SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
Természettudományi és Informatikai Kar
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Számítógépes Algoritmusok és Mesterséges Intelligencia Tanszék

Speciális faautomata osztályok jellemzése

– doktori értekezés –

Gyuricza György

Témavezető: Dr. Gécseg Ferenc

Szeged, 2010

A matematikában az ember
nem megérti a dolgokat,
hanem megszokja.

/ Neumann János /

Tartalomjegyzék

Bevezetés **1**

Célkitűzés **4**

Eredmények **5**

1. Alapfogalmak, előkészületek **6**

1.1. Sztring nyelvek 6

1.2. Determinisztikus felszálló fanyelvek 11

2. Monoton nyelvek **20**

2.1. Monoton sztring nyelvek 20

2.2. Monoton determinisztikus felszálló fanyelvek 23

2.3. A monoton DR-fanyelvek egy egyszerű jellemzése 25

2.4. Megjegyzések η dekompozíciójával kapcsolatban 27

2.5. Megjegyzések az $\eta_{\mathfrak{A}}$-ban lévő segédváltozók számával kapcsolatban 30

2.6. A monoton DR-fanyelvek jellemzése 35

3. Nilpotens nyelvek **42**

3.1. Nilpotens sztring nyelvek 42

3.2. Nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek 48

3.3. A nilpotens DR-fanyelvek jellemzése 50

4. Zártsági tulajdonságok vizsgálata **56**

4.1. Egyesítés 56

4.2. Metszet 60

4.3. Komplementerképzés 61

4.4. x-szorzat 65

4.5. x-iteráció 65
4.6. σ-szorzat 66
4.7. Zártsági tulajdonságok összegzése 67

Értékelés, összegzés **68**

Köszönetnyilvánítás **70**

Irodalomjegyzék **71**

Összefoglaló **73**

Summary **79**

Tárgymutató **85**

Bevezetés

Tudjuk, hogy a determinisztikus felszálló fanyelvek valódi részosztálya a reguláris fanyelvek osztályának, és így nem minden reguláris fanyelvekre ismert tulajdonság marad feltétlenül igaz erre a szűkebb nyelvosztályra. Azt is megállapíthatjuk, hogy a determinisztikus felszálló fanyelvekről teljes általánosságban keveset tudunk. A vizsgálatainkat ezért egy jól körülhatárolt területre szerettük volna irányítani, így esett a választás a monoton és nilpotens alosztályokra. Ugyan mindkét nyelvosztály kapott már figyelmet (főleg a nilpotens sztring nyelvek), de a reguláris kifejezésekkel való jellemzésük csak a monoton sztring nyelvekre lett megadva [5]-ben. Ez adta az ötletet, hogy a monoton determinisztikus felszálló fanyelvekre is lehetne adni egy ilyen irányú jellemzést, és ugyanúgy adta magát a nilpotens sztring nyelvek és nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek reguláris kifejezésekkel való leírása. Ezen irányú kutatásaink eredménye szolgáltatja jelen értekezés gerincét.

Az értekezés elején természetesen azokat az alapfogalmakat definiáltuk, amelyekre az értekezés további részében támaszkodunk. Itt kerültek definiálásra az automata, a nyelv és a reguláris kifejezések fogalma, mind a sztring nyelvek-, mind a determinisztikus felszálló fanyelvek esetében. Egyes előkészületeket is itt végeztünk el, mint például a redukált reguláris kifejezések definiálását. Az alapfogalmakon túl nyilvánvalóan szükség volt néhány algebrai fogalom előzetes ismeretére, ezek meglétét feltételeztük.

