

JÓZSEF ATTILA TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

P á r o n k é n t s z o m s z é d o s l a p o k k a l
h a t á r o l t p o l i é d e r e k

SZILASSI LAJOS
doktori értekezése

S Z E G E D

1977.

T a r t a l o m

Bevezetés	3. oldal
I. Duális alakzatok térbeli polaritással ..	5. oldal
II. A Császár-poliéder duálisának előállítása és vizsgálata számítógép segítségével	16. oldal
III. A kapott poliéder elemzése, numerikus adatai	30. oldal
IV. Néhány felvethető probléma	50. oldal
Irodalom	58. oldal
Mellékletek	

B E V E Z E T É S

Az 1948. évi "Kürschák József" matematikai verseny második feladata így hangzott: "Bizonyítandó, hogy a tetraéderen kívül nincs más olyan konvex poliéder, amelynek bármely két csúcsát él köti össze." [4]

E feladat kapcsán vetődött fel a probléma, hogy szükség volt-e a feladat kitűzésénél a konvex megszorításra, vagyis, hogy van-e még olyan poliéder, amelynek bármely két csúcsát él köti össze. Császár Ákos megadott egy olyan 7 csúcsú, tórussszal homeomorf poliédert, amelynek ugyancsak minden csúcspárját él köti össze. [2]

A tetraédernek van egy másik tulajdonsága is, amely a konvex (sőt az egyszerű) poliéderek körében szintén egyedülálló: bármely két lapjának van közös éle, azaz bármely két lapja szomszédos. Felvethető a kérdés, hogy létezik-e további olyan poliéder, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezik.

Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy ilyen poliéder létezik. Ez a poliéder - topológiailag - a Császár-poliéder duálisának tekinthető. Tehát találtunk egy olyan 7 lapú, tórussszal homeomorf közönséges poliédert, amelynek bármely két lapja szomszédos. Így a jól ismert Heawood-féle tóruszra rajzolt térkép [3], amelynek 7 egymással páronként szomszédos tartománya van, 7 síklappal is előállítható. E poliéder létezése nem következik nyilvánvalóan a Császár-poliéderrel való topológiai értelemben vett duális

kapcsolatából, ugyanis, mint látni fogjuk, a nem konvex poliéderek esetében a duális poliéder képzése nem könnyű, sőt nem is biztosan megoldható feladat.

Ismert olyan síklapokból álló - sőt szabályos sokszögekből felépített - tóruccsal homeomorf poliéder, amelynek a lapjait alkalmas módon színezve, és azonos színűeket egy tartománynak tekintve előáll a 7 egymással páronként szomszédos tartomány. (L.: [6] 168 - 175. old.)

Nincs tudomásunk azonban arról, hogy felvetődött-e az a kérdés, miszerint ilyen poliéder 7 síklapból is előállítható. (A kapott 7 lapú poliédert ismertető cikk megjelenés alatt áll. [8]).

A dolgozat első részében megvizsgáljuk, hogy a térbeli polaritás, mint projektív geometriai transzformáció, hogyan alkalmazható poliéderek duálisának az előállítására, majd ismertetünk egy számítógépi programot, amelyet alkalmazva előállítottuk a Császár-poliéder duálisát, és megkaptuk a keresett poliédert. Ezután adunk egy - a számítógépet mellőző, elemi - bizonyítást a poliéder létezésére, ismertetjük egy modelljének a numerikus adatait, megvizsgáljuk legfontosabb tulajdonságait. Végül felvetünk néhány, még megoldatlan problémát, áttekintve Heawood, valamint Ringel és Youngs néhány ide vonatkozó eredményét.

I. Duális alakzatok előállítására térbeli polaritással

A dualitás fogalma leggyakrabban két helyen szerepel a geometriában. Egyrészt, mint topológiai fogalom, (pl. amikor egy felületre rajzolt térképről és duálisáról beszélünk) másrészt, mint projektív geometriai fogalom (pl. amikor bizonyos projektív geometriai tételek megfogalmazásában felcseréljük a pont és egyenes, illetve pont és sík szavakat). Ennek megfelelően a poliéderek közötti duális kapcsolatot is kétféleképpen értelmezhetjük.

Két poliédert topológiai értelemben egymás duálisának nevezünk, ha homeomorfak egy-egy olyan (azonos felületre rajzolt) térképpel, melyek egymás duálisai. Így pl. topológiai értelemben bármely paralelepipedon duális bármely oktaédernek, és viszont.

A poliéderek közötti szigorúbb értelemben vett duális kapcsolat definiálása előtt meg kell vizsgálnunk, hogy egy adott térbeli polaritás milyen alakzatot állít elő egy poliéderből.

Jelölje Ψ azt a hiperbólikus polaritást, melynél az önmagukhoz konjugált pontok egy gömbfelület pontjai. Ezt a gömböt nevezzük a polaritás alapgömbjének. Az alapgömb megadásával adhatjuk meg Ψ -t.

Tekintsünk egy közös P poliédert, melynek minden lapja egyszerű sokszög, és bármely két lapjának legfeljebb egy közös éle van. (Vizsgálódásunkhoz elegendő ilyen poliéderekre szorítkoznunk.) Helyezzük el a Ψ polaritás alapgömbjét úgy, hogy középpontja ne illeszkedjen a P poliéder egyetlen lapjának a síkjára se. Ezzel biztosítjuk, hogy a $P' = \Psi(P)$

alakzat csúcspontjai - melyek P lapjainak a megfelelői - mind végesben lévő pontok lesznek. Mivel P -nek bármely élét két lap tartalmazza, így P éleinek egyenesei olyan egyenesekbe mennek át, melyek mindegyikére P' csúcsai közül kettő illeszkedik. E pontok közötti szakaszokat tekintsük a P' alakzat éleinek. Mivel P egy csúcsba befutó lapjai egyetlen ciklust alkotnak, és minden éle két csúcsra illeszkedik, a ψ polaritás illeszkedéstartó tulajdonsága biztosítja, hogy a P poliéder egy csúcsába befutó éleinek P' belső megfelelői egy síkbeli, zárt töröttvonalat alkotnak, és P' minden éle két ilyen (különböző síkokban fekvő) töröttvonalnak a része.

Az így kapott P' alakzatot akkor tekinthetjük poliédernek, ha ezek a töröttvonalak mind egyszerű sokszögek. Csak ekkor értelmezhetjük P' lapjait, mint az élekből álló egyszerű sokszögek által határolt síkrészeket. Követeljük meg a P' poliédertől, hogy bármely két lapjának azok és csak azok legyenek a közös pontjai, melyek a két lap közös élére (mint szakaszra) illeszkednek, vagy ha egy közös pontjuk van, az közös csúcs legyen. Rövidebben: követeljük meg, hogy a P' poliéder felülete ne legyen önátmetsző. Ezzel biztosítjuk, hogy P' szintén közönséges poliéder, ugyanolyan megszorításokkal, mint P .

A P és P' (közönséges, egyszerű sokszögekkel határolt és nem önátmetsző felületű) poliédereket egymás duálisának nevezzük, ha van olyan ψ polaritás, amely a fent értelmezett módon egyiket a másikba, vagy azzal egybevágó poliéderbe viszi át.

A poliéderek közötti dualitás nyilvánvalóan szimmetrikus

reláció. Ha a poliéderek valamelyikére nem teljesülnek az előbbi kikötések, akkor csak pontokból, szakaszokból (esetleg síklapokból) álló duális alakzatokról beszélünk. A poliéderek közötti polaritással definiált dualitás topológiai értelemben vett duális kapcsolatot is jelent. Megfordítva viszont - mint később látni fogjuk - nem feltétlenül.

Belátható, hogy ha egy poliéder konvex, és a Ψ polaritás alapgömbjének a középpontja a poliéder belsejében van, akkor a Ψ -vel definiált duálisa is konvex poliéder. Ha viszont az alapgömb középpontját a poliéderen kívül helyezzük el, esetenként igen bonyolult alakzatot is kaphatunk.

A duális alakzat könnyebb előállításához kihasználhatjuk a polaritásnak a térbeli inverzióval való kapcsolatát. A Ψ polaritás előállítható úgy is, hogy a tér bármely, (az alapgömb középpontjától, O -tól különböző) A pontjához először hozzárendeljük a G alapgömbre vonatkozó inverzét, A' -t, majd A' -hez a rá illeszkedő, és $\overrightarrow{OA}$ -ra merőleges α^* síkot. α^* lesz az A pont polársíkja. Egy O -ra nem illeszkedő β sík pólusát hasonlóan úgy kaphatjuk meg, hogy β -hoz először hozzárendeljük O -nak β -ra eső merőleges vetületét B' -t, majd ehhez a G alapgömbre vonatkozó inverzét, B^* -ot. Az így kapott B^* pont lesz a β sík pólusa. (L.: [7])

Vegyünk egy egyszerűnek ígérkező példát a duális alakzatok közötti kapcsolat alaposabb megismerésére. A fentieket kihasználva kevés számolással felírhatók egy kocka duálisaként kapott alakzat csúcspontjainak koordinátái.

Helyezzünk egy $2a$ élhosszúságú kockát a derékszögű

koordináta rendszerbe úgy, hogy élei legyenek párhuzamosak a koordináta tengelyekkel. A kocka középpontja legyen a $K(x_0; y_0; z_0)$ pont. Helyezzük a polaritás alapgömbjének az O középpontját az origóba. Ekkor O -nak a kockalapok síkjaira eső merőleges vetületei éppen a koordináta tengelyekre esnek, így az alapgömbre vonatkozó inverzeik szintén. Legyen az alapgömb sugara r . Így a keletkező duális alakzat csúcspontjainak koordinátái rendre a következők lesznek:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad \left(\frac{r^2}{x_0+a} ; 0 ; 0 \right) & (2) \quad \left(\frac{r^2}{x_0-a} ; 0 ; 0 \right) \\
 (3) \quad \left(0 ; \frac{r^2}{y_0+a} ; 0 \right) & (4) \quad \left(0 ; \frac{r^2}{y_0-a} ; 0 \right) \\
 (5) \quad \left(0 ; 0 ; \frac{r^2}{z_0+a} \right) & (6) \quad \left(0 ; 0 ; \frac{r^2}{z_0-a} \right)
 \end{array}$$

A hat pont koordinátáira kapott képleteket vizsgálva kitűnik, hogy a duális alakzat alakját, éleinek, lapjainak egymáshoz viszonyított helyzetét a kockának az alapgömb középpontjához viszonyított helyzete határozza meg. Az alapgömb sugara a duális alakzat nagyságát befolyásolja. Ha az r sugarat n -szorosára növeljük, a duális alakzat n^2 -szeresére nő.

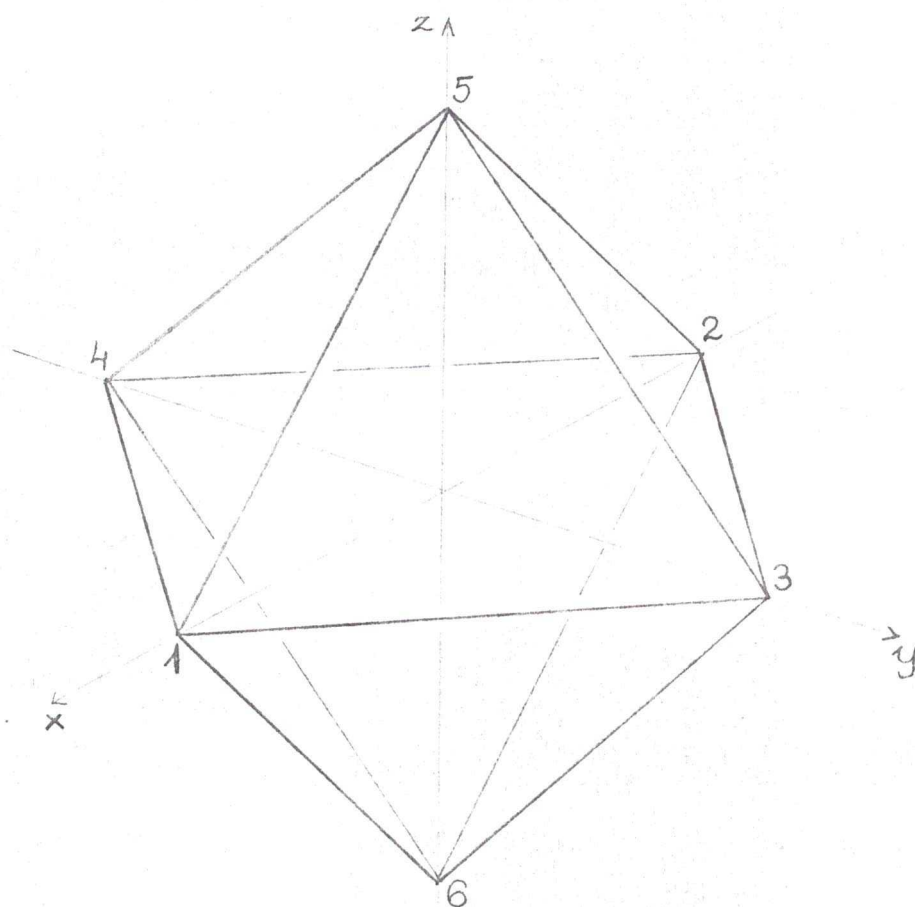
Válasszuk a kocka élét $2a = 12$ egységnek, az alapgömb sugarát $r = 6$ 2-nek, amely éppen a kocka éleit érintő gömb sugara. Ekkor $K(0; 0; 0)$ esetben duális poliéderként azt a szabályos oktaédert kapjuk, melynek élei merőlegesen metszik a kocka megfelelő éleit. (1. ábra) Mivel a

