

BECSÜLT PARAMÉTERŰ EMPIRIKUS FOLYAMATOK
ÉS
TRANSZFORMÁCIÓIK

Doktori értekezés

Készítette: Horváth Lajos

tud. segédmunkatárs

József Attila Tudományegyetem

Bolyai Intézet

Szeged

1982.



TARTALOM

1. Bevezetés
2. A kovariancia függvény által generált Hilbert-tér
3. Véletlen mintán alapuló transzformáció
4. A becsült paraméterű empirikus folyamat transzformációja
5. A Kaplan-Meier modell
6. Paraméterbecslés cenzorált mintából
7. Az exponenciális eloszlás paraméterének becslésére vonatkozó módszerek összehasonlítása



Köszönetet mondok dr. Csörgő Sándor docensnek emberi és szakmai támogatásáért. Közös munkáink, beszélgetéseink nélkül ez a dolgozat sem jöhetett volna létre.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban olyan véletlen mintán alapuló folyamatokkal foglalkozunk, melyek valamilyen ismeretlen paramétertől függnék és ezt az ismeretlen paramétert is a rendelkezésünkre álló mintából kell megbecsülnünk. Példaként a 4. fejezetben a $\beta_n(x)$ becsült paraméterű empirikus folyamatot vizsgáljuk. A $\beta_n(x)$ folyamat gyengén konvergál $D(x)$ Gauss folyamathoz (vö. DURBIN [9], STEPHENS [22], BURKE, M.D., CSÖRGŐ M., CSÖRGŐ S. és RÉVÉSZ [3]), de ez a tétel önmagában nehezen alkalmazható összetett hipotézis ellenőrzésére. A problémát az jelenti, hogy a $D(x)$ folyamat nevezetes funkcionáljainak (szuprémum, négyzetintegrál) az eloszlása általában nem ismert, vagy függ az ismeretlen paraméter értékétől. A statisztikusok olyan funkcionálokat kerestek, melyek csak az eloszláscsaládtól függnék, de függetlenek a paraméter igazi értékétől és ezeknek a funkcionáloknak az eloszlása már ismert. Ezek a kísérletek azonban nem jártak eddig sikerrel.

L.N. Bolshev kérdezte először, hogy létezik-e olyan k magfüggvény, hogy az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(x, y) dD(x) dD(y), \quad x, y \in R^1,$$

valószínűségi változó eloszlása megegyezzen valamilyen jól ismert eloszlással. A kérdéssel foglalkozott többek között DZSAPARIDZE és NIKULIN [10] is, akik a $D(x)$ folyamat ortogonális sorfejtését felhasználva eltolás és skála paraméter esetén elérték, hogy a limeszfolyamat egy Brown hid és egy tőle független normális eloszlású valószínűségi változó összege legyen. A kapott módszer, amely normális eloszlású valószínűségi változó generálásán és így randomizáción alapul, nehezen használható és általánosabb esetekben nem alkalmazható. A kérdést a $\beta_n(x)$ folyamat

martingál tulajdonságát felhasználva vizsgálta még HMALADZE [12], [13].

A problémát sokkal általánosabban vetette fel CSÖRGŐ [6], aki bevezette az

$$(1.1) \quad \int_{R^d} k(x, y) d\beta_n(x), \quad x \in R^d, y \in R^q$$

magfüggvény által transzformált becsült paraméterű empirikus folyamatot. Többek között bebizonyította, hogy bizonyos regularitási feltételeknek eleget tevő $k(x, y)$ magfüggvény esetén (1.1) gyengén konvergál az

$$(1.2) \quad \int_{R^d} k(x, y) dD(x)$$

Gauss folyamathoz. A most idézett tétel alkalmazhatóságának az szab határt, hogy eddig még nem sikerült olyan $k(x, y)$ magfüggvényt találni, hogy (1.2) valamilyen ismert folyamatra redukálódott volna.

Dolgozatunkban azt vizsgáljuk, hogy lehet-e (1.1)-ben a k magfüggvény helyett valamilyen véletlen, a rendelkezésünkre álló mintán alapuló magfüggvényt választani úgy, hogy a folyamat már ismert folyamat legyen. Ezt a kérdést a 3. fejezetben sokkal általánosabban vetjük fel, és igenlően meg is válaszoljuk. Magfüggvényünk konstrukciója bizonyos funkcionál-analitikus eszközök használatán mulik, ezeket ismerteti a 2. fejezet.

Az 5-7. fejezetekben a cenzorált adatokon alapuló paraméterbecslési eljárásokkal, becsült paraméterű szorzatbecslés és hazard folyamatokkal foglalkozunk. Három módszert mutatunk be és példákkal igazoljuk ezek használhatóságát. A 6. fejezet befejezéseként olyan χ^2 próbát ismertetünk, amely normalitás vizsgálatára is alkalmazható, amikor a rendelkezésünkre álló adatok cenzoráltak.

A 7. fejezetben az exponenciális eloszlás paraméterének becslésére vonatkozó három módszerünk aszimptotikus tulajdonságait hasonlítjuk össze.

2. A kovariancia függvény által generált Hilbert-tér

Jelöljön $\{X(t), t \in I^d\}$ egy a d -dimenziós euklideszi tér egy-ségnégyzetén értelmezett Gauss-folyamatot, melynek majdnem minden rea-lizációja folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $EX(t) = 0, t \in I^d$ és kovariancia függvényét jelölje $R(t, s)$;

$$EX(t)X(s) = R(t, s), \quad t, s \in I^d.$$

Ekkor $R(t, s)$ szimmetrikus, pozitív-definit, folytonos függvény, amely az I^d -n értelmezett, valós értékű függvények egy részhalmazán Hilbert-teret értelmez, melyet a szokásos módon $H(R)$ -rel jelölünk és a kova-riancia függvény által generált Hilbert-térnek nevezzük. A $H(R)$ tér egy részletes ismertetése ARONSZAJN [1] dolgozatában található, mi csak azokat a legfontosabb tulajdonságokat foglaljuk össze, melyeket a ké-sőbbiekben használni fogunk.

A $H(R)$ tér a $\mathcal{S}_p(R(t, \cdot), t \in I^d)$ lezárásával jön létre és a $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ belső szorzat a következő tulajdonsággal rendelkezik ("re-producing property"):

$$(2.1) \quad \text{ha } h \in H(R), \text{ akkor } \langle h, R(t, \cdot) \rangle_R = h(t), \quad t \in I^d.$$

Vezessük be az I^d -n értelmezett, valós értékű, folytonos függvények terének jelölésére $\mathcal{C}$ -t. A $\mathcal{C}$ tér a szokásos szuprénum normával ellátva szeparábilis Banach tér. A (2.1) tulajdonságból következik, hogy folytonos kovariancia függvény esetén $H(R) \subset \mathcal{C}$ (a tartalmazást halmaz-



elméleti értelemben értjük) és a $H(R)$ -beli konvergenciából következik a $\mathcal{C}$ -beli konvergencia is. A $\mathcal{C}$ téren értelmezett, korlátos és lineáris funkcionálok $\mathcal{C}^*$ osztályát azonosíthatjuk az I^d egységnégyzet Borel-halmazain értelmezett mértékek összegével. Ha $\nu \in \mathcal{C}^*$, akkor a Hahn-Jordan felbontási tétel alapján $\nu = \nu^+ - \nu^-$, továbbá $\|\nu\| = \nu^+(I^d) + \nu^-(I^d)$ normát definiál $\mathcal{C}^*$ -on. A következő lemma a $H(R)$ tér elemeinek egy egyszerű tulajdonságát fejezi ki, kapcsolatot teremtve $H(R)$ és $\mathcal{C}^*$ elemei között. A lemma bizonyítása MANGANO [18] dolgozatából származik, aki a $d=1$ esetet vizsgálta csak, de módszere tetszőleges d esetén is alkalmazható.

2.1 LEMMA (MANGANO [18]). Tegyük fel, hogy $\nu \in \mathcal{C}^*$ és R folytonos kovariancia függvény. Definiáljuk a

$$h(t) = \int_{I^d} R(t,s) \nu(ds)$$

függvényt. Ekkor

$$(2.2) \quad h \in H(R)$$

$$(2.3) \quad \text{ha } f \in H(R), \text{ akkor } \langle h, f \rangle_R = \int_{I^d} f(t) \nu(dt)$$

$$(2.4) \quad \|h\|_R^2 = \langle h, h \rangle_R = \iint_{I^d \times I^d} R(t,s) \nu(dt) \nu(ds).$$

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az I^d kocka tetszőleges, m elemből álló Borel mérhető felbontását. A felbontás i -dik elemének ν szerinti mértékét jelölje ν_i , S_i pedig legyen tetszőleges az i -dik halmazban levő pont, $1 \leq i \leq m$. A

$$h_m(t) = \sum_{i=1}^m R(t, S_i) \nu_i$$

Riemann-Stieltjes összeg pontonként konvergál a $h(t)$ függvényhez, ha $m \rightarrow \infty$. Alkalmazzuk az

$$(2.5) \quad R(t, s) = \langle R(t, \cdot), R(s, \cdot) \rangle_R$$

azonosságot! Azt kapjuk, hogy

$$(2.6) \quad \langle h_m, h_n \rangle = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n R(s_i, s_j) v_i v_j$$

konvergál a $\int_{I^d} \int_{I^d} R(t, s) v(dt) v(ds)$ integrálhoz, ha m, n tart a végtelenbe. A norma definíciója alapján

$$\|h_m - h_n\|_R^2 = \langle h_m, h_m \rangle_R + \langle h_n, h_n \rangle_R - 2 \langle h_n, h_m \rangle$$

0-hoz tart, ha $m, n \rightarrow \infty$. A $H(R)$ tér teljessége miatt $\{h_m, m \geq 1\}$ konvergál a $\|\cdot\|_R$ normában egy $h^* \in H(R)$ függvényhez. A $H(R)$ -

beli konvergenciából következik a pontonkénti konvergencia is, ezért $h^*(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m(t) = h(t)$, $t \in I^d$, tehát valóban $h \in H(R)$.

Ha $f(t) = R(t, t_0)$, $t_0 \in I^d$, akkor a (2.5) tulajdonság miatt

$$\langle h, f \rangle_R = \int_{I^d} R(t, t_0) v(dt) = \int_{I^d} f(t) v(dt).$$

Az előző rész bizonyításához hasonló módon lehet ezután az

$f \in \text{sp}(R(t, \cdot), t \in I^d)$ lineáris kombinációira belátni (2.3) állítást, majd határátmenet alkalmazásával minden $H(R)$ -beli elemre igazolható az állítás.

A (2.4) formula a (2.6) konvergencia közvetlen következménye.

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogyan lehet teljes, ortonormált rendszert (CONS) $H(R)$ -ben megadni. Egy CONS-t könnyen meg tudunk adni, az R kovariancia függvényhez tartozó sajátértékek és sajátvektorok

segítségével. Az R kovariancia függvény minden $\{\lambda_i, i \geq 1\}$ sajátértéke pozitív, a megfelelő $L_2(I^d)$ értelemben normált sajátfüggvények rendszerét jelölje $\{\varphi_i(t), t \in I^d, i \geq 1\}$. Ekkor

$$(2.7) \quad \varphi_j(t) = (\lambda_j)^{-1/2} \int_{I^d} R(t,s) \varphi_j(s) ds, \quad t \in I^d$$

CONS a $H(R)$ -ben. A 2.1 Lemmából következik, hogy a $\{\varphi_j(t), t \in I^d, j \geq 1\}$ rendszer $H(R)$ -beli és a $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ belső szorzatra nézve ortonormált, a teljesség pedig a 2.1 Lemma bizonyításához hasonló módon következik a Mercer-féle tételből.

Jelölje $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező véges második momentummal rendelkező valószínűségi változói által alkotott Hilbert teret. Az $\{X(t), t \in I^d\}$ folyamat által generált lineáris tér $L_2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ -beli lezárása Hilbert-tér. Jelölje ezt $L(X)$. Az $L(X)$ és a $H(R)$ terek kongruensek, $\text{cong}: L(X) \rightarrow H(R)$ jelöli a természetes kongruenciát, melyet az

$$R(t, \cdot) = \text{cong}(X(t))$$

összefüggés definiál.

2.2 LEMMA (SATO [21]) Legyen $\{X(t), t \in I^d\}$ 1 valószínűséggel folytonos realizációju Gauss folyamat. $L(X)$ szeparábilis és minden $\{\xi_i, i \geq 1\}$ $L(X)$ -beli CONS $\xi_i = \varphi_i(X)$ alakú, ahol $\varphi_i \in \mathcal{C}^*$ és

$$(2.8) \quad \varphi_i = \mu_i / \sigma_i, \quad \mu_i \in \mathcal{C}^*, \quad \|\mu_i\| = 1,$$

$$(2.9) \quad \sigma_i = \left[\int_{I^d} \int_{I^d} R(t,s) \mu_i(dt) \mu_i(ds) \right]^{1/2} > 0,$$

$$(2.10) \quad \int_{I^d} \int_{I^d} R(t,s) \mu_i(dt) \mu_j(ds) = 0, \quad i \neq j.$$

Sato lemmája nemcsak az $L(X)$ tér CONS rendszereit jellemzi, hanem az $L(X)$ és $H(R)$ terek kongruenciája miatt $H(R)$ -ben is megad minden CONS-t. Minden $\{\xi_i = \varphi_i(X), i \geq 1\}$ $L(X)$ -beli CONS-t a természetes congruencia $\{e_i = \text{cong}(\xi_i), i \geq 1\}$ H -beli CONS-be viszi át. A (2.1) tulajdonság alapján

$$e_i(t) = \langle e_i, R(t, \cdot) \rangle_R = E \xi_i X(t) = \int_{I^d} R(t, s) \varphi_i(ds).$$

A következőkben azt vizsgáljuk, hogy ha két, 1 valószínűséggel folytonos realizációju Gauss folyamat kovariancia függvényeinek a távolsága kicsi, akkor mit mondhatunk az általuk generált Hilbert-terek bázisairól. A következő állítás Mangano 2.2 Lemmájának egy egyszerű átfogalmazása és enyhe általánosítása. A bizonyítás konstruktív, amely a 4. fejezetben lehetővé teszi a becsült paraméterű empirikus folyamat véletlen transzformációját.

2.3 LEMMA (MANGANO [18]). Tegyük fel, hogy $\{X(t), t \in I^d\}$, $\{Y(t), t \in I^d\}$ 1 valószínűséggel folytonos realizációju Gauss folyamatok, $EX(t) = EY(t) = 0$, $EY(t)Y(s) = G(t, s)$, $EX(t)X(s) = R(t, s)$. Jelöljön N egy tetszőleges pozitív egész számot, továbbá legyen $\{e_i(t), t \in I^d, i \geq 1\}$ $H(R)$ -beli CONS, melyet a $\{\varphi_i, i \geq 1\}$ mértékek generálnak. Ha

$$(2.11) \quad \sup_{(t,s) \in I^{2d}} |G(t,s) - R(t,s)| \leq \Delta \leq \frac{1}{K_1},$$

akkor létezik egy olyan $H(G)$ -beli $\{f_i, 1 \leq i \leq N\}$ ortonormált halmaz, melyet a $\{K_i, 1 \leq i \leq N\}$ mértékek generálnak és

$$(2.12) \quad \|K_i - \varphi_i\| \leq \Delta K_2, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$(2.13) \quad \sup_{t \in I^d} |e_i(t) - f_i(t)| \leq \Delta K_3, \quad 1 \leq i \leq N,$$

ahol K_1, K_2, K_3 a $\|v_1\|, \dots, \|v_N\|$, $M = \max_{(t,s) \in I^{2d}} |R(t,s)|$
konstansok pozitív együttthatós polinomjai.

