható meg [14]. A játékot magasabb dimenzióban is vizsgálták, ezen eredményekről részletesebben Beck [4] könyvében olvashatunk.

Az összes jó dominó párosítást megtalálni a 8×8 -as tóruszra egy véges feladat, amely nem különösebben nehéz számítógéppel. A kapott párosítások

tórusz szimmetriáinak ellenőrzése azonban nehézzé teszi a problémát. A későbbiekben mégis megszámloljuk és listázzuk a nem izomorf jó párosításokat. Előbb azonban még nézzük meg, hogy lehetséges-e akár csak egy anomáliát tartalmazó párosítás létezése.

5.2. Nincs kvázikristály

Egy lényegi kérdésünk még mindenképpen nyitva maradt: vannak-e anomáliát tartalmazó párosítások \mathcal{H}_0 -re? Jegyezzük meg, hogy egy $n \times n$ -es résztáblán $O(n)$ anomália lehetséges, amely akár végtelen sok (és kezelhetetlen) megoldást eredményezne. Szerencsére nem ez a helyzet, ahogy látni fogjuk.

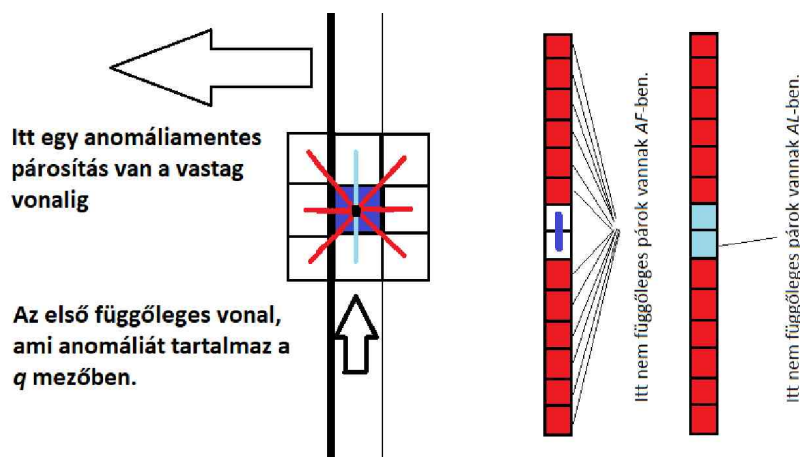
5.21. Lemma. *Egy elég nagy résztábla anomáliamentes párosítása kiterjeszthető anomáliamentesen az egész síkra.*

Bizonyítás. Láttuk korábban, hogy egy nagy résztábla anomáliamentes párosítása egy 8×8 -as vagy 16×16 -os tóruszpárosítás egyértelmű kiterjesztéseként kapható. Folytatva a kiterjesztést az egész síkra, kapjuk a kívánt anomáliamentes párosítást. ■

5.22. Lemma. *Tegyük fel, hogy a sík egy párosítását az anomáliamentes R félsík párosításának kiterjesztéseként kaptuk. Ekkor az egész párosítás is anomáliamentes kell, hogy legyen.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel, hogy az R anomáliamentes félsíknak létezik egy AL anomáliákat tartalmazó kiterjesztése is a teljes síkra. Legyen továbbá AF az R anomáliamentes párosításának kiterjesztése, mely a 5.22 lemma szerint létezik. Természetesen AL nem egyezhet meg AF -fel.

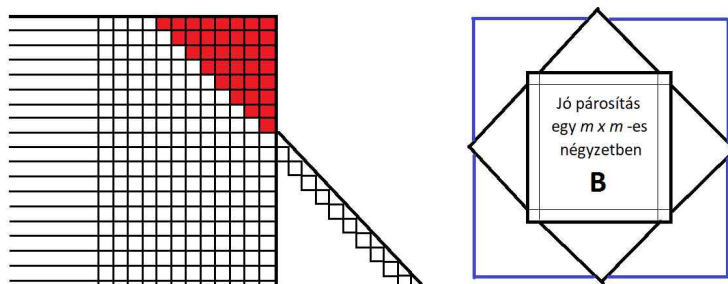
Vegyünk a sík egy q mezőjét, mely tartalmaz anomáliát és egyike az R -hez legközelebbi ilyen mezőknek. Ahogy az 5.7 ábrán láthatjuk feltehető, hogy az R félsík határvonala függőleges, a q a határvonal jobb oldalán található, valamint az AL párosítás anomáliamentes q -tól balra. Legyen $AF(q)$ a dominó, ami fedi a q négyzetet az AF anomáliamentes kiterjesztésben. Ha $AF(q)$ vízszintes elhelyezésű és q a dominó jobb fele, akkor AL nem tartalmazza az $AF(q)$ dominót q -ban, ami egy blokkolatlan vízszintes élt eredményez AL -ben. Egy hasonló



5.7. ábra. Nincs kvázikristály párosítás

gondolatmenet az átlós irányokba mutatja, hogy $AF(q)$ csak függőleges dominó lehet. Vegyük most a hat négyzetet $AF(q)$ alatt és fölött. A 8-periodicitás miatt AF -ben nincsenek más mezők ezen 12 mező között, amelyek függőleges dominót tartalmaznak. Azonban AL -ben kell lennie a 12 mező között (pl. s -ben) legalább egy fél függőleges párnak, hiszen a q -beli anomália miatt a függőleges élek közül néhányat máshol kell blokkolni. Az $AF(s)$ dominó vagy vízszintes, vagy átlós volt, ezért az $AF(s)$ pár nem része AL -nek. Ez a fentiek szerint egy blokkolatlan vízszintes vagy átlós élhez vezetne AL -ben, ami ellentmondás. ■

A fő kérdés megválaszolásához az előbbi lemma ötletére lesz szükségünk.



5.8. ábra. Egy anomáliamentes párosítás kiterjedése

5.23. Tétel. *Egy elég nagy négyzet alakú résztábla anomáliamentes párosítása egyértelműen és anomáliamentesen kiterjed a teljes táblára.*

Bizonyítás. Rögzítsük \mathcal{H}_9 egy jó párosítását és vegyünk egy anomáliamentes $m \times m$ résztáblát – jelöljük B -vel – ami az 5.5 lemma szerint létezik. B párosítása anomáliamentesen terjed ki B jobb oldalának legnagyobb részén, ahogy az 5.22 lemma mutatja. A kiterjedés biztosan érvényes arra a derékszögű háromszögre, melynek átfogója $m - 16$ és B jobb oldalán halad, ahogy az 5.8 ábrán látható. (Az 5.22 lemma szerinti kiterjedés nem működik a B jobb oldalának derékszögű háromszög fölötti és alatti részén, hiszen ott már nincsenek azok az átlós dominók, melyeket használtunk a lemma során.)

Azonban ugyanezt a trükköt alkalmazva a B másik három oldalán, kapunk egy nagyobb $((\sqrt{2}m - 16) \times (\sqrt{2}m - 16))$ méretű elforgatott négyzetet. Az előbbi gondolatmenetet megismételve láthatjuk, hogy B anomáliamentes párosítása kiterjed a teljes síkra. ■

5.3. Az összes jó párosítás megkeresése

A célunk egy olyan program megírása, amely megtalálja az összes lehetséges párosítást a végtelen táblán a 9-amőbára. Mivel az összes ilyen párosítás 8-tóruszos vagy 16-tóruszos és mindkettő fajta származtatható a 8×8 -as résztábla tórusz dominó párosításaiból, csak a 8×8 -as párosításokat vizsgáltuk (a tóruszos kiterjesztést észben tartva).

Egy párosítást egy 8×8 -as táblán tárolunk, minden mező reprezentálja az aktuális mezőn lévő nyolc lehetséges pár egyikét: 0 jelent keletet (E), 1 délkeletet (SE), stb., 7 északkeletet (NE). Természetesen ha egy mező keleti, akkor a párja nyugati, vagyis egy lépésben két mezőt töltünk fel egyszerre. Az algoritmus maga egy szokásos backtracking algoritmus, vagyis a következő párosítatlan mezőre megtaláljuk a lehetséges párokat, az összes lehetőség kipróbálásával rekurzívan hívva a tábla kitöltő függvényt. Amikor ellenőrizzük, hogy egy pár lehetséges-e, szintén meggyőződünk arról is, hogy ne legyen túlblokkolás, vagyis folyamatosan jegyezzük a blokkolt éleket is. Egy részletes magyarázat található Makay Géza személyes weboldalán [32].

Tapasztalatainkból tudjuk, hogy a sebesség is kritikus tényező. Túl sok ilyen párosítás van, ezért megpróbáljuk redukálni az esetek számát. Két párosítást azonosnak mondunk a végtelen síkon, ha egymásba transzformálhatók elto-

lással, tükrözéssel vagy forgatással. Így azért, hogy ne találjuk meg többször ugyanazt a párosítást, alkalmazunk egy transzformációt minden párosításra a 8×8 -as táblán. Ezen transzformált párosítások közül a legkisebbet választjuk a lexikografikus rendezésben. Ez azt is jelenti, hogy egy ilyen párosítás mindig 0 és 4 értékekkel kezdődik az első sorban, így szintén csökkenti az esetek számát, ha ezen két értékkel kezdünk.