A KOCKA

KOZEEFPONTJA

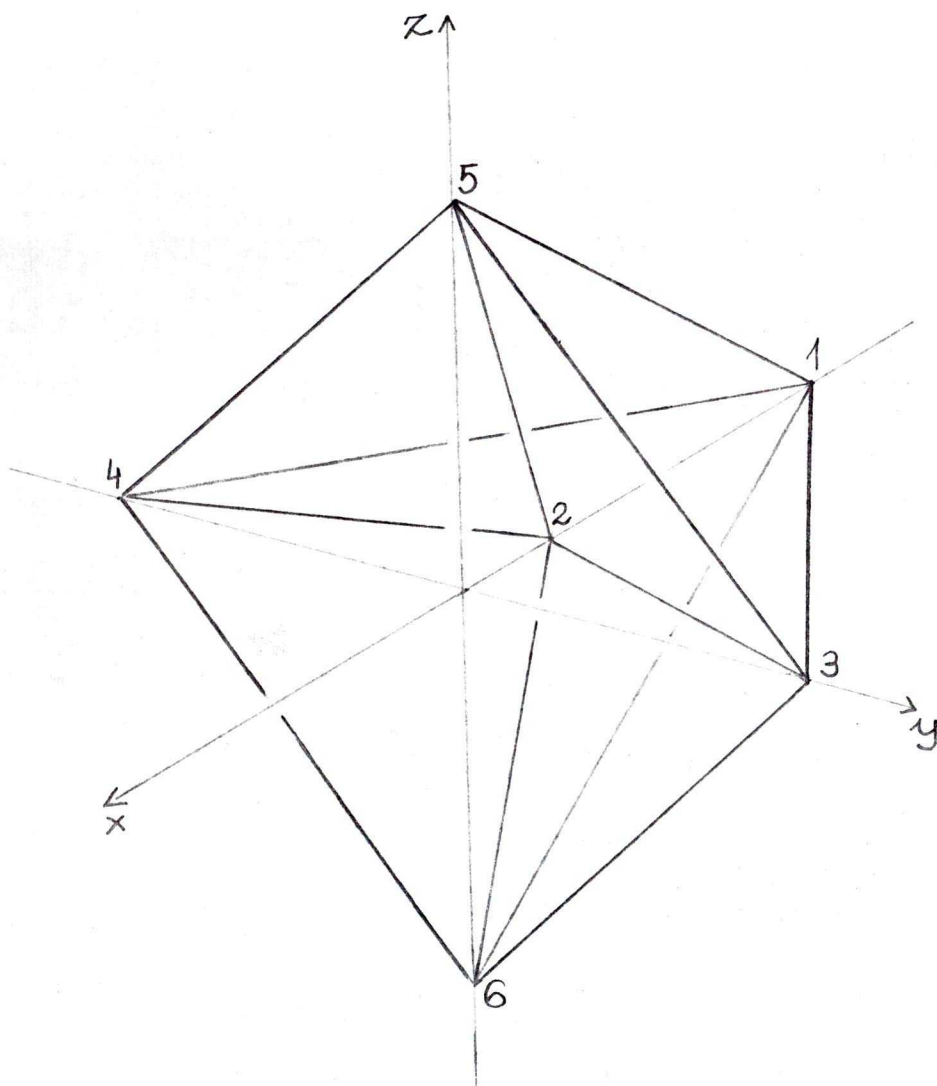
K(0, 0, 0)

CSUCS	X	Y	Z
(1)	12.00	0.00	0.00
(2)	-12.00	0.00	0.00
(3)	0.00	12.00	0.00
(4)	0.00	-12.00	0.00
(5)	0.00	0.00	12.00
(6)	0.00	0.00	-12.00

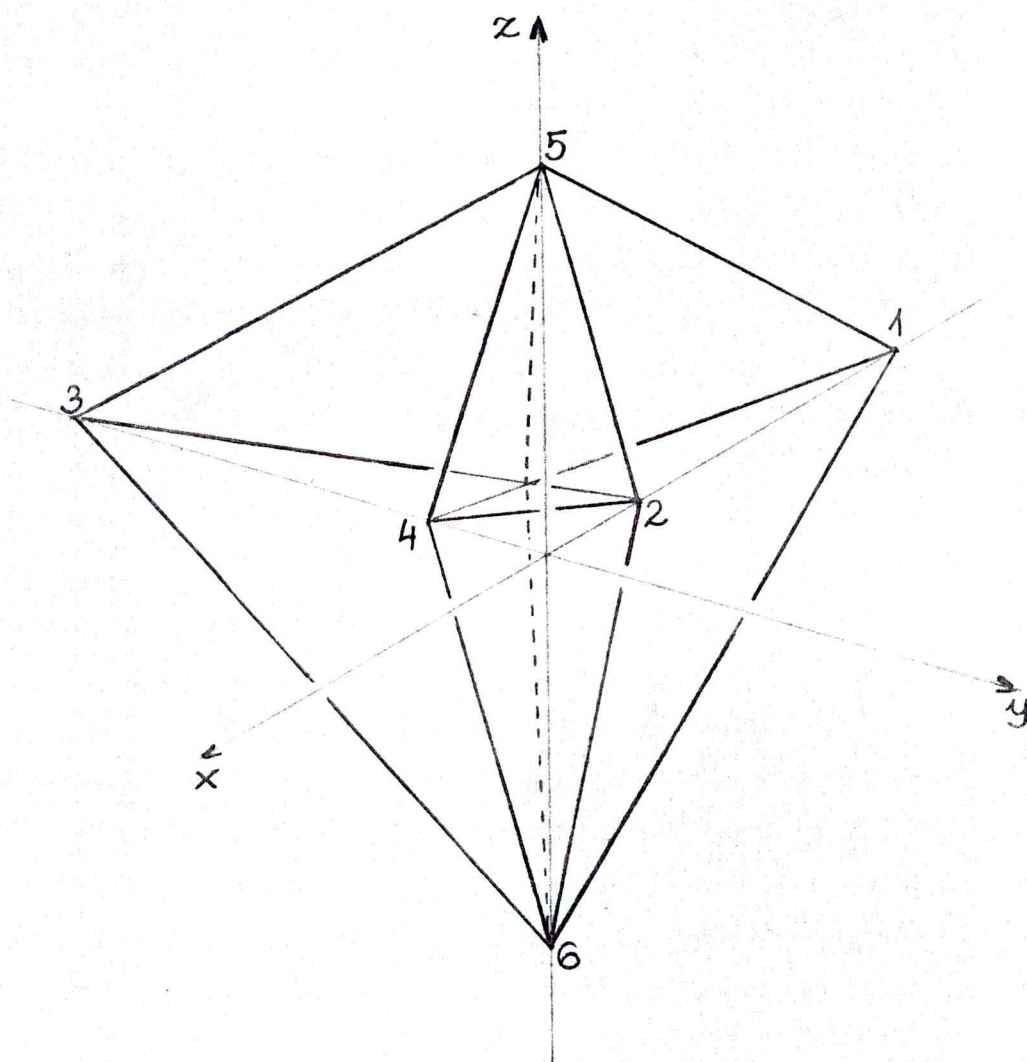


A KOCKA KOZEEPPONTJA K(-10; 0; 0)

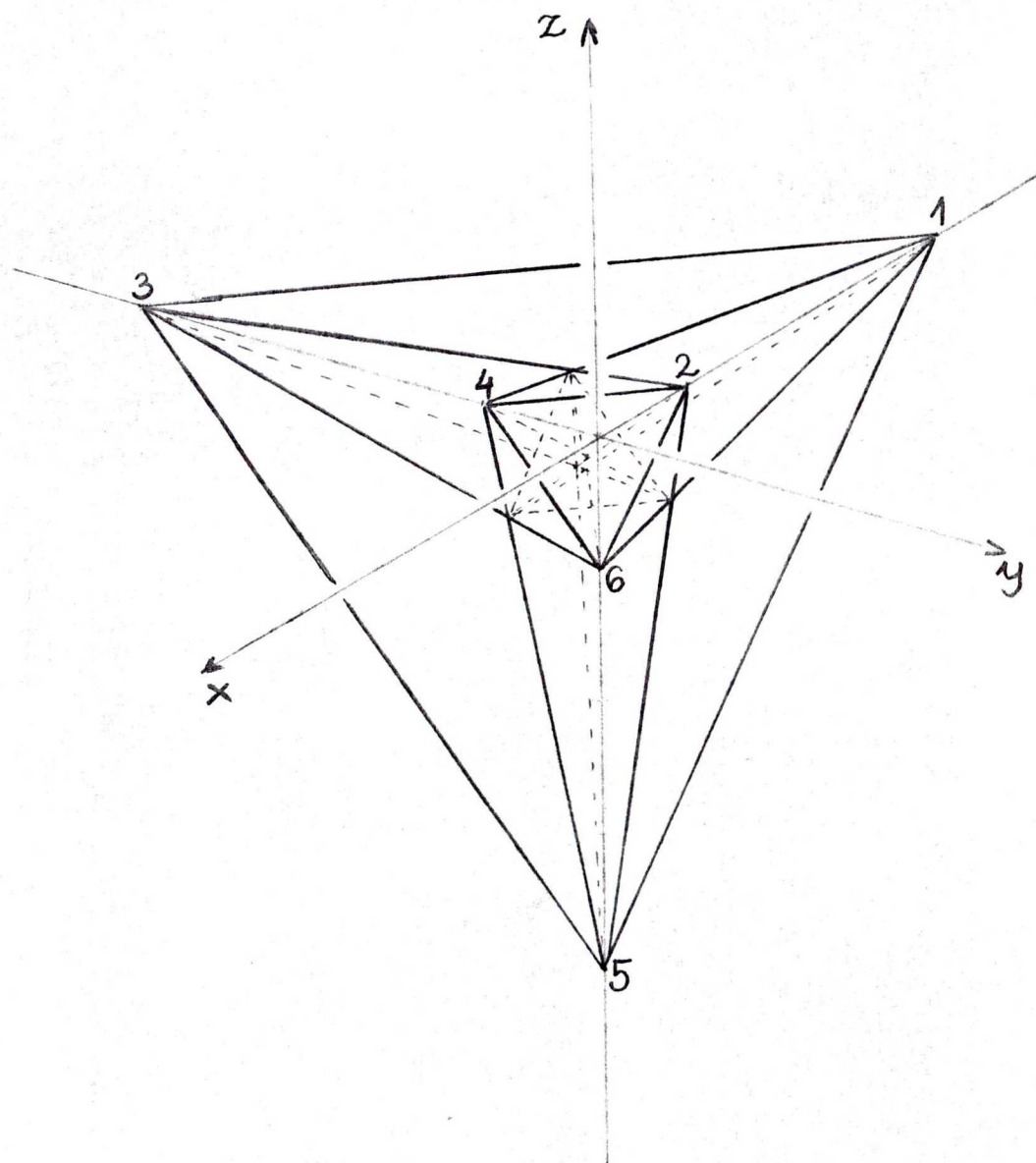
CSUCS	X	Y	Z
(1)	-18.00	0.00	0.00
(2)	-4.50	0.00	0.00
(3)	0.00	12.00	0.00
(4)	0.00	-12.00	0.00
(5)	0.00	0.00	12.00
(6)	0.00	0.00	-12.00



CSUCS	X	Y	Z
(1)	-10.00	0.00	0.00
(2)	-4.50	0.00	0.00
(3)	0.00	-10.00	0.00
(4)	0.00	-4.50	0.00
(5)	0.00	0.00	12.00
(6)	0.00	0.00	-12.00



CSUCS	X	Y	Z
(1)	-18.00	0.00	0.00
(2)	-4.50	0.00	0.00
(3)	0.00	-18.00	0.00
(4)	0.00	-4.50	0.00
(5)	0.00	0.00	-18.00
(6)	0.00	0.00	-4.50



kockának három éli testszögletei vannak, a duális alakzat mindig 8 háromszögből álló oktaéder lesz, hacsak a duális alakzat nem lesz elfajuló. (Akkor mondjuk, hogy a duális alakzat elfajuló, ha az O pont a kocka valamelyik síkjára esik, vagyis ha K valamelyik koordinátája ± 6 . Ekkor az O -ra illeszkedő sík pólusa végtelen távoli pont lesz.) Ha K koordinátáit úgy választjuk meg, hogy mindhárom koordináta abszolút értékben 6-nál kisebb legyen, akkor az egymással szemben fekvő (1) - (2); (3) - (4) és (5) - (6) pontok nullától különböző koordinátái ellentétes előjelet kapnak, így a kapott oktaéder konvex lesz.

Mozgassuk a kockát az x tengely mentén negatív irányba. Ekkor az egyik x -re merőleges lap az O ponthoz közeledik. A neki megfelelő (1) csúcs x koordinátája egyre nagyobb értéket vesz fel, és a $K(-6; 0; 0)$ elfajuló esetben "átpattan" az x tengely negatív felére. Ekkor egy konkáv, de önátmetszés nélküli oktaédert kapunk. (2. ábra, $K(-10; 0; 0)$) Érdemes megjegyezni, hogy az xy síkban fekvő (1, 3, 2, 4) négyszög ellentétes körüljárású lesz az $|x_0| < 6$ esethez viszonyítva.

Ha a K pontot úgy helyezzük el, hogy a $\overline{KO}$ szakaszra essen a kocka egyik élének felezőpontja, akkor olyan önátmetsző oktaédert kapunk, melyben az (1, 4, 5) és (2, 3, 5) lapok, valamint az (1, 4, 6) és (2, 3, 6) lapok metszik egymást. Az előbb vizsgált, xy síkban levő (1), (3), (2), (4) csúcsokkal megadott élek egy önátmetsző töröttvonalat alkotnak. (3. ábra, $K(-10; -10; 0)$).

A 3. és 4. ábrán az űnátmeteszési vonalakat - melyek nem élei a poliédernak - szaggatott vonallal jelöltük.

Ha a K pontot úgy helyezzük el, hogy az O pont a test-
átló meghosszabbítására kerüljön, olyan oktaédert kapunk, me-
lyen már két lap kivételével minden lap metsz másik hármat.
(4. ábra, $K(-10; -10; -10)$)

A vizsgált példákából kitűnik, hogy polaritással defini-
ált duális alakzatként még egy egyszerű kockából is igen bo-
nyolult alakzatot kaphatunk, amennyiben a polaritás alapgömb-
jének a középpontját kevésbé szerencsésen választjuk.