BIZONYÍTÁS. Definiáljuk a következő mennyiséget:

$$\mu_1^* = \left[\int_{I^d} \int_{I^d} G(t,s) v_1(dt) v_1(ds) \right]^{1/2}.$$

A négyzetgyökvonás elvégezhető, mivel a $\Delta \leq \frac{1}{2\|v_1\|^2} = \frac{1}{2K_{11}^2}$ fel-
 tételből következik, hogy

$$\int_{I^d} \int_{I^d} G(t,s) v_1(dt) v_1(ds) \geq 1 - \Delta \|v_1\|^2 > \lambda.$$

Rekurzív módon definiáljuk a $\{\mathcal{K}_i, 1 \leq i \leq N\}$ mértékeket:

$$\mathcal{K}_1 = v_1 / \mu_1^*,$$

$$\mu_{21} = \int_{I^d} \int_{I^d} G(t,s) v_2(dt) \mathcal{K}_1(ds),$$

$$m_2 = v_2 - \mu_{21} \mathcal{K}_1,$$

$$\mu_2^* = \left[\int_{I^d} \int_{I^d} G(t,s) m_2(dt) m_2(ds) \right]^{1/2},$$

$$\mathcal{K}_2 = m_2 / \mu_2^* = \frac{1}{\mu_2^*} v_2 - \frac{\mu_{21}}{\mu_1 \mu_2^*} v_1,$$

$$\mu_{ij} = \int_{I^d} \int_{I^d} G(t,s) v_i(dt) \mathcal{K}_j(ds), \quad j < i,$$

$$m_i = v_i - \mu_{i,i-1} \mathcal{K}_{i-1} - \dots - \mu_{i,1} \mathcal{K}_1,$$

$$\mu_i^* = \left[\int_{I^d} \int_{I^d} G(t,s) m_i(dt) m_i(ds) \right]^{1/2},$$

$$\mathcal{K}_i = m_i / \mu_i^*.$$

Az eljárásból következik, hogy az így definiált $\{K_i, 1 \leq i \leq N\}$ mértékek a $\{v_i, 1 \leq i \leq N\}$ mértékek lineáris kombinációi. A továbbiakban bebizonyítjuk, hogy a tétel feltételei mellett $(\mu_i^*)^2 > 0$, illetve pontosan megadjuk a $K_i, i=1, 2, 3$ polinomokat. Már beláttuk, hogy

$$|1 - (\mu_1^*)^2| \leq \Delta \|v_1\|^2 = \Delta K_{11}^2$$

és

$$\frac{1}{1 - \Delta \|v_1\|^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{ha} \quad \Delta \leq \frac{1}{2K_{11}^2}.$$

Igy tehát

$$\|v_1 - K_1\| \leq \left| \frac{1 - \mu_1}{\mu_1} \right| \|v_1\| \leq \Delta \|v_1\|^3 = \Delta K_1^2.$$

Hasonló módon folytatjuk:

$$|\mu_{21}| = \left| \int_{I^d} \int_{I^d} R(t, s) v_2(dt) v_1(ds) - \int_{I^d} \int_{I^d} G(t, s) v_2(dt) K_1(ds) \right|$$

$$\leq \Delta \|v_1\| \|v_2\| + (M + \Delta) \|v_2\| \|v_1 - K_1\|$$

$$\leq \Delta (\|v_1\| \|v_2\| + 2M \|v_2\| K_1^2) = \Delta K_{21}^2,$$

$$\text{ha} \quad \Delta \leq \frac{1}{2K_{11}^2}.$$

A definíció alapján

$$\|m_2 - v_2\| = |\mu_{21}| \|K_1\| \leq \Delta K_{21}^2 (\|v_1\| + K_1^2),$$

$$\text{ha} \quad \Delta \leq 1/(2K_{11}^2) \quad \text{és} \quad \Delta \leq 1.$$

Igy most már könnyen feltételt tudunk szabni μ_2^* létezésére:

$$|1 - (\mu_2^*)^2| = \left| \int_{I^d} \int_{I^d} R(t, s) v_2(dt) v_2(ds) - \int_{I^d} \int_{I^d} G(t, s) m_2(dt) m_2(ds) \right|$$



$$\leq \Delta \|v_2\|^2 + (M + \Delta) \|m_2 - v_2\|^2$$

$$\leq \Delta (\|v_2\|^2 + 2M(K_{11}^2 (\|v_1\| + K_1^2)^2))$$

$$= \Delta K_{22}^2.$$

Igy teljesül, hogy

$$|1 - (\mu_2^*)^2| < \frac{1}{2}, \quad (\mu_2^*)^2 > \frac{1}{2},$$

ha $\Delta \leq \frac{1}{2K_{22}^2}$. A Δ nagyságára tett minden eddigi feltétel teljesül, ha

$$\Delta \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_{11}^2 + K_{22}^2} \right) \quad \text{és} \quad \Delta \leq 1.$$

Igy már a $\|v_2 - \mathcal{H}_2\|$ eltérést is meg tudjuk becsülni:

$$\begin{aligned} \|v_2 - \mathcal{H}_2\| &\leq \left| 1 - \frac{1}{\mu_2^*} \right| \|v_2\| + \left| \frac{\mu_{21}}{\mu_1^* \mu_2^*} \right| \|v_1\| \\ &\leq \Delta (K_{22}^2 \|v_2\| + 2K_{21}^2 \|v_1\|) = \Delta K_2^2. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a bizonyítás eddigi részében definiált valamennyi

K_{ij}^e függvény $M, \|v_1\|, \|v_2\|$ pozitív együttthatós polinomja. A bizonyítás a továbbiakban az eddig látott módon teljes indukcióval fejezhető be.

Az

$$f_i(t) = \int_{\mathbb{I}^d} G(t, s) \mathcal{H}_i(ds)$$

függvények $H(G)$ -beli ortonormált rendszert alkotnak, továbbá az eddig bebizonyított állítások alapján

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I^d} |f_i(t) - e_i(t)| &= \left| \int_{I^d} G(t,s) \mathcal{H}_i(ds) - \int_{I^d} R(t,s) \mathcal{V}_i(ds) \right| \\ &\leq (M + \Delta) \|\mathcal{H}_i - \mathcal{V}_i\| + \Delta \|\mathcal{V}_i\| \leq \Delta (\|\mathcal{V}_i\| + 2MK_2), \end{aligned}$$

mivel $\|\mathcal{H}_i - \mathcal{V}_i\| \leq \Delta K_2$, $1 \leq i \leq N$.

A kovariancia függvény által generált Hilbert terek egyik legszebb valószínűségyszámításbeli alkalmazása az 1 valószínűséggel folytonos realizációjú Gauss folyamatok sorbafejthetősége. A következő fejezetben többször alkalmazni fogjuk JAIN és KALLIANPUR idevonatkozó két fontos eredményét.

2.1 TÉTEL (JAIN és KALLIANPUR [15]). Legyen az $\{X(t), t \in I^d\}$ Gauss folyamat egy valószínűséggel folytonos realizációjú, $EX(t) = 0$, $EX(t)X(s) = R(t,s)$, $\{\varphi_j(t), t \in I^d, j \geq 1\}$ CONS $H(R)$ -ben.

A

$$\sum_{j=1}^n \xi_j \varphi_j(t)$$

összeg $t \in I^d$ -ben egyenletesen, 1 valószínűséggel konvergál az $X(t)$ folyamathoz, ahol $\{\xi_j = \text{cong}^{-1}(\varphi_j), j \geq 1\}$ független, standard normális valószínűségi változók.

A következő tétel a fenti eredmény bizonyos értelemben vett megfordításának tekinthető.

2.2 TÉTEL (JAIN és KALLIANPUR [15]). Legyen $\{\mathcal{Z}_j, j \geq 1\}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, továbbá R

olyan kovariancia függvény, melyhez megadható egy egy valószínűséggel folytonos realizációju Gauss folyamat, mely 0 várható értékű és kovariancia függvénye R . Legyen $\{\psi_j(t), t \in I^d, j \geq 1\}$ CONS $H(R)$ -ben.

Ha $d = 1$, akkor a

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \psi_j(t)$$

összeg t -ben ($0 \leq t \leq 1$) egyenletesen konvergál egy valószínűséggel egy Gauss folyamathoz, melynek így majdnem minden realizációja folytonos függvény.

Jain és Kallianpur dolgozatuk végén megjegyzik, hogy a $d > 1$ esetben az R függvényre kell valamilyen simasági feltételt szabni, hogy a tételben szereplő sor pontonként vett limeszének létezzen szeparábilis, tehát folytonos verziója egy valószínűséggel. A későbbi fejezetekben látni fogjuk, hogy elegendő lesz számunkra a $d = 1$ eset is, mivel $d > 1$ esetben még nem sikerült kiszámítani semilyen Gauss folyamat szuprémumának az eloszlását.

Jain és Kallianpur tételéből következik a $\{W(t), 0 \leq t \leq 1\}$ Wiener folyamat és $\{B(t), 0 \leq t \leq 1\}$ Brown hid egyenletesen konvergens sorba való fejtése. Ha $\{\psi_i, i \geq 1\}$ CONS $L_2[0, 1]$ -ben, akkor $\{\psi_i(t) = \int_0^t \psi_i(s) ds, i \geq 1\}$ CONS a Wiener folyamat kovariancia függvénye által generált Hilbert térben (1.8 Fejezet CSÖRGŐ M. és RÉVÉSZ P. [5] könyvében), tehát a

$$(2.14) \quad \sum_{i=1}^n \eta_i \psi_i(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

sor egyenletesen konvergál $[0, 1]$ -n egy valószínűséggel és a limesz egy Wiener folyamat lesz. Csörgő M. és Révész P. példaként a Walsh rend-

szert, illetve a trigonometrikus rendszert tekinti. Az utóbbi felhasználásával a Wiener folyamat következő reprezentációját kapjuk:

$$(2.15) \quad \eta_1 t + \sqrt{2} \sum_{k=2}^{\infty} \eta_k \frac{\sin(k-1)t\pi}{(k-1)\pi}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

A most látott sorfejtésből következik a Brown hid következő előállítás:

$$(2.16) \quad \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \frac{\sin k t \pi}{k \pi}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

3. Véletlen mintán alapuló transzformáció

Tegyük fel, hogy sztochasztikus folyamatok $\{Y_n(t), t \in I^d\}$ sorozata a szupremum metrikában sztochasztikusan konvergál egy X Gauss folyamathoz abban az értelemben, hogy megadható a határfolyamat kópiáinak egy $\{X_n(t), t \in I^d\}$ sorozata úgy, hogy

$$(3.1) \quad \sup_{t \in I^d} |Y_n(t) - X_n(t)| \xrightarrow{P} 0$$

teljesül, ha $n \rightarrow \infty$. Paraméterbecslési eljárásoknál a kapott határfolyamat általában függ az ismeretlen paraméter igazi értékétől. Így a továbbiakban feltételezzük, hogy az $\{X(t; \Theta), t \in I^d\}$ folyamat is valamilyen Θ paramétertől függ, és a Θ kompakt paramétertartomány minden rögzített $\Theta \in \Theta$ elemére az $X(t; \Theta)$ folyamat egy valószínűséggel folytonos realizációja. A (3.1) sztochasztikus konvergencia egyik következménye, hogy

$$(3.2) \quad P\left\{\sup_{t \in I^d} |Y_n(t)| < x\right\} \rightarrow P\left\{\sup_{t \in I^d} |X(t)| < x\right\}, \quad n \rightarrow \infty.$$

A (3.2) határeloszlás alkalmazásakor két probléma jelentkezik:

(i) a limeszként kapott eloszlás függ az ismeretlen paraméter értékétől,

(ii) nem ismert a $P\left\{\sup_{t \in I^d} |X(t)| < x\right\}$ eloszlás.

A továbbiakban olyan transzformációt keresünk, hogy az Y_n folyamatok transzformáltjai egy olyan Gauss folyamathoz konvergáljanak $\mathcal{D}(I^d)$ -n, amely funkcionáljainak eloszlásai már ismertek ($\mathcal{D}(I^d)$ az I^d -n értelmezett, legfeljebb elsőfajú szakadással rendelkező függvények Szkorohod-terét jelöli).

Az $X(t; \Theta)$ folyamat függ egy ismeretlen paramétertől, így tehát az

$$E X(t; \Theta) X(s; \Theta) = R(t, s; \Theta), \quad t, s \in I^d, \quad \Theta \in \mathcal{H},$$

kovariancia függvény is függ a paramétertől. Tegyük fel, hogy teljesül a következő folytonossági feltétel:

$$(3.3) \quad \sup_{(t,s) \in I^{2d}} |R(t,s; \Theta) - R(t,s; \Theta^*)| \rightarrow 0, \quad \text{ha } |\Theta - \Theta^*| \rightarrow 0.$$

Az ismeretlen paraméter igazi értékét jelölje Θ_0 , és a Θ_n valószínűségi változó sorozat konzisztens módon becsülje Θ_0 -t, azaz

$$(3.4) \quad |\Theta_n - \Theta_0| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Az $R(\Theta)$ kovariancia függvény által generált Hilbert tér egy CONS rendszerét generáló mértékek közül tetszőleges N mértéket válasszunk ki, jelölje ezeket $\varphi_1(\Theta), \dots, \varphi_N(\Theta)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám és minden $\Theta \in \mathcal{H}$ ponthoz rendeljük hozzá a $\delta(\Theta)$ pozitív számot, amely eleget tesz a következő feltételnek: ha $|\Theta - \Theta^*| < \delta(\Theta)$, akkor

$$\sup_{(t,s) \in I^{2d}} |R(t,s; \Theta) - R(t,s; \Theta^*)| \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} \max(1/K_2, 1/K_3) \wedge 1/K_1 \right)$$

is teljesüljön. A $\delta(\Theta)$ számok létezése a 2.3 Lemmából és a (3.3) feltételből következik. A K_1, K_2, K_3 konstansokat a 2.3 Lemma bizonyításában definiáltuk és csak az $M(\Theta) = \sup_{(t,s) \in I^{2d}} |R(t,s; \Theta)|$, $\|\nu_1(\Theta)\|, \dots, \|\nu_N(\Theta)\|$ mennyiségektől függnék. Ha minden $\Theta \in \mathcal{H}$ pont köré egy $\delta(\Theta)$ sugarú gömböt rajzolunk, akkor ezek egyesítése lefedi $\mathcal{H}$ -t, tehát $\mathcal{H}$ kompaktságát felhasználva véges sok, $A_1(\varepsilon, \Theta_1), \dots, A_\ell(\varepsilon, \Theta_\ell)$ is lefedi $\mathcal{H}$ -t. Ha $\Theta \in A_i(\varepsilon, \Theta_i)$ akkor a Θ_i -hez tartozó $\{\nu_j(\Theta_i), 1 \leq j \leq N\}$ mértékekből a Mangano-féle módszer segítségével elkészíthetjük a $\{\mathcal{K}_{ji}(\Theta), 1 \leq j \leq N\}$ mértékeket, melyek egy $H(R(\Theta))$ -beli $\{f_{ji}\}$ ortonormált rendszert határoznak meg. Az $A_i(\varepsilon, \Theta_i)$ halmaz definíciójából és a 2.3 Lemmából következik, hogy

$$(3.5) \quad \|\mathcal{K}_{ji}(\Theta) - \mathcal{K}_{ji}(\Theta^*)\| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq N, \quad \text{ha } \Theta, \Theta^* \in A_i(\varepsilon, \Theta_i)$$

és

$$(3.6) \quad \sup_{t \in I^d} |f_{ji}(t; \Theta) - f_{ji}(t; \Theta^*)| < \varepsilon, \quad 1 \leq j \leq N, \quad \text{ha } \Theta, \Theta^* \in A_i(\varepsilon, \Theta_i).$$

Legyen $\varepsilon = 2^{-m}$ és $\Theta_n \in A(2^{-m}, \Theta_i)$, ekkor az előző eljárásuk Θ_n -hez is hozzárendeli a $\mathcal{K}_{1i}(\Theta_n), \dots, \mathcal{K}_{Ni}(\Theta_n)$ mértékeket, melyeket a továbbiakban $\{\mathcal{K}_{ji}^n, 1 \leq j \leq N\}$ -nel jelölünk. A $\{\mathcal{K}_{ji}^n, 1 \leq j \leq N\}$ mértékek a $\nu_1(\Theta_i), \dots, \nu_N(\Theta_i)$ mértékek véletlen együtthatós lineáris kombinációi minden $i=1, \dots, \ell$ esetén.