A monoton sztring nyelveket és monoton determinisztikus felszálló fanyelveket Gécseg Ferenc és Imreh Balázs szintaktikus monoidokkal jellemezte [5]-ben, és ugyanitt adtak a monoton sztring nyelvekre egy reguláris kifejezésekkel történő jellemzést. Megállapították, hogy egy sztring nyelv akkor és csakis akkor monoton, ha előállítható szeminormális láncnyelvek véges egyesítéseként. A monoton determinisztikus felszálló fanyelvek jellemzésénél ugyanezt az alapötletet kívántuk követni, azaz, hogy egy fa monoton determinisztikus felszálló faautomatában való feldolgozásakor az állapotok egy monoton sorozatát tudjuk felírni, és így a nyelv leírását is erre építeni. Így született meg az úgynevezett triviális jellemzés, amely gyakorlatilag bármilyen monoton determinisztikus felszálló fanyelvet le tud írni reguláris kifejezéssel, nekünk azonban szükségünk volt olyan megszorításokra is, amelyek mellett az ilyen alakú reguláris kifejezések monoton determinisztikus felszálló fanyelveket jelölnek. Ehhez be kellett vezetni többek között az iterációs magasság fogalmát, amelynek értéke a monoton sztring nyelvek és a monoton determinisztikus felszálló fanyelvek esetében is szorosan összefügg a monotonitással. Ezek után a triviális felírás néhány tulajdonságát vizsgáltuk meg, ilyen például annak ekvivalens átalakítást eredményező felbontása, vagy segédváltozói számának redukálása. A reguláris kifejezésekkel való jellemzéshez szükségünk volt egy új fogalom, az x-homogén tulajdonság definiálására is. Ennek segítségével készültek el a monoton determinisztikus felszálló fanyelvek x-iterációra való zártságának elégséges feltételei, és ugyanúgy feltételekre volt szükségünk az x-szorzat zártságának biztosítására is. Ezután minden eszközünk meg volt arra, hogy az általunk bevezetett általánosított R-láncnyelv fogalmával jellemezzük a monoton determinisztikus felszálló fanyelveket.

A nilpotens nyelvek is jellemzésre kerültek Gécseg és Imreh által, a [4] cikkben például szintaktikus monoidokkal jellemezték a nilpotens determinisztikus felszálló fanyelveket, ugyanakkor azonban a reguláris kifejezésekkel való leírásra nem került sor. Ezért itt a cél az volt, hogy mind a nilpotens sztring nyelvekhez, mind a nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvekhez adjunk egy reguláris kifejezésekkel történő jellemzést. Bevezettük a sima láncnyelv fogalmát, amely a monoton sztring nyelvek jellemzésénél használt láncnyelvek egy speciális esete, és erről mutattuk meg, hogy pontosan a nilpotens nyelveket írják le. A nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek esetében egy hasonló megoldást kerestünk, amely tulajdonképpen a monoton determinisztikus felszálló fanyelvek esetében látott triviális reguláris kifejezés egy speciális esete lett. A végső jellemzéshez szükségünk volt az út-teljesség fogalmának, valamint az x-termináló tulajdonságnak megalkotására is. Ezen fogalmak használatával fogalmaztuk meg a nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek osztálya x-szorzatra való zártságának elégséges feltételeit, és ezzel a reguláris kifejezéssel való jellemzést is meg tudtuk adni a sima R-láncnyelvek fogalmával.

Mivel egyes zártsági tulajdonságokra, vagy a zártságot biztosító feltételekre szükségünk volt a monoton és nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek jellemzésénél, az értekezés végén összefoglalásra kerültek a determinisztikus felszálló fanyelvek zártsági tulajdonságai a Boole- (egyesítés, metszet, komplementerképzés), valamint a reguláris (egyesítés, x-szorzat, x-iteráció, σ-szorzat) műveletekre nézve. Itt külön feltüntetésre kerültek a monoton és nilpotens alosztályokra vonatkozó eredmények, és néhány esetben a zártságot biztosító elégséges feltételeket is összegeztük. Megállapításaink többsége [3], [10], [11] és [12]-ből származnak.

Célkitűzés

Az értekezés alapjául szolgáló kutatási téma meghatározásánál azért esett a választás a determinisztikus felszálló fanyelvek speciális osztályainak a vizsgálatára, mert a determinisztikus felszálló fanyelvekről teljes általánosságban keveset tudunk. Ebből kifolyólag a monoton és nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek tanulmányozása került előtérbe. Ezen kutatás eredményeképpen reguláris kifejezésekkel jellemeztük a fenti osztályokat mind a sztring nyelvek, mind a determinisztikus felszálló fanyelvek esetében, valamint megvizsgálásra került a fenti osztályok néhány zártsági tulajdonsága a Boole- és reguláris műveletekre nézve. Az értekezés célja a fenti eredmények és a hozzájuk tartozó összefüggések ismertetése, amelyben a reguláris kifejezésekkel való jellemzés bír lényegi tartalommal, a zártsági tulajdonságok vizsgálata pedig mellékes szereppel. Az értekezésnek azonban nem célja a monoton és nilpotens nyelvek egyéb tulajdonságainak a vizsgálata, és így annak ismertetése sem.