Egy poliéder (vagy bármilyen síklapokból álló alakzat) du-
álisának az általunk vizsgált szempontból, az űnátmetezés
szempontjából az határozza meg a jellegét, hogy az alapul vett
alakzat síkjai által feldarabolt térrészek közül melyikben
helyezzük el az O pontot. Bonyolultabb, konkáv poliéderek
(pl. a Császár-poliéder) duálisának az előállításakor igen ne-
héz kiválasztanunk ezt a térrészt - esetleg nincs is olyan
térrész - amelybe a polaritás alapgömbjét helyezve a kívánt
duális alakzathoz jutunk.

Amennyiben az eredeti poliéder csúcsainak koordinátái adottak,
vagy könnyen megadhatók, célszerű ezekből felírni az adott po-
laritásra vonatkozó polársíkjaik egyenleteit, melyekből a ka-
pott alakzat csúcsainak koordinátái, éleinek hossza, általában
az összes szükséges adat számítható.

Ha a ψ polaritás alapgömbjének a sugara r , középpont-
ja az origó, akkor a derékszögű koordinátáival adott

$P(a, b, c)$ pont polársíkjának az egyenlete

$$ax + by + cz = r^2$$

lesz.

Ha pedig az alapgömb középpontja nem az origó, hanem az $O(u; v; w)$ pont, akkor az adott poliédert és az O pontot is el kell tolnunk úgy, hogy O ismét az origóban legyen. Ekkor az

$$(a - u)x + (b - v)y + (c - w)z = r^2$$

egyenlet a duális alakzatnak azt a síkját írja le, amely a P pontnak felel meg, bár így a duális alakzatot nem az eredeti poliéder és az $O(u; v; w)$ pont által meghatározott helyen, hanem a $(-u; -v; -w)$ vektorral eltolva kapjuk meg.

Ez alapján a Császárpolyéder csúcsainak derékszögű koordinátáit ismerve és a polaritás alapgömbjét megadva könnyen felírhatók a duális alakzat síkjainak az egyenletei. Ebből pedig elemi úton számíthatók az új alakzat csúcsainak koordinátái, az élek és átlók hossza, általában a realizáláshoz, vagy az alakzat további vizsgálatához szükséges adatok. Azonban a duális alakzat numerikus adatainak a kiszámítása, valamint a szükséges vizsgálatok elvégzése még egyetlen esetet tekintve is igen hosszadalmas, sok számolást igénylő munka. Így ezeket a számításokat, valamint a nem megfelelő esetek kiszűrését számítógéppel végeztük.

II. A Császár-poliéder duálisának előállítása és vizsgálata számítógép segítségével

Jelölje C a Császár-poliédert, valamint azokat az alakzatokat, melyeket a Császár-poliéderből a csúcsponatok koordinátáinak megváltoztatásával nyerünk. Legyen D a C poliédernek egy ψ polaritással adott duálisa. Feladatunk az, hogy úgy válasszuk meg C csúcsainak koordinátáit és a ψ polaritás alapgömbjét, hogy a D alakzat a keresett 7 lapú közöséges poliéder legyen.

A C poliéder 7 csúcsa $\binom{7}{3} = 35$ sikot határoz meg. Ezek közül 14-re illeszkedő 14 háromszög alkotja a C poliéder felületét. Így a nekik megfelelő pontok lesznek a D alakzat csúcsai. Mivel a C poliéder minden lapja háromszög, D minden csúcsára 3 sik, és így 3 él illeszkedik. Mivel C -nek bármely két csúcsát él köti össze, vagyis minden csúcsára 6 él illeszkedik, D -nek az egy lapjára illeszkedő élei egy 6 csúcsú zárt töröttvonalat alkotnak.

A számítógép segítségével először kiszámítjuk D csúcsainak a koordinátáit, ezt felhasználva megvizsgáljuk, hogy az egyes sikokra eső élek egyszerű sokszöget alkotnak-e. Ha D minden lapja egyszerű sokszög, megnézzük, hogy D felülete önátmetező-e. Amennyiben nem, akkor kiszámítjuk az egy lapra eső élek és átlók hosszát, valamint egyéb, a realizáláshoz szükséges adatokat.

A számításokhoz a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola

Matematikai Tanszékén lévő WANG 2200/C típusú kisszámítógépet használtuk. Ez a számítógép a BASIC programozási nyelven programozható. A számítás eredményét, vagy magát a programot ki lehet iratni egy displayre, így a program könnyen ellenőrizhető, javítható, bővíthető. Lehetőség volt arra, hogy a program többszöri futtatása során csak a számunkra lényeges részeredményeket irassuk ki papírra.

A program elemzése során elsősorban nem^a számítástechnikai, hanem a matematikai megoldásokat fogjuk figyelemmel kísérni. A dolgozathoz mellékelte program (1. számú melléklet) megfelelő címkéjű utasításaira zárójelbe tett számokkal hivatkozunk, melyek az egyes címkék sorszámát jelentik. Pl. a (3, 4, 7, 790, 2750, 3420) sorszámú címkék olyan utasításokat tartalmaznak, melyek segítségével könnyen kiirathatók a végső változat kiszámított adatai. A kiírás alkalmával a program átugorja azokat a "szűrőket", amelyekre már nincs szükség, mert előzőleg már megvizsgáltuk és a display-re kiirattva ellenőriztük a szűrés eredményét.

A számítások változtatható adatai a C poliéder csúcsainak a koordinátái (10 - 70) a polaritás alapgömbjének a középpontja (80) és sugarának a négyzete (90) olyan címkékre kerültek, melyek egyszerre láthatók a display-re kilistázva, így könnyen áttekinthetők, és bármelyikük könnyen megváltoztatható. A (10 - 70) címkék sorszáma arra is utal, hogy a C alakzat 7. adott pontja közül hányas számmal jelölt pont koordinátáit tartalmazza a címke.

A keresett D alakzat csúcsainak adataihoz a megfelelő síkok kiválogatása (160 - 300), a kiválasztott három-

ismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldása és az eredmények tárolása (310 - 410) útján jutunk. A gép ezután "megjegyz" azt a mátrixot, amelynek a segítségével később majd össze fogja válogatni az egy síkra illeszkedő csúcsokat (420 - 470). Erre ugyanis többször szükségünk lesz. Ezt követi a megadott adatok és a kapott 14 csúcs koordinátáinak a kiírása (480 - 780). A csúcsok koordinátáinak számolása közben előfordulhat, hogy (310)-ben az egyenletrendszer determinánsa nulla, vagyis a kiválasztott három sík nem határoz meg egy csúcsot. (Pl. ilyen eset áll elő, ha C csúcsainak a koordinátáit véletlenül úgy változtatjuk meg a (10 - 70) címkék valamelyikében, hogy két csúcs egybeesik, vagy (80)-ban úgy adjuk meg az O pont koordinátáit, hogy C valamelyik síkjára esik. Ekkor (320, 2890, 2900, 3460) leállítja a programot, figyelmeztetve az elkövetett hiba helyére és jellegére is. A 2. számú melléklet 1. lapja a Császár-poliéder adataiból képzett (egyik lehetséges) duális alakzat csúcsainak a koordinátáit tartalmazza (Hasonlitsuk össze [2] 141. old. 1. és 2. táblájával.) A D alakzat síkjainak és csúcsainak a gép által kiírt jelölése azért praktikus, mert ebből könnyen leolvasható, hogy egy-egy csúcs mely lapokra illeszkedik, egy-egy él pedig melyik két lapnak a közös éle. Pl. az (1) számmal jelölt síkra illeszkedő csúcsok rendre (126), (124), (134), (137), (157), (156). A szomszédos csúcsok két számban egyeznek meg, hiszen az általuk meghatározott

szakasz két lapnak a közös éle. Erről áttekinthető képet kapunk az egy síkra eső csúcsok közötti távolságok kiírásánál. (8. számú melléklet.)

A kapott alakzat az önátmetszés szempontjából nem változik, ha a C alakzat csúcsait és az alapgömb középpontját különböző egybevágósági, hasonlósági és affin transzformációnak vetjük alá. Ezek segítségével viszont elérhető, hogy a D alakzat megrajzolása, vagy modelljének elkészítése szempontjából kedvezőbb értékeket kapjunk. Így álltak elő a 2.számú mellékletben közölt változatok, melyek az önátmetszés szempontjából nem különböznek egymástól.

Annak eldöntéséhez, hogy a D alakzat egy-egy síkjára illeszkedő élek önátmetsző töröttvonalat alkotnak-e, először összeválogatjuk az egy síkra eső csúcsokat, a szomszédosakat egymás után véve. Ezt az összeválogatást a (420 - 470) címkékkel beolvasott S "vezérlő mátrix" segítségével végezzük (800 - 920). Ezután megvizsgáljuk, hogy a töröttvonal nem szomszédos éleinek van-e közös pontja. Ha egy 6 csúcsú töröttvonal csúcsait 1-től 6-ig megszámozzuk, akkor a megvizsgálandó nem szomszédos élek a következők lesznek:

(1-2) és (3-4), (1-2) és (4-5), (1-2) és (5-6),
(2-3) és (4-5), (2-3) és (5-6), (2-3) és (6-1),
(3-4) és (5-6), (3-4) és (6-1) valamint (4-5) és
(6-1). Ezeket a (940 - 960, 1150, 1160) címkéken levő ciklusokkal válogattuk össze.

Az önátmetzés szempontjából szóbajöhető élek összeválogatása után végül is azt kell eldöntenünk, hogy a végpontok koordinátaival adott $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ szakasznak van-e közös pontja. Mivel mindig biztosítható, hogy a vizsgált töröttvonal síkja ne legyen merőleges az xy síkra, elegendő az A, B, C, D pontok első két koordinátájával számolnunk (970 - 1000).

A kérdés eldöntésére a következő utat választhatjuk: Irjuk fel az (AB) egyenes nullára rendezett egyenletét. Ebbe C és D koordinátáit behelyettesítve egy-egy 0-tól különböző számot kapunk, hiszen C és D nem illeszkedhet (AB) -re. (1010, 1020). Ha a kapott két szám előjele egyezik, akkor C és D az (AB) egyenesnek ugyanazon a partján fekszik, így a két szakasznak nem lehet közös pontja. (1030). Ha az előjelek különböznek, akkor ugyanezt a vizsgálatot elvégezzük a (CD) egyenessel és az A, B pontokkal. (1040 - 1080). Eközben a (800 - 820), 930, 1090-1140, 1170, 1180) címkék irányítják, hogy a kapott eredményeknek megfelelő szöveg kerüljön kiírásra. Előfordulhat, hogy a változtatható adatokat úgy adjuk meg, hogy a keletkező alakzatnak vannak egybeeső csúcsai, vagy a vizsgált töröttvonal három csúcsa egy egyenesbe esik. Ilyenkor (1030, 1070, 2910, 2920, 3460) leállítja a programot, ismét utalva a hiba jellegére.

A vizsgálattal idáig jutva a display-re kiírtunk néhány olyan információt, amely alapján közvetlen utasítás-

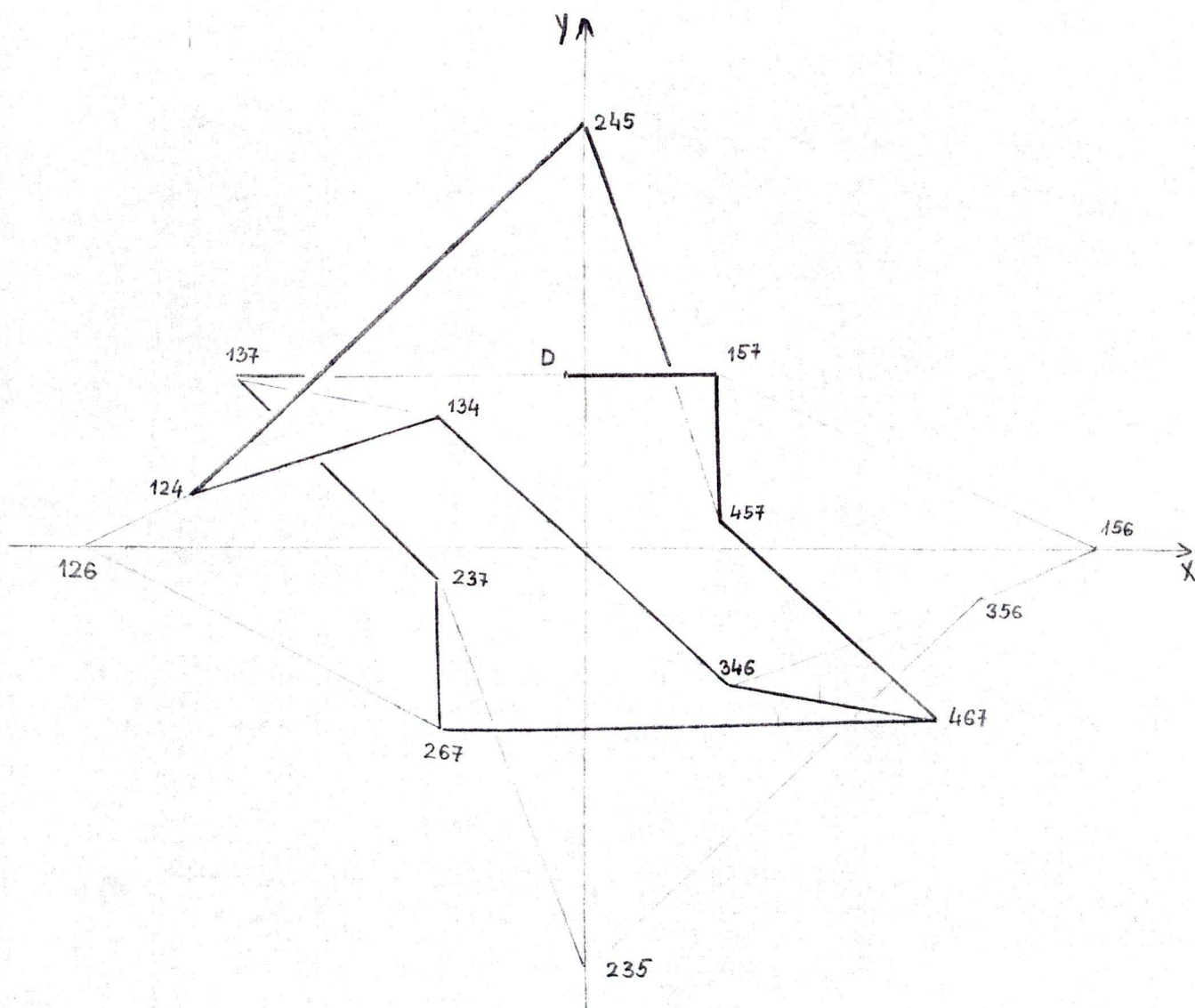
sal többféleképpen is folytathatjuk a program futtatását. (1210). Ilyen információkat többeszer is közöl a program. (2220, 2780, 2870).