Tekintsünk egy olyan egy valószínűséggel folytonos realizációjú $\{Z(t), t \in I^q\}$ Gauss folyamatot, $EZ(t) = 0$, $EZ(t)Z(s) = G(t,s)$,

melyre az teljesül, hogy a

$$\sum_{j=1}^n \eta_j \psi_j(t), \quad t \in I^q$$

összeg t -ben egyenletesen egy valószínűséggel konvergál egy egy valószínűséggel folytonos folyamathoz, ahol $\{\eta_j, j \geq 1\}$ tetszőleges, független standard normális valószínűségi változók, $\{\psi_j(t), t \in I^q, j \geq 1\}$ pedig CONS a $H(G)$ -ben. A $\{Z(t), t \in I^q\}$ folyamatra tett megszorítás nem túl szigorú, hiszen $q=1$ esetén automatikusan teljesül, $q > 1$ esetén pedig G simaságára jelent csak kikötést. Az $Y_n(t)$ folyamat mintán alapuló transzformáltján az

$$(3.7) \quad Y_n^*(s) = \int_{I^d} Y_n(t) \sum_{j=1}^N \psi_j(s) \mathcal{K}_{ji}^n(dt), \quad s \in I^q$$

folyamatot értjük. A következőkben Y_n^* gyenge konvergenciáját bizonyítjuk be, majd megvizsgáljuk, hogy (3.7) helyett mikor írhatunk magfüggvény és nem mértékek által generált transzformációt. Még a tétel bizonyítása előtt meg kell jegyeznünk, hogy a $\{\psi_j(s), s \in I^q, j \geq 1\}$ függvények kijelölésével a limesz folyamatot adjuk meg.

3.1 TÉTEL. Ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő, akkor definiálható a $\{Z(s), s \in I^q\}$ folyamatnak egy olyan $\{Z_n(s), s \in I^q\}$ kópia-sorozata, melyre

$$\sup_{s \in I^q} |Y_n^*(s) - Z_n(s)| \xrightarrow{P} 0,$$

ha $N, m(N)$ és $n(N, m)$ tart a végtelenbe.

BIZONYÍTÁS. Legyen ε és δ két tetszőleges, pozitív szám.

A $\sup_{t \in I^d} |X_n(t)|$ valószínűségi változók eloszlása független n -től, ezért megadható olyan M_1 pozitív konstans, hogy

$$(3.8) \quad P\left\{ \sup_{t \in I^d} |X_n(t)| > M_1 \right\} < \frac{\delta}{8}$$

teljesüljön minden n -re. A $\{Z(s), s \in I^q\}$ folyamatra tett feltevés



miatt van olyan N_0 pozitív egész, hogy

$$(3.9) \quad P \left\{ \sup_{s \in I^q} \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} \eta_j \psi_j(s) \right| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} < \frac{\delta}{4},$$

ha $N \geq N_0$, tetszőleges, független, standard normális $\{\eta_j, j \geq 1\}$ valószínűségi változókból álló sorozat esetén. Vezessük be a következő jelölést:

$$M_2 = \max_{1 \leq j \leq N} \sup_{s \in I^q} |\psi_j(s)|.$$

Rögzítsünk le egy a (3.9) feltételnek eleget tevő N -et és $m = m(N)$ legyen olyan nagy, hogy

$$(3.10) \quad 2^{-m} < \frac{\varepsilon}{3NM_1M_2}.$$

Feltevésünk szerint Θ_n a Θ_0 paraméter konzisztens becslése, így tehát a paraméterhalmaz felbontásának van olyan $A_i(2^{-m}, \Theta_i)$ eleme, melyre

$$(3.11) \quad P \{ \Theta_0 \in A_i(2^{-m}, \Theta_i), \Theta_m \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \} > 1 - \delta/2,$$

ha $n \geq n_1(N, m)$.

A transzformált folyamatot három integrál összegére bontjuk:

$$\begin{aligned} Y_n^*(s) &= \int_{I^d} (Y_n(t) - X_n(t)) \sum_{j=1}^N \psi_j(s) \mathcal{K}_{ji}^n(dt) \\ &\quad + \int_{I^d} X_n(t) \sum_{j=1}^N \psi_j(s) (\mathcal{K}_{ji}^n(dt) - \mathcal{K}_{ji}(\Theta_0)(dt)) \\ &\quad + \int_{I^d} X_n(t) \sum_{j=1}^N \psi_j(s) \mathcal{K}_{ji}(\Theta_0)(dt) \\ &= a_{1n}(s) + a_{2n}(s) + a_{3n}(s). \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy Θ_0 , amely a $\textcircled{H}$ paramétertartomány rögzített eleme, beletartozik az $A_i(2^{-m}, \Theta_i)$ halmazba. A (3.1) feltétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{s \in I^q} |a_{1n}(s)| > \frac{\varepsilon}{3}, \Theta_n \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \right\} \\ & \leq P \left\{ \sup_{t \in I^d} |Y_n(t) - X_n(t)| N M_2 \left(\max_{1 \leq j \leq N} \|v_j\| + 2^{-m} \right) > \frac{\varepsilon}{3}, \right. \\ & \quad \left. \Theta_n \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \right\} \leq \frac{\delta}{8}, \end{aligned}$$

ha $n \geq n_0 = \max(n_1(N, m, \varepsilon), n_2(N, m, \varepsilon))$. Az $Y_n^*(s)$ folyamat felbontásának második tagja is sztochasztikusan nullához tart, mivel (3.8) és (3.10) alkalmazásával azt kapjuk, hogy $n \geq n_0$ esetén

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{s \in I^q} |a_{2n}(s)| > \frac{\varepsilon}{3}, \Theta_n \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \right\} \\ & \leq P \left\{ M_1 M_2 N \max_{1 \leq j \leq N} (\|X_{ji}^n - X_{ji}(\Theta_0)\|) > \frac{\varepsilon}{3}, \Theta_n \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \right\} \\ & = 0. \end{aligned}$$

A $\{X_{ji}(\Theta_0), 1 \leq j \leq N\}$ által meghatározott $H(R(\Theta_0))$ -beli ortonormált rendszert, $\{f_{ji}(\Theta_0)(t), 1 \leq j \leq N, t \in I^d\}$ ki tudjuk egészíteni $H(R(\Theta_0))$ -beli CONS-re, melyet $\{f_{ji}(\Theta_0)(t), j \geq 1, t \in I^d\}$ jelöl. A 2.1 Tétel alapján a

$$\sum_{j=1}^M \xi_{ji}^n f_{ji}(t), \quad t \in I^d$$

sor I^d -ben egyenletesen egy valószínűséggel konvergál az $\{X_n(t), t \in I^d\}$ folyamathoz, $M \rightarrow \infty$, ha $\{\xi_{ji}^n, j \geq 1\}$ a $H(R(\Theta_0))$ és $L(X_n)$ közötti kongruencia által meghatározott független, standard normális valószínűségi változók. A 2.1 Lemma (2.3) állítását felhasználva az $a_{3n}(s)$ következő véges sorfejtését kapjuk:

$$a_{3n}(s) = \sum_{j=1}^N \xi_{ji}^n \psi_j(s), \quad s \in I^q.$$

A $Z(s)$ folyamat sorbafejthetőségére tett feltevésünk és az $N \geq N_0$ esetben teljesülő (3.9) egyenlőtlenségből következik, hogy Z folyamatnak van olyan

$$Z_n(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{ji}^n \psi_j(s), \quad s \in I^q$$

kópiája, melyre a

$$P\left\{ \sup_{s \in I^q} |a_{3n}(s) - Z_n(s)| > \frac{\varepsilon}{3} \right\} < \frac{\delta}{4}$$

egyenlőtlenség teljesül. A most bebizonyított egyenlőtlenségekből következik, hogy ha $N \geq N_0(\varepsilon, \delta)$, $m \geq m_0(N, \varepsilon, \delta)$ és $n \geq n_0 = n_0(N, m, \varepsilon, \delta)$, akkor

$$\begin{aligned} & P\left\{ \sup_{s \in I^q} |Y_n^*(s) - Z_n(s)| > \varepsilon \right\} \\ & \leq P\left\{ \sup_{s \in I^q} |Y_n^*(s) - Z_n(s)| > \varepsilon, \Theta_n \in A_i(2^{-m}, \Theta_i), \Theta_0 \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \right\} \\ & + P\left\{ \Theta_n \notin A_i(2^{-m}, \Theta_i), \Theta_0 \in A_i(2^{-m}, \Theta_i) \right\} \\ & < \delta. \end{aligned}$$

Ezzel állításunkat igazoltuk.

A továbbiakban azt a speciális transzformációt fogjuk vizsgálni, amikor a $\Theta \in \mathbb{H}$ paraméterhez általunk hozzárendelt $\varphi_1(\Theta), \dots, \varphi_N(\Theta)$ mértékeket az $R(t, s; \Theta)$ sajátfüggvényei és sajátértékei határozzák meg. Az $R(t, s; \Theta)$ függvény N legnagyobb sajátértékét jelölje $\lambda_1(\Theta), \dots, \lambda_N(\Theta)$, a hozzátartozó sajátfüggvényeket $\psi_1(t; \Theta), \dots, \psi_N(t; \Theta)$. A (2.7) képletből következik, hogy a megfelelő $H(R(\Theta))$ -beli ortonormált rendszert generáló mértékekre teljesül a

$$(3.12) \quad \varphi_j(\Theta)(dt) = (\lambda_j(\Theta))^{-1/2} \psi_j(t; \Theta) dt, \quad 1 \leq j \leq N$$

összefüggés. A (3.3) feltételből következik, hogy $\lambda_j(\Theta^*) \rightarrow \lambda_j(\Theta)$ ha $\Theta^* \rightarrow \Theta$, $1 \leq j \leq N$, továbbá

$$\|\varphi_j(\Theta)\| \leq (\lambda_j(\Theta))^{-3/2} \sup_{(t,s) \in I^{2d}} |R(t, s; \Theta)|.$$

Igy a Θ_0 pontnak megadható egy $\mathbb{H}_1$ környezete, melyre teljesül, hogy a $\|\varphi_1(\Theta)\|, \dots, \|\varphi_N(\Theta)\|$, $M(\Theta) = \sup_{(t,s) \in I^{2d}} |R(t, s; \Theta)|$ változóknak közös felső korlátja van. Így ha $\Theta \in \mathbb{H}_1$, akkor

$$K_c(M(\Theta), \|\varphi_1(\Theta)\|, \dots, \|\varphi_N(\Theta)\|) \leq K_c^*, \quad c = 1, 2, 3.$$

A jelen esetben $\mathbb{H}_1$ -et tetszőleges módon felbonthatjuk, csak a felbontás elemei elegendően kicsik legyenek. Eljárásunkban a $\mathbb{H}$ felbontásának csak egyetlen egy elemét használjuk, azt, amelyik a Θ_n becslést tartalmazza. A Θ_n becslés konzisztenciája miatt ha n elég nagy, akkor Θ_n nagy valószínűséggel beleesik a $\mathbb{H}_1$ környezetbe, tehát közömbös, hogyan osztottuk fel $\mathbb{H}$ $\mathbb{H}_1$ -et nem tartalmazó részét. Összefoglalva eddigi fejtegetéseinket azt mondhatjuk, hogy sajátértékek és sajátfüggvények által generált transzformáció esetén a $\mathbb{H}$ paraméter-

halmaz bármely, elegendően finom beosztása megfelelő lesz az eljárásunk végrehajtására.

A 2.3 Lemma bizonyításából következik, hogy ebben a speciális esetben

$$(3.13) \quad \mathcal{X}_{j,i}^n(dt) = \sum_{\ell=1}^j \mathcal{M}_{\ell,i}^n \varphi_{\ell,i}(t; \Theta_i) dt, \quad j=1, \dots, N,$$

ahol $\mathcal{M}_{\ell,i}^n$ a Θ_n valószínűségi változó által meghatározott valószínűségi változók. Ha bevezetjük a

$$b_{N,i}^n(t,s) = \sum_{j=1}^N \left(\sum_{\ell=1}^j \mathcal{M}_{\ell,i}^n \varphi_{\ell,i}(t; \Theta_i) \right) \varphi_j'(s)$$

véletlen függvényt, akkor a transzformált folyamat az

$$\hat{Y}_n(s) = \int_{I^d} Y_n(t) b_{N,i}^n(t,s) dt, \quad s \in I^q$$

alakban felírható. A (H) paraméterhalmazt bontsuk fel véges sok részre, a maximális átmérő hosszát jelöljük Δ -val. Eddigi eredményeinket foglaljuk össze egy következményben.

3.2 KÖVETKEZMÉNY. Ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő,
akkor definiálható a $\{Z(s), s \in I^q\}$ folyamatnak egy olyan
 $\{Z_n(s), s \in I^q\}$ kópia-sorozata, melyre

$$\sup_{s \in I^q} |\hat{Y}_n(s) - Z_n(s)| \xrightarrow{P} 0,$$

ha $N, n(N, \Delta)$ tart a végtelenbe és Δ nullához tart.

4. A becsült paraméterű empirikus folyamat transzformációja

Legyen $\{\xi_i, i \geq 1\}$ d -dimenziós, független, azonos eloszlású valószínűségi vektorváltozók egy sorozata, a közös eloszlásfüggvényt

jelölje $F(x)$, $x \in R^d$. Tegyük fel, hogy adott d változós eloszlásfüggvények egy $\mathcal{F}$ családja

$$\mathcal{F} = \{ F(x; \theta) : x \in R^d, \theta \in \Theta \subset R^p \}$$

és az F eloszlásfüggvény is ehhez a családhoz tartozik, azaz van olyan $\theta_0 \in \Theta$, hogy $F(x) \equiv F(x; \theta_0)$ teljesül. Vezessük be a becsült paraméterű empirikus folyamatot

$$\beta_n(x) = n^{1/2} (F_n(x) - F(x; \theta_n)),$$

ahol F_n a $\xi_1, \dots, \xi_n$ változókhoz tartozó empirikus eloszlásfüggvény és $\theta_n = (\theta_{n1}, \dots, \theta_{np})$ ugyanezek a változókon alapuló becslése a θ_0 paraméternek. A 3. fejezetben bebizonyított általános tétel alkalmazásához első lépésként a $\beta_n(x)$ folyamat approximálhatóságát kell bebizonyítani. A tétel kimondása előtt vezessük be a következő jelölést:

$$\nabla_{\theta} F(x; \theta^*) = \nabla_{\theta} F(x; \theta) \big|_{\theta = \theta^*} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} F(x; \theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_p} F(x; \theta) \right) \big|_{\theta = \theta^*},$$

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ és legyen

$$(x, y) = \sum_{j=1}^p x_j y_j, \quad x = (x_1, \dots, x_p), \quad y = (y_1, \dots, y_p)$$

az R^p -beli belső szorzat. Vektorok és mátrixok konvergenciáját mindig

a maximum normában értjük és $\|x\| = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$, valamint

$M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^p$ esetén $\|M\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} |m_{ij}|$ jelöli a normákat. Az x vektor transzponálját x^T jelöli.