Természetesen a transzformációk során észben kell tartanunk azt a tényt, hogy a 8×8 -as tábla 8-tóruszos módon terjed ki a végtelen síkra. Részletesebben:

1. Vagy tükrözzük a táblát vagy nem (két lehetséges eset) a középső függőleges vonalra a 4-es és 5-ös oszlopok között.
2. Elforgathatjuk a táblát 0, 90, 180 vagy 270 fokkal (4 lehetséges eset).
3. Kipróbálunk minden tóruszos (vagyis modulo 8) eltolást, amelyek 0-4 párral kezdődő táblát adnak

Minden párosításra a lexikografikusan legkisebb reprezentást választjuk.

A fenti módszer csökkentette a megtalált összes 6 210 560 párosítás számát és a programunk végül 194 543 különböző párosítást talált kb. 4 perc alatt egy 3.2 GHz Core i7 processzorral rendelkező asztali gépen, 12 GB memóriát használva.

A párosítások letölthetők a [32] weboldalról. Érdekesség, hogy a különböző jó párosítások száma egy prímszám lett.

Mivel nagyon sok különböző párosítást kaptunk, egy természetes lehetőség a rendszerezésükre, ha gráfban tároljuk őket. A következő részben mutatunk egy természetes módszert a párosítások közti kapcsolatok definiálására.

5.4. A jó párosítások rendszerezése egy gráfban

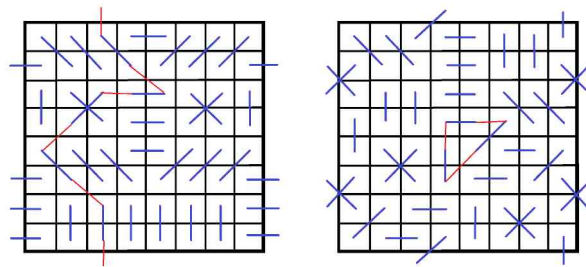
Amikor kézzel keressük a jó párosításokat megfigyelhetjük, hogy egy pár blokkolt él mentén való eltolásával, majd az így "kitúrt" pár ismételt eltolásával új jó párosításhoz jutunk a következő módszerrel:

1. Mozgassuk az első párt a táblán. Ez a mozgás egy mezőt (pl. A -t) pár nélkül hagyja és egy másik mezőt (B -t) két párral.

2. Ezután mozgassuk a B -ben eredetileg lévő párt egy eltolással, így a B -ben ismét egy pár marad a lépés után. Ekkor viszont egy újabb mezőben lesz két pár.
3. Ismételjük a 2-es lépést amíg van olyan mező, amelyben két pár van.
4. Ez a módszer véget ér, amikor az utolsó lépés az A mezőnek csinál új párt, melynek nem volt párja a lépés előtt.

Természetesen ne felejtsük, hogy egy 8-tóruszos párosításon vagyunk és eszerint kell mozgatnunk a párokat. Mivel véges táblán vagyunk, a módszer vagy véget ér a 4. lépéssel, vagy ismétlődő köröket kapunk. Ez utóbbi eset azonban nem lehetséges. Jegyezzük meg, hogy az A mező nem lehet része a körnek, mivel neki nincsen párja, ezzel megtörné az ismétlődést. Az első lépés, amely belép egy ilyen körbe egy "lyukat" hagy maga után (a körön kívül), és ha a kör visszaér ugyanahhoz a mezőhöz, a pár visszafele fog mozogni, így a kör nem kezdődik el újra.

Szintén nem nehéz látni, hogy ezzel a módszerrel ismét egy jó párosítást kapunk. Mivel az eredeti párosítás jó volt, egy párt eltolva a blokkolt él mentén (8-tóruszos értelemben) azt az élt továbbra is blokkolja. Mivel ez a módszer véget ér a 4. lépésben, nem lesznek párosítatlan mezők sem. Mivel a párokat a tóruszon mozgatjuk, túlblokkolás sem lehetséges.



5.9. ábra. Két példa a párosítások közti kapcsolatra

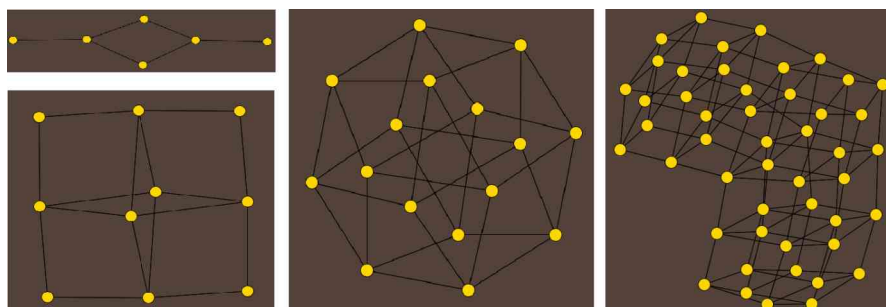
Azt mondjuk, hogy két párosítás szomszédos a gráfban, ha az előző módszer segítségével a második megkapható az elsőből (természetesen csak az előző rész szerinti különböző párosításokat vesszük figyelembe). Ez a kapcsolat szimmetrikus, ami azt jelenti, hogy az utolsó párt visszafele elmozgatva a fenti módszer

szerint a második párosításból visszkapjuk az előbbit. Ezzel egy gráfot kapunk, melynek a csúcsai a párosítások, az élek pedig a mozgatasos átalakulással kapcsolhatók.

Az 5.9 ábra mutat két példát erre a mozgatasos átalakulásra. Mindkét esetben az első párosítás csak a kék párokat tartalmazza, a piros dominók pedig az átalakulást mutatják a másik párosításba. Miután felírtuk az összes lehetséges különböző jó párosítást, a programunk elkészíti a kívánt gráfot. Megpróbálja elmozgatni az összes párosítást (megpróbálja felszabadítani az összes mezőt a 8×8 -as táblán), és az előző rész módszerét használja, hogy megtalálja a lexicografikusan legkisebb reprezentánsát az új párosításnak. Ez kb. 1 percet vett igénybe az előző részben leírt hardverekkel.

A következő részben rátérünk az így kapott gráf vizsgálatára.

5.4.1. A gráf vizsgálata



5.10. ábra. A gráf néhány komponense, a Sixstep programmal készült [42]

5.1. táblázat. A gráf alapvető paraméterei

csúcsok	élek	komponensek	max fok	min fok	átlag fok
194543	532107	14	11	1	5.47

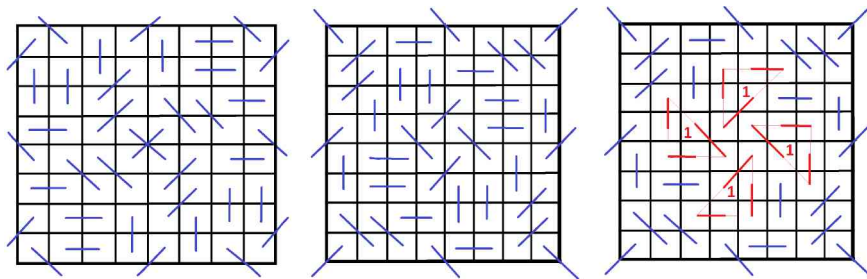
5.2. táblázat. A gráf fokszámeloszlása

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
17	392	395	39811	66185	53222	25309	7547	1472	183	10

A fenti gráf alapvető paraméterei láthatók az 5.1 táblázatban. 194 543 csúcsa és 532 107 éle van. A gráf nem összefüggő, ami azt jelenti, hogy nem tudunk egy

tetszőleges párosításból egy másikba eljutni az előző részben leírt mozgató átmenettel. A 14 komponens egyike azonban egy *óriás komponens*, amely tartalmazza a legtöbb csúcsot (194 333). A gráf óriáskomponensének átmérője 34, ami azt mutatja, hogy még az óriás komponens sem tűnik kisvilág gráfnak. Van 5-5 kisebb komponens 10 és 16 csúccsal és 1-1 komponens 6, 26 és 48 csúccsal. Jegyezzük meg, hogy a 16 csúcsú komponens egy 4-dimenziós kocka. Az 5.10 ábrán látható néhány kisebb komponens.

A gráf háromszögmentes és összes feszített köre négy hosszú. A gráf fokszámeloszlását az 5.2 táblázatba gyűjtöttük ki. Az átlag fokszám 5,47 mely szerint átlagosan 5,47 átmenet található egy párosításból egy másikba. Két példa 1-fokú csúcsokra a legkisebb komponensben található, melyet az 5.10 ábra tetején balra ábrázoltunk. Ezt a komponenszt részletesebben is elemezzük.