A 3. számú mellékletben mutatunk néhány példát arra, hogy a Császár-poliéder duálisai az önátmetszés szempontjából mennyire különbözők lehetnek az 0 pont megválasztásától függően, majd bemutatunk néhány alakzatot, melyet a C alakzat csúcsainak változtatásával nyertünk. A melléklet példáiban a programot az (1210) címkéig futtattuk.

A 3. számú melléklet végén bemutatott példák igazolják, hogy sikerült C koordinátáit úgy változtatni, hogy a kapott D alakzat minden lapja egyszerű sokszög legyen. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a kapott poliéder nem önátmetsző. Az 5. ábrán a 3. számú melléklet utolsó lapján bemutatott alakzat xy síkra eső merőleges vetületét rajzoltuk le. Az ábráról is leolvasható, hogy a berajzolt (4) és (7) lapok a közös (467) - (457) élen túl is metszik egymást. A program leghosszabb, legbonyolultabb matematikai és programozási fogásokat tartalmazó része végzi ezeknek a nem kívánt metszésvonalaknak a felderítését, kiszűrését. (1220 - 2220).

Az, hogy a keletkezett alakzat minden lapja egyszerű sokszög, és a felület mégis önátmetsző, csak akkor fordulhat elő, ha a D alakzatnak van olyan éle, amely egy másik lap síkját olyan pontban metszi, hogy ez a metszéspont a lap kerületére, vagy belsejébe esik. Pl. az 5. áb-

CSUCS	X	Y	Z
(1 2 6)	-18.00	0.00	36.00
(1 5 6)	18.00	0.00	36.00
(2 3 5)	0.00	-16.00	-18.00
(2 4 5)	0.00	16.00	-18.00
(3 5 6)	14.00	-2.00	24.00
(1 2 4)	-14.00	2.00	24.00
(3 4 6)	5.00	-5.00	6.00
(1 3 4)	-5.00	5.00	6.00
(4 6 7)	12.50	-6.50	-3.00
(1 3 7)	-12.50	6.50	-3.00
(2 3 7)	-5.00	-1.00	-3.00
(4 5 7)	5.00	1.00	-3.00
(2 6 7)	-5.00	-6.50	-3.00
(1 5 7)	5.00	6.50	-3.00



rán bemutatott esetben az (137) - (157) él döfi a (4) lapot. Az ilyen eseteket kell megkeresnünk, és úgy változtatnunk C adatait, hogy ilyen eset ne forduljon elő.

A két szakasz metszésének eldöntéséhez hasonló módon itt is könnyen eldönthettük volna, hogy egy adott szakasznak és egy síknak van-e közös pontja. Azonban itt azt is el kell döntenünk, hogy ez a döféspont belül van-e a síkban fekvő (most már tudjuk, hogy egyszerű) sokszögön. Ehhez pedig szükség lesz a döféspont koordinátáira.

Igy meg kell keresnünk a D alakzat hét síkjának azokat a metszéspontjait, melyek nem csúcsai az alakzatnak. Ugyanis a szóbanforgó döféspontok csak ezek közül kerülhetnek ki. A hét sík által meghatározott $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) = 35$ metszéspont közül 14 a D alakzat csúcsa, így most a további 21 csúcs koordinátáit kell kiszámolnunk. (Előfordulhat, hogy valamely három síknak nincs közös pontja. Ezeket "elégge távoli" pontokkal fogjuk helyettesíteni.) Az így kapott 21 pontot nevezzük a D alakzat döféspontjainak, hiszen ezek lényegében D síkjainak és egyeneseinek a döféspontjai. D síkjai által meghatározott $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 2 \end{smallmatrix} \right) = 21$ metszéspont mindegyikére D-nek két csúcsa és három döféspontja és D minden döféspontjára három metszéspont illeszkedik. Így összesen $21 \cdot 3 = 63$ esetben kell megvizsgálunk, hogy a vizsgált döféspont a ráilleszkedő (egyik vizsgált) metszésponton levő élre - mint szakaszra - esik-e, és ha igen, akkor a belsőjébe (vagy a kerületére) esik-e a vizsgált élt nem tartalmazó sokszögnek. Ezeket az ese-

teket - annak ellenőrzésére, hogy jól készítettük el az összeválogatásukat irányító programrészletet - kiírhatjuk egy megfelelő segédprogram segítségével. Ezt a segédprogramot "hozzáolvasva" a gépbe előzőleg betáplált eredeti programhoz, a segédprogram utasításai beékelődnek a megfelelő helyre. Amennyiben a segédprogramon az eredetivel egyező sorszámú címkék is vannak, ezek tartalma a segédprogramon lévő tartalom lesz. A 4. számú melléklet ezt a segédprogramot, és a segítségével kiírt megvizsgálandó döféspontok és élek "jelét" tartalmazza.

Az alkalmazott jelölés praktikusságát tükrözi, hogy könnyen áttekinthető, melyik döféspontnak melyik élhez és melyik laphoz való viszonyát vizsgáljuk. Figyeljük meg, hogy a 4. számú mellékletben kiírt minden eset $(a,b,c) \ (a,b,d) - (a,b,e)$ alakú. (A betűk sorrendje lényegtelen.) Ebben az esetben azt kell vizsgálnunk, hogy az (a,b,c) döféspont rajta van-e az (a) és (b) sík közös élén, és ha igen, belül van-e a (c) síkban fekvő sokszögön.

Az eredeti program a döféspontokra illeszkedő síkok adatainak az összeválogatása (1220 - 1270, 1360 - 1430) után kiszámítja és raktározza a döféspontok koordinátáit. (1440 - 1540). Ha a kiválasztott három egyenletből álló egyenletrendszer nem oldható meg, (azaz a döféspont végtelen távoli), akkor az egyenletrendszer determinánsára kapott 0 értéket egy 0-hoz közeli értékkel helyettesítjük. (1450 - 1470). Így elérjük, hogy (1520)-ban nem vétünk matematikai hibát, ha az egyenletrendszer de-

terminánsa 0, és a végtelen távoli pont helyett egy végesben lévő, de eléggé távoli ponttal dolgozhatunk tovább.

A megvizsgálandó esetek számát lényegesen lecsökkenthetjük, ha kiszűrjük azokat az eseteket, melyekben a döféspont valamelyik koordinátája nagyobb, mint a csúcspontok koordinátáinak a maximuma. Ekkor ugyanis a döféspont biztosan kívül van az egész alakzaton. Ezt a "szűrőt" a (220, 380, 390, 1590 - 1610) címkék tartalmazzák.

A következő lépés annak az eldöntése, hogy a vizsgált döféspont illeszkedik-e a szóbajöhető három szakasz valamelyikére. Az (AB) egyenesre illeszkedő C pont akkor lesz az $\overline{AB}$ szakasz belső pontja, ha a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok skalárszorzata negatív. Így a döféspont és a vizsgálandó szakasz koordinátáit összeválogatva (1280 - 1350, 1620 - 1750) elegendő ennek a skalársorzatnak az előjelét vizsgálnunk. (1760 - 1780).

Ha a vizsgált döféspont nem esett ki az előző két szűrőn, azaz rajta van két lap közös élén, akkor meg kell vizsgálnunk, hogy hol helyezkedik el a harmadik lapra illeszkedő sokszöghöz viszonyítva. Ha a kerületén, vagy a belsejében van, akkor célszerű kiratni, hogy melyik élnek és melyik lapnak a döféspontja.

A kérdés eldöntésére lényegében a következő utat választjuk: Fusson körbe az $A_1 A_2 \dots A_6$ sokszög kerületén egy pont, és kövessük ezt szemmel a vizsgált D dö-

féspontból. Ha közben körbe kell fordulnunk, akkor a sokszög belsejében van a D pont, ha nem, akkor kívül, félfordulat esetén pedig a kerületén. Gyakorlatilag ezt úgy hajthatjuk végre, hogy rendre kiszámítjuk az $A_1DA_2 \curvearrowright$, $A_2DA_3 \curvearrowright$, ... $A_6DA_1 \curvearrowright$ forgásszögeket, és képezzük ezek összegét. Így 0 , $\pm\pi$, vagy $\pm 2\pi$ körüli értékek kell kapnunk, amelyből eldönthető a D pont helyzete. Az $A_1DA_{i+1} \curvearrowright$ ($i = 1, \dots, 6$, $A_7 = A_1$) szögek nagyságát a $\overrightarrow{DA_1}$ és $\overrightarrow{DA_{i+1}}$ vektorok skalárszorzatából számítjuk (1970 - 2010), előjelét pedig ezeknek a vektoroknak és a sík normálvektorának a vegyesszorzatából állapítjuk meg (1930 - 1960, 2010). Ezt természetesen megelőzi a vizsgált síkra eső sokszög csúcsainak az "előkeresése" (1790 - 1850), amit a már eddig is használt S mátrixal végzünk (420 - 470), valamint a $\overrightarrow{DA_i}$ és $\overrightarrow{DA_{i+1}}$ vektorok kiszámítása és összeválogatása (1870 - 1920). Mivel itt már előzőleg kiszámított (és nem megadott) adatokkal dolgozunk, ha a D pont az $(A_i A_{i+1})$ egyenesre esik, nem biztos, hogy a vegyesszorzatra 0 -t, a számítandó szög cosinusára abszolút értékben 1 -nél nem nagyobb értéket kapunk. A gép pontatlanságát kiküszöbölő (1940 - 1960) és (1980 - 2000). Az ívmértékben kapott szögek előjeles összege határozza meg a kiírandó szöveget (2040 - 2200). Ha a gép talál ilyen nem kívánt főféspontot, akkor kiír minden ezzel kapcsolatos információt (2060 - 2150). Az 5. számú mellékleten bemutatunk néhány olyan esetet (először azt, melyet az 5. áb-

rán elemeztünk), melyekben a D alakzat minden lapja egyszerű sokszög, és a felület mégis önátmetsző. Itt a programot a (2220) címkéig futtattuk.

Egy újabb segédprogram segítségével meggyőződhetünk róla, hogy a gép milyen pontosan számította ki a körülfordulás szögét, és közben mely eseteket kellett vizsgálnia a harmadik szűrőn. (6. számú melléklet.)

A programnak ebből a részből nyert információk alapján sikerült az adatokat úgy változtatni, hogy a keresett közöndéges poliédert kapjuk, azaz a felület ne legyen önátmetsző. Egy ilyen poliédert megkapva az adatok "finom" változtatásával elérhető, hogy a kapott alakzat csúcsainak nagy részét könnyen áttekinthető, egész koordináták jellemezzék, vagy ami ennél is fontosabb, hogy a kapott poliéder könnyen realizálható, "szelős" legyen. A kapott poliéder méreteit és a realizáláshoz, vagy a könnyebben realizálható változat kiválasztásához szükséges adatokat számítja ki a program következő része (2230 - 3460).

A poliéder egy-egy lapját legkönnyebben az oldalainak és átlóinak a hosszából tudjuk megszerkeszteni. Ezek kiszámításához - a lap számának a felírása után (2270) - először ismét összeválogatjuk az egy síkra eső csúcsokat (2330 - 2410), majd egyetlen ciklussal kiszámítjuk a szomszédos csúcsok távolságait, vagyis az élek hosszát (2420 - 2520). Annak eldöntésére, hogy a vizsgált poliéder modellje könnyen realizálható-e, szükségünk lehet

az élek maximumára, minimumára, valamint ezek hányadosára. Ezt egy lap esetén a (2310, 2320, 2480 - 2510, 2640 - 2690) címkék, az egész poliédert tekintve pedig a (2230, 2240, 2700 - 2730, 2790 - 2860) címkék keresik meg és írják ki. Az átlók hosszának a kiszámítása hasonlóan történik (2590, 2600), csak ehhez két, egymásba skatulyázott ciklussal kell összeválogatni a csúcsokat (2560 - 2580).

A könnyebben realizálható modell megkeresése és a lapok megszerkesztése - mint látni fogjuk - megkönnyíthető, ha a poliéder csúcsaiból álló néhány háromszögnek ismerjük a magasságvonalát is. Ezt számolja ki a program végén lévő szubrutin (2930 - 3340). Ez a szubrutin először felírja a vizsgált háromszög csúcsainak az adatait (2990 - 3070), kiszámítja és kiírja az oldalak hosszát (3080 - 3220), majd a Heron-képlettel kapott területből kiszámítja és kiírja a magasságvonalak hosszát (3230 - 3320). A háromszög csúcsait a csúcsokat tartalmazó táblázat megfelelő sorainak a sorszámaival adhatjuk meg. Ezt a táblázatot külön is elkészíthetjük egy újabb segédprogram segítségével. (7. számú melléklet.) A csúcsok sorszámaait - a szükségesnek vélt esetekben - a program végén vettük fel, minden háromszöget külön címkén megadva (3350 - 3450). Így a programot végig listázva ezek a sorszárok ugyancsak könnyen áttekinthetők, ha szükséges, bővíthetők. A (3430 - 3450) címkéken olyan pontok vannak, melyek a D poliédernek nem csúcsai, ha-

nem dőféspontok. Így erre a programrészletre csak akkor szabad eljutnunk, ha előzőleg kiszámítottuk a dőféspontok koordinátáit is (3420).