4.1 TÉTEL (BURKE, M.D., CSÖRGŐ M., CSÖRGŐ S., RÉVÉSZ P. [3] és CSÖRGŐ S. [6]). Tegyük fel, hogy a θ_n sorozat kielégíti a következő feltételeket:

$$(4.1) \quad n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^n \ell(X_j; \Theta_0) + \varepsilon_n,$$

ahol $\ell(\cdot, \Theta_0)$ d-változós, Borel-mérhető, p-dimenziós vektor értékű függvény és $\varepsilon_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$.

$$(4.2) \quad E \ell(X_1; \Theta_0) = 0,$$

$$(4.3) \quad M(\Theta_0) = E \ell^T(X_1; \Theta_0) \ell(X_1; \Theta_0)$$

pozitív szemidefinit mátrix.

(4.4) A $\nabla_{\Theta} F(x; \Theta)$ függvény egyenletesen folytonos x -ben és Θ -ban, ha $\Theta \in \mathcal{H}_1$, ahol $\mathcal{H}_1$ a Θ_0 pont egy nem üres, zárt környezete.

(4.5) $d=1$; Az $\ell(x; \Theta_0)$ vektor értékű függvény minden komponense korlátos változású bármely véges intervallumon.

$d > 1$; Az ℓ vektor értékű függvény összes legfeljebb d -ed rendű parciális deriváltjai majdnem mindenütt léteznek (a d -dimenziós Lebesgue mértékre nézve) és tetszőleges $\mu > 0$ esetén

$$\sup_{\|x\| \leq \mu} \sum_{j=1}^d \sum_{j_1, \dots, j_d \geq 0} \left\| \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_d^{j_d}} \ell(x; \Theta_0) \right\| < \infty.$$

$j_1 + \dots + j_d = j$

Ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő, akkor létezik az

$F(x; \Theta_0)$ d-változós eloszlásfüggvényhez tartozó $\{B_n(F(x; \Theta_0)), n \geq 1\}$

Brown hidaknak egy olyan sorozata, melyre

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\beta_n(x) - D_n(x; \Theta_0)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol

$$D_n(x; \Theta_0) = B_n(F(x; \Theta_0)) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} \ell(y; \Theta_0) dB_n(F(y; \Theta_0)), \nabla_{\Theta} F(x; \Theta_0) \right)$$

a Durbin folyamat kópiáinak egy sorozata.

A 3.1 Tételt csak akkor tudjuk alkalmazni, ha a folyamatok az R^d tér egységnégyzetén vannak értelmezve, tehát első lépésként ezt kell elérnünk.

Vizsgáljuk először a $d=1$ esetet. Vezessük be az $F(t; \Theta)$ függvény

$$F^{-1}(t; \Theta) = \inf \{s; F(s; \Theta) \geq t\}$$

inverzét. A 4.1 Tételből következik, hogy

$$(4.6) \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} |\beta_n(F^{-1}(t; \Theta_n)) - D_n(F^{-1}(t; \Theta_0); \Theta_0)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\text{és} \quad E D_1(F^{-1}(t; \Theta_0); \Theta_0) = 0,$$

$$E D_1(F^{-1}(t; \Theta_0); \Theta_0) D_1(F^{-1}(s; \Theta_0); \Theta_0) = R_1(t, s; \Theta_0)$$

$$= t \wedge s - ts$$

$$- \int (F^{-1}(t; \Theta_0); \Theta_0) \nabla_{\Theta}^T F(F^{-1}(s; \Theta_0); \Theta_0)$$

$$- \int (F^{-1}(s; \Theta_0); \Theta_0) \nabla_{\Theta}^T F(F^{-1}(t; \Theta_0); \Theta_0)$$

$$+ \nabla_{\Theta} F(F^{-1}(t; \Theta_0); \Theta_0) M(\Theta_0) \nabla_{\Theta} F(F^{-1}(s; \Theta_0); \Theta_0),$$

ahol

$$(4.7) \quad \int(t; \Theta_0) = \int_{-\infty}^t \ell(u; \Theta_0) d_u F(u; \Theta_0)$$

$$(t \wedge s = \min(t, s)).$$

Az általános ($d > 1$) esetben az eljárás egy kicsit hosszabb. Jelölje $\bar{F}_j(x_j; \Theta)$ az $\bar{F}$ függvény j -dik vetületi eloszlásfüggvényét. Ekkor található olyan $H(x; \Theta)$ eloszlásfüggvény, melynek mindegyik vetületi eloszlása a $[0, 1]$ szakaszon egyenletes és

$$\bar{F}(x; \Theta) = H(\bar{F}_1(x_1; \Theta), \dots, \bar{F}_d(x_d; \Theta); \Theta), \quad x = (x_1, \dots, x_d).$$

Vezessük be az

$\bar{F}(t; \Theta) = H(\bar{F}_1^{-1}(t_1; \Theta), \dots, \bar{F}_d^{-1}(t_d; \Theta); \Theta)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$ függvényt, ahol $\bar{F}_j^{-1}(t_j; \Theta)$ az $\bar{F}_j(t_j; \Theta)$ függvény balról folytonos inverze. Így a $\beta_n(\bar{F}(t; \Theta_n))$ folyamat I^d -n értelmezett és a 4.1 Tételből következik, hogy

$$(4.8) \quad \sup_{t \in I^d} |\beta_n(\bar{F}(t; \Theta_n)) - D_n(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

továbbá

$$\begin{aligned} E D_1(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0) &= 0, \\ E D_1(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0) D_1(\bar{F}(s; \Theta_0); \Theta_0) &= R_2(t, s; \Theta_0) \\ &= F(\bar{F}(t \wedge s; \Theta_0); \Theta_0) - F(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0) \cdot F(\bar{F}(s; \Theta_0); \Theta_0) \\ &\quad - J(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0) \nabla_{\Theta}^T F(\bar{F}(s; \Theta_0); \Theta_0) \\ &\quad - J(\bar{F}(s; \Theta_0); \Theta_0) \nabla_{\Theta}^T F(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0) \\ &\quad + \nabla_{\Theta} F(\bar{F}(t; \Theta_0); \Theta_0) M(\Theta_0) \nabla_{\Theta}^T F(\bar{F}(s; \Theta_0); \Theta_0) \\ (t \wedge s &= (t_1 \wedge s_1, \dots, t_d \wedge s_d), \quad t = (t_1, \dots, t_d), \quad s = (s_1, \dots, s_d)). \end{aligned}$$

A 4.1 Tétel (4.1) feltétele biztosítja Θ_n konzisztenciáját, így csak arra kell feltételt keresni, hogy a határfolyamat egy valószínűséggel folytonos realizációju legyen. Defináljuk a $\beta_n(F^{-1}(t; \Theta_n))$ és $\beta_n(\bar{F}(t; \Theta_n))$ folyamatok transzformáltjait a (3.7) formula alapján és a transzformált folyamatokat jelölje $\{\beta_n^*(s), s \in I^q\}$. Az eddigi fejtegetéseinket a következő tételben foglalhatjuk össze:

4.2 TÉTEL. Tegyük fel, hogy a 4.1 Tétel (4.1), (4.2) és (4.5) feltételei teljesülnek. Teljesüljön továbbá, hogy

$$(4.9) \quad M(\Theta^*) = E \ell^T(X^*; \Theta^*) \ell(X^*; \Theta^*)$$

véges, pozitív szemidefinit mátrix, $M(\Theta^*)$ folytonos $\Theta^* \in \mathcal{H}$ -ban, ahol $P\{X^{*1} < t_1, \dots, X^{*d} < t_d\} = F(t; \Theta^*), t = (t_1, \dots, t_d), X^* = (X^{*1}, \dots, X^{*d})$.

$$(4.10) \quad J(\bar{F}(t; \Theta^*); \Theta^*) \text{ és } \nabla_{\Theta} F(\bar{F}(t; \Theta^*); \Theta^*)$$

függvények egyenletesen folytonosak t -ben és Θ^* -ban, ha $\Theta^* \in \mathcal{H}$, ahol $\mathcal{H} \subset R^p$ kompakt paraméterhalmaz és Θ_0 belső pontja $\mathcal{H}$ -nak.

Ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő, akkor definiálható a $\{Z(s), s \in I^q\}$ folyamat kópiáinak egy olyan $\{Z_n(s), s \in I^q\}$ sorozata, melyre

$$\sup_{s \in I^q} |\beta_n^*(s) - Z_n(s)| \xrightarrow{P} 0,$$

ha N, m, n tartanak a végtelenbe.

BIZONYÍTÁS. A 4.2 Tétel feltételeiből következnek a 4.1 Tétel feltételei is, ezért (4.6) és (4.8) teljesülnek. A feltételekből az is következik, hogy $D_1(F^{-1}(t; \Theta); \Theta)$ és $D_1(\bar{F}(t; \Theta); \Theta)$



a paramétertartomány minden Θ elemére létezik is egy valószínűséggel folytonos realizációja, továbbá a kovarianciafüggvényekre fennáll (3.3). A (4.1) feltétel maga után vonja (3.4) teljesülését is, ezért a 3.1 Tételből már következik az állítás.

A paraméterbecslés egyik fontos speciális esete az eltolás és skála paraméter becslése, tehát amikor

$$\mathcal{F}_S = \left\{ F \left(\frac{t - \Theta_0^1}{\Theta_0^2} \right), (\Theta_0^1, \Theta_0^2) \in S, t \in \mathbb{R} \right\},$$

alaku, ahol S kompakt halmaz a felső félsíkon. Ebben az esetben a határfolyamat kovarianciája

$$E D_1(F^{-1}(t; \Theta_0^1, \Theta_0^2); \Theta_0^1, \Theta_0^2) D_1(F^{-1}(s; \Theta_0^1, \Theta_0^2); \Theta_0^1, \Theta_0^2) = R_3(t, s)$$

$$= t \wedge s - ts$$

$$- [I_{11} I_{22} - I_{12}^2]^{-1} \times [I_{22} w_1(t) w_1(s) + \\ + I_{11} w_2(t) w_2(s) - I_{12} (w_1(t) w_2(s) + w_2(t) w_1(s))],$$

ahol

$$w_1(t) = f(F^{-1}(t)), \quad w_2(t) = F^{-1}(t) f(F^{-1}(t)),$$

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}^2 f(x) dx,$$

$$I_{12} = - \int_{-\infty}^{\infty} x \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]^2 f(x) dx,$$

$$I_{22} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]^2 f(x) dx - 1,$$

f, f' az F függvény első és második deriváltjai, feltéve, hogy ezek léteznek. A kovarianciafüggvény független a paraméterek értékeitől, ezért a transzformáció elvégzésekor nem kell paramétert becsülnünk. Ebben az esetben a (3.7) transzformáció determinisztikus lesz, és nincs szükség a paramétertartomány felbontására, tehát ha a 4.2 Tételt erre az esetre specializáljuk, akkor N, n végtelenbe tartásából már következik az állítás.

5. A Kaplan-Meier modell

Legyen ξ^1, ξ^2 két független valószínűségi változó, melyek eloszlásfüggvényei

$$F^{0i}(t) = P\{\xi^i < t\}, \quad i = 1, 2.$$

A ξ^1, ξ^2 változók minimumát jelölje ξ :

$$\xi = \min(\xi^1, \xi^2),$$

δ pedig legyen annak az eseménynek az indikátora, hogy a minimum a ξ^1 változón vétetett fel, azaz

$$\delta = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } \xi = \xi^1 \\ 0 & , \text{ ha } \xi < \xi^1. \end{cases}$$

Tegyük fel, hogy a rendelkezésünkre álló minta

$$(5.1) \quad \left\{ \xi_i, \delta_i \right\}_{i=1}^n,$$

ahol a (ξ_i, δ_i) vektorok a (ξ, δ) vektor független példányai ugyanazon a valószínűségi mezőn.

Az a feladatunk, hogy az (5.1) mintából megbecsüljük az F^{01} eloszlásfüggvényt. A most ismertetett modellt, tehát amikor a ξ^2 változó nemkívánatos zavart jelent, nevezzük a Kaplan-Meier modellnek. Ha ξ^1 változó eloszlása mellett a ξ^2 változó eloszlása is érdekes, akkor az un. kockázatmodellről beszélünk. Mind a Kaplan-Meier mind a kockázatmodell részletes, példákkal illusztrált ismertetése megtalálható például a [8] dolgozatban.

Az eloszlásfüggvények mellett dolgozatunkban fontos szerepet fognak játszani a kockázati függvények. Az F^{01} eloszlásfüggvényhez tartozó kockázati függvényt Λ^1 jelöli, melyet a következő integrállal definiálunk:

$$(5.2) \quad \int_{-\infty}^t (1 - F^{01}(s))^{-1} dF^{01}(s).$$

KOTZ és SHANBHAG [17] megmutatták, hogy a kockázati függvény egyértelműen meghatározza az eloszlásfüggvényt, nevezetesen

$$(5.3) \quad 1 - F^{01}(t) = \exp(-\Lambda_c^1(t)) \prod_{x < t} (1 - \Delta \Lambda^1(x)),$$

ahol $\Delta \Lambda^1(x)$ a Λ^1 függvény x pontbeli ugrását, Λ_c^1 pedig a Λ^1 folytonos részét jelöli. Az (5.3) formulából azt kapjuk, hogy ha F^{01} folytonos eloszlásfüggvény, akkor

$$(5.4) \quad \Lambda^1(t) = -\log(1 - F^{01}(t)).$$

Ha a kockázati függvény deriválható, akkor deriváltját $\lambda^1(t)$ -vel jelöljük és kockázati rátának vagy halálozási rátának nevezzük. Ha az F^{01} függvénynek létezik a deriváltja, f^{01} , akkor

$$\lambda^1(t) = \frac{f^{01}(t)}{1 - F^{01}(t)}.$$

A ξ változót cenzorálatlannak nevezzük, ha $\delta = 1$ és a hozzátartozó szub-eloszlásfüggvényt F^1 jelöli:

$$F^1(t) = P\{\xi < t, \delta = 1\}.$$

Az $F^1(t)$ függvényre könnyű formulát adni a ξ^1 és ξ^2 valószínűségi változók függetlenségének figyelembevételével:

$$F^1(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F^{02}(s)) dF^{01}(s).$$

Ha a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét $F(t)$ jelöli, akkor a függetlenség miatt

$$1 - F(t) = (1 - F^{01}(t))(1 - F^{02}(t)),$$

így a házárdfüggvény következő előállítását kapjuk

$$(5.5) \quad \Lambda^1(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F(s))^{-1} dF^1(s).$$

A házárdbecslés az (5.5) formulán alapul.

Legyen

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \# \{1 \leq j \leq n, \xi_j < t\}$$

a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók közös empirikus eloszlásfüggvénye, a megfelelő cenzorált empirikus eloszlásfüggvényre pedig vezessük be az

$$F_n^1(t) = \frac{1}{n} \# \{1 \leq j \leq n, \xi_j < t \text{ és } \delta_j = 1\}$$

jelölést. Az empirikus házárdfüggvényt ezekután úgy definiáljuk, hogy az (5.5) formulában az F és F^1 függvényeket az empirikus megfelelőikkel helyettesítjük:

$$(5.6) \quad \Lambda_n^1(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F_n(s))^{-1} dF_n^1(s).$$

A $\Lambda_n^1(t)$ függvényt persze összeg alakban is felírhatjuk. Elvégezve az integrálást,

$$\begin{aligned}\Lambda_n^1(t) &= \frac{1}{n} \sum_{\xi_j < t} \delta_j (1 - F_n(\xi_j))^{-1} \\ &= \sum_{\xi_j < t} \frac{\delta_j}{N_{j:n}},\end{aligned}$$

ahol

$$N_{j:n} = \# \{1 \leq i \leq n, \xi_j < \xi_i\}.$$

Vezessük be a hazárdfolyamatot is:

$$H_n(t) = n^{1/2} (\Lambda_n^1(t) - \Lambda^1(t)).$$

Rendezzük a $\xi_1, \dots, \xi_n$ mintaelemeket nagyság szerinti monoton növekvő sorozatba. Ez a sorbarendezés csak akkor egyértelmű, ha nincsenek a ξ_i -k között azonosak. Ha vannak megegyező elemek, akkor a cenzorálatlan előzze meg a vele egyenlő cenzoráltat. Ha két mintaelem egyenlő és ugyanolyan módon cenzorált, akkor a sorrendjük tetszőleges. Az így kapott sorbarendezés j -dik elemét $Z_{j:n}$ -nel jelöljük, $\delta_{j:n}$ pedig aszerint 1 vagy 0, hogy ez a mintaelem cenzorált vagy cenzorálatlan.