5.11. ábra. Ugyanaz a párosítás két nézőpontból, valamint négy köre

Az 5.11 ábrán láthatjuk ugyanazt a párosítást balra és középen. Ez a példa is mutatja, hogy két azonos párosítást sem mindig könnyű felismerni. Láthatjuk, hogy ez a párosítás rendelkezik egy forgatási szimmetriával. Az 5.11 ábra jobb oldalán pedig pirossal jelöltük a párosítás négy darab 3-hosszú körét, mely köröknek két állapota van. Vagy van egy dominó a derékszög jobb oldalán (vastaggal vonallal jelölve az ábrán, 1-es állapot) vagy balra a derékszögtől (vékony párokkal ábrázolva, 2-es állapot). Jegyezzük meg, hogy ha megváltoztatunk egy vagy több kört 1-es állapotúból 2-es állapotúba vagy fordítva, akkor egy újabb, különböző jó párosítást kapunk. Továbbá, ha alkalmazzuk a mozgató átmenetet egy tetszőleges dominón (nem csak a körökben), akkor is csak a négy kör egyikének három dominója fog elmozdulni (a többi mozgató dominó a kör mozgása után visszaáll a kiinduló helyzetébe).

A forgatási szimmetria miatt hat állapota van a párosítások ezen csoportjának: Ha minden kör az 1 (ill. 2) állapotban van; ha egy a 2-esben a többi az 1-esben (vagy fordítva); ha pontosan két szomszédos (ill. ha két nem szomszédos) kör van a 2-esben. Nem túl nehéz ellenőrizni, hogy hat csúcsú legkisebb komponensre éppen ez a hat (éppenhogya) különböző párosítás adja.

5.5. Hasonló eredmények

5.5.1. Hatszögrács

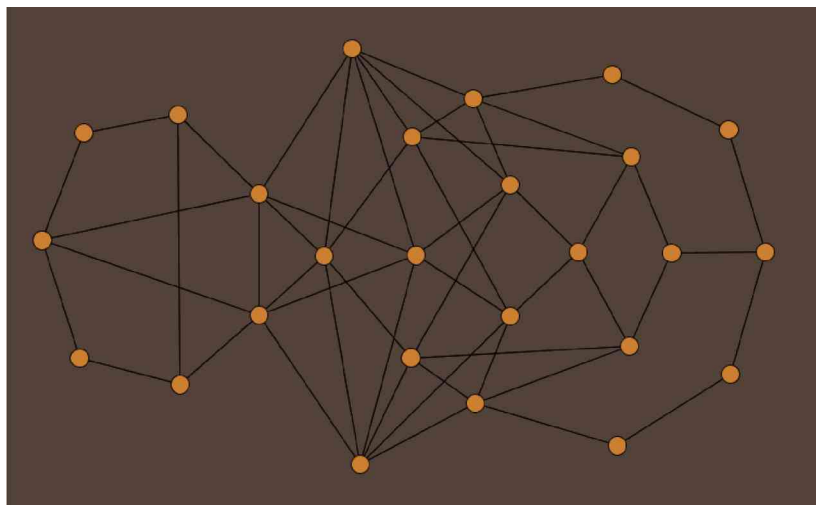
A következőkben a k -amőba Maker-Breaker játékot vizsgáljuk a hatszögrácson, mely a korábbiak szerint ekvivalens a négyzetrácsos síkkal, amennyiben csak egy irányban engedünk meg átlós nyerőhalmazokat. A 3.10 állítás szerint nem lehetséges jó párosítás, ha $k \leq 7$. $k = 7$ -re pedig vannak jó párosítások, amik közül egyet már láttunk is a 3.3 ábrán. Minden ilyen párosítás 6-tóruszos, ami azt jelenti, hogy kiválasztva egy 6×6 résztáblát egy jó párosításból, az blokkolja a három irányú (függőleges, vízszintes, egyféle átlós) 6-tórusz játékot is, ezzel Breakernek nyerő stratégiát szolgáltatva.

Az előző párosítás számoló program egy módosított verzióját használva azt kaptuk, hogy 26 különböző párosítás létezik h_7 -re a hatszögrácson. Jegyezzük meg, hogy a hatszögrácson mind a három irány ekvivalens, míg a négyzetrácson az egy átló különbözik a másik két iránytól. Így a négyzetrácson ennél több jó párosítás is létezhet, melyek azonban a hatszögrácson ekvivalensek lehetnek egymással. Ebben az esetben a szimmetriák is különböznek, hiszen három forgatási (0, 120, 240 fok) és három tükrözési szimmetria van a hatszögrácson.

Az 5.12 ábrán láthatjuk a párosításokból épített gráfot, ahogy a négyirányú verzióra is láthattuk az 5.4.1 részben. A szimmetriák miatt ez a gráf már tartalmazhat háromszögeket. A gráfnak 26 csúcsa és 53 éle van. Az átlagfok 4,08 és a minimális és maximális foksámok 2 és 6. A gráf összefüggő és hét az átmérője.

5.5.2. Egy- és két irányban

Ahogy a korábbiakban láttuk, egy irányban egyféle lényegileg különböző párosítás létezik, mely minden sorban egymás után következő párokat tartal-



5.12. ábra. A 7-amóba gráfja a hatszögrácson, Sixtep [42].

maz. Mivel a sorok függetlenek egymástól, ezek a párok a különböző sorokban tetszőlegesen elcsúsztatva (egymás alatt vagy egy négyzettel elcsúsztatva) lehetségesek. A 3.5 ábrán láthatjuk a párosítást.

Két irányban egy sokkal érdekesebb a helyzet, itt két különböző jó párosítás is létezik, ahogy a 3.4 ábrán is láthattuk. A párosítások itt is 4-tóruszosak és a [13] cikkben is bizonyítva van, hogy csak ez a két párosítás lehetséges.



5.13. ábra. A Dugonics tér díszkövei.

5.24. Megjegyzés. *Bár a [13] is bizonyítja rengeteg eset vizsgálatával, hogy csak két jó párosítás létezik P_5 -re, az általunk a 9-amőba párosításaira adott módszer (természetesen az átlókkal nem kell törődni) lényegesen egyszerűbben adja ki ugyanazt az eredményt.*

Érdekeség továbbá, hogy Szeged utcáin és terein, így pl. a Dugonics téren megtalálható mindkét párosítás, ha a földre nézünk. Az 5.13 ábra ezt mutatja.

5.5.3. Magasabb dimenzióban

Kruczek és Sundberg [30, 31] azt a kérdést vizsgálták, hogy a k -amőba magasabb d dimenziós illetve több irányvektoros változataiban a 3.10 állítás párosítás létezésére való alsó korlátja mennyire közelíthető meg? Sejtésük szerint mindig létezik jó párosítás már az alsó korlátot éppen csak elérve is.

5.25. Sejtés. *[30] A \mathbb{Z}^d táblán játszott Maker-Breaker játékokra legyen $S \subset \mathbb{Z}^d$ egy véges halmaz, mely a nyerőhalmazok $n = |S|$ db irányvektorát tartalmazza. Breakernek létezik nyerő párosítási stratégiája, ha a nyerőhalmazok mindegyikének hossza legalább $2n + 1$, vagyis Breakernek létezik nyerő párosítási stratégiája a k -amőbára, ha $k \geq 2n + 1$.*

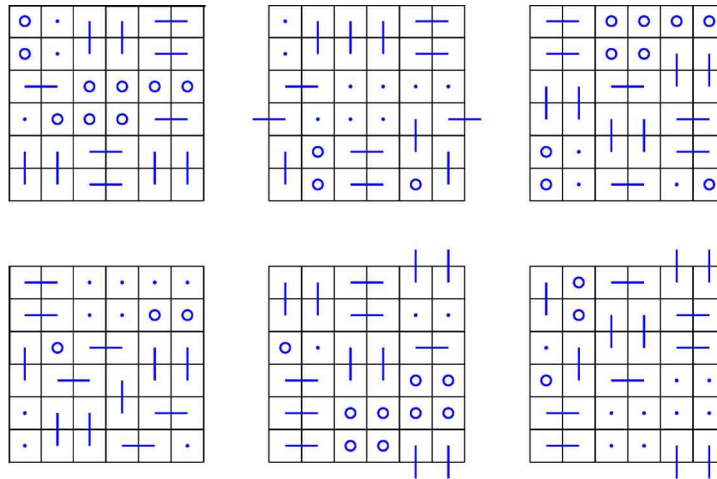
Jegyezzük meg, hogy $3n$ hosszú nyerőhalmazokra Kruczek és Sundberg [30] igazolták Breaker nyerését, sőt, a sejtést aszimptotikusan igazolta P. Mukkamala és Pálvölgyi Dömötör [34], akik az alábbi tételt bizonyították be:

5.26. Tétel. *[34] Létezik olyan $m = 2n + o(n)$, hogy a \mathbb{Z}^d -n játszott M-B játékban, ha minden nyerőhalmaz legalább m egymást követő mezőből áll az n db nyerő irányban, akkor Breakernek biztosan létezik jó párosítási stratégiája.*

A \mathbb{Z}^2 speciális esete visszaadja a már ismert eredményt, hogy Breakernek létezik párosítási stratégiája a k -amőbában, akkor és csak akkor, ha $k \geq 9$. Három irányú nyerőhalmazok esetén $k \geq 7$, két irányban 5, egy irányban 3 a küszöbérték. A magasabb dimenziós verziók azonban máig nyitottak. A legkézenfekvőbb \mathbb{Z}^3 -beli eset amikor 13 nyerő irány vektor létezik: $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, -1), (1, 0, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$, a kocka sorai, oszlopai, átlói és testátlói. Itt a 3.10 állítás

azt mondja, hogy k legalább 27 kell, hogy legyen ahhoz, hogy jó párosítást kapjunk. Az 5.25 sejtés szerint $k = 27$ esetben találhatunk is ilyen párosítást. Bár a programunk erre az esetre is elkészült, a futási idő reménytelenül hosszúnak tűnik nemhogy az összes, de akárcsak egy jó párosítás megtalálásához is. Itt látszik, hogy a 8×8 -as négyzethez képest a $26 \times 26 \times 26$ -os kocka egy nagyon nagy ugrás.

Éppen ezért három dimenzióban egy kisebb problémát vizsgáltunk. Ha az irányvektoroknál elhagyjuk az átlókat, vagyis csak a $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ három vektort tekintjük, akkor állításunk szerint $k \geq 7$ -re remélhetünk jó párosítást. Más szavakkal ez egy Harary-játék 3 dimenzióban, ahol a nyerő poliominó a P_7 . Az 5.25 sejtés szerint létezik is ilyen párosítás.



5.14. ábra. Egy jó párosítás az átlók nélküli 3-dimenziós 7-amóbbára

Valóban, a számítógépes keresés igazolta ezen elvárásunkat, ahogy az 5.14 ábrán is látható. Ez egy dominó párosítás, mégpedig 3-dimenziós 6-tóruszos típusú. Megadunk egy párosítást a $6 \times 6 \times 6$ kocka tóruszon, annak rétegeivel. Az egy rétegben lévő vízszintes és függőleges párok nyilvánvalóak, a rétegek közti párokat pedig pontokkal és körökkel jelöljük.

6. fejezet

Nyitott kérdések

*"Kettős úton halad az emberi élet,
az egyik a gyakorlat, másik az elmélet."
(Arany János: A nagyidai cigányok)*

A hipergráf játékok körében számos kis játék eredménye is nyitott kérdés még. Említettük már az 5-, 6- és 7-amőbát, a Harary állatok közül a Snakyt vagy a $HJ(n, d)$ játék számos esetét. Ezek közül most a 7-amőbát vizsgáljuk meg még egyszer részletesebben is, majd a fejezet végén egy egységes osztályozást adunk a hipergráf játékok lehetséges kimeneteleire.

6.1. A 7-amőba megoldási lehetőségei

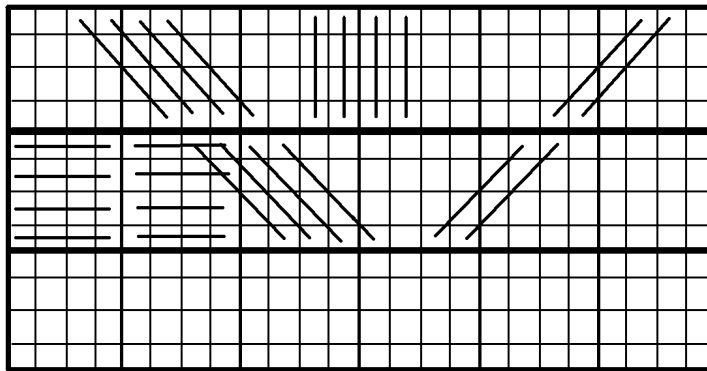
Ahogy említettük, a 8-amőbát Breaker nyeri. Egy lehetséges nyerő stratégiája, hogy a sítot felosztja előre 12 mezőből álló paralelogrammákra a 2.4 ábra jobb oldalán látható módon. Az alakzaton belül a két függőleges kettes, a három vízszintes négyes és a négy átlós (oldalakkal párhuzamos átlók mentén) hármas lesznek a nyerőhalmazok. Mivel egy-egy paralelogrammában Breaker meg tudja akadályozni, hogy Maker megszerezze valamelyik nyerőhalmazt, a paralelogrammák alkalmas összeillesztése miatt Maker a végtelen táblán sem tud megszerezni egy egymást követő nyolcast sem (vízszintes és függőleges irányban még hetest sem).

Az eredményt 1980-ban publikálta egy holland matematikuscsoport a Monthly

egy feladatára adott megoldásképp, T.G.L. Zetters álnéven. Az álnév hollandul betűszedőt jelent, feltehetőleg a 9-amőbára adott hasonló megoldás, a H alakú poliomínók alakjára utalva. Andries Brouwer honlapján [8] azonban saját eredményeként utal rá, így ő is részese lehetett a 39 évvel ezelőtti megoldók csoportjának. Mindenesetre az eredmény máig érdekes, hiszen a 7-amőba kimenetele 2019-ben is nyitott kérdés.

A legnagyobb lépést az utóbbi időben Csernenszky András tette, aki belátta, hogy a Chooser-Picker 7-amőba játékot Picker (Breakerként) nyeri [11]. A Maker-Breaker verzióra azonban ebből nem következik semmi.

6.1. Sejtés. *Breaker nyeri a Maker-Breaker 7-amőbát.*



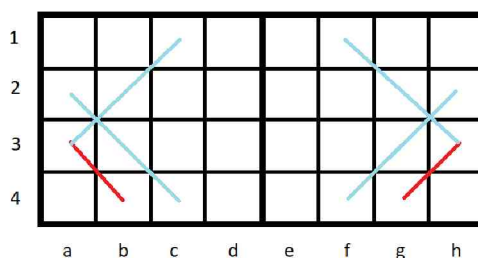
6.1. ábra. A sík 4-szer végtelenes sávokra való felbontása

Bontsuk fel a végtelen négyzetrácsos síkot $4 \times \infty$ -es vízszintes sávokra a 6.1 ábrán látható módon. Legyen egy sávban nyerőhalmaz minden négy hosszú függőleges, minden négy hosszú átlós, ill. minden negyedik, négy hosszú vízszintes egyenes. Ha Breaker nyerni tud külön egy sávban, akkor az egész táblán is meg tudja akadályozni a 7 hosszú nyerőhalmazok létrejöttét.

Az előzőnél erősebb sejtés (annak elegendő feltétele), hogy itt is nyer Breaker, hiszen itt Breakernek a rövidebb nyerőhalmazok miatt már nehezebb dolga van.

6.2. Sejtés. *Breaker nyeri a Maker-Breaker játékot a 6.1 ábrán látható $4 \times \infty$ -es táblán.*

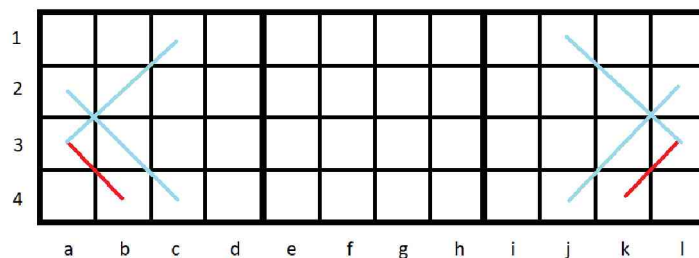
Annak érdekében, hogy számítógépes vizsgálat alá vethessük a játékot, vízszintes irányba is végesíteni kell a táblát. Csernenszky András ötlete volt, hogy



6.2. ábra. A sík 4-szer 8-as táblákra való felbontása

4×8 -as résztáblákra ossza a négyszer végtelenes táblákat, de így a töréseknél létrejönnek kettes és hármas nyerőhalmazok, melyek tovább könnyítik Maker dolgát. A kapott táblát és nyerőhalmazait a 6.2 ábrán láthatjuk. Nyerőhalmazok lettek a vízszintes és függőleges négyesek mellett a két kettes (a2-b1 ill. g1-h2), és négy darab hármas (a3-b2-c1, a2-b3-c4 ill. f1-g2-h3, f4-g3-h2) is.

Bár a Chooser-Picker játékban Picker nyerése megmutatható ezen résztáblára bontás segítségével, Breaker nyerése nem, hiszen ahogy a [13] írás mutatja, ezen a 4×8 -as táblán Maker nyer, így ez már túl nagy nehezítés lett Breakernek.