A 8. számú melléklet a talált poliéder néhány - egymástól lényegesen nem különböző-változatának a numerikus adatait tartalmazza. /A távolságokat, a kapott poliéder szimmetria tulajdonságai miatt nem minden esetben számoltuk végig.)

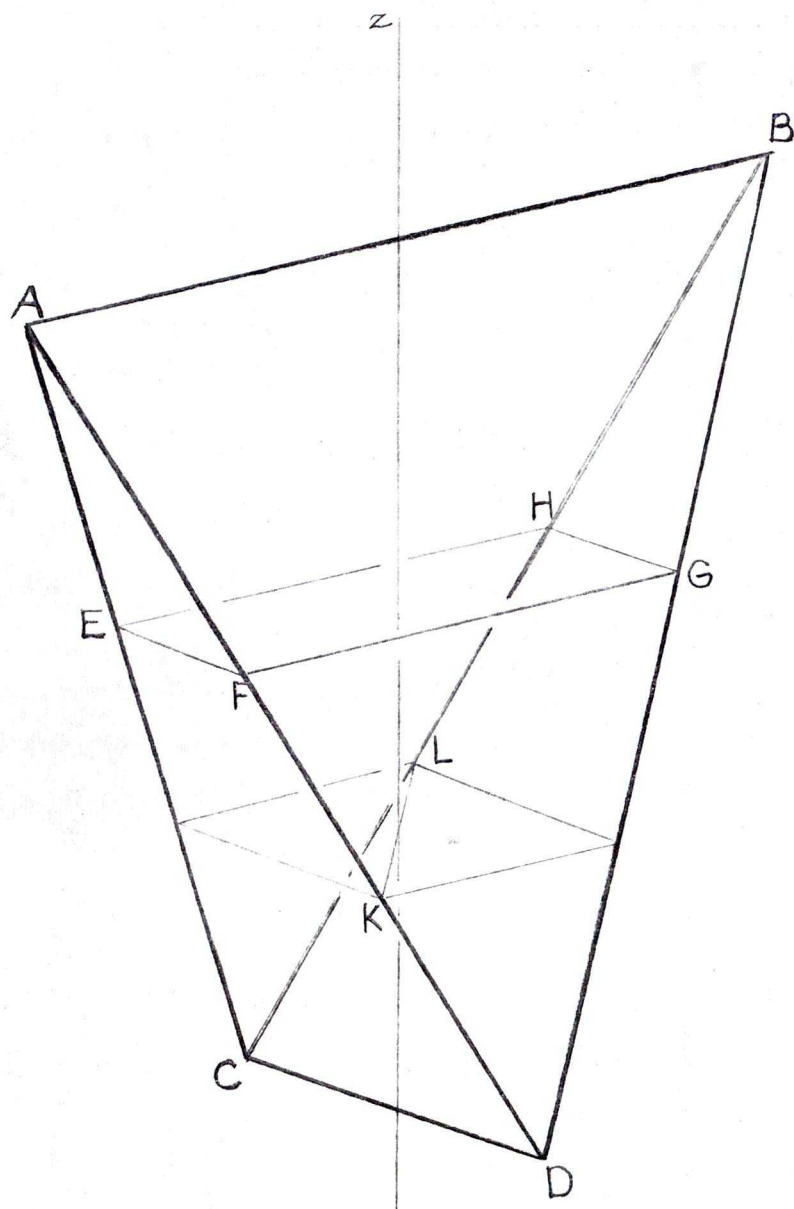
III. A kapott poliéder elemzése, numerikus adatai

A számítógép segítségével talált és realizált modell alapján megadható a keresett poliéder létezésére egy olyan elemi bizonyítás, amely nem használja fel a kapott poliédernek a Császár-poliéderrel való kapcsolatát, így a dualitás fogalmát sem.

Tekintsünk egy olyan tetraédert, melynek a lapjai egyenlőszárú háromszögek. Ennek bármely két lapja szomszédos. Az lesz a feladatunk, hogy további három sík felvételével képezzünk a tetraéderből egy olyan toroidot, - azaz tórusszal homeomorf poliédert - hogy az új síkokra eső lapok mindegyike szomszédos legyen egymással és a tetraéder mindegyik lapjával. Természetesen a tetraéder éleinek, vagy azok egy-egy darabjának meg kell maradnia.

Válasszuk a tetraéder csúcsainak a jelölését úgy, hogy $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ legyen. Jelöljük továbbá az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalak felezőpontjait összekötő egyenest z -vel. (6. ábra.) A tetraéder tengelyesen szimmetrikus z -re. A további három síkot is úgy fogjuk felvenni, hogy a kapott alakzatnak megmaradjon ez a tulajdonsága.

Ha a tetraédert z -re merőleges (azaz $\overline{AB}$ -vel és $\overline{CD}$ -vel párhuzamos) síkokkal metszük, a síkmetszet mindig téglalap lesz. Amint a metsző sík $\overline{AB}$ -től $\overline{CD}$ felé halad, a síkmetszetként kapott téglalap $\overline{AB}$ -vel párhuzamos oldala folytonosan csökken, $\overline{CD}$ -vel párhuzamos oldala pedig nő. Válasszuk ki két tetszőleges, z -re merőleges



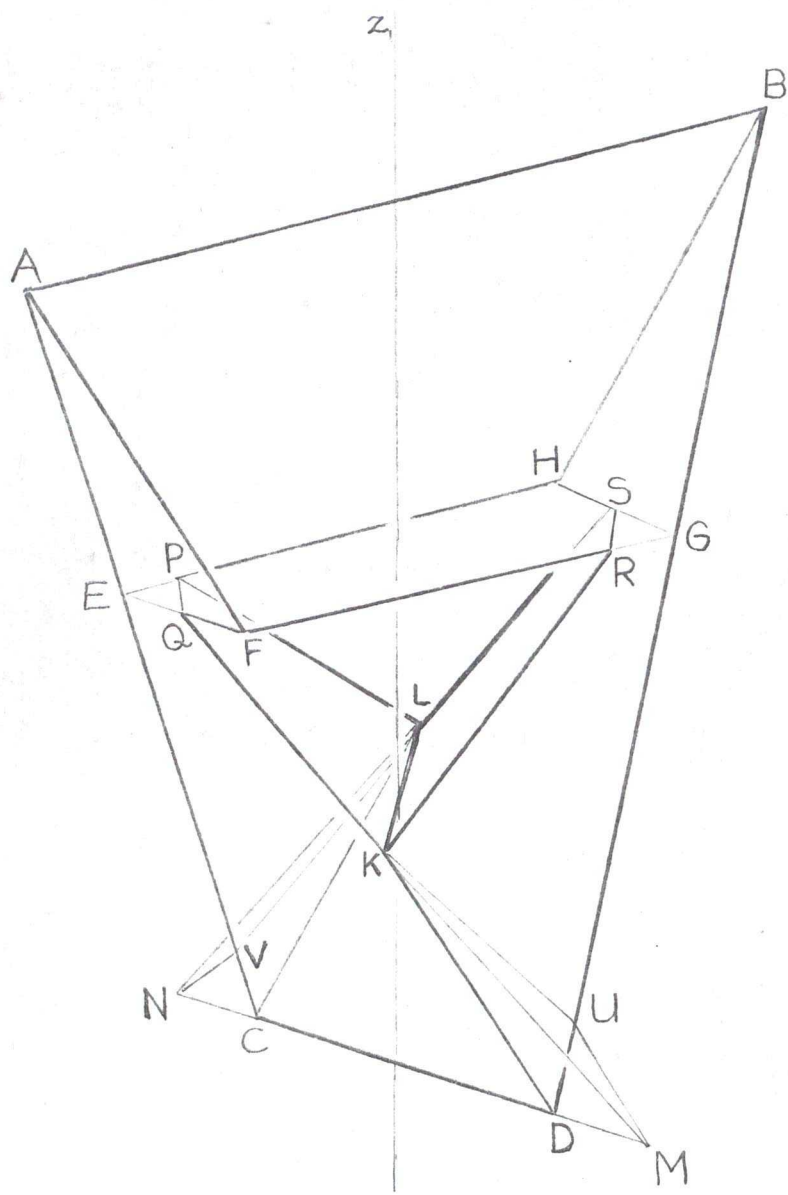
6 . ABRA

síkmetszetet. Jelölje az $\overline{AB}$ oldalhoz közelebbi síkmetszet csúcsait rendre E, F, G, H ($E \in \overline{AC}$, $F \in \overline{AD}$). Jelölje továbbá K és L a másik síkmetszet átlói közül annak a végpontjait, melyek ugyanarra a tetraéder-élre illeszkednek, mint F , illetve H .

Fúrjuk át az $ABCD$ tetraédert egy olyan prizmával, amelynek egyik éle a (KL) egyenes, a másik két - (KL) -lel párhuzamos - éle pedig z -re szimmetrikusan helyezkedik el, és az $EFGH$ téglalapot a szomszédos $\overline{HE}$ és $\overline{EF}$ illetve $\overline{FG}$ és $\overline{GH}$ élein metszi. (7. ábra) Ilyen metszés valóban létrejöhethet, hiszen $\overline{KL}$ messzebb van $\overline{AB}$ -től, mint $\overline{FH}$, így nagyobb szöget zár be $\overline{AB}$ -vel - tehát $\overline{FG}$ -vel is, - mint a téglalap $\overline{FH}$ átlója. Jelölje a prizma éleinek az $EFGH$ téglalappal (azaz a tetraéderrel) alkotott metszéspontjait P, Q, R és S ($P \in \overline{HE}$, $Q \in \overline{EF}$, $R \in \overline{FG}$, $S \in \overline{GH}$).

Az így létrehozott toroidnak a $PQFRSH$ hatszög-lapja szomszédos lesz az összes többi lappal. A $KLPQ$ és a vele egybevágó $KLSR$ trapéz száraival az alapul vett tetraéder két lapjához, alapjaival a másik két új laphoz csatlakozik. Ezeknek a lapoknak még nincs közös élük a tetraéder két-két lapjával. Ugyanakkor feleslegessé vált az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ él egyik megmaradt darabja, $\overline{KD}$ és $\overline{LC}$. A hiányzó élek előállítására és a feleslegesek megszüntetése céljából a kapott idomot ki fogjuk egészíteni két kis tetraéderrel, amelyek lapjai a már meglévő lapok síkjaiból állnak elő.

Legyen $(QK) \cap (CD) = M$ és $(LM) \cap (BD) = U$. (Lényegében M a KLQ sík és a (CD) egyenes metszéspontja.)



Az egyik kiegészítő tetraéder $KMDU$ lesz. Hasonlóan kapjuk a z -re való szimmetriát megőrizve az $(SL) \cap (DC) = N$ és $(NK) \cap (AC) = V$ pontokat, illetve az $NLCV$ kiegészítő tetraédert. Mondhatjuk, hogy a hiányolt közös élek KU és UM , illetve LV és VN . A probléma most már csak az, hogy a $PQMUKL$ töröttvonal (és z -re vonatkozó tükörképe $RSNVLK$) nem egyszerű sokszög, mivel $K \in \overline{QM}$ illetve $L \in \overline{SN}$.

Ahhoz, hogy ezt a nem kívánt illeszkedést elkerüljük, elegendő a szóbanforgó töröttvonalak síkjait kissé elforgatnunk a (PQ) ill. (RS) egyenesek körül úgy, hogy a közös $\overline{KL}$ élük továbbra is illeszkedjen z -re, és kerüljön közelebb az $EFGH$ síkhoz. Így a töröttvonalak csúcspontjai is elmozdulnak P, Q, R és S kivételével. Az elmozduló pontok új helyzetének a jelölésére használjuk az eredeti betűket $*$ -gal ellátva. Mivel $\overline{K^*L^*} \parallel \overline{KL}$, K^* és L^* az ABD illetve ABC háromszög belsőjébe kerül, így nem lehet közös pontja a tetraéder másik két lapjára illeszkedő (QM^*) ill. (SN^*) egyenesekkel. A megmozgatott két síkra illeszkedő lap is egyszerű sokszöggé vált, a toroid többi lapja pedig a mi szempontunkból nem változott lényegesen. Ezzel megkaptuk a keresett hét lapú közönséges poliédert, amelynek csúcsai tehát (a z -re szimmetrikusokat egymás mellett felsorolva): $A, B; P, R; Q, S; F, H; K^*, L^*; U^*, V^*; M^*, N^*$.