KAPLAN és MEIER [16] a következő módon definiálták a szorzatbecslést (product-limit estimator):

$$(5.7) \quad 1 - \hat{F}_n^{01}(t) = \begin{cases} \prod_{Z_{j:n} < t} \left(\frac{n-j}{n-j+1} \right)^{\delta_{j:n}} & , \text{ ha } t \leq \xi_{n:n} \\ 0 & , \text{ ha } t > \xi_{n:n} \end{cases}$$

ahol $\xi_{n:n} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Vezessük be a hazárdfolyamathoz hasonló módon a szorzatbecslés folyamatot is:

$$L_n(t) = n^{1/2} (\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t)).$$

A H_n és L_n folyamatok aszimptotikus viselkedésének vizsgálatát a [4] és [14] dolgozatokban a lényegesen egyszerűbb

$$\alpha_n^0(t) = n^{1/2} (F_n(t) - F(t))$$

és

$$\alpha_n^1(t) = n^{1/2} (F_n^1(t) - F^1(t))$$

folyamatok együttes approximációjára vezettük vissza. Legyen

$$\alpha_n(x) = (\alpha_n^0(x_1), \alpha_n^1(x_2)), \quad x = (x_1, x_2).$$

5.1 TÉTEL (BURKE, M.D., CSÖRGŐ S., HORVÁTH L. [4] és HORVÁTH L.

[14]). Ha az alapul vett valószínűségi mező elég bő, akkor található

Gauss folyamatoknak egy $\{ G_n(x) = (B_n(x_1), B_n^1(x_2)), n \geq 1 \}$

$X = (x_1, x_2)$ sorozata, melyre

$$\sup_{x \in R^2} \| \alpha_n(x) - G_n(x) \|_2 = O(\bar{n}^{1/2} \log n)$$

egy valószínűséggel, továbbá

$$E B_n(t) = E B_n^1(t) = 0,$$

$$E B_n(t) B_n(s) = F(t) \wedge F(s) - F(t)F(s),$$

$$E B_n^1(t) B_n^1(s) = F^1(t) \wedge F^1(s) - F^1(t)F^1(s),$$

$$E B_n(t) B_n^1(s) = F(t) \wedge F^1(s) - F(t)F^1(s).$$

5.2 TÉTEL (BURKE, M.D., CSÖRGŐ S. és HORVÁTH L. [4] és HORVÁTH L.

[14]). Az 5.1 Tételben definiált valószínűségi mezőn a

$$W_n(d(t)) = \int_{-\infty}^t B_n(s) (1-F(s))^{-2} dF^1(s) - \int_{-\infty}^t B_n^1(s) (1-F(s))^{-2} dF(s) + B_n^1(t) (1-F(t))$$

időtranszformált Wiener folyamatok sorozatára teljesül, hogy ha

$F(T) < 1$, akkor

$$(5.8) \quad \sup_{-\infty < t \leq T} |H_n(t) - W_n(d(t))| = O(\bar{n}^{-1/3} (\log n)^{3/2})$$

és ha $F^{01}(t)$ folytonos eloszlásfüggvény, akkor

$$(5.9) \quad \sup_{-\infty < t \leq T} |L_n(t) - (1 - F^{01}(t)) W_n(d(t))| = O(\bar{n}^{-1/3} (\log n)^{3/2})$$

egy valószínűséggel, ahol

$$d(t) = \int_{-\infty}^t (1 - F(s))^{-2} dF^1(s).$$

Megjegyezzük, hogy a [4] és [14] dolgozatokban erősebb állításokat bizonyítottunk be, de a továbbiakban az 5.1 és 5.2 Tétel is elegendő lesz számunkra.

Cenzorált adatokon alapuló paraméterbecslést, eddig még kevesen végeztek és csak speciális alaku F^{01} , F^{02} eloszlásfüggvények esetén. A legáltalánosabb módszert BURKE [2] ismertette, az ő eredményeit próbáljuk továbbfejleszteni. Először a paraméterbecslés normalitására tett feltevés mellett bebizonyítjuk a paraméterbecsült folyamat gyenge konvergenciáját, majd a 6. fejezetben három módszert mutatunk paraméterbecslésre és ezek aszimptotikus tulajdonságait vizsgáljuk.

A 4. fejezet jelöléseihez alkalmazkodva

$$\{F^{01}(t; \Theta), t \in R, \Theta \in R^p\}$$

jelölje eloszlásfüggvényeknek egy családját, ahol Θ a család paramétere. A Θ paramétervektort az (5.1) mintából becsüljük valamely Θ_n vektorral. Vezessük be a becsült paraméterű hazard- és szorzatbecslés folyamatokat:

$$(5.10) \quad H_n(t; \Theta_n) = n^{1/2} (\Lambda_n^1(t) - \Lambda_n^1(t; \Theta_n))$$

és

$$(5.11) \quad L_n(t; \Theta_n) = n^{1/2} (\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \Theta_n)).$$

Első lépésként a 4.1 Tételt szeretnénk általánosítani cenzorált minták esetére. A 4.1 Tétel első három feltétele durván annyit jelent, hogy $n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0)$ aszimptotikusan normális és megmondja a limesz várható értékét és kovarianciamátrixát. A (4.1) feltétel ennél lényegesen erősebb, hiszen következik belőle az $n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0)$ limeszének a reprezentációja is. A (4.1) - (4.3) feltételeket azzal helyettesítjük, hogy

$$(5.12) \quad n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) = \psi(\alpha_n(\cdot), \alpha_n^1(\cdot)) + \varepsilon_{1n},$$

ahol $\psi \in \mathcal{D}(R)$ egy részhalmazán értelmezett értékeit R^P -ben felvevő folytonos funkcionál.

5.3 TÉTEL. Tegyük fel, hogy Θ_n kielégíti az (5.12) feltételt továbbá teljesülnek az 5.2 Tétel feltételei és

$$(5.13) \quad \underline{a} \quad \nabla_{\Theta} F^{01}(t; \Theta) \quad (\nabla_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta))$$

függvény egyenletesen folytonos t -ben, $-\infty < t \leq T$, $F(T) < 1$ és Θ -ban, $\Theta \in \mathcal{H}_1$, ahol $\mathcal{H}_1$ a Θ_0 pont egy nem üres, zárt környezete.

$$(5.14) \quad \varepsilon_{1n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ekkor 5.1 Tétel valószínűségi mezején

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |H_n(t; \Theta_n) - D_n^1(t; \Theta_0)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

és

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |L_n(t; \Theta_n) - D_n^2(t; \Theta_0)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

ahol

$$D_n^1(t; \Theta_0) = W_n(d(t)) - \varphi(B_n(\cdot), B_n^1(\cdot)) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0)$$

és

$$D_n^2(t; \Theta_0) = (1 - F^{01}(t)) W_n(d(t)) - \varphi(B_n(\cdot), B_n^1(\cdot)) \nabla_{\Theta}^T F^{01}(t; \Theta_0)$$

Ha (5.19) és (5.14) helyett

$$(5.15) \quad \nabla_{\Theta} F^{01}(t; \Theta_0) \quad (\nabla_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta_0))$$

egyenletesen korlátos t-ben, $\nabla_{\Theta}^2 F^{01}(t; \Theta_0) \quad (\nabla_{\Theta}^2 \Lambda^1(t; \Theta_0))$
egyenletesen korlátos t-ben, $-\infty < t \leq T$, és Θ -ban, $\Theta \in \Theta_1$,

$$(5.16) \quad \varepsilon_{1n} = O(n^{-\varepsilon}) \quad \text{egy valószínűséggel,} \quad \varepsilon > 0,$$

$$(5.17) \quad \|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\|_p \leq K^* \left(\sup_{-\infty < t < \infty} |x_1(t) - x_2(t)| + \sup_{-\infty < t < \infty} |y_1(t) - y_2(t)| \right)$$

ahol $K^* > 0$ konstans,

teljesül, akkor

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |H_n(t; \Theta_n) - D_n^1(t; \Theta_0)| = O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2} + n^{-\varepsilon})$$

és

$$\sup_{-\infty < t \leq T} |L_n(t; \Theta_n) - D_n^2(t; \Theta_0)| = O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2} + n^{-\varepsilon})$$

egy valószínűséggel.

BIZONYÍTÁS. A φ funkcionál folytonossága miatt

$$(5.18) \quad \|\varphi(\alpha_n, \alpha_n^1) - \varphi(B_n, B_n^1)\|_p = \varepsilon_{2n}$$

sztochasztikusan nullához tart, ha $n \rightarrow \infty$. Ha (5.17) is teljesül,

akkor $\varepsilon_{2n} = O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2})$ egy valószínűséggel. A [3] dolgozat-

ban látott módszer alapján végezzük a következő átalakítást:

$$H_n(t; \Theta_n) - D_n^1(t; \Theta_0) = [n^{1/2}(\Lambda_n^1(t) - \Lambda^1(t; \Theta_0)) - W_n(d(t))] + n^{1/2}(\Theta_0 - \Theta_n) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \tau_n) - \varphi(B_n, B_n^1) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0).$$

A felbontás első tagja az 5.2 Tétel alapján egy valószínűséggel $(-\infty, T]$ -n egyenletesen $O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2})$ sebességgel tart 0-hoz.

A $\|\tau_n - \Theta_0\|_p \leq \|\Theta_n - \Theta_0\|_p$ összefüggés alapján azt kapjuk, hogy a

$$\begin{aligned} & |n^{1/2}(\Theta_0 - \Theta_n) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \tau_n) - \varphi(B_n, B_n^1) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0)| \\ & \leq |n^{1/2}(\Theta_0 - \Theta_n) - \varphi(\alpha_n, \alpha_n^1) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0)| \\ & + |n^{1/2}(\Theta_0 - \Theta_n) (\nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \tau_n) - \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0))| \\ & + \varepsilon_{2n} \|\nabla_{\Theta} \Lambda^1(t; \Theta_0)\|_p \end{aligned}$$

különbség sztochasztikusan nullához tart, ha $\varepsilon_n \xrightarrow{P} 0$, mivel

$\Lambda^1(t; \Theta_0)$ egyenletes korlátossága következik (5.13)-ból. Az állítás másik fele a Lagrange formula egyszerű következménye:

$$\begin{aligned} & |n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0) (\nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \tau_n) - \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0))| \\ & \leq n^{1/2} \|n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0)\|_p \|\nabla_{\Theta}^2 \Lambda^1(t; \Theta_0)\|_p \\ & = O(n^{1/2} \log \log n). \end{aligned}$$

Az állítás bizonyítása szószerint ugyanígy elvégezhető az $L_n(t; \Theta_n)$ folyamatra is.

A D^1 és D^2 folyamatok reprezentációja alapján meg tudjuk határozni kovarianciafüggvényeiket is. A kovarianciafüggvények természetesen az $\bar{F}^{01}$ és $\bar{F}^{02}$ függvényektől függenek, így hiába használunk parametrikus feltevést az $\bar{F}^{01}$ függvényre, a kovarianciafüggvényt egyedül a Θ_0 -ra

vonatkozó Θ_n becsléssel nem tudjuk megbecsülni. Ha azonban feltételezzük, hogy az F^{02} függvény is valamilyen eloszláscsaládba tartozik, melynek paramétere M_0 , akkor a kovariancia függvények az (Θ_0, M_0) paraméterektől függenek csak. Az F^{02} eloszlás függvény M_0 paraméterének becslése ugyanugy cenzorált mintán alapuló paraméterbecslés, ahogy a Θ_0 paraméter esetében láttuk. A jelen, teljesen parametrizált modellben az 5.3 Tétel és a (Θ_0, M_0) paraméter konzisztens becslése biztosítja, hogy megfelelő regularitási feltételek mellett szintén alkalmazható a 3. fejezetben megismert véletlen transzformációs eljárás.

A (5.12) feltételben szereplő φ funkcionálról nem követeltük meg, hogy az egész $\mathcal{D}(R)$ téren folytonos legyen, hiszen a folytonosságra illetve az (5.17) feltételre csak az (5.18) eltérés vizsgálatához volt szükségünk. A dolgozat további részében majd pontosan megadjuk azokat a φ funkcionálokat, amelyeket használni fogunk. Korlátos változású függvény szerinti integrálás és az argumentumban szereplő függvények véges sok pontban vett lineáris kombinációja határozza majd meg a φ funkcionált, melyeket a következő fejezetben részletesen ismertetünk.

6. Paraméterbecslés cenzorált mintából

Cenzorált mintákra alapuló paraméterbecslés nem rendelkezik olyan átfogó módszerrel, mint a nem cenzorált adatok esetén használt maximum likelihood-módszer. Nem teljes megfigyelések esetén a fő problémát a likelihood-egyenlet felírása jelenti, ezért az egyik leggyakrabban használt módszerre az ún. "partial likelihood" vált.



A "partial likelihood" egyenleteket is csak néhány speciális esetben sikerült felírni és megoldásuk csak közelítő módszerekkel volt lehetséges. Ebben a fejezetben három módszerrel foglalkozunk, elsősorban példákon keresztül egyekszünk megmutatni, hogy mely eloszláscsaládok paraméterének a becslésére használhatóak. Bebizonyítjuk a becslések aszimptotikus normalitását, kiszámítjuk az aszimptotikus szórást, amely információt ad a becslés hatásosságáról.

A paraméterbecslés mellett az előző fejezetben már vizsgált hipotézisellenőrzéssel is foglalkozni fogunk. Megmutatjuk, hogy az általunk javasolt becslések teljesítik az (5.12), (5.14) vagy (5.16) feltételeket, így a becsült paraméterű hazard- és szorzatbecslés folyamatok gyenge konvergenciáját is bebizonyítjuk. A paraméterbecslés és a becsült paraméterű folyamatok konvergencia tulajdonságainak vizsgálata az 5.1 Tételen alapul és egyszerre fogjuk ezeket elvégezni.

Az első javasolt eljárás a momentum módszer lesz. A becslés ismeretése előtt BURKE, M.D., CSÖRGŐ M., CSÖRGŐ S. és RÉVÉSZ P. [3] egyik tételét (vö. 4. fejezet) általánosítjuk a cenzorált minták esetére.

Tegyük fel, hogy a $\hat{\Theta}_n$ becslés teljesíti a következő felbontást:

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) &= n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (\ell(\xi_j) - E\ell(\xi_j)) \\ &+ n^{-1/2} \sum_{j=1}^n (\bar{\sigma}_j h(\xi_j) - E\bar{\sigma}_j h(\xi_j)) \\ &+ \varepsilon_{2n}, \end{aligned}$$

ahol ℓ és h vektorértékű függvények. Az α_n^1 cenzorált és az α_n empirikus folyamatokkal a következő alakba írhatjuk át ezt a feltételt:

$$\begin{aligned} n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) d\alpha_n(u) \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} h(u) d\alpha_n^1(u) \\ &+ \varepsilon_{2n}. \end{aligned}$$

Az 5.1 Tétel alapján természetes az a sejtés, hogy bizonyos h és ℓ függvények esetén $n^{1/2}(\Theta_n - \Theta_0)$ sztochasztikusan vagy egy valószínűséggel konvergálni fog egy normális eloszlású valószínűségi változóhoz, illetve approximálható az

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) dB_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} h(u) dB_n^1(u)$$

valószínűségi változó sorozattal.