Eredmények

Az értekezés eredményei négy fejezetbe lettek sorolva. Az elsőben az alapfogalmakat tisztázzuk, ezekre mindenképpen szükség van a lényegi részek megértéséhez. Ugyanakkor az alapfogalmak ismertetésére a disszertáció önálló olvashatóságának céljából is szükség van. Ebben a részben ismerkedhetünk meg többek között a (fa)nyelvek és (fa)automaták fogalmával, valamint a reguláris kifejezésekkel, amely központi szerepet kap az eredményekben.

A második fejezet a monoton sztring nyelveket és monoton determinisztikus felszálló fanyelveket tanulmányozza. Az elsődleges cél ezek reguláris kifejezésekkel való megadása, de szót ejtünk a keresett konstrukció néhány további tulajdonságairól is.

A harmadik fejezet a nilpotens sztring nyelvekről és a nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvekről szól. A cél hasonló, mint a monoton nyelvekről szóló fejezetben, azaz a nilpotens nyelvek reguláris kifejezésekkel való jellemzése.

Végül, a negyedik fejezet a determinisztikus felszálló fanyelvek egyes Boole- és reguláris műveletekre való zártsági tulajdonságait gyűjti össze, ahol külön kitérünk a monoton és nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvekre. Itt egyes további tulajdonságok is megvizsgálásra kerültek, mint például olyan szükséges és/vagy elégséges feltételek meghatározása, amely mellett valamely fentebb említett nyelvosztály zárt – vagy éppen nem zárt – egy adott műveletre.

1. fejezet

Alapfogalmak, előkészületek

Ebben a fejezetben a legalapvetőbb fogalmakat ismertetjük. Elöljáróban rögzítsük le, hogy a természetes számok halmazát a megszokott N betűvel jelöljük, amely nem tartalmazza a 0-át. Az $N \cup \{0\}$ halmazra a továbbiakban az N_0 jelöléssel fogunk hivatkozni.

1.1. Sztring nyelvek

Mind a természetes, mind a mesterséges nyelvek alatt olyan szavak összességét értjük, amelyek bizonyos alapszimbólumokból épülnek fel.

1.1.1. definíció. Legyen X egy véges, nemüres halmaz. X-et *ábécének*, elemeit pedig *betűknek* nevezzük. Az X ábécé elemeiből képezhető véges hosszúságú láncokat *X-feletti szavaknak* nevezzük.

Az X ábécé feletti összes szavak halmazát X^* jelöli. Az üres szót (azaz azt a szót, amelyben egyetlen betű sincs) e-vel jelöljük.

1.1.2. definíció. Egy $u \in X^*$ szó *hosszán* a benne előforduló betűk számát értjük multiplicitással számolva, jelölésképpen pedig az $|u|$-t használjuk rá.

A 0-nál hosszabb szavak halmazát X^+-szal jelöljük, és alatta mindig az $X^+ = X^* \setminus \{e\}$ halmazt értjük. Ugyanakkor egy $k \in N$ természetes számnál nem hosszabb szavak halmazát $X^{*,k}$-val jelöljük, és általában az $X^{*,k} = \{u \in X^* : |u| \leq k\}$ egyenlőséggel definiáljuk. Szokás még az $n \in N_0$ hosszú szavak halmazát X^n-nel is jelölni, így ebből a k-nál nem hosszabb szavak halmazát a következőképpen is felírhatjuk:

$$X^{*,k} = X^0 \cup X^1 \cup \ldots \cup X^k = \bigcup_{i=0}^{k} X^i.$$

Az X-feletti összes szavak halmazát is felírhatjuk hasonlóképpen:

$$X^* = X^0 \cup X^1 \cup \ldots \cup X^k \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^i.$$

1.1.3. definíció. Legyen X egy ábécé. Az X^* halmaz bármely részhalmazát X-feletti *nyelvnek* nevezzük.

A jelen értekezésben a fent definiált X-feletti nyelveket *sztring nyelveknek*, vagy ha ez nem vezet félreértéshez, akkor egyszerűen csak *nyelveknek* fogjuk nevezni.

1.1.4. definíció. A $w \in X^*$ szót az $u \in X^*$ szó *kezdőszeletének* (*prefixének*) nevezzük, ha van olyan $v \in X^*$ szó, amelyre $u = wv$ teljesül. Továbbá azt mondjuk, hogy a $w \in X^*$ szó *valós* kezdőszelete az $u \in X^*$ szónak, ha w kezdőszelete u-nak, és $|w| < |u|$.