A poliéder konkrét előállításához válasszuk az alapul vett tetraéder csúcsainak a derékszögű koordinátáit a

következőképpen:

	x	y	z
A	12	0	12
B	-12	0	12
C	0	-6	-12
D	0	6	-12

1. táblázat

$\overline{K^*L^*}$ -ot válasszuk úgy, hogy egyenlő szöget zárjon be $\overline{AB}$ -vel és $\overline{CD}$ -vel! Ekkor $\overline{KL}$ a négyzet-metszet magasságában, $z = -4$ -nél lesz. Így $\overline{K^*L^*}$ választható $z = -3$ magasságban, az EFGH sík pedig $z = 2$ magasságban. A további két síkot válasszuk úgy, hogy a Q ill. S csúcs az EFGH téglalap rövidebbik élének a felezőpontjára essen. Így a poliéder síkjainak egyenletei a következők:

(1)	$4y + z = 12$	(ABD)	sík
(2)	$-2x - z = 12$	(BCD)	"
(3)	$-5x + 5y - 7z = 21$	(K^*L^*S)	"
(4)	$5x - 5y - 7z = 21$	(K^*L^*Q)	"
(5)	$2x - z = 12$	(ACD)	"
(6)	$-4y + z = 12$	(ABC)	"
(7)	$z = 2$	(QRS)	"

2. táblázat

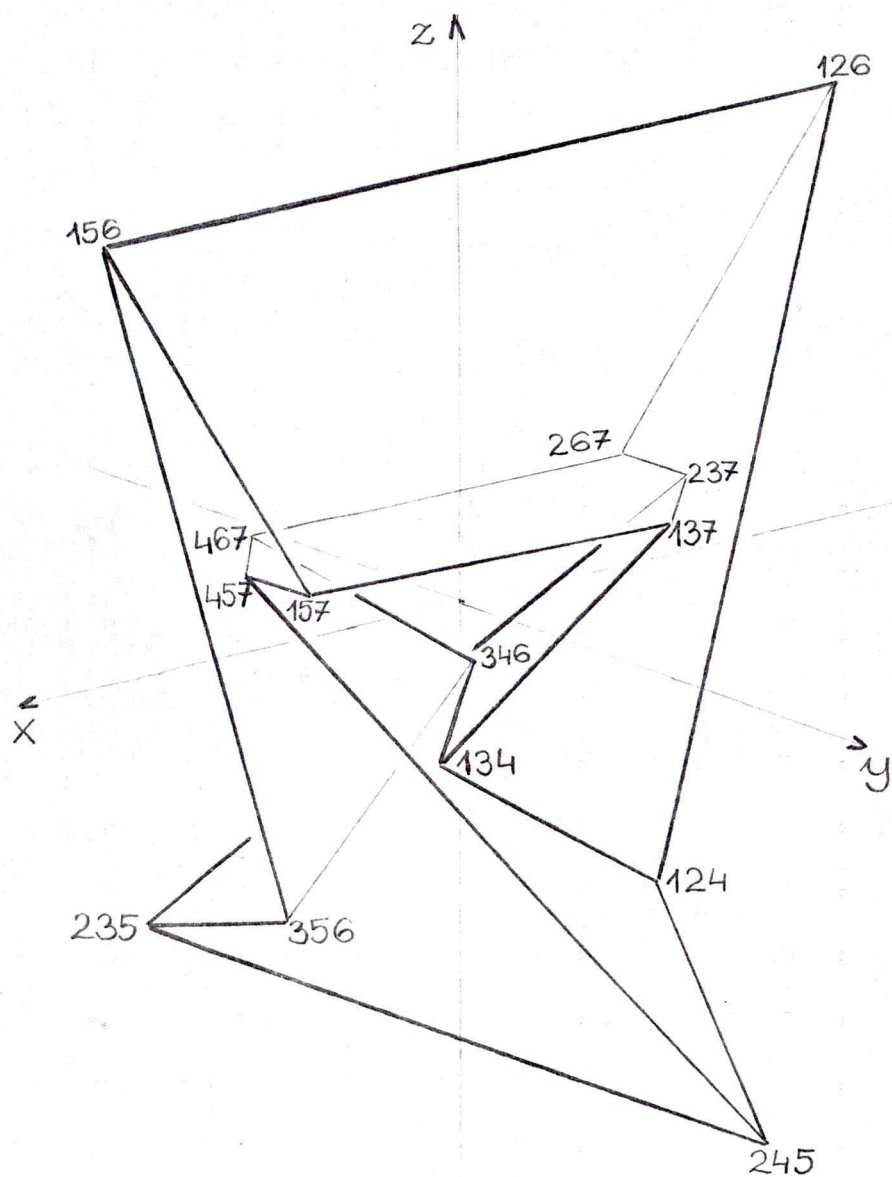
Célszerű a poliéder csúcsait az eddig használt jelölés helyett ismét három számmal, a rá illeszkedő síkok számaival jellemezni. Ilyen jelölés mellett könnyebb lesz áttekintenünk az egy lapra eső csúcsokat és éleket. (8. ábra)

A síkok egyenleteiből számítva a csúcsok koordinátáira a következő értékeket kaptuk:

	CSUCS	x	y	z
B	(1 2 6)	-12,00	0,00	12,00
A	(1 5 6)	12,00	0,00	12,00
N*	(2 3 5)	0,00	-12,60	-12,00
M*	(2 4 5)	0,00	12,60	-12,00
V*	(3 5 6)	2,00	- 5,00	- 8,00
U*	(1 2 4)	- 2,00	5,00	- 8,00
L*	(3 4 6)	- 3,75	- 3,75	- 3,00
K*	(1 3 4)	3,75	3,75	- 3,00
P	(4 6 7)	4,50	- 2,50	2,00
R	(1 3 7)	- 4,50	2,50	2,00
S	(2 3 7)	- 7,00	0,00	2,00
Q	(4 5 7)	7,00	0,00	2,00
H	(2 6 7)	- 7,00	- 2,50	2,00
F	(1 5 7)	7,00	2,50	2,00

3. táblázat

A poliéder realizálásához szükséges adatok a csúcs-pontok koordinátáiból egyszerűen számíthatók. A modell-



készítés megkönnyítéséhez két tizedesnyi pontosságig számolva megadjuk az egy lapra eső élek és átlók hosszát, valamint néhány további adatot, melyek elősegítik a modell pontosabb és gyorsabb elkészítését. A szükségesnél lényegesen több adat segíti a szerkesztésből adódó pontatlanság kiküszöbölését.

Mivel az alakzat szimmetrikus z -re, (1) - (6), (2) - (5) és (3) - (4) egybevágó lap-párok lesznek, így ezek adatait együtt közöljük.

Az (1) és (6) lap adatai:

oldalak
$D(126) - (156) = D(156) - (126) = 24,00$
$D(156) - (157) = D(126) - (267) = 11,45$
$D(157) - (137) = D(267) - (467) = 11,50$
$D(137) - (134) = D(467) - (346) = 9,72$
$D(134) - (124) = D(346) - (356) = 7,72$
$D(124) - (126) = D(356) - (156) = 22,91$
átlók
$D(126) - (157) = D(156) - (267) = 21,61$
$D(126) - (137) = D(156) - (467) = 12,74$
$D(126) - (134) = D(156) - (346) = 22,07$
$D(156) - (137) = D(126) - (467) = 19,45$
$D(156) - (134) = D(126) - (346) = 17,52$
$D(156) - (124) = D(126) - (356) = 24,91$
$D(157) - (134) = D(267) - (346) = 6,09$
$D(157) - (124) = D(267) - (356) = 13,68$
$D(137) - (124) = D(467) - (356) = 10,60$

4. táblázat

Az $(156) - (157)$ és $(126) - (124)$ oldalak meghosszabbításából adódó egyenlőszárú háromszög (ABD háromszög) $D = (125)$ csúcsából kiinduló magassága $m = 24,73$, a párhuzamos élek távolsága ennek $10/24$ -szerese: $d = 10,30$. A $K^* = (134)$ csúcs az $(156) - (157)$ él egyenesétől ($\overline{AD}$ -től)

$t = 0,67$ távolságra van. (A táblázatokon kívül közölt adatokat a D poliéder megfelelő csúcsaival megadott háromszögek magasságvonalaiként kaptuk.)

A (2) és (5) lap adatai:

oldalak
$D(245) - (235) = D(235) - (245) = 25,20$
$D(235) - (237) = D(245) - (457) = 20,09$
$D(237) - (267) = D(457) - (157) = 2,50$
$D(267) - (126) = D(157) - (156) = 11,45$
$D(126) - (124) = D(156) - (356) = 22,91$
$D(124) - (245) = D(356) - (235) = 8,81$
átlók
$D(245) - (237) = D(235) - (457) = 20,09$
$D(245) - (267) = D(235) - (157) = 21,74$
$D(245) - (126) = D(235) - (156) = 29,64$
$D(235) - (267) = D(245) - (157) = 18,62$
$D(235) - (126) = D(245) - (156) = 29,64$
$D(235) - (124) = D(245) - (356) = 18,15$
$D(237) - (126) = D(457) - (156) = 11,18$
$D(237) - (124) = D(457) - (356) = 12,24$
$D(267) - (124) = D(157) - (356) = 13,46$

Az $AN^* M^* = (156) (235) (245)$ egyenlőszárú háromszög $A = (156)$ csúcsából kiinduló magassága $m = 26,83$, a párhuzamos élek távolsága ennek $14/24$ -szerese: $d = 15,65$.

A (3) és (4) lap adatai:

oldalak
$D(237) - (235) = D(457) - (245) = 20,09$
$D(235) - (356) = D(245) - (214) = 8,81$
$D(356) - (346) = D(124) - (134) = 7,72$
$D(346) - (134) = D(134) - (346) = 10,60$
$D(134) - (137) = D(346) - (467) = 9,72$
$D(137) - (237) = D(467) - (457) = 3,53$
átlók
$D(237) - (356) = D(457) - (124) = 14,35$
$D(237) - (346) = D(457) - (134) = 7,04$
$D(237) - (134) = D(457) - (346) = 12,43$
$D(235) - (346) = D(245) - (134) = 13,16$
$D(235) - (134) = D(245) - (346) = 19,03$
$D(235) - (137) = D(245) - (467) = 21,07$
$D(356) - (134) = D(214) - (346) = 10,22$
$D(356) - (137) = D(124) - (467) = 14,08$
$D(346) - (137) = D(134) - (467) = 8,03$

A $\overline{K^*L^*} = (134) - (346)$ és a vele párhuzamos $\overline{QP} = (457) - (467)$ él távolsága $d = 7,03$. A $K^* = (134)$ csúcsnak a $\overline{QM^*} = (457) - (245)$ éltől mért távolsága $t = 1,03$. A toroid kialakításánál ezt a távolságot növeltük 0-ról 1,03-ra. A $\overline{K^*L^*}$ metszésvonal további emelésével tovább is növelhetnénk, de akkor $\overline{M^*N^*}$ aránytalanul megnőne.

A (7) lap adatai:

oldalak
$D(157) - (137) = 11,50$
$D(137) - (237) = 3,53$
$D(237) - (267) = 2,50$
$D(267) - (467) = 11,50$
$D(467) - (457) = 3,53$
$D(457) - (157) = 2,50$

7. táblázat

Ez a középpontosan szimmetrikus hatszög lényegében egy 5 és 14 oldalhosszúságú téglalapból alakítható ki, levágva belőle két egyenlőszárú derékszögű háromszöget, melyek befogói 2,5 hosszúak.

Az itt közölt adatokból áttekinthető modell készíthető 1 egységet 1 cm-nek, vagy 1,5 cm-nek véve.

(A 8. ábra a közölt adatokból építhető modell axonometrikus képe.)

A kapott poliéder legfontosabb tulajdonsága nyilvánvalóan a HEAWOOD-féle tóruszra rajzolt térképpel, illetve a Császár-poliéderrel való kapcsolata. Ezen túlmenően megvizsgáljuk néhány kevésbé alapvető, de érdekes tulajdonságát.

Topológiai tulajdonságait tekintve megemlíthető, hogy a kapott toroid épp úgy, mint a Császár poliéder, topológiailag szabályos. (Egy poliédert topológiailag szabályosnak nevezünk, ha minden lapjának ugyanannyi oldala van, és minden csúcsába azonos számú él fut be. Az ugyanilyen tulajdonságú - valamely felületre rajzolt - térképet is szabályosnak nevezzük. Tehát egy poliéder topológiailag szabályos, ha különböző lapjait különböző tartományoknak tekintve homeomorf egy szabályos térképpel.)

Metrikus tulajdonságai közül megemlíthető, hogy a közölt adatokból fel tudunk építeni egy vele egybevágó poliédert, amely azonban mozgással nem vihető át az eredetibe. Vagyis mindig van egy "jobbos" és egy "balos" változata.

Megfigyelhető, hogy az átlói közül egyedül az (126) - (457) és az (156) - (237) átlók nem illeszkednek egyik lap síkjára sem, tehát ezek a poliéder testátlói. Könnyen belátható, hogy az egyszerű poliéderek körében a gúláknak, valamint a háromszögalapú csonkagúláknak (és hasáboknak) nincsenek testátlói. Ha egy gúla alaplapja konkáv, akkor van ugyan olyan átlója, amely nem illeszkedik a felületre, de ez nem tekinthető "valódi" testátlónak,

ugyanis a poliéder egyik síkjára illeszkedik. A kapott poliéderből könnyen készíthetünk ilyen "valódi" testátló nélküli toroidot, ha a (3) és (4) síkot úgy vesszük fel, hogy az (157) és (457), valamint a (237) és (267) csúcsok essenek egybe. Ekkor azonban elveszti a poliéder azt a tulajdonságát, hogy bármely két lapja szomszédos.

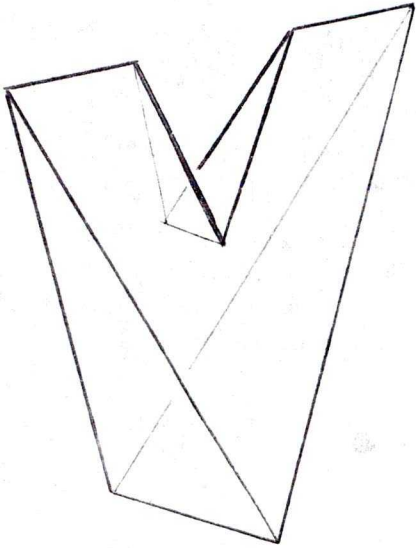
A kapott poliédernek van egy lényeges extrémális tulajdonsága is. Be fogjuk látni, hogy bármely toroidnak legalább 7 lapja van, tehát hétnél kevesebb lapból semmilyen tórusszal homeomorf poliéder nem építhető. Ehhez elegendő felsorolnunk a hétnél kevesebb lappal határolt poliéderek összes kombinatorikus típusait, és ha ezek között tórusszal homeomorf nem lesz, akkor az állítást igazoltuk.