6.1 TÉTEL. Tegyük fel, hogy a következő feltételek teljesülnek

$$(6.1) \quad E \ell(X_1) < \infty$$

$$E \delta_1 h(X_1) < \infty$$

$$(6.2) \quad \sigma_1 = E \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) dB_1(u) \right)^2 < \infty$$

$$\sigma_2 = E \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) dB_1^1(u) \right)^2 < \infty.$$

(6.3) Az ℓ és h függvények minden komponense korlátos változású bármely véges intervallumon.

Ekkor az 5.1 Tételbeli valószínűségi mezőn

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) d\alpha_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} h(u) d\alpha_n^1(u) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) dB_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} h(u) dB_n^1(u) \right) \right| \xrightarrow{P} 0.$$

Ha (6.3) helyett az az erősebb feltétel teljesül, hogy

(6.14) Az ℓ és h függvények minden komponense korlátos változásu az egész egyenesen, akkor egy valószínűséggel

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) d\alpha_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} h(u) d\alpha_n^1(u) - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) dB_n(u) + \int_{-\infty}^{\infty} h(u) dB_n^1(u) \right) \right| = O(n^{-1/2} \log n).$$

BIZONYÍTÁS. A tétel első felének bizonyítása következik a [3] dolgozat 3.1 Lemmájából. Az állítás második fele parciális integrálással következik az 5.1 Tételből.

Az 5.3 Tétel és a 6.1 Tétel összekapcsolásával kapjuk a becsült paraméterű szorzatbecslés és hazard folyamatok approximációját, ha a paraméterbecslést az előző tételben megkívánt módon végezhetjük. Reguláris ℓ és h függvények esetén az approximáció sebessége $\max \left(\varepsilon_{2n}, n^{-1/3} (\log n)^{3/2} \right)$. Ha az $L_n(t; \hat{\Theta}_n)$ és $H_n(t; \hat{\Theta}_n)$ folyamatok limeszfolyamatát $\hat{D}_n^2(t; \Theta_0)$ illetve $\hat{D}_n^1(t; \Theta_0)$ jelöli, akkor az 5.1 és 5.2 Tételek alapján a kovariancia függvényeket a következő módon adhatjuk meg:

$$E \hat{D}^i(t; \Theta_0) = 0, \quad i=1, 2,$$

$$E \hat{D}^1(t; \Theta_0) \hat{D}^1(s; \Theta_0) = E (1 - F^{01}(t; \Theta_0))^{-1} (1 - F^{01}(s; \Theta_0))^{-1} \hat{D}^2(t; \Theta_0) \hat{D}^2(s; \Theta_0)$$

$$= \hat{K}(t, s; \Theta_0)$$

$$= d(t \wedge s) - (\ell_2(s) + h_2(s)) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0)$$

$$- (\ell_2(t) + h_2(t)) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(s; \Theta_0)$$

$$+ \nabla_{\Theta} \Lambda^1(s; \Theta_0) (\sigma_1 + 2\sigma_{12} + \sigma_2) \nabla_{\Theta}^T \Lambda^1(t; \Theta_0),$$

ahol

$$\ell_1 = E\ell(\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(s) dF(s), \quad \ell_1(u) = \int_{-\infty}^u \ell(s) dF(s),$$

$$h_1 = E\delta_1 h(\xi_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s) dF^1(s), \quad h_1(u) = \int_{-\infty}^u h(s) dF^1(s),$$

$$\ell_2(u) = \int_{-\infty}^u \left(\frac{\ell_1(s) - \ell_1}{1 - F(s)} + \ell(s) \right) d\Lambda^1(s),$$

$$h_2(u) = \int_{-\infty}^u \left(\frac{h_1(s) - h_1}{1 - F(s)} + h(s) \right) d\Lambda^1(s),$$

$$\tilde{G}_{12} = E \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \ell(u) dB_n(u) \int_{-\infty}^{\infty} h(u) dB_n^1(u) \right\}.$$

A $\tilde{G}_{12}$ mátrix végeessége következik a $\tilde{G}_1$ és $\tilde{G}_2$ mátrixok végeességéből.

a) A momentum módszer

A módszer alap gondolatát a cenzorált és a cenzorálatlan változók momentumai között levő kapcsolat jelenti. Példákon keresztül mutatjuk meg a módszer alkalmazhatóságát, majd az ismertetés végén eloszlásoknak egy széles osztályát adjuk meg, melyekre alkalmazható a momentum módszer. Mindig megmutatjuk, hogy a példáinkban megadott becslések kielégítik a 6.1 Tétel feltételeit.

1. PÉLDA. Tegyük fel, hogy F^{01} az exponenciális eloszlásfüggvény:

$$F^{01}(t; \theta_0) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{t}{\theta_0}) & , t \geq 0, \\ 0 & , t < 0. \end{cases}$$

Ekkor a házardfüggvény

$$\lambda^1(t; \Theta_0) = \begin{cases} \frac{1}{\Theta_0}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Az

$$\frac{f^{01}(t)}{1 - F^{01}(t)} = \frac{1}{\Theta_0}$$

egyenletet szorozzuk meg $1 - F(t)$ -vel, majd integráljuk 0-tól ∞ -ig:

$$\int_0^{\infty} (1 - F^{02}(t)) dF^{01}(t) = \frac{1}{\Theta_0} \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt.$$

Igy azt kapjuk, hogy

$$(6.5) \quad \Theta_0 = \frac{E\zeta}{E\delta},$$

függetlenül az F^{02} eloszlástól. A Θ_0 paraméter becslésére így a

$$\hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{-1}$$

valószínűségi változót használhatjuk. Egyszerű számolással megmutatható hogy az

$$\ell(t) = \frac{t}{E\delta} \quad \text{és} \quad h(t) = -\frac{E\zeta}{E^2\delta}$$

függvényekkel teljesülnek a 6.1 Tétel feltételei.

2. PÉLDA. Az exponenciális eloszláshoz hasonló módon becsülhetjük az élettartam vizsgálatoknál fontos Weibull és a kettős exponenciális eloszlás paraméterét is.

Ha F^{01} Weibull eloszlású, azaz

$$F^{01}(t; \Theta_0) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{t^m}{\Theta_0}\right), & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad m \text{ adott pozitív szám,}$$

akkor

$$(6.6) \quad \lambda^1(t; \Theta_0) = \frac{1}{\Theta_0} m t^{m-1}, \quad 0 \leq t < \infty$$

és így

$$\hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^m \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{-1}$$

alkalmazható a Θ_0 paraméter becslésére.

Hasonló a helyzet a kettős exponenciális esetben is. Itt

$$F^{01}(t; \Theta_0) = 1 - \exp(-\frac{1}{\Theta_0} \exp t), \quad \Theta_0 > 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$(6.7) \quad \lambda^1(t; \Theta_0) = \frac{1}{\Theta_0} \exp t,$$

$$\hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n \exp \xi_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{-1}.$$

Térjünk vissza az előző fejezetben általánosságban tárgyalt összetett hipotézis problémára.

3. PÉLDA. A kockázatmodellben azt akarjuk tesztelni, hogy mindkét eloszlásfüggvény, F^{01} és F^{02} is, exponenciális. Ha valóban így van, F^{01} az 1. Példabeli és

$$F^{02}(t; \lambda_0) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{1}{\lambda_0} t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

akkor a λ_0 paramétert az 1. Példában látottak szerint a

$$\hat{\lambda}_n = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \left(n - \sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{-1}$$

valószínűségi változóval becsüljük. Az F^{01} és F^{02} eloszlásfüggvények speciális alakját felhasználva az $\hat{R}$ kovariancia függvényt egyszerűbb alakra tudjuk hozni ebben az esetben:

$$(6.8) \quad K^e(t, s) = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \theta_0} \frac{F(t \wedge s)}{1 - F(t \wedge s)} - \left(\frac{1}{\theta_0^2} + \frac{1}{\theta_0 \mu_0} \right) st, \quad 0 \leq s, t < \infty.$$

BURKE [2] a (6.8) kovariancia alakját használta fel arra, hogy az $L_n(t; \hat{\Theta}_n)$ folyamat határeloszlását visszavezesse egy ismert eloszlásra.

Mindkét függvény exponenciális, ezért

$$d(t) = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \theta_0} \cdot \frac{F(t; \theta_0, \mu_0)}{1 - F(t; \theta_0, \mu_0)}$$

és

$$E \delta = \frac{\mu_0}{\mu_0 + \theta_0}.$$

Az

$$(6.9) \quad L_n(t; \hat{\Theta}_n) \exp(-t/\hat{\mu}_n) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{-1}$$

folyamat gyengén konvergál a

$$D^*(t) = \hat{D}^2(t; \theta_0) (1 - F^{02}(t)) \left(\frac{\theta_0}{\theta_0 + \mu_0} \right)^{-1/2}$$

folyamathoz $(-\infty, T]$ -n, $T < \infty$, mivel

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\exp(-t/\hat{\mu}_n) - \exp(-t/\mu_0)| = O((\log \log n / n)^{1/2})$$

és

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i - \frac{1}{\theta_0} \right| = O((\log \log n / n)^{1/2})$$

egy valószínűséggel.

A (6.8) formula alapján

$$\begin{aligned} E D^*(t) D^*(s) &= F(s) \wedge F(t) - F(s) F(t) \\ &\quad - \{ (1 - F(s)) \log(1 - F(s)) \} \{ (1 - F(t)) \log(1 - F(t)) \}. \end{aligned}$$

A (6.9) folyamaton alapuló Cramér- von Mises és Kolmogorov-Szirnov statisztikák aszimptotikus szignifikancia pontjai STEPHENS [22] és DURBIN [9] dolgozataiból meg tudjuk határozni, mivel D^* kovarianciája megegyezik egy közönséges (nem cenzorált) empirikus folyamat határfolyamatának kovarianciájával, melyet az exponencialitás hagyományos ellenőrzésére használnak.

A (6.8) kovariancia függvény csak a Θ_0, N_0 paraméterektől függ, melyeket Θ_n, N_n konzisztens módon becsül. Így a 3. fejezetben megismert transzformációs módszer is alkalmazható.

A most látott módszer csak arra ad lehetőséget, hogy egymástól függetlenül ellenőrizzük F^{01} és F^{02} exponencialitását, továbbá a határfolyamat persze függ a Θ_0, N_0 ismeretlen paraméterektől. Egy újabb módszert mutatunk most be, a nem cenzorált empirikus folyamatok esetén is használt felezési eljárást. Ez az eljárás, a minta felezésével bevezetett extra randomizáció miatt ugyanugy kritizálható mint a nem cenzorált esetben. Mindenesetre érdekes látni, hogy most is ugyanugy működik. Tegyük fel, hogy $n=2m$ és osszuk el a mintaelemeket két független csoportba, az első csoport alapján kapjuk a $\hat{\Theta}_m$, a második alapján pedig a $\hat{N}_m$ becslést. A független szétosztás miatt $\hat{\Theta}_m$ és $\hat{N}_m$ függetlenek. Az F^{01} és F^{02} függvények becslését a teljes mintából végezzük. Jelölje $\hat{F}_n^{02}$ az F^{02} eloszlásfüggvény szorzatbecslését és tekintsük a

$$(6.10) \quad \left(\frac{n}{d_n^1(T_1)} \right)^{1/2} \frac{\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \hat{\Theta}_m)}{1 - F^{01}(t; \hat{\Theta}_m)}, \quad 0 < T_1 < \infty$$

és

$$(6.11) \quad \left(\frac{n}{d_n^2(T_2)} \right)^{1/2} \frac{\hat{F}_n^{02}(t) - F^{02}(t; \hat{N}_m)}{1 - F^{02}(t; \hat{N}_m)}, \quad 0 < T_2 < \infty$$

folyamatokat, ahol

$$d_n^1(T_1) = \int_0^{T_1} (1 - F_n(t))^{-2} dF_n^1(t), \quad d_n^2(T_2) = \int_0^{T_2} (1 - F_n(t))^{-2} d(F_n(t) - F_n^1(t)).$$

A [7] dolgozat 4.1 Tételéből következik, hogy a (6.10) és (6.11) folyamatok gyengén konvergálnak két független, időtranszformált Wiener folyamathoz. Következésképpen, például

$$(6.12) \quad P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T_1} \left(\frac{n}{d_n^1(T_1)} \right)^{1/2} \left| \frac{\hat{F}_n^{01}(t) - \bar{F}^{01}(t; \hat{\Theta}_n)}{1 - \bar{F}^{01}(t; \hat{\Theta}_n)} \right| < x, \right. \\ \left. \sup_{0 \leq t \leq T_2} \left(\frac{n}{d_n^2(T_2)} \right)^{1/2} \left| \frac{\hat{F}_n^{02}(t) - \bar{F}^{02}(t; \hat{\Theta}_n)}{1 - \bar{F}^{02}(t; \hat{\Theta}_n)} \right| < y \right\} \rightarrow \Phi_1(x) \Phi_2(y), n \rightarrow \infty$$

ahol

$$\Phi_1(x) = P \left\{ \sup_{0 \leq t \leq 1} |W_1(t)| < x \right\} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \exp \left(- \frac{\pi^2 (2k+1)^2}{8x^2} \right).$$

A (6.12) határeloszlás bizonyításában felhasznált tételek rátát is tartalmaznak, ezt a független valószínűségi változók részletösszegére vonatkozó iterált logaritmus tétellel összekapcsolva a (6.12) konvergencia sebességére a $O(n^{-1/3} (\log n)^{3/2})$ becslést kapjuk. Természetesen a szupré-mum statisztika helyett más statisztikákat is használhatunk.

4. PÉLDA. A következőkben a $\Theta_0 = (\Theta_{01}, \Theta_{02})$ vektorértékű paramétert becsüljük, amikor ξ^1 Pareto eloszlású, vagyis

$$(6.13) \quad \lambda^1(t; \Theta_0) = \begin{cases} \Theta_{01} + \Theta_{02}(t + \Theta_{03})^{-1}, & t \geq 0, \Theta_{03} > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad \Theta_{03} \text{ adott,}$$

A fenti egyenlőséget ismét szorozzuk meg $1-F(t)$ -vel és integráljuk 0 -tól ∞ -ig, illetve $t(1-F(t))$ -vel szorozzuk meg és ugyancsak az előző félegyenesen integráljuk. Így a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \Theta_{03} E\delta + E\delta\xi &= \Theta_{01} \left\{ \frac{1}{2} E\xi^2 + \Theta_{03} E\xi \right\} + \Theta_{02} E\xi \\ \Theta_{03} E\delta + E\delta\xi^2 &= \Theta_{01} \left\{ \frac{1}{3} E\xi^3 + \frac{1}{2} \Theta_{03} E\xi^2 \right\} + \frac{1}{2} \Theta_{02} E\xi^2 \end{aligned}$$

A (6.14) egyenletrendszernek mindig van egyértelmű megoldása, mivel a rendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} E\xi^2 + \Theta_{03} E\xi & , & E\xi \\ \frac{1}{3} E\xi^3 + \frac{1}{2} \Theta_{03} E\xi^2 & , & \frac{1}{2} E\xi^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ E^2 (\xi^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{3}{2}}) - \frac{4}{3} E\xi E(\xi^3) \right\}$$

mindig negatív a Cauchy-Schwartz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség alapján.