6.3. ábra. A sík 4-szer 12-es táblákra való felbontása

Egyet visszalépve felbonthatjuk 4×12 -es táblákra is a síkot a 6.3 ábrán látható módon, melynek eredménye azonban ismeretlen, sőt, egyelőre reménytelennek is tűnik. A 48 mezőn $48!$ esetet kellene végigpróbálgatni, mely esetében csekély vigasz a tábla közepén lévő szimmetria (kettővel való osztás), illetve egyéb megfontolások. Papíron játszva azonban Breaker nyerése valószínűsíthető. Amennyiben mégsem, a sort folytatva 4×16 -os, 20-as, stb. táblákat lenne szükséges vizsgálni, melyek azonban egyelőre még inkább távolinak tűnnek.

6.2. Résztáblák blokkolási ereje

A továbbiakban a résztáblákra bontás egy precízebb definícióját is megadjuk.

6.3. Definíció. A $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf **résztáblákra bontása** a V csúcshalmaznak egy felosztása kisebb $T \subset V$ halmazokra, melyeken új $P = \{p_1, \dots, p_m\} \subset T$ éleket definiálunk. Egy résztábla **blokkolja** az $A \in E$ élt, ha létezik $p_i \in P$, melyre $p_i \subseteq A$. Egy résztáblákra bontás **jó résztáblákra bontás**, ha blokkolja az összes $A \in E$ élt.

Ahogy a pároknál és sütiknél láthattuk, egy süti (vagy pár) blokkolási erejének neveztük azt a számot, ahány nyerőhalmazt blokkolni tudott egy süti (pár). Hasonló blokkolási szám résztáblákra is definiálható.

6.4. Definíció. Bontsuk fel a síkot egyforma résztáblákra, és legyen T a felosztás egy r méretű résztáblája, a p_1, \dots, p_m nyerőhalmazokkal. Az m db nyerőhalmaz által blokkolt eredeti, k -amőba nyerőhalmazok száma (d_r) a résztábla blokkolási ereje.

6.5. Állítás. Ha létezik egy jó résztáblákra bontás a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfra, akkor $d_r|X|/r \geq |\mathcal{G}|$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell minden $X \subset V$, ahol $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$.

6.6. Példa. A 8-amőbára alkalmazott Zetters-paralelogrammák blokkolási ereje: a két függőleges összesen $2(k-1)$, a négy átlós hármas összesen $4(k-2)$, míg a három vízszintes négyes összesen $3(k-3)$ nyerőhalmazt blokkol, összesen $9k-19$ -et. Egy $n \times n$ -es résztáblán vizsgálva a

$$\frac{(9k-19)n^2}{12} \geq 4n^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk, melyből $k \geq 7.44$ -et kapjuk, így ez a résztáblákra bontás jó lehet a 8, de nem a 7-amőba ellen.

6.7. Példa. A fenti 4×12 -es tábla blokkolási ereje $2(k-1)+4(k-2)+42(k-3) = 48k-136$, amivel a 6.5 állításba behelyettesítve $k \geq 6.83$ értéket kapjuk, vagyis a 7-amőba megoldása lehetséges vele.

6.8. Példa. A fenti 4×8 -as tábla blokkolási ereje $2(k-1)+4(k-2)+26(k-3) = 32k - 88$. A 6.5 állításba behelyettesítve $k \geq 6.75$ értéket kapunk. Bár elméletileg blokkolható lenne a 7-amőba, az egyes résztáblákban azonban nem tud nyerni Breaker.

Láthatjuk, hogy a 4×12 -es résztáblákra bontás nem tűnik rossz ötletnek, a megoldásához még több megfontolást kell tennünk.

6.3. Lehetőségek az esetszám csökkentésére

Ebben a részben összegyűjtünk néhány lehetséges technikát, amely gyorsíthatja a keresést. Egy nyerőhalmazt a játék során még **élőnek** nevezünk, ha Breaker még nem rakott bele. Az adott pillanatban még üres mezők száma adja az élő nyerőhalmaz méretét.

6.3.1. Általános megjegyzések

- Ha a résztábla szimmetrikus, a szimmetriák száma szerint csökken (a 4×12 -es esetben feleződik) a lehetséges megoldások száma.
- Másik lehetőség szótárak alkalmazása a gyakran előforduló állásokra. Speciálisan a végállapotokra érdemes.
- Bizonyos számú lépés után a játék kisebb komponensekre bomlik, melyeket elég külön-külön is vizsgálni.
- Breaker számára gyakran csak egy lehetőség van, hogy ne veszítsen.
- Breaker tegyen mindig abba a nyerőhalmazba, amelybe Maker is tett?
- Ha Breaker számára találunk egy jó heurisztikát, azzal a lehetőségek négyzetgyökét kapjuk.

6.3.2. Dominálás

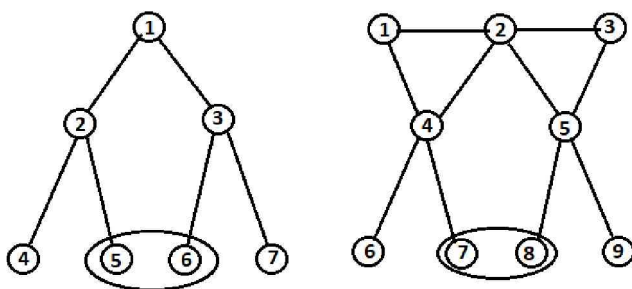
Ha egy mező csak egy élő nyerőhalmazban van, ami legalább három méretű, akkor egyik játékos se tegyen bele. Sőt, a dominálás kettő méretnél is hasonlóan értelmes, mivel alkalmazható rá egy elemű párosítás, így csak időhúzásra

alkalmas. Triviális észrevétel, hogy már élő nyerőhalmazban nem szereplő üres mezőre szintén ne tegyen egyik játékos sem.

Ha egy x mező több nyerőhalmazban is szerepel, de van olyan másik y mező, amely ugyanazokban a nyerőhalmazokban, és még legalább egy másikban is szerepel, akkor x -et ne válasszuk.

6.3.3. Kettessel kell-e kezdeni?

A heurisztikánk azt sugja, hogy ha van egy kettő méretű nyerőhalmaz, akkor Makernek érdemes azzal kezdeni. Ekkor ugyanis Breaker kényszerhelyzetbe kerül, Maker pedig a két mező közül a jobbikat választva Breakert a gyengébb mező választására kötelezi. Bár többségében igaz lehet, találtunk ellenpéldát az állításra.



6.4. ábra. Kettessel kell-e kezdeni?

Legyen a táblánk a 6.4 ábra bal oldalán látható, hét csúccsal és öt éllel (egy kettes: 5-6 és négy hármas: 1-2-4, 1-2-5, 1-3-6, 1-3-7) rendelkező hipergráf. Látható, hogy ha Maker az 1-es csúccsal kezd, majd mindig arra az ágra tesz, amelyre Breaker nem tett, nyeri a játékot. Azonban ha az 5-6 pár valamelyikével kezd, Breaker a másikat választja, ezután Makernek az 1-es csúcsot kell vennie, de Breaker kényszerített lépése után Maker nem tud nyerni.

Hasonló a helyzet a 6.4 ábra jobb oldalán látható hipergráfján is, mely az előzővel ellentétben majdnem diszjunkt is. A kilenc csúcson öt hármas (amelyek egy egyenesre esnek) és egy kettes (7-8) él van. Ha Maker a 2-es csúccsal kezd, nyer. De ha a 7-8 valamelyikével, veszít.

Látható tehát, hogy ha Maker előre eldönteni, hogy egy kettes nyerőhalmaz

melyik elemét válassza, az káros is lehet a későbbiekben, így ez a heurisztika sajnos nem alkalmazható.

6.4. Hipergráf játékok osztályozása

Legyen $\mathcal{H} = (V, E)$ egy tetszőleges véges hipergráf, melyen vegyük a kapcsolódó hipergráf játékot. Ekkor a hipergráf az alábbi hat osztály valamelyikébe tartozik, Beck [4]:

0. **Class 0 (Triviális nyeres):** Ebbe a kevésbé érdekes osztályba azon hipergráfok tartoznak, amelyekben minden játszma kezdő nyerő. Legyen n a legkisebb méretű él. Ekkor $|V| \geq 2n - 1$ és V minden n -elemű halmaza él.
1. **Class 1 (Kényszerített győzelem):** Ebben az osztályban minden játszmának van győztese, vagyis nem létezik döntetlen. Az osztályban minden játék kezdő nyerő, hiszen mivel döntetlen nincs, a stratégialopás adja az eredményt. A nyerő stratégia mikéntje azonban nem feltétlenül ismert.
2. **Class 2 (Finom győzelem):** Ide tartoznak azok a játékok, melyekben létezik döntetlen pozíció, de ennek ellenére a kezdő játékosnak létezik nyerő stratégiája.
3. **Class 3 (Finom döntetlen):** Azon hipergráfok osztálya, melyek normál verziója döntetlen, de a Maker-Breaker játékot nyeri Maker.
4. **Class 4 (Erős döntetlen):** Létezik Breaker nyerő stratégia a M-B játékban, de párosítási stratégia nem.
5. **Class 5 (Párosítási döntetlen):** Ezen osztály elemeire létezik Breaker nyerő párosítási stratégia.