A₂ [5] feladatgyűjtemény 55. feladata azt vizsgálja, hogy melyek a négy-, öt- és hatlapú poliéderek különböző kombinatorikus típusai. A feladatra közölt megoldás (L: [5] 111-113. old.) csak azokkal a poliéderekkel foglalkozik, melyekre teljesül, hogy bármely két lapnak legfeljebb egy közös éle van, vagy ha közös éle nincs, egy közös csúcsa lehet. (Megjegyezzük, hogy ez a kikötés a feladat kitűzésében nem szerepel.) Ha szomszédosnak nevezünk két lapot akkor is, ha csak közös csúcsuk van, akkor ezt a kikötést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy: bármely két lap legfeljebb egy helyen (azaz egy élben, vagy egy csúcsban) szomszédos. Ehhez elegendő - de nem szükséges - feltétel pl. a konvex megszorítás. Mint később látni fogjuk, ilyen

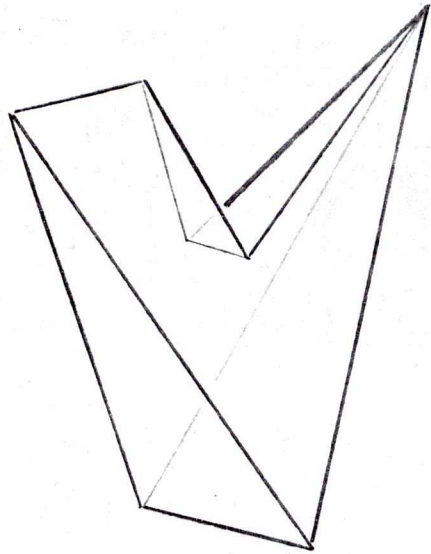
többszörösen szomszédos lapokkal rendelkező poliéder előállításához legalább hat lap kell, így a 4 és 5 lapú poliéderek [5] -ben leírt felsorolása teljes, a 6 lapúaké viszont nem.

Egy hatlapú poliédernek nem lehet körgyűrűvel homeomorf lapja, mert ha lenne ilyen lap, annak legalább hat különböző egyenesre illeszkednének az élei. (Ugyanis mindkét határvonal legalább háromszög.) A hatnál nem kevesebb él előállításához viszont hétnél nem kevesebb síkra van szükség. Így a hatlapú poliéderek lapjait egyszerű sokszögek alkotják.

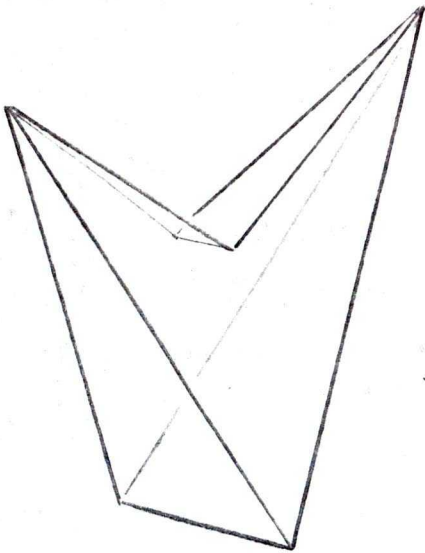
Meg fogjuk keresni az összes olyan hatlapú poliédert, melynek van többszörösen szomszédos lap-párja. (A "szomszédos" jelzőt egyenlőre az előbbi tágabb értelemben használjuk.) Jelölje (1) és (2) a hatlapú poliédernek azt a két lapját, melynek - élben, vagy csúcsban - kétszeresen szomszédosak. Ha az (1) - (2) egyenesre két él illeszkedik, akkor az egyik él végpontjaira illeszkedő (3) és (4), valamint a másik él végpontjaira illeszkedő (5) és (6) síkok nem metszhetik egymást élben, mert akkor az (1) és (2) síkokra illeszkedő sokszögek önátmetszők lennének. Ugyanakkor az (1) - (2) egyenes két "belső" csúcspontján átmenő (4) és (5) valamint a "külső" csúcspontokon átmenő (3) és (6) síkok feltétlenül élben metszik egymást, mert csak így kaphatunk közös síkú poliédert. Így a hat sík egy egyszerű poliédert alkot (9/a. ábra). Ugyanezt elmondhatjuk akkor is, ha az (1) és (2) lapnak közös éle és egy további közös csúcsa van



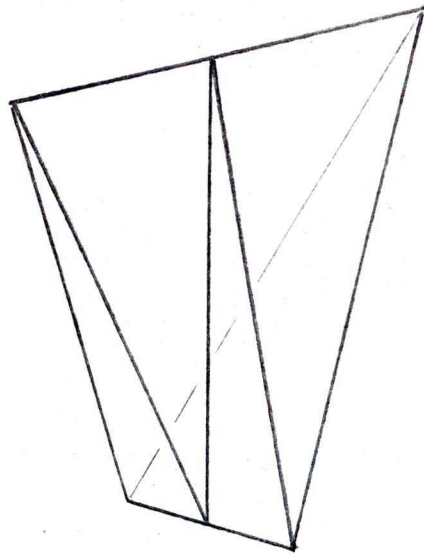
9/A



9/B



9/C



9/D

(9/b. ábra), vagy két közös csúcsa van, de közös éle nincs (9/c. ábra). Ezek az esetek származtathatók az előzőből is, ha az (1) és (2) lapok közös élei közül az egyiket, vagy mindkettőt ponttá zsugorítjuk. Mindhárom esetben az előállításához egyértelműen "használtuk fel" mind a hat síkot, így nem fordulhat elő sem olyan eset, melyben az (1) és (2) lapok kettőnél több "helyen" szomszédosak, sem olyan eset, melyben másik két lap is többszörösen szomszédos.

Ezzel előállítottunk három olyan hatlapú egyszerű poliédert, melyek nem szerepelnek az [5] 55. feladatára adott bizonyításban (L: [5] 111. ábra), és egyúttal megmutattuk, hogy ezek mellett csak olyan további, ezektől eltérő kombinatorikus típushoz tartozó hatlapú poliéderek léteznek, melyek bármely élének egyenesére nem illeszkedik további él, sem az él végpontjaitól különböző csúcs. Ha a poliéder valamely két éle mégis egy egyenesbe esik (az előbb tárgyalt eseteket kivéve) nem kapunk újabb kombinatorikus típust. Pl. a 9/d. ábrán bemutatott, látszólag hat darab háromszögből álló poliéder ugyanahhoz a kombinatorikus típushoz tartozik, mint az [5] 111/d ábráján látható 2 négyszögből és 4 háromszögből álló konvex poliéder.

Ha mostmár kikötjük, hogy olyan hatlapú poliédereket keresünk, melyek bármely élének egyenesére nem illeszkedik további él, vagy csúcs, akkor elfogadhatjuk a -ben leírt megoldást, amely hét további hatlapú poliédert sorol fel. Ez a megoldás sehol nem használja fel, hogy a

keresett poliéder egyszerű, ezzel lényegében igazolja, hogy hatlapú toroid nincs.

Mi indirekt úton fogjuk belátni, hogy hatlapú toroid nem létezik. Az előzőek értelmében elegendő feltennünk az olyan hatlapú toroid létezését, melynek minden lapja egyszerű sokszög, és egyetlen élének az egyenesére sem illeszkedik további él, vagy csúcs. Legyen egy ilyen $L = 6$ lapú, C csúcsú, E élű toroidnak x_3 háromszög, x_4 négyszög, x_5 ötszög lapja. (Hatszöglap a kikötések miatt már nem létezik.)

Az x_3 , x_4 és x_5 értékekre fennáll, hogy

$$x_3 + x_4 + x_5 = 6 \quad \text{és} \quad E = \frac{3x_3 + 4x_4 + 5x_5}{2}$$

Ezekből, valamint az Euler-féle összefüggésből kapjuk, hogy

$$C = 6 + \frac{x_5 - x_3}{2}$$

Ha $x_5 = x_3 = 0$, akkor a toroidnak 6 négyszög lapja van, de már 3 egy csúcsra illeszkedő négyszög is 7 csúcsot határoz meg, tehát ilyen poliéder nem létezhet. (Az $x_5 = 0$, $x_3 = 2$ eset még "rosszabb", mert már két négyszög is 5-nél több csúcsot határoz meg.) Hasonló eredményre jutunk $x_5 = x_3 = 1$ esetben is. Az ötszög, és a vele feltétlenül szomszédos négyszög együtt meghatároz hét csúcsot. Ha $x_5 = 2$, akkor a két ötszög meghatároz 8 csúcsot, de a csúcsok száma legfeljebb 7 lehet, így ez az eset is lehetetlen. Ahhoz, hogy a

csúcsok száma 8, vagy 9 legyen, 4 illetve 6 ötszöget kellene felvennünk, ezek közül pedig már három is legalább 10 csúcsot határoz meg. (Az előbbiekben végig kihasználtuk, hogy két lapnak legfeljebb egy közös éle, és így két közös csúcsa lehet. Az ettől eltérő eseteket már előzőleg megvizsgáltuk.)

Ezzel beláttuk, hogy bármely tórussszal homeomorf poliéder előállításához legalább 7 síkra van szükség, tehát a kapott poliéder lapjainak a száma minimális. Hasonlóan látható be, hogy hétnél kevesebb csúcsú toroid sem létezik, tehát a Császár-poliéder is extrémális ebből a szempontból.

IV. Néhány felvethető probléma

Mint az eddigiekből is kitűnt, egyelőre eldöntetlen az a kérdés, hogy létezik-e a Császár-poliédernek és a kapott poliédernek olyan változata, melyeket egy alkalmas térbeli polaritás egymásba visz át. Eddig ugyanis a Császár-poliéder projektív (ill. euklideszi) geometriai értelemben vett duálisaként nem tudtunk közös poliedert előállítani, és a kapott poliéder "eredeti" alakzata nem közös polieder. Minthogy a Császár-poliéder duálisai között is voltak az önmetszés szempontjából lényegesen különbözők (3.sz. melléklet), a kapott poliéder többféle alakzatból is előállítható az eredeti alakzat és az alapgömb alkalmas megválasztásával (8.sz. melléklet). Így nem kizárt a két közös, egymásba polaritással átvihető poliéder létezése.

Felvethető az a kérdés is, hogy a magasabb nemszámú felületek között akad-e olyan, amely a Császár-poliéder, vagy a kapott poliéder tulajdonságaival rendelkezik.

További, átló nélküli poliéder keresésének a kérdése már felvetődött [3]. Ezzel kapcsolatban a következőket mondhatjuk:

Egy p nemszámú poliéder, (vagy p nemszámú felületre rajzolt térkép) Euler-karakterisztikáját felírva az $L + C - E = 2 - 2p$ egyenlőséghez jutunk, ahol

L a lapok, C a csúcsok, E az élek számát jelöli. Olyan poliédert keresünk, melynek nincs átlója, vagyis bármely két csúcsa pontosan egy élt határoz meg, tehát az élek száma $E = \frac{C(C-1)}{2}$. Másrészt a poliédernek csak háromszög lapjai vannak, és minden él két lap határán fekszik, így $3L = 2E$. A három egyenletből:

$$\frac{C(C-1)}{2} \cdot \frac{2}{3} + C - \frac{C(C-1)}{2} = 2 - 2p$$

Innen

$$p = \frac{(C-3)(C-4)}{12}.$$

Mivel p a poliéder nemszáma egész szám, a következő C ($C-3$) értékeknél kapunk egész p értéket:

Csúcs	Lap	Él	Euler-kar	Nemszám	Megjegyzés
(C)	(L)	(E)	(χ)	p	
4	4	6	2	0	Tetraéder
7	14	21	0	1	Császárpolyéder
12	44	66	-10	6	Ismeretlen
15	70	105	-20	11	Ismeretlen
16	80	120	-24	13	Ismeretlen

8. táblázat

16-nál nagyobb C értékek esetén a nemszám nagyobb lesz a csúcsok számánál, így itt már - M.Gardner szerint:
 $L: [3]$ - nem valószínű az átló nélküli poliéder létezése.

A fenti három ismeretlen poliéder megkeresése, vagy annak igazolása, hogy nem léteznek, nehéz kérdésnek tűnik.

Ha meg akarjuk vizsgálni, hogy a magasabb nemszámú (negatív Euler-karakterisztikájú) felületek között található-e tetraéderen és a talált hétlapú poliéderen kívül további olyan poliéder, melynek bármely két lapja szomszédos, (szomszédos lapokon ismét a közös éllel rendelkező lapokat értjük) akkor a felületek Euler-karakterisztikája és kromatikus száma közötti Heawood-féle összefüggésből kell kiindulnunk.

Heawood tétele kimondja, hogy a $\chi < 2$ karakterisztikájú felületre rajzolt bármely térkép kiszínezhető legfeljebb $[N]$ színnel, ahol

$$(1) \quad N = \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi}}{2}$$

Az $[N]$ számot nevezzük a felület kromatikus számának. (L: [1] 390-391.old.)

A mi szempontunkból elegendő az irányítható, zárt felületekkel foglalkozni, amelyekre rajzolt térkép bármely csúcsába legalább 3 él fut be, és bármely - kör-lappal homeomorf - tartományának legalább 3 éle van. (A kikötésektől eltérő eseteket vissza lehet vezetni ezekre az esetekre.)

A tétel igazolásához először megvizsgáljuk, hogy milyen összefüggés van a felület Euler-karakterisztikája, egy rárajzolt rétkép tartományainak száma, és az egy lapra eső élek átlagos száma között. Jelölje a χ Euler-karakterisztikájú felületre rajzolt valamely térkép tarto-

mányainak (továbbiakban lapjainak), csúcsainak és éleinek a számát rendre L , C , és E , valamint az egy lapra eső élek átlagos számát a . Ezekre fennáll a

$$(2) \quad L + C - E = \gamma$$

$$(3) \quad 2E \leq 3C$$

$$(4) \quad 2E = aL$$

összefüggés.