A (6.14) egyenletrendszer mindegyik együtthatóját a mintából becsüljük, így a

$$(6.15) \quad \begin{aligned} \frac{\Theta_{03}}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \xi_i &= \hat{\Theta}_{n1} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \frac{\Theta_{03}}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right\} \\ &+ \hat{\Theta}_{n2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right\} \\ \frac{\Theta_{03}}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \xi_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \xi_i^2 &= \hat{\Theta}_{n1} \left\{ \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \xi_i^3 + \frac{\Theta_{03}}{2n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right\} \\ &+ \hat{\Theta}_{n2} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right\} \end{aligned}$$



egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $\hat{\Theta}_n = (\hat{\Theta}_{n1}, \hat{\Theta}_{n2})$. Az $n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)$ különbséget a momentum módszer bevezetésében megadott alakra hozhatjuk, mivel $\Theta_0 = \varphi(\gamma_0)$, $\gamma = (\gamma_{01}, \dots, \gamma_{06}) = (E\delta, E\delta\zeta, E\delta\zeta^2, E\zeta, E\zeta^2, E\zeta^3)$, $\hat{\Theta}_n = \varphi(\hat{\gamma}_{n1}, \dots, \hat{\gamma}_{n6}) = (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i, \dots, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \zeta_i^3)$, valamely φ függvénnyel. Az egyenletrendszer megoldhatósága miatt φ az γ_0 pont egy környezetében Taylor-sorba fejthető, de nekünk elég egy tagu kifejtés is:

$$(6.16) \quad n^{1/2}(\varphi(\gamma_0) - \varphi(\hat{\gamma}_n)) = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial \gamma_i} \Big|_{\gamma=\gamma_0} n^{1/2}(\gamma_{0i} - \hat{\gamma}_{ni}) + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial \gamma_i} \Big|_{\gamma=\gamma^*} - \frac{\partial \varphi(\gamma)}{\partial \gamma_i} \Big|_{\gamma=\gamma_0} \right) n^{1/2}(\gamma_{0i} - \hat{\gamma}_{ni}),$$

ahol $\|\gamma^* - \gamma_0\|_6 \leq \|\hat{\gamma}_n - \gamma_0\|_6$. A φ függvény sorbafejthetősége alapján $\varepsilon_{2n} \rightarrow 0$, sőt a független valószínűségi változók összegére vonatkozó iterált logaritmus tétel alapján $\varepsilon_{2n} = O((\log \log n / n)^{1/2})$ a.s. A definícióból következik, hogy például

$$n^{1/2}(\hat{\gamma}_{n6} - \gamma_{06}) = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 d\alpha_n(x).$$

5. PÉLDA. Legyen $m \geq 1$ rögzített egész szám és $\gamma^1(\Theta_0, m)$ paraméterű gamma eloszlás

$$f^{01}(t) = \begin{cases} \Theta_0^m \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} \exp(-\Theta_0 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel, ahol $\Gamma(m)$ a gammafüggvény. A házádráta ebben az esetben

$$(6.17) \quad \frac{1}{\lambda'(t)} = \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(j)} \Theta_0^{j-1-m} t^{j-m}.$$

Szorozzuk meg (6.17)-t $m t^{m-1} (1 - F^{\alpha_2}(t)) f^{\alpha_1}(t)$ -vel és integráljuk a pozitív félegyenesen. Eredményül az

$$(6.18) \quad E \xi^m = \sum_{j=1}^m \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(j)} \Theta_0^{j-1-m} E \delta \xi^{j-1}$$

egyenletet kapjuk, melyben $E \xi^m$ -t $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^m$ -nel, $E \delta \xi^{j-1}$ -t pedig $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \xi_i^{j-1}$ -nel, $j=1, \dots, m$, helyettesítve az így kapott egyenlet gyökét használjuk Θ_0 becslésére. A (6.18) egyenlet jobboldala Θ_0 pozitív együtthatós polinomja, így az empirikus egyenletnek pontosan egy valós gyöke van.

6. PÉLDA. Tegyük fel, hogy

$$F^{\alpha_1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - \left(\frac{\Theta_{02} - t}{\Theta_{02}} \right)^{\Theta_{01}}, & 0 \leq t \leq \Theta_{02} \\ 1, & t > \Theta_{02}, \end{cases}$$

ahol Θ_{02} ismert. Ekkor

$$\lambda'(t) = \frac{\Theta_{01}}{\Theta_{02} - t}, \quad 0 \leq t \leq \Theta_{02}.$$

A szokott eljárással a

$$\Theta_{02} E \delta - E \delta \xi = \Theta_{01} E \xi$$

egyenletet kapjuk, melyből a

$$\hat{\Theta}_{n1} = \left(\Theta_{02} \sum_{i=1}^n \delta_i - \sum_{i=1}^n \delta_i \xi_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^{-1}$$

becslés adódik, melyre ismét igazak a 6.1 Tétel feltételei és

$$\varepsilon_{2n} = O((\log \log n / n)^{1/2}) \quad \text{egy valószínűséggel.}$$

A most példákön bemutatott módszer alkalmazható minden olyan esetben, amikor a λ^1 házádráta vagy reciproka

$$\sum_{i=1}^p \varphi_{i1}(\Theta_{0i}) \varphi_{i2}(t)$$

alaku, ahol a $\varphi_{i1}, \varphi_{i2}, i=1, \dots, p$ függvények az argumentumaikban nem szereplő paraméterektől függetlenek és bizonyos simasági feltételeknek eleget tesznek.

A (6.1) és (6.2) feltételek teljesülésének egy elegendő feltétele, hogy $\ell(\mathcal{J}^1)$ és $h(\mathcal{J}^1)$ szórása létezen és ez a feltétel független a cenzoráló változó F^{02} eloszlásától.

b) A szorzatbecslésen alapuló paraméterbecslés

Jelen módszerünk GILL [11] 4.23 Tételén alapul, ezért ebben a pontban feltételezzük, hogy $\mathcal{J}^1$ egy valószínűséggel pozitív valószínűségi változó. Azt is feltételezzük, hogy a cenzorálás nem túl erős, pontosabban $T_F = T_{F^{01}}$, ahol

$$T_F = \inf \{ t : F(t) = 1 \}$$

és

$$T_{F^{01}} = \inf \{ t : F^{01}(t) = 1 \}.$$

A becslés alapötlete az, hogy ha az ismeretlen paraméter

$$(6.19) \quad \Theta_0 = \int_0^\infty h(t) dF^{01}(t)$$

alakban álltíható elő, akkor a

$$(6.20) \quad \hat{\Theta}_n = \int_0^\infty h(t) d\hat{F}_n^{01}(t)$$

valószínűségi változó használható lesz Θ_0 becslésére. Ha

$$(6.21) \quad h(0+) = 0$$

és

$$(6.22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t)(1 - F^{01}(t)) = 0,$$

akkor (6.19) helyett írható hogy

$$\Theta_0 = \int_0^{\infty} (1 - F^{01}(t)) dh(t),$$

ha F^{01} folytonos eloszlásfüggvény és (6.20) is ugyanígy átalakítható

$$\hat{\Theta}_n = \int_0^{\infty} (1 - \hat{F}_n^{01}(t)) dh(t).$$

A szorzatbecslés folyamat definíciója alapján

$$n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) = - \int_0^{\infty} L_n(t) dh(t),$$

így azt sejtjük, hogy az

$$\varepsilon_{3n} = n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0) + \int_0^{\infty} (1 - F^{01}(t)) W_n(d(t)) dh(t)$$

összeg nullához tart, ha h elég szabályos függvény. Gill azonban megmutatta, hogy a legfontosabb esetben a $h(t) \equiv t$ függvény esetén se teljesül mindig $\varepsilon_{3n} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$. Vezessük be a következő folyamat-sorozatot

$$\hat{D}_n(t) = (1 - F^{01}(t)) W_n(d(t)) + \int_0^{\infty} (1 - F^{01}(s)) W_n(d(s)) dh(s) \nabla_{\Theta}^T F^{01}(t; \Theta_0).$$

6.2 TÉTEL. Ha (5.13), (6.21), (6.22) és

$$(6.23) \quad \varepsilon_{3n} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty,$$

teljesül, akkor

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |L_n(t; \hat{\Theta}_n) - \hat{D}_n(t)| \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

BIZONYÍTÁS. Következik az 5.3 Tételből.

Polytonos $\bar{F}$ függvény esetén a $\hat{D}_n$ folyamat kovarianciája a következő:

$$E \hat{D}_n(t) = 0,$$

$$\begin{aligned} E (1 - F^{01}(t))^{-1} (1 - F^{01}(s))^{-1} \hat{D}_n(t) \hat{D}_n(s) &= d(t \wedge s) \\ &- \int_0^t \hat{h}(u) dd(u) \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(s; \Theta_0) - \int_0^s \hat{h}(u) dd(u) \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(t; \Theta_0) \\ &+ \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(t; \Theta_0) \int_0^{\infty} (\hat{h}(u))^2 dd(u) \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(s; \Theta_0), \end{aligned}$$

ahol

$$\hat{h}(u) = \int_u^{\infty} (1 - F^{01}(s)) d\bar{h}(s).$$

A 6.2 Tétel feltételei között ε_{3n} sztochasztikus nullához tartása jelent erős feltételt, és ez megszabja, hogy milyen erős lehet a cenzorálás. Néhány példát mutatunk, amikor a tétel feltételei teljesülnek.

7. PÉLDA. Ha $T_{F^{01}} = T_F < \infty$ és $h(t)$ korlátos változásu $[0, T_F]$ -n, továbbá

$$\lim_{t \uparrow T_F} (1 - F^{01}(t))^2 \int_0^t ((1 - F^{01}(s))(1 - F(s)))^{-1} dF^{01}(s) = 0$$

és

$$\lim_{t \uparrow T_F} \int_t^{T_F} (1 - F^{02}(s))^{-1} dF^{01}(s) = 0,$$

akkor $\varepsilon_{3n} \xrightarrow{P} 0$. Az állítás bizonyítása parciális integrálással következik Gill 4.23 Tételéből. A 6. Példánál láttuk, hogy a momentum módszer ott tetszőleges $\bar{F}^{02}$ eloszlásfüggvény mellett használhattuk,

míg a mostani paraméterbecslésnél megszorítást kell tennünk $F^{02} T_{F^{01}}$ körüli viselkedésére.

8. PÉLDA. Abban az esetben, amikor Θ_0 paraméter a ξ^1 valószínűségi változó várható értéke, tehát ha $h(t) \equiv t$, Gill részletesen megvizsgálta a problémát. A

$$(6.24) \quad \begin{aligned} \hat{\Theta}_n &= \int_0^\infty (1 - \hat{F}_n^{01}(u)) du \\ &= \int_0^{\xi_{n:n}} (1 - \hat{F}_n^{01}(u)) du \end{aligned}$$

valószínűségi változót használjuk a várható érték becslésére, ahol $\xi_{n:n} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$. A (6.24) definícióban az integrálás a $[0, \xi_{n:n}]$ véletlen intervallumon történik, így a

$$\Theta_0 = E\xi^1 = \int_0^\infty (1 - F^{01}(u)) du$$

mellett vezessük be a

$$\Theta_{(n)} = \int_0^{\xi_{n:n}} (1 - F^{01}(u)) du$$

valószínűségi változót is. Gill bebizonyította, hogy ha

$$\lim_{t \uparrow T_F} \left(\int_t^\infty (1 - F^{01}(u)) du \right) d(t) = 0$$

és

$$\int_0^\infty \left(\int_t^\infty (1 - F^{01}(u)) du \right)^2 d(t) < \infty,$$

akkor

$$(6.25) \quad n^{1/2} (\hat{\Theta}_n - \Theta_{(n)}) + \int_0^\infty (1 - F^{01}(t)) W_n(d(t)) dt \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Az utóbbi (6.25) konvergencia még nem bizonyítja, hogy $\varepsilon_{3n} \xrightarrow{P} 0$

a 6.2 Tételben fennálljon. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha

$$n^{1/2} \int_0^{\xi_{n:n}} (1 - F^{01}(u)) du \xrightarrow{P} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \text{Ha léteznek olyan } 0 < \alpha < 2$$

és $\beta > 0$ konstansok, hogy

$$1 - F(t) \geq \beta \left(\int_t^\infty (1 - F^{01}(u)) du \right)^\alpha$$

elég nagy t -re fennáll, akkor $\varepsilon_{3n} \xrightarrow{P} 0$. Ha azonban léteznek olyan

$\alpha > 2$ és $\beta > 0$ konstansok, hogy

$$1 - F(t) < \beta \left(\int_t^\infty (1 - F^{01}(u)) du \right)^\alpha,$$

akkor ε_{3n} nem tart sztochasztikusan 0-hoz. Ha F^{01} és F^{02} mindkettő exponenciális Θ_0 és μ_0 paraméterekkel, akkor a szorzatbecslésen alapuló módszer csak a $\Theta_0 < \mu_0$ esetben használható. Így most nem létezik olyan teszt, amellyel F^{01} és F^{02} együttes exponencialitását ellenőrizhetnénk.

c) A szorzatbecslés kvantilisein alapuló paraméterbecslés

Vezessük be az $\hat{F}_n^{01}(t)$ függvény balról folytonos inverzét

$$\hat{G}_n^{01}(u) = \inf \{ t; \hat{F}_n^{01}(t) \geq u \},$$

ahol az üres halmaz infimumán $+\infty$ -t értünk, valamint legyen

$$G^{01}(u) = \inf \{ t; F^{01}(t) \geq u \}.$$

Vezessük be a kvantilis folyamatot:

$$Q_n^1(u) = n^{1/2} (\hat{G}_n^{01}(u) - G^{01}(u)).$$

6.3 TÉTEL (SANDER [20]). Ha $F^{02}(G^{01}(\alpha)) < 1$ és $f^{01}(G^{01}(u)) \neq 0$,

$0 \leq u \leq \alpha$, akkor az 5.2 Tétel valószínűségi mezején

$$\sup_{0 \leq u \leq \alpha} |Q_n^1(u) - \frac{1-u}{f^{01}(G^{01}(u))} W_n(d(G^{01}(u)))| \xrightarrow{P} 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$.



BIZONYÍTÁS. A tételt Sander bizonyította be [20] dolgozatában (Theorem 2.), az állítást más formában mondta ki, de módszeréből a fenti tétel is következik. Az a sejtésünk, hogy a 6.3 Tételben az approximáció rendje szintén $O(n^{-1/3}(\log n)^{3/2})$, és a feltételek is lényegesen gyengíthetők.