Jegyezzük meg, hogy minden osztályba tartozik legalább egy $HJ(n, d)$ játék. Pl. a $HJ(2, 2)$ játék a 0. osztályba, a $HJ(3, 3)$ az elsőbe. Mindkét osztályba végtelen sok $HJ(n, d)$ játék tartozik. A Tic-Tac-Toe ($HJ(4, 3)$) viszont a 2. osztály egyetlen ismert $HJ(n, d)$ tagja, ahogy az eredeti Tic-Tac-Toe a 3. osztályé. A $HJ(4, 2)$ játék már a 4. osztály eleme, melynek egy nagy rész után

a $HJ(44, 16)$ játék a következő ismert tagja, és további végtelen sok magasabb dimenziós példa található még. Végül az 5. osztályba tartozik pl. az összes $HJ(n, 2)$ játék, ha $n \geq 5$.

Nyitott kérdés azonban, hogy van-e végtelen sok $HJ(n, d)$ játék a 2. és 3. osztályokban.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm szépen témavezetőm, Dr. Pluhár András témafelvetéseit, rengeteg ötletét, segítségét és tanácsát, a nevelésemre és tanításomra szánt hosszú óras beszélgetéseket, a kitartó közös munkát, mely nélkül biztosan nem született volna meg ez a mű.

Köszönetemet fejezem ki Makay Gézának, aki nagyszerűen és ötletesen segített a programozási feladatokban. Köszönöm szépen Hajnal Péternek, hogy bármikor fordulhattam hozzá kérdéseimmal. Köszönöm szépen London Andrásnak és Csernenszky Andrásnak, akik az eredményeket megvitatva többször is segítettek az újabb kérdések feltevésében és megválaszolásában.

Köszönöm a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének és részben az Informatika Intézetnek az infrastrukturális támogatást, mely hozzásegített eddigi eredményeim eléréséhez.

Köszönöm Dr. Katz Sándornak, a Bonyhádi Petőfi Sándor Evangélikus Gimnázium matematikatanárának, hogy hat éven keresztül tanított és nevelt, számos matematikaversenyre és táborba küldött el, melyekkel felkeltette és fenntartotta matematika iránt való érdeklődésemet.

Végül köszönöm szépen szüleimnek, hogy olyan légkört teremtettek családomban, melyben eljuthattam a Szegedi Tudományegyetemre és annak Doktori Iskolájába.

Irodalomjegyzék

- [1] L. V. Allis, H. J. van den Herik and M. P. Huntjens, Go-Moku solved by new search techniques. *Proc. 1993 AAAI Fall Symp. on Games: Planning and Learning*, AAAI Press Tech. Report FS93-02, (1993), 1–9.
- [2] J. Beck, Positional games and the second moment method. *Combinatorica* **22** (2002) 169–216.
- [3] J. Beck, Positional Games. *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005), 649–696.
- [4] J. Beck, *Combinatorial Games, Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press 2008.
- [5] J. Beck, Van der Waerden and Ramsey games. *Combinatorica* **1** (1981) 103–116.
- [6] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways for your mathematical plays*, Volume **2**, Academic Press, New York 1982.
- [7] J.-P. Bode and H. Harborth, Hexagonal Polyomino Achievement. *Discrete Math.* **212** (2000), 5–18.
- [8] A. E. Brouwer, Personal homepage, www.win.tue.nl/~aeb/publications.html, letöltve: 2019. 01. 10.
- [9] V. Chvátal and P. Erdős, Biased positional games. *Annals of Discrete Math.* **2** (1978), 221–228.
- [10] B. Csákány, A form of the Zermelo - von Neumann theorem under minimal assumptions. *Acta Cybernetica* **15** (2002), no. 3, 321–325.

-
- [11] A. Csernenszky, The Chooser-Picker 7-in-a-row game. *Publicationes Mathematicae* **76** (2010), 431–440.
- [12] A. Csernenszky, The Picker-Chooser diameter game. *Theoretical Computer Science*, Vol **411** (2010), 3757–3762.
- [13] A. Csernenszky, R. Martin and A. Pluhár, On the Complexity of Chooser-Picker Positional Games. *Integers* **12** (2012), 427–444.
- [14] A. Csernenszky, The Chooser-Picker games, PHD Dissertation, Supervisor: A. Pluhár University of Szeged, Computer Science (2011).
- [15] A. Dumitrescu and R. Radoičić, On a coloring problem for the integer grid. *Towards a Theory of Geometric Graphs*, (2004) 67–74.
- [16] P. Erdős and J. L. Selfridge, On a combinatorial problem which is complete in polynomial space. *Journal of Combinatorial Theory Series A* **14** (1973), 298–301.
- [17] R. K. Guy and J. L. Selfridge, Problem S.10, *Amer. Math. Monthly* **86** (1979); solution T.G.L. Zetters **87** (1980) 575–576.
- [18] L. Győrfy, A. Pluhár, Generalized pairing strategies – A bridge from pairing strategies to colorings. *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, **8**, no. 2 (2016), 233–248.
- [19] L. Győrfy, G. Makay, A. Pluhár, Pairing strategies for the 9-in-a-row game. *Ars Mathematica Contemporanea*, **16** (2019), 97–109.
- [20] L. Győrfy, G. Makay, A. London, The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games. *Acta Cybernet.*, **23** (2017), 561–572.
- [21] A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222–229; M.R. # 1265.
- [22] M. Hall Jr., Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 922–926.
- [23] I. Halupczok, J. C. Schlage-Puchta, Achieving Snaky *Electronic J. of Combinatorial Number Theory* **7** G02 (2007)

- [24] F. Harary, Achievement and Avoidance Games for Graphs, *Ann. Discr. Math.* **13** (1982), 111–120.
- [25] D. Hefetz, M. Mikalački and M. Stojaković, Doubly biased Maker-Breaker Connectivity game. *Electronic J. Combinatorics* **19** (2012) P61.
- [26] M. Hegyháti, Zs. Tuza, Colorability of mixed hypergraphs and their chromatic inversions. *J. Combin. Optim.* **25** (2013), 737–751.
- [27] P. Hein, Vil da laere Polygon? Politiken newspaper, Denmark, 26 December 1942.
- [28] Kazumine Inagaki, Akihiro Matsuura, Winning Strategies for Hexagonal Polyomino Achievement. *12th WSEAS Int. Conf. on Applied Mathematics, Cairo, Egypt* (2007)
- [29] M. Krivelevich, The critical bias for the Hamiltonicity game is $(1 + o(1))n/\ln n$. *Journal of the American Math. Soc.* **24** (2011), 125–131.
- [30] K. Kruczek, E. Sundberg, A Pairing Strategy for Tic-Tac-Toe on the Integer Lattice with Numerous Directions. *Electronic J. Combinatorics* **15(1)**, (2008).
- [31] K. Kruczek, E. Sundberg, Potential-based strategies for Tic-Tac-Toe on the integer lattice with numerous directions. *Electronic J. Combinatorics* **17(1)**, (2010).
- [32] G. Makay personal homepage:
<http://www.math.u-szeged.hu/~makay/amoba/> letöltve: 2019. 01. 10. 2019.
- [33] T. R. Mezey, Seating Couples and Tic-Tac-Toe, Master's Thesis (2013), Eötvös Loránd University, Faculty of Science, Supervisor: Dömötör Pálvölgyi
- [34] P. Mukkamala and D. Pálvölgyi. Asymptotically optimal pairing strategy for tic-tac-toe with numerous directions. *Electronic J. Combinatorics* **17(1)**: N33, (2010).

-
- [35] J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1944.
- [36] A. Pluhár, *Positional Games on the Infinite Chessboard*. PhD dissertation, Rutgers University 1994.
- [37] A. Pluhár, Játékelmélet, elektronikus jegyzet
- [38] A. Pluhár, Kombinatorikus játékok, elektronikus jegyzet
- [39] A. Pluhár, The accelerated k -in-a-row game. *Theoretical Comp. Science* **270** (2002), 865–875.
- [40] Pluhár András, Pozíciós játékok. *Sigma* **3-4** (2007) 111–130.
- [41] Sieben Nándor, Snaky is a 41-dimensional winner. *Integers* **4** (2004), G5, 6 pp.
- [42] A két ábra a Sixtep programmal készült. www.sixtep.hu, letöltve 2019. 01. 10.
- [43] J.W.H.M. Uiterwijk, H.J. van der Herik, The advantage of the initiative. *Information Sciences* **122** (2000), 43–58.
- [44] E. Zermelo, Über eine Anwendung der Mengenlehre und der Theorie des Schachspiels. *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge, 501–504.