A következőkben bevezetjük a véges automata fogalmát.

1.1.5. definíció. Legyen X egy tetszőleges ábécé. Az $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ rendszert *véges, determinisztikus X-automatának* (röviden *automatának*) nevezzük, ahol

(i) A véges, nemüres halmaz, az *állapotok* halmaza,

(ii) $\delta : A \times X \to A$ az *átmenetfüggvény*,

(iii) $a_0 \in A$ a *kezdőállapot*,

(iv) $A' \subseteq A$ a *végállapotok* halmaza.

Az átmenetfüggvény kiterjeszthető egy $\delta^* : A \times X^* \to A$ függvénnyé, ahol minden $a \in A$ állapotra, $x \in X$ betűre és $u \in X^*$ szóra teljesül, hogy

$\delta^*(a, e) = a$ és $\delta^*(a, xu) = \delta^*(\delta(a, x), u)$. Az egyszerűség kedvéért a $\delta^*(a, u)$ helyett gyakran használjuk a $\delta(a, u)$, vagy egyszerűen csak az au jelöléseket, ha ez természetesen nem vezet félreértéshez.

1.1.6. definíció. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ egy tetszőleges automata. Az $\mathbf{A}$ automata *által felismert* $L(\mathbf{A})$ *nyelven* az

$$L(\mathbf{A}) = \{u \in X^* \mid a_0 u \in A'\}$$

nyelvet értjük.

1.1.7. definíció. Legyen X egy tetszőleges ábécé. Egy $L \subseteq X^*$ nyelvet *felismerhetőnek* nevezünk, ha van olyan $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ automata, amely őt felismeri, azaz amelyre $L = L(\mathbf{A})$.

X-feletti automatára és az általa felismert nyelvre tekintsük a következő példát.

1.1.8. példa. Legyen $X = \{x, y\}$ egy ábécé és vegyük azt az $\mathbf{A}$ X-feletti automatát, melyre $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$, $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $A' = \{a_3\}$, valamint a δ átmenetfüggvény a következőképpen van definiálva:

δ	x	y
a_0	a_2	a_1
a_1	a_3	a_2
a_2	a_2	a_2
a_3	a_3	a_3

Az $\mathbf{A}$ automata által felismert nyelv a következő:

$$L(\mathbf{A}) = \{yxu \mid u \in X^*\},$$

azaz olyan X-feletti szavak halmaza, amelyek az yx betűkettőssel kezdődnek, és bármilyen betűsorozattal folytatódnak.

1.1.9. definíció. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta_{\mathbf{A}}, a_0, A')$ egy X-automata. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{B} = (B, X, \delta_{\mathbf{B}}, b_0, B')$ X-automata az $\mathbf{A}$ *összefüggő részautomatája,* ha teljesülnek az alábbi feltételek:

(i) $B = \{a_0 u \mid u \in X^*\}$,

(ii) $B' = A' \cap B$,

(iii) $a_0 = b_0$, és

(iv) minden $b \in B$ állapotra és $x \in X$ betűre $\delta_{\mathbf{B}}(b, x) = \delta_{\mathbf{A}}(b, x)$.

A következő lépésben felidézzük a nyelveken értelmezett reguláris műveleteket. Tetszőleges $L_1 \subseteq X^*$ és $L_2 \subseteq X^*$ nyelvek *egyesítése* alatt az

$$L_1 \cup L_2 = \{u \in X^* \mid u \in L_1 \text{ vagy } u \in L_2\}$$

nyelvet, tetszőleges $L_1 \subseteq X^*$ és $L_2 \subseteq X^*$ nyelvek *konkatenációja* alatt az

$$L_1 L_2 = \{uv \in X^* \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

nyelvet, valamint tetszőleges $L \subseteq X^*$ nyelv *iteráltja* alatt az

$$L^* = \{e\} \cup L \cup LL \cup LLL \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$$

nyelvet értjük.

Most bevezetjük a reguláris kifejezések fogalmát.