(2) és (3) alapján

$$E \leq E + 2E - 3C = 3(L - \gamma)$$

Ebből és (4)-ből

$$(5) \quad a = \frac{2E}{L} \leq 6\left(1 - \frac{\gamma}{L}\right)$$

Ez azt jelenti, hogy ha egy γ karakterisztikájú felületre egy L lapú térképet rajzolunk, akkor annak biztosan van legalább egy olyan lapja, amelynek $6\left(1 - \frac{\gamma}{L}\right)$ -nél nincs több éle, azaz nincs több szomszédja. Ezt fogjuk felhasználni a Heawood-tétel igazolásához.

Az N és γ közötti (1) összefüggés, melyet igazolni akarunk, $N^2 - 7N + 6\gamma = 0$ alakra is hozható. Ezt célszerű átírunk

$$(6) \quad 6\left(1 - \frac{\gamma}{N}\right) = N - 1$$

alakba.

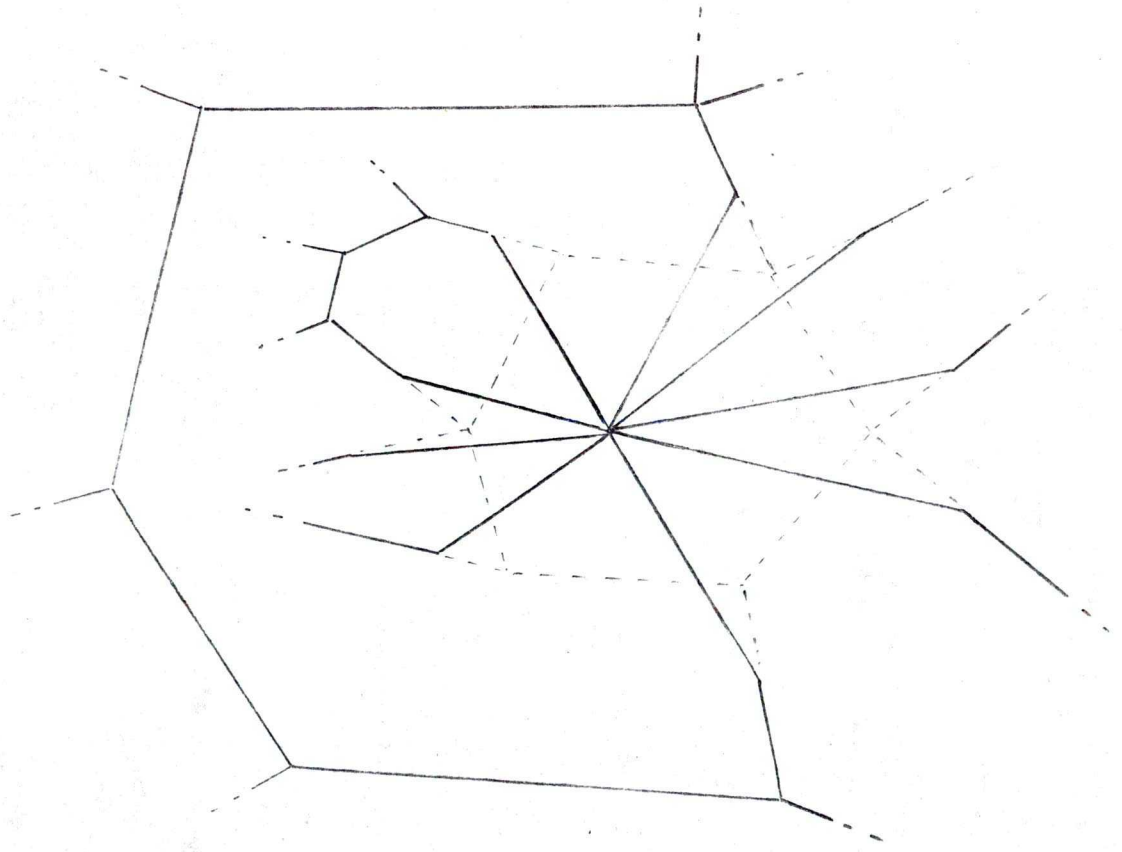
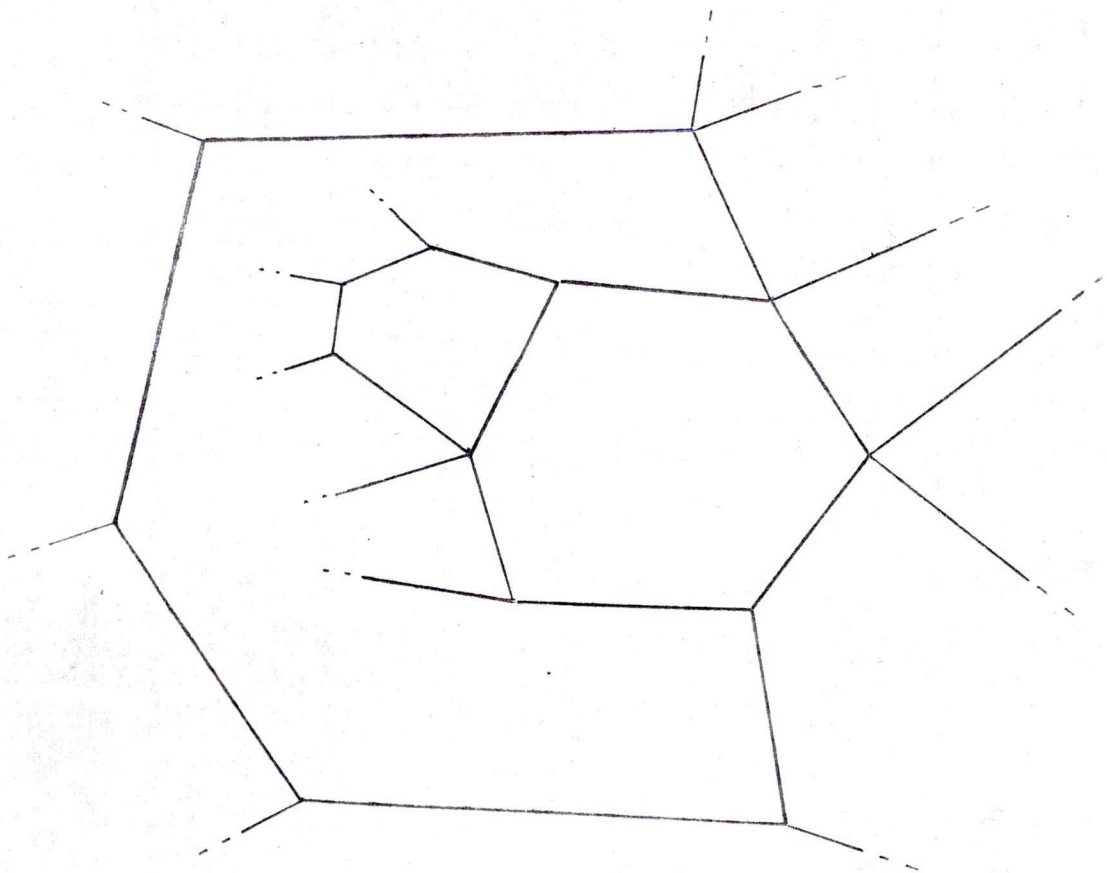
A tétel igazolását a lapok száma szerinti teljes indukcióval végezzük. $L \leq N$ esetben nyilvánvalóan kiszínezhető a térkép $[N]$ színnel. Legyen $L > N$. Tegyük fel, hogy a γ karakterisztikájú felületre rajzolt bármely $L - 1$ lapú térkép (melynek minden lapja

homeomorf a körlappal) kiszínezhető $[N]$ színnel. Egy L lapú térképet felvéve (5) és (6), valamint $\chi < 0$ és $L > N$ alapján

$$a \leq 6(1 - \frac{\chi}{L}) \leq 6(1 - \frac{\chi}{N}) = N - 1,$$

vagyis van az L lapú térképnek legalább egy olyan lapja, amely legfeljebb $[N] - 1$ lappal szomszédos. Válaszunk ki egy ilyen lapnak a belsőjében egy pontot, és a lap éleit eltörölve hosszabbítsuk meg (külön-külön) a lap csúcsaiba befutó többi élt a kiválasztott pontig. (10. ábra). Ezzel egy $L - 1$ lapú térképet kaptunk, melynek nem lesz önmagával szomszédos (tehát többszörösen összefüggő) lapja akkor sem, ha a kiválasztott lap valamelyik másik lappal többszörösen szomszédos. Ezzel a kiválasztott lapot felosztottuk a vele közös éllel és közös csúccsal rendelkező tartományok között. Az így kapott $L - 1$ lapú térkép (melynek élei és csúcsai továbbra is összefüggő gráfot alkotnak), az indukciós feltevés értelmében kiszínezhető $[N]$ színnel. A színezés során a kiválasztott lap $[N] - 1$ szomszédjának a kiszínezéshez legfeljebb $[N] - 1$ szint használhatunk fel, így az eredeti állapotot visszaállítva a kiválasztott lap megkaphatja az $[N]$ -edik szint, ezzel az L lapú térképet is kiszíneztük.

Ez a bizonyítás nem alkalmazható a gömbre, mert $\chi > 0$ miatt nem tudjuk igazolni a $6(1 - \frac{\chi}{L}) \leq 6(1 - \frac{\chi}{N})$ egyenlőtlenséget. Megjegyezhető azonban, hogy az (1) képlet $\chi = 2$ esetben is a helyes $[N] = 4$ értéket adja. A



gömbre vonatkozó négyszintételt 1977-ben sikerült igazolni, számítógép felhasználásával.

Heawood azt sejtette, hogy az így kapott $[N]$ kromatikus szám bármely felületre a lehető legkisebb, azaz bármely felületre rajzolható olyan térkép, melynek a kiszínezéséhez szükség van az $[N]$ színre. A $p = 1$ nemszámú tóruszra meg is rajzolta ezt a térképet, melyet mi most síklapokkal realizáltunk. Ebből a sejtésből 1968-ban lett bizonyított tétel, amikor Ringel és Youngs igazolta, hogy minden irányítható felületre rajzolható olyan $[N]$ lapból álló térkép, melynek bármely két lapja szomszédos, tehát a helyes kiszínezéshez szükség van az $[N]$ színre. A nem irányítható felületek között is csak egyetlen kivétel van, a Klein-féle kancsó, melyre a Heawood-tételből $[N] = 7$ érték adódik, de Philip Franklin igazolta, hogy Klein-kancsóra rajzolt bármely térkép 6 színnel is kiszínezhető. (L: $[1]$).

A χ karakterisztikájú felületre rajzolt $[N]$ páronként szomszédos lappal rendelkező térkép csak azokban az esetekben lesz szabályos, melyek a 8. táblázatban leírt (illetve annak folytatásaként kapható) esetek duálisai. Ekkor $[N] = N$. A többi felületre csak úgy lehet $[N]$ páronként szomszédos lapú térképet felvenni, ha vannak olyan lap-párok is, melyek többszörösen szomszédosak.

Ha ugyanis $[N] = N$, akkor $L = N$ lapot,
 $C = \frac{N(N-1)}{3}$ csúcsot és $E = \frac{N(N-1)}{2}$ élt felvéve N
és χ között fennáll az

$$N + \frac{N(N-1)}{3} - \frac{N(N-1)}{2} = N \frac{N(N-1)}{6} = \gamma$$

összefüggés, amely éppen (1)-gyel ekvivalens. Ha viszont $[N] < N$, akkor amennyiben olyan térképet szeretnénk felvenni, hogy bármely két lapjának pontosan egy közös éle legyen, akkor N helyére $[N]$ -t írva $L + C - E$ -re γ -nál nagyobb értéket kapunk ($N > 7$ miatt). Az egyenlőséget az élek számának a növelésével állíthatjuk vissza, ami viszont csak úgy lehetséges, hogy többszörösen szomszédos tartományokat is megengedünk. Pl. B.M.Stewart [6]-ban közli egy olyan $p = 2$ nemszámú, 8 szabályos sokszögből felépíthető poliéder Schlegel diagramját, melynek lapjait alkalmas módon színezve, és az egy színű lapokat egyetlen tartománynak tekintve megkapjuk a $p = 2$ felület kromatikus számának megfelelő 8 egymással páronként szomszédos tartományt. Ebben van két olyan tartomány, melyeknek két közös határvonaluk van, és ezek végpontjain túl is van még egy közös csúcsuk.

Mivel nem feltétlenül olyan poliédert keresünk, amely topológiaiilag szabályos, bármely magasabb nemszámú felületet vizsgálva is előfordulhat, hogy találunk olyan poliédert, melynek lapjai páronként szomszédosak. Ilyen poliéderek keresése, vagy annak igazolása, hogy a tetraéderen és az itt bemutatott poliéderen kívül nincs több ilyen, további vizsgálatokat igényel.

I R O D A L O M

- [1] COXETER, H.S.M.: A geometriák alapjai (Műszaki Könyvkiadó, 1973.)
- [2] CSÁSZÁR Á.: A polyhedron without diagonals (Acta Sci. Math. 13 (1949-50.) 140-142.old.)
- [3] GARDNER M.: On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving (Scientific American, 1975/3., 102-107. old.)
- [4] HAJÓS GY. - NEUKOMM GY. - SURÁNYI J.: Matematikai versenytételek II. (Tankönyvkiadó, 1965.)
- [5] SKLJARSZKIJ, D.O. - CSENCOV, N.N. - JAGLOM, I.M.: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 3. Geometria II. (Szttereometria) (Tankönyvkiadó, 1972.)
- [6] STEWART B.M.: Adventures among the Toroids (Okemos, Michigan, 1970.)
- [7] SZILASSI L.: A térbeli polaritás és néhány alkalmazása (A Matematika Tanítása - megjelenés alatt-)
- [8] SZILASSI L.: Egy poléder, melynek bármely két lapja szomszédos (A Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei 1977. - megjelenés alatt-).