7. fejezet

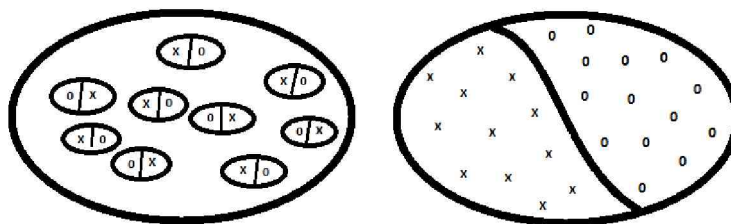
Összefoglalás

A dolgozatban a hipergráf játékokokra alkalmazott párosítási stratégiákkal és azok általánosításaival foglalkozunk. Hipergráf játékoknak nevezzük azon játékokat, melyeket egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfon játszik I és II , akik felváltva választják a tábla egy-egy elemét. A tábla mezői a hipergráf V csúcsai, míg az E élek a táblán lévő nyerőhalmazok, melyek megszerzéséért küzd a két játékos. A *normál* változatban mindketten elsőként szeretnének meg egy nyerőhalmazt, míg a Maker-Breaker verzióban csak Maker épít, Breaker célja kizárólag Maker megakadályozása. A normál játék lehet kezdő nyerő vagy döntetlen, de a második játékos nem nyerhet optimális stratégiát feltételezve, erre a megállapításra a stratégialopás gondolatmenete vezet. A Maker-Breaker játék vagy Maker vagy Breaker nyerő.

Miután a bevezető fejezetben definiáljuk a hipergráf játékokat, a stratégiák fogalmát, majd kitérünk néhány lehetséges stratégiára (párosítások, résztáblák, súlyfüggvények, esetvizsgálat), melyeket példákkal is illusztrálunk, rátérünk fő témánkra, mely a lehetséges stratégiák egyike és általában Breaker alkalmazza, a párosítási stratégiákra.

A párosításokról szóló fejezetben a pontos definíciók megadása után kedvenc példánkra, a különböző típusú amőbákra vizsgáljuk meg a párosítások erejét. Megmutatjuk, hogy az eredeti, a négy irányú nyerőhalmazokat tartalmazó verzióban létezik jó párosítás a 9-amőba hipergráfjára (de kisebb $k < 9$ -amőbára nem létezhet), amivel egy Breaker nyerő stratégiát is adunk a 9-amőbára. Ha a

hatszögrácson játszunk, vagy a négyzetrácson, de csak három (vízszintes, függőleges és az egyik átlós) irányban, akkor már a 7-amőbára is létezik Breaker nyerő párosítási stratégia, vagyis jó párosítás. Míg kettő és egy irányú játékok esetén az 5- illetve 3-amőba játékokra létezik jó párosítás. Definiáljuk a Harary-állat játékokat is, ahol Maker célja az előre megadott alakzat elérése. Megmutatjuk, hogy az ismert Breaker nyerő állapotok mind párosítási stratégiákkal nyernek, majd megemlítjük az egyetlen nyitott kérdés, a Snaky esetét, melyre viszont biztosan nem létezik párosítási stratégia.



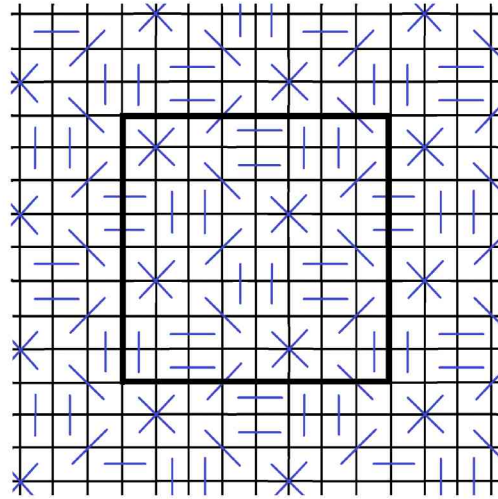
7.1. ábra. Párosítások és színezések

Ezen bevezetők után rátérünk a párosítások egy általánosítására, mely egy-fajta hidat képez a színezések és a párosítások között. Míg a párosítások esetén a hipergráf csúcsait lépésenként egyesével párosítjuk, egy színezéssel viszont egy lépésben; felmerül a kérdés, hogy van-e valami átmenet a két fogalom között. Ugyanígy, a párosítások felfoghatók lépésenként történő színezésként is, szemben az egy lépésben minden elemet kiszínező színezésekkel. A két fogalom között ilyen fajta átmenetet vizsgálataink előtt nem definiált senki.

A párosítások és a színezések általánosítását sütiknek és süti-elhelyezéseknek neveztük el, melyekkel a jó színezésekhez és jó párosításokhoz hasonlóan definiálhatunk blokkolást és jó süti-elhelyezéseket is. Az általánosított párosítások már kisebb méretű amőbákat is blokkolnak, mint a párosítások, ezek részletes leírását tartalmazza a 4. fejezet. Megtudjuk, hogy míg párosítással (mely a 2-süti elhelyezésekkel ekvivalens) csak a 9-amőba blokkolható, 4-sütikkel már a 7-amőba is, 6-sütikkel a 6-os, míg 8-sütikkel az 5-ös verzió. Számos nyitott kérdés is felmerül, valamint megemlítjük a módszer egy alkalmazhatóságát a felgyorsított Chooser-Picker játékokra. A párosításokhoz hasonlóan pedig megvizsgáljuk, hogy a kevesebb irányú amőba ill. a Harary játékokra milyen eredményeket ad

a módszer. Amennyiben csak a vízszintes és függőleges irányokkal párhuzamos nyerőhalmazokat tekintjük, akkor míg jó párosítás csak az 5-amőbára létezik, 3-sütikkel már a 4-amőbát is blokkolhatjuk, megfelelő 4-sütikkel pedig már a 3-amőbára is adhatunk jó süti-elhelyezést. A 2-amőbára véges jó süti-elhelyezés nincs, a sakktábla színezés, mint ∞ -süti elhelyezés megoldja a problémát.

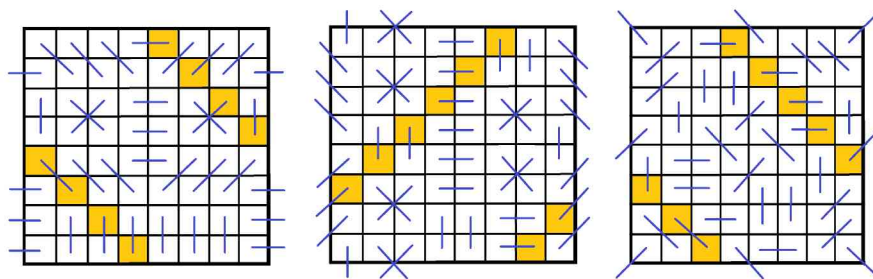
A rákövetkező fejezetben visszatérünk a 9-amőba párosításaihoz, melyekről azon kívül, hogy létezik egy darab jó párosítás, nem volt semmi az irodalomban vizsgálataink előtt. A fejezetben megmutatjuk, hogy milyen feltételeknek kell teljesülnie egy jó párosítás létezéséhez, majd belátjuk, hogy ezen feltételek csak 8- illetve 16-tóruszos párosításokhoz vezethetnek. Ezzel együtt bebizonyítjuk, hogy nem létezhetnek szabálytalan típusú párosítások, vagyis minden párosítás a 3.2 ábrán látható Hales-Jewett párosításhoz hasonló tórusz szimmetriákkal rendelkezik.



7.2. ábra. Hales-Jewett párosítás a 9-amőbára

Ezek után megszámloljuk az összes 8-tóruszos párosítást, melyeknek nem is a megszámlálása, inkább a megkülönböztetése okozhat gondot. Az eredeti, négyirányú verzióban 194 543 különböző párosítás létezik, melyek között egy eltolás kapcsolatot is definiálunk. A párosítások és kapcsolataik alapján gráfba rendezzük őket, majd jellemezzük az így kapott gráfot.

Hasonló eredmények a hatszögrácson is kaphatók, ahol 26 különböző jó páro-



7.3. ábra. Néhány eddig nem ismert párosítás

sítás létezik, melyekre szintén felrajzoljuk a hasonlóan kapott gráfot. A fejezet végén magasabb dimenziókba is kitekintünk, ahol a három (derékszögű koordináta rendszer tengelyeivel párhuzamos) irányban játszott 7-amőbára mutatunk egy jó párosítást.