1.1.10. definíció. Legyen X egy ábécé. Az összes X-feletti reguláris kifejezés RE halmazát és egy tetszőleges $\eta \in \mathrm{RE}$ X-feletti reguláris kifejezés által leírt $L(\eta)$ nyelvet a következő párhuzamos definícióval adjuk meg:

- $\emptyset \in \mathrm{RE}$, $\quad L(\emptyset) = \emptyset$,
- $\forall x \in X : x \in \mathrm{RE}$, $\quad L(x) = \{x\}$,

továbbá ha $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{RE}$, akkor

- $(\eta_1) + (\eta_2) \in \mathrm{RE}$, $\quad L((\eta_1) + (\eta_2)) = L(\eta_1) \cup L(\eta_2)$,
- $(\eta_1)(\eta_2) \in \mathrm{RE}$, $\quad L((\eta_1)(\eta_2)) = L(\eta_1)L(\eta_2)$,
- $(\eta_1)^* \in \mathrm{RE}$, $\quad L((\eta_1)^*) = L(\eta_1)^*$.

A reguláris kifejezésekből némely zárójelek elhagyhatóak, ha feltételezünk egy precedenciarelációt az iteráció, konkatenáció és egyesítés műveletek között ugyanebben a sorrendben. Továbbá, ha ez nem vezet félreértéshez, az X-feletti reguláris kifejezések helyett egyszerűen csak reguláris kifejezéseket mondunk.

1.1.11. példa. Legyen adott az $X = \{x, y\}$ ábécé, és vegyük az $\eta = yx(x+y)^*$ X-feletti reguláris kifejezést. Könnyű látni, hogy $L(\eta)$ éppen az $L = \{yxu \mid u \in X^*\}$ nyelvet írja le. Az L nyelvet azonban leírhatjuk más reguláris kifejezésekkel is, például a $\zeta = yx(y+x)(x+y)^* + yx$-szel.

1.1.12. megjegyzés. A reguláris kifejezésekkel leírt nyelvek pontosan a felismerhető nyelvek, így a felismerhető nyelveket szokás még *reguláris* nyelveknek is nevezni.

1.1.13. definíció. Legyen η és ζ két tetszőleges reguláris kifejezés. Azt mondjuk, hogy ζ az η *részkifejezése*, ha ζ előfordul η fenti induktív definíciójában. η összes részkifejezésének halmazát $\mathrm{Sub}(\eta)$-val fogjuk jelölni.

Egy reguláris kifejezés részkifejezésének elhagyását a következőképpen definiáljuk. Vegyük az $\eta_1, \eta_2 \in \mathrm{RE}$ tetszőleges reguláris kifejezéseket, valamint a belőlük alkotott $(\eta_1) + (\eta_2)$, $(\eta_1)(\eta_2)$ és $(\eta_1)^*$ reguláris kifejezéseket. Az utóbbiakból az η_1-et elhagyva rendre η_2-t, η_2-t és η_1-et kapunk. Továbbá megengedjük azt is, hogy η_1 elhagyásával $(\eta_1)^*$-ból $(\emptyset)^*$-ot kapjunk. Ha elhagyjuk η_2-t az $(\eta_1) + (\eta_2)$ és $(\eta_1)(\eta_2)$-ből, akkor mindkét esetben η_1-et kapunk. Az így bevezetett részkifejezés-elhagyás (mint művelet) nyilvánvalóan nem egyértelműen meghatározott, de ahogy azt majd később látni fogjuk, az egyértelműségre nincs is szükségünk.

1.1.14. definíció. Legyen ζ az η reguláris kifejezés egy részkifejezésének előfordulása. Azt mondjuk, hogy ζ *redundáns η-ban*, ha ζ elhagyható η-ból úgy, hogy $L(\eta)$ az elhagyás után változatlan marad. Egy reguláris kifejezést *redukáltnak* nevezünk, ha nincsenek benne redundáns részkifejezések.

Egy reguláris kifejezés redukált alakja nem feltétlenül egyértelműen meghatározott, mint ahogy azt az alábbi példa is mutatja.

1.1.15. példa. Tekintsük az $\eta = x(yx)^* + z + (xy)^*x$ reguláris kifejezést. Nyilvánvaló, hogy η-ban az egyesítés művelet első és harmadik tagja ugyanazt a nyelvet írja le, így mindkettő redundáns η-ban. Ha ezen redundáns részkifejezéseket külön-külön elhagyjuk η-ból, akkor a különböző $x(yx)^* + z$ és $z + (xy)^*x$ reguláris kifejezéseket kapjuk, amelyek viszont ugyanazt a nyelvet írják le.

1.2. Determinisztikus felszálló fanyelvek

Az alábbiakban bevezetünk néhány fogalmat, amelyek a determinisztikus felszálló fanyelvek definiálásához fog kelleni.