Kvantilizsek segítségével könnyen meg tudjuk becsülni az eloszlások eltolás és skála paraméterét. Tegyük fel, hogy F^{01} eleme az

$$\mathcal{F} = \left\{ \bar{F}^* \left(\frac{t - \Theta_1}{\Theta_2} \right), \Theta_1 \in R, \Theta_2 > 0 \right\}$$

eloszláscsaládnak, tehát $F^{01}(t; \Theta_0) = \bar{F}^* \left(\frac{t - \Theta_{01}}{\Theta_{02}} \right)$. Ebben az esetben

$$(6.26) \quad G^{01}(u) = \Theta_{02} G^*(u) + \Theta_{01},$$

ahol

$$G^*(u) = \inf \{ t; \bar{F}^*(t) \geq u \}.$$

A (6.26) formula alapján $\Theta_0 = (\Theta_{01}, \Theta_{02})$ -ra egyszerű becslést adhatunk. Nevezetesen, $G^*(u) \neq G^*(v)$ esetén a

$$\hat{G}_n^{01}(u) = \Theta_{n2} G^*(u) + \Theta_{n1}$$

$$\hat{G}_n^{01}(v) = \Theta_{n2} G^*(v) + \Theta_{n1}$$

egyenletrendszer

$$\Theta_{n1} = \left(\hat{G}_n^{01}(v) G^*(u) - \hat{G}_n^{01}(u) G^*(v) \right) \left(G^*(u) - G^*(v) \right)^{-1},$$

$$\Theta_{n2} = \left(\hat{G}_n^{01}(u) - \hat{G}_n^{01}(v) \right) \left(G^*(u) - G^*(v) \right)^{-1}.$$

megoldásait használhatjuk a Θ_0 paraméter becslésére. Leggyakrabban a $G^*(u) = \frac{1}{2}$, $G^*(v) = \frac{1}{4}$, tehát a medián és a kvartilis pontokat használjuk. Ha $u, v \leq \alpha$, akkor a 6.3 Tételből következik a becslés konzisztenciája és aszimptotikus normálitása, mert

$$(6.27) \quad n^{1/2}(\Theta_{n1} - \Theta_{01}) = (G^*(u)Q_n^1(v) - G^*(v)Q_n^1(u))(G^*(u) - G^*(v))^{-1}$$

és

$$(6.28) \quad n^{1/2}(\Theta_{n2} - \Theta_{02}) = (Q_n^1(u) - Q_n^1(v))(G^*(u) - G^*(v))^{-1}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$a_1(u) = \frac{1-u}{f^*(G^*(u))},$$

$$a_2(u, v) = (G^*(u) - G^*(v))^{-1}.$$

Az $(n^{1/2}(\Theta_{n1} - \Theta_{01}), n^{1/2}(\Theta_{n2} - \Theta_{02}))$ vektor határeloszlása egy két-dimenziós, 0 várható értékű normális eloszlás, melynek kovarianciamátrixa $A = \{a_{ij}\}_{i,j}$, ahol

$$\begin{aligned} a_{11} &= [\Theta_{02} a_2(u, v)]^2 \left\{ (G^*(u) a_1(v))^2 d(G^{01}(v)) \right. \\ &\quad \left. - 2 G^*(u) G^*(v) a_1(u) a_1(v) d(G^{01}(u \wedge v)) + (G^*(v) a_1(u))^2 d(G^{01}(u)) \right\}, \\ a_{22} &= [\Theta_{02} a_2(u, v)]^2 \left\{ a_1^2(u) d(G^{01}(u)) - 2 a_1(u) a_1(v) d(G^{01}(u \wedge v)) \right. \\ &\quad \left. + a_1^2(v) d(G^{01}(v)) \right\}, \end{aligned}$$

$$a_{12} = a_{21} = [\Theta_{02} a_2(u, v)]^2 \left\{ G^*(u) a_1(u) a_1(v) d(G^{01}(u \wedge v)) \right. \\ \left. - G^*(v) a_1^2(u) d(G^{01}(u)) - G^*(u) a_1^2(v) d(G^{01}(v)) \right. \\ \left. + G^*(v) a_1(u) a_1(v) d(G^{01}(u \wedge v)) \right\}.$$

Vezessük be ismét a paraméterbecsült folyamatot

$$L_n(t; \Theta_n) = n^{1/2} (\hat{F}_n^{01}(t) - F^{01}(t; \Theta_n)), \quad \Theta_n = (\Theta_{n1}, \Theta_{n2})$$

és a limesz egy kópia-sorozatát:

$$(6.29) \quad D_n^*(t; \Theta_0) = (1 - F^{01}(t)) W_n(d(t)) - (\eta_n^1, \eta_n^2) \nabla_{\Theta}^T F^{01}(t; \Theta_0),$$

ahol (η_n^1, η_n^2) a (6.27) és (6.28) reprezentációnak megfelelő normális eloszlású változó-sorozat.

6.4 TÉTEL. Ha (5.13) teljesül és $F^{02}(G^{01}(u)) < 1$,
 $F^{02}(G^{01}(v)) < 1$, $f^{01}(G^{01}(u)) \neq 0$, $f^{01}(G^{01}(v)) \neq 0$, $F(T) < 1$,
akkor az 5.12 Tétel valószínűségi mezején

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |L_n(t; \Theta_n) - D_n^*(t; \Theta_0)| \xrightarrow{P} 0,$$

ha $n \rightarrow \infty$.

BIZONYÍTÁS. Az eddigiekhez hasonló módon következik az 5.3 Tételből.

Számítsuk ki a limeszfolyamat kovariancia függvényét:

$$(6.30) \quad E D_n^*(t; \Theta_0) = 0, \\ E (1 - F^{01}(t; \Theta_0))^{-1} (1 - F^{01}(s; \Theta_0))^{-1} D_n^*(t; \Theta_0) D_n^*(s; \Theta_0) \\ = d(t \wedge s) - g(u, v, s) \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(t; \Theta_0) \\ - g(u, v, t) \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(s; \Theta_0) + \nabla_{\Theta} \Lambda'(s; \Theta_0) A \nabla_{\Theta}^T \Lambda'(t; \Theta_0),$$

ahol

$$g(u, v, s) = \Theta_{02} a_2(u, v) \left(G^*(u) a_1(v) d(G^{0'}(v) \wedge s) - G^*(v) a_1(u) d(G^{0'}(u) \wedge s), a_1(u) d(G^{0'}(u) \wedge s) - a_1(v) d(G^{0'}(v) \wedge s) \right).$$

A határfolyamat (6.29) reprezentációját felhasználva χ^2 statisztikát készítünk az összetett hipotézis ellenőrzésére. Tekintsük a $(-\infty, T]$ intervallum $(-\infty, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{k-1}, t_k], t_k = T$ felbontását, ahol $F^{0'}(t_i) \neq u, F^{0'}(t_i) \neq v, i = 1, \dots, k$.

Az

$$n^{1/2} \left\{ \frac{\hat{F}_n^{0'}(t_j) - F^{0'}(t_j)}{1 - F^{0'}(t_j; \Theta_n)} - \frac{\hat{F}_n^{0'}(t_{j-1}) - F^{0'}(t_{j-1})}{1 - F^{0'}(t_{j-1}; \Theta_n)} \right\} = \delta^n(t_{j-1}, t_j]$$

$j = 1, \dots, k$ valószínűségi változók aszimptotikusan normális eloszlásúak valamely B kovariancia mátrixszal. Ha $\delta^n(t_{j-1}, t_j]$ lineárisan $\delta(t_{j-1}, t_j]$ jelöli, akkor

$$\delta(t_{j-1}, t_j] = W(d(t_j)) - W(d(t_{j-1})) + c_j W(d(G^{0'}(u))) + d_j W(d(G^{0'}(v))).$$

Ha a $\delta(t_{j-1}, t_j]$ változók lineárisan függők, akkor léteznek olyan $\lambda_i, i = 1, \dots, k$ számok, melyre $\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2 > 0$ és

$$(6.31) \sum_{i=1}^k \lambda_i (W(d(t_i)) - W(d(t_{i-1}))) = -W(d(G^{0'}(u))) \sum_{i=1}^k \lambda_i c_i - W(d(G^{0'}(v))) \sum_{i=1}^k \lambda_i d_i$$

1 valószínűséggel. Ha $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i = 0$ és $\sum_{i=1}^k \lambda_i d_i = 0$, akkor ellentmondásra jutunk, mert (6.31) ebben az esetben azt jelenti, hogy

független valószínűségi változók lineárisan függők. Ha például $\sum_{i=1}^k \lambda_i c_i \neq 0$, akkor (6.31)-t rendezzük át:

$$\sum_{i=1}^k \beta_i W(d(t_i)) + W(d(G^0(u))) \cdot \sum_{i=1}^k \alpha_i c_i + W(d(G^0(v))) \sum_{i=1}^k \alpha_i d_i = 0$$

1 valószínűséggel, tehát $W(d(t_1)), \dots, W(d(t_k)), W(d(G^0(u))), W(d(G^0(v)))$ lineárisan függőek. Ez ismét ellentmondást jelent, mivel feltevésünk szerint a Wiener folyamat argumentumai különbözőek.

A B mátrix így invertálható. A (6.30) kovariancia alapján pontosan fel tudjuk írni B -t. Ha a B -re kapott kifejezésben az megfelelő függvényeket és Θ_0 -t empirikus megfelelőikkel helyettesítjük, akkor a [8] dolgozat 9. és 11. fejezete alapján a B mátrix egy B_n konzisztens becslését kapjuk. Ha B_n^{-1} jelöli a B_n mátrix Moore-Penrose-féle általánosított inverzét, akkor

$$(\delta^n)^T B_n^{-1} \delta^n, \quad \delta^n = (\delta^n(t_0, t_1], \dots, \delta^n(t_{k-1}, T])$$

aszimptotikusan k -adrendű χ^2 -eloszlás MOORE [19] tétele alapján (lásd Lemma 2.4 TYLER [23] dolgozatában).

A most látott χ^2 próba alkalmas normalitás tesztelésére is cenzorált adatok esetén. Érdekes megjegyezni, hogy ha χ^2 -próbát használunk egyszerű hipotézis ellenőrzésére k alapponttal, illetve összetett hipotézis tesztelésre, akkor a paraméterbecslés nem csökkenti a χ^2 próba szabadsági fokát.

7. Az exponenciális eloszlás paraméterének becslésére vonatkozó módszerek összehasonlítása

Az előző fejezetben három különböző módszert mutattunk az exponenciális eloszlásfüggvény

$$F^{01}(t; \Theta_0) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{t}{\Theta_0}), & t > 0, \\ 0 & , t \leq 0, \end{cases}$$

Θ_0 paraméterének a becslésére:

$$(7.1) \quad \hat{\Theta}_n = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \delta_i \right)^{-1},$$

$$(7.2) \quad \hat{\hat{\Theta}}_n = \int_0^{\infty} (1 - \hat{F}_n^{01}(t)) dt,$$

$$(7.3) \quad \Theta_n = - \frac{\hat{G}_n^{01}(\mu)}{\log(1-\mu)}.$$

Tegyük fel, hogy a cenzoráló változó is exponenciális eloszlású

$$F^{02}(t; \mu_0) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{t}{\mu_0}), & t > 0, \\ 0 & , t \leq 0, \end{cases}$$

A 6. fejezetben láttuk, hogy a (7.2) becslés csak akkor használható,

ha $\Theta_0 < \mu_0$. A

$$n^{1/2} (\hat{\Theta}_n - \Theta_0),$$

$$n^{1/2} (\hat{\hat{\Theta}}_n - \Theta_0)$$

és

$$n^{1/2} (\Theta_n - \Theta_0).$$

aszimptotikus szórásnégyzetét jelölje rendre $\hat{\sigma}$, $\hat{\hat{\sigma}}$ és $\tilde{\sigma}$.

Az előző fejezet formuláinak felhasználásával a következőket kapjuk:

$$\hat{\sigma} = \Theta_0^2 + \Theta_0^3 / M_0 = (1 + K) \Theta_0^2,$$

$$\hat{\hat{\sigma}} = \Theta_0^2 M_0 (M_0 - \Theta_0)^{-1} = \Theta_0^2 (1 - K)^{-1}, \quad M_0 > \Theta_0$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(t) &= \Theta_0^2 M_0 (M_0 + \Theta_0)^{-1} \left[(1-t)^{-(1+\frac{\Theta_0}{M_0})} - 1 \right] (\log(1-t))^{-2} \\ &= \Theta_0^2 (1+K)^{-1} \psi_K(t), \end{aligned}$$

ahol

$$\psi_K(t) = (\log(1-t))^{-2} \left[(1-t)^{-(1+K)} - 1 \right], \quad K = \Theta_0 / M_0.$$

Keressük meg a $\psi_K(t)$ függvény nullától különböző minimumát, $t_0 \neq 0$, $\psi_K(t_0) = \min_{0 \leq t < \infty} \psi_K(t)$, $\delta > 0$, és $\Theta_n(t_0)$ -t használjuk Θ_0

becslésére, ha $K=0$, tehát nincs cenzorálás, akkor $t_0 = 0.799$

és $\psi_0(0.799) = 1.544$. A $\psi_K(t)$ függvény K -ban növekszik,

$$\psi_{K_1}(t) < \psi_{K_2}(t), \quad \text{ha } K_1 < K_2, \quad t \neq 0.$$

A szórásnégyzetekre kapott formulák alapján a következő megállapításokat tehetjük:

(i) $K=0$ esetén mindhárom becslés a nem cenzorált esetre redukálódik, $\hat{\sigma} = \hat{\hat{\sigma}} = \Theta_0^2$, mivel ebben az esetben $\hat{\sigma}_n$ és $\hat{\hat{\sigma}}_n$ megegyezik a számtani középpel.

(ii) $\hat{\sigma} \leq \hat{\hat{\sigma}}$ és az egyenlőség csak a $K=0$ esetben teljesül, tehát cenzorálás esetén $n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)$ aszimptotikus szórása mindig kisebb.

(iii) $\hat{\sigma} < \sigma(t_0)$.
A három vizsgált becslés közül $n^{1/2}(\hat{\Theta}_n - \Theta_0)$ aszimptotikus szórása mindig a legkisebb.

(iv) $\hat{\hat{\Theta}}_n$ csak gyenge cenzorálás esetén használható, ha $\mu_0 > \Theta_0$.

(v) ha $K \leq 0,2138$, akkor $\hat{\hat{\sigma}} < \sigma(t_0)$, ha K közel van az egyhez, akkor $\hat{\hat{\sigma}} > \sigma(t_0)$.

Irodalom

- [1] Aronszajn, N. (1950). Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc., 68 337-404.
- [2] Burke, M.D. (1982). Tests for exponentiality based on randomly censored data, Transaction of the Colloquium on Nonparametric Statistical Inference, June 23-28, 1980. Budapest. Ed. I. Vincze (Colloquia Math. Soc. J. Bolyai No 32, North-Holland)
- [3] Burke, M.D., Csörgő M., Csörgő S. and Révész P. (1978). Approximations of the empirical process when parameters are estimated, Ann. Probab., 7 790-810.
- [4] Burke, M.D., Csörgő S. and Horváth L. (1981). Strong approximations of some biometric estimates under random censorship, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 56 87-112.
- [5] Csörgő M. and Révész P. Strong Approximations in Probability and Statistics, Akadémiai Kiadó, Budapest and Academic Press, New York-San Francisco-London, 1981.
- [6] Csörgő S. (1982). Kernel-transformed empirical processes, J. Multivar. Anal. 12
- [7] Csörgő S. and Horváth L. (1982). On cumulative hazard processes under random censorship, Scand. J. Statist.
- [8] Csörgő S. és Horváth L. (1982). Statisztikai következtetés cenzorált mintából, Alk. Mat. Lapok
- [9] Durbin, J. (1975). Kolmogorov-Smirnov tests when parameters are estimated with applications to tests of exponentiality and tests on spacings, Biometrika, 62 5-22.

- [10] Dzsaparidze, K.O. and Nikulin, M.S. (1979). The probability distributions of the Kolmogorov and ω^2 statistics for continuous distributions with shift and location parameters, Investigations in the theory of probability distributions, IV. Zap. Nauchn Sem. Leningrad Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 85 46-77 (Russian)
- [11] Gill, R.D. Censoring and stochastic integrals, Mathematical Centre Tracts 124, Amsterdam, 1980.
- [12] Hmaladze, E.V. (1979). The use of ω^2 -tests for testing parametric hypothesis, Teor. Veroyatnost. i Primen., 24 280-297 (Russian)
- [13] Hmaladze, E.V. (1981). Martingale approach in the theory of goodness-of-fit tests, Teor. Veroyatnost. i Primen., 26 247-265
- [14] Horváth L. (1982). Dropping continuity and independence assumptions in random censorship models, Studia Sci. Math.
- [15] Jain, N.C. and Kallianpur, G.A. (1970). A note on uniform convergence of stochastic processes, Ann. Math. Statist., 41 1360-1362.
- [16] Kaplan, E.L. and Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations, J. Amer. Statist. Assoc., 53 457-481.
- [17] Kotz, S. and Shanbhag, D.N. (1980). Some new approaches to probability distributions, Adv. Appl. Prob. 12 903-921.
- [18] Mangano, G.C. (1976). Sequential compactness of certain sequences of Gaussian random variables with values in $C[0,1]$, Ann. Probab. 4 902-913.
- [19] Moore, D.S. (1977). Generalized inverses, Wald's method and the construction of chi-squared tests of-fit, J. Amer. Statist. Assoc. 72 131-137.



- [20] Sander, J.M. (1975). The weak convergence of quantiles of the product-limit estimator, Stanford University Technical Report No 5.
- [21] Sato, H. (1969). Gaussian measure on a Banach space and abstract Wiener measure, Nagoya Math. J. 36 65-81.
- [22] Stephens, M.A. (1976). Asymptotic results and percentage points for goodness-of-fit statistics with unknown parameters, Ann. Statist. 4 357-369.
- [23] Tyler, D.E. (1981). Asymptotic inference for eigenvectors, Ann. Statist. 4 725-736.