Az utolsó fejezetben megemlítiünk néhány nyitott kérdést, és megpróbálunk kicsivel közelebb lépni az 1980 óta megoldatlan 7-amőba játék megoldásához is, melynek keretein belül a résztáblákra bontás módszerével foglalkozunk még részletesebben. Áttekintjük, hogy egy résztábla milyen blokkolási erővel rendelkezik, majd adunk egy konkrét résztáblákra bontást, mellyel megmutatható lenne a 7-amőba Breaker nyerése. Mivel már igen kis résztáblák esetén is reménytelennek tűnik a teljes esetvizsgálat, áttekintjük a lehetséges heurisztikákat és módszereket, melyekkel csökkenteni lehet az esetek számát. Megcáfoljuk az egyik heurisztikát, nevezetesen, hogy ha van kételemű nyerőhalmaz, Makernek mindenképpen érdemes azzal kezdenie. Az erre mutatott ellenpélda bemutatása után zárásként a hipergráf játékok egy osztályozását mutatjuk be.

A disszertáció az alábbi cikkek eredményeire épül:

- L. Győrfy, A. Pluhár (2016), Generalized pairing strategies – A bridge from pairing strategies to colorings, *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, **8**, no. 2, 233–248.
- L. Győrfy, G. Makay, A. Pluhár (2019), Pairing strategies for the 9-in-a-row game, *Ars Math. Contemporanea*, **16**, 97–109.
- L. Győrfy, G. Makay, A. London (2017), The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games, *Acta Cybernet.*, **23**, 561–572.

8. fejezet

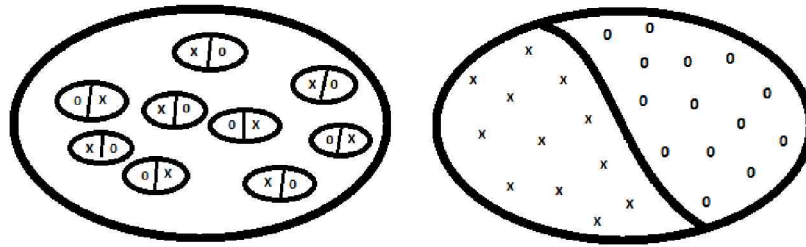
Summary

In the thesis we investigate pairing strategies and their generalizations applied to hypergraph games. Given an arbitrary hypergraph $\mathcal{H} = (V, E)$. The first and the second players take vertices of V in turns. The aim is to get an edge of E (called *winning set*). We call these games *hypergraph games*. In the *normal* (or Maker-Maker) version both of the players try to complete a winning set, while in the *Maker-Breaker* version only Maker tries to have edges, Breaker's aim is only to prevent Maker's plan. A normal game can be either a first player win or a draw but the second player cannot win if both players play in a perfect way. The concept of *strategy stealing* was introduced by John Nash for a special game, hex, and rigorously proved in the general case by Alfred Hales and Robert Jewett. Hence, a Maker-Breaker game can be either a Maker win or a Breaker win.

First, we define hypergraph games and strategies, then we mention some possible strategies (pairings, cutting to sub-boards, potentials, case-studies) which prove the win of Breaker (or Maker) and which are illustrated by some examples. Secondly, we turn to our main topic, one of the above mentioned winning strategies, the *pairing strategies*.

In the Chapter of Pairing strategies we investigate different types of k -in-a-row games and demonstrate the power of pairings. We recall that in the original version of k -in-a-row, in which we have four winning directions, there exists a good pairing for the 9-in-a-row hypergraph but not for a smallest one, thus we

give a winning pairing strategy for Breaker. If we play on the hexagonal board, which is equivalent to the game on the rectangular board with three direction (horizontal, vertical and one diagonal), then we have a good pairing to the 7-in-a-row. In case of two or one winning directions there exists a good pairing for the 5- i.e. 3-in-a-row games, respectively. We define the Harary-animal games in which Maker's aim is to reach a given polyomino. We list all Loser(=Breaker Winner) animals and their pairing strategies, where the only open question among the Harary-animals is the case of Snaky. It is still undecided if Snaky is a winner or not, we only know that Breaker cannot have a pairing strategy.



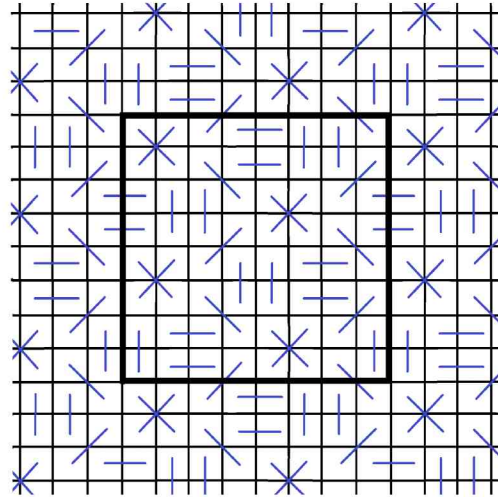
8.1. ábra. Pairings and colorings

After this introduction we turn our attention to the generalization of pairings which gives us a bridge between two-colorings and pairings. Note that a pairing induces a family of two-coloring of the hypergraph in the following sense. Instead of coloring all vertices in one step, we only color a pair in each step, one element by color 1, the other by color 2, until all pairs are colored. If the initial pairing is good, then our coloring procedure is guaranteed to produce a good two coloring. From the other side, instead of pairing the vertices one by one, we pair a subset of vertices (color class 1) by another subset (color class 2). Our main goal is to extend this relation to have a transition between pairings and two-colorings.

We call these generalization *cakes* and *cake-placements*. Similarly to pairings and colorings, we can define blocking and good cake-placements, too. The generalized pairings can already block smaller k -in-a-row sets than pairings, the particular descriptions are in the 4th Chapter. We show that pairings (which are equivalent to 2-cake-placements) can block only 9- (or more)-in-a-row hypergraphs but there is a 4-cake-placement which blocks the 7-in-a-row hypergraph.

Moreover, by 6-cakes we can block 6-in-a-row and by 8-cakes the 5-in-a-row. There are some open questions in this topic, too, and we apply these generalized pairings to biased Chooser-Picker games. We also investigate the k -in-a-row hypergraphs in fewer direction vectors and the Harary-animals. For example, if we consider only the horizontal and vertical winning directions, then by using pairs we can block 5-in-a-row, while using 3-cakes we can even block 4-in-a-row and by 4-cakes the 3-in-a-row hypergraph. For the 2-in-a-row we have only the coloring of the chess table which blocks all 2-in-a-row sets in horizontal and vertical directions.

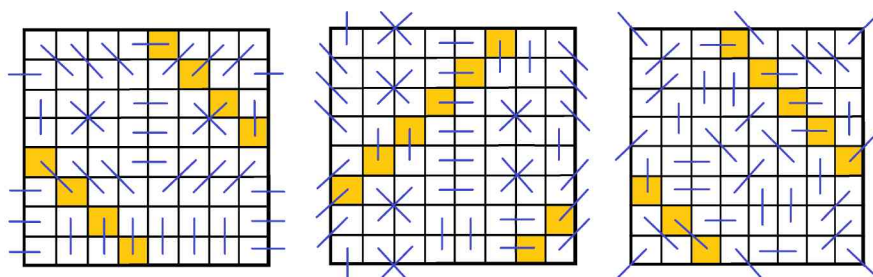
In the next chapter we turn back to the pairings of the 9-in-a-row, before our investigation the only known result was about that there exist one good pairing. In this chapter we give a full description of a good pairing for the 9-in-a-row. Actually we show that all pairing is an extension of an 8- or 16-torus, as the Hales-Jewett one, in Figure 8.2.



8.2. ábra. Hales-Jewett pairing for 9-in-a-row

After that we went on listing all possible 8-toric pairings which has the difficulty that we should check a lot of symmetries to distinguish the different ones. In the case of the original 9-in-a-row hypergraph we found 194 543 essentially different pairings. We can also investigate the connection between the pairings. According to this connections (links) we order the pairings into a graph and we

also describe that graph.



8.3. ábra. Some new pairings

We can have the similar investigation on the hexagonal board on which we count 26 different pairings and get a similar graph. At the end of the chapter we investigate similar questions in higher dimensions where we show a good pairing to the 3-dimensional 7-in-a-row in 3-direction.

In the last chapter we list some open questions and sketch a possible way to the solution of the 7-in-a-row game which is unsolved since 1980. We investigate the sub-board divisions in detail and define the blocking power of the sub-boards. We even propose a sub-board division which can be good for the 7-in-a-row, but it has 48 elements on its table, which is too much for our computers now. Since case studies are hopeless even for small tables, we consider the possible heuristics to decrease the number of cases. We disprove one of these heuristics, namely that, if there is a 2-element winning set, Maker must take it at first. After the counterexample of this heuristic, at the end we give a complete classification of the hypergraphs.

The dissertation is based on the following papers of the author:

- L. Györfy, A. Pluhár (2016), Generalized pairing strategies – A bridge from pairing strategies to colorings, *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, **8**, no. 2, 233–248.
- L. Györfy, G. Makay, A. Pluhár (2019), Pairing strategies for the 9-in-a-row game, *Ars Math. Contemporanea*, **16**, 97–109.
- L. Györfy, G. Makay, A. London (2017), The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games, *Acta Cybernet.*, **23**, 561–572.