1.2.1. definíció. Műveleti szimbólumok egy véges, nemüres halmazát *rangolt ábécének* nevezzük.

A rangolt ábécék jelölésére általában a Σ betűt használjuk, ezen értekezésben ehhez tartjuk magunkat. Minden $m \geq 0$ természetes számra Σ azon részhalmazát, amely tartalmazza Σ összes m-változós műveleti szimbólumát, Σ_m-mel fogjuk jelölni, és érvényes az alábbi összefüggés:

$$\Sigma = \bigcup_{m \geq 0} \Sigma_m.$$

A determinisztikus felszálló fanyelvek vizsgálatánál gyakorlati okok miatt általában nem engednek meg nullváltozós műveleti szimbólumokat, ezért az $m = 0$ esettel a továbbiakban nem foglalkozunk, és így majd az egész értekezésben feltesszük, hogy $\Sigma_0 = \emptyset$.

1.2.2. definíció. Legyen X változók egy halmaza. A *ΣX-fák* $T_\Sigma(X)$ halmazát a következőképpen definiáljuk:

(i) $X \subseteq T_\Sigma(X)$,

(ii) $\sigma(p_1, \ldots, p_m) \in T_\Sigma(X)$, ahol $p_1, \ldots, p_m \in T_\Sigma(X)$, $\sigma \in \Sigma_m$ és $m \geq 0$,

(iii) minden ΣX-fa előállítható az (i) és (ii) szabályok véges sokszori alkalmazásával.

A következőkben X a megszámlálható $\{x_1, x_2, \ldots\}$ halmazt fogja jelölni, és minden n nemnegatív egész számra jelölje X_n a $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ részhalmazt. Rögzítsük le továbbá, hogy egy S halmaz hatványhalmazát $\mathfrak{p}(S)$-sel jelöljük.

1.2.3. definíció. Egy *determinisztikus felszálló* Σ*-algebra* (vagy röviden *DR* Σ*-algebra*) alatt egy $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ párt értünk, ahol

(i) A egy nemüres halmaz,

(ii) Σ egy rangolt ábécé, és

(iii) minden $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólum egy $\sigma^{\mathcal{A}} : A \to A^m$ leképezésként van realizálva.

Az $\mathcal{A}$ DR Σ-algebrát *végesnek* mondjuk, ha A véges.

1.2.4. definíció. Egy *determinisztikus felszálló* ΣX_n*-faautomata* (vagy angol nevük alapján röviden *DR* ΣX_n*-faautomata*) alatt egy $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ rendszert értünk, ahol

(i) $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy véges DR Σ-algebra,

(ii) $a_0 \in A$ a *kezdőállapot*, és

(iii) $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \in \mathfrak{p}(A)^n$ a *végállapot vektor.*

Ha a fenti Σ vagy X_n nincs definiálva, akkor *DR-faautomatákról* beszélünk.

Ahhoz, hogy definiáljuk a DR-faautomaták által felismert fanyelveket, szükségünk lesz a következő formális definícióra.

1.2.5. definíció. Legyen $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ egy DR ΣX_n-faautomata. Értelmezzük az $\alpha^{\mathfrak{A}} : T_\Sigma(X_n) \to \mathfrak{p}(A)$ leképezést a következő módon. Legyen $p \in T_\Sigma(X_n)$ tetszőleges fa, és

(i) ha $p = x_i \in X_n$, akkor $\alpha^{\mathfrak{A}}(p) = A^{(i)}$,

(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\alpha^{\mathfrak{A}}(p) = \{a \in A \mid \sigma^{\mathcal{A}}(a) \in \alpha^{\mathfrak{A}}(p_1) \times \ldots \times \alpha^{\mathfrak{A}}(p_m)\}.$$

Adott $p \in T_\Sigma(X_n)$ fa esetén tehát $\alpha^{\mathfrak{A}}(p)$ az összes olyan $a \in A$ állapotból áll, amelyből p levezethető $\mathfrak{A}$-ban (levezetés alatt itt azt értjük, hogy az a állapotból kiindulva, és arra p műveleti szimbólumait mint leképezéseket alkalmazva, eljuthatunk p gyökerétől a p leveleiben szereplő x_i változóknak megfelelő $A^{(i)}$ halmazokba). A továbbiakban, amennyiben nem okoz félreértést, $\alpha^{\mathfrak{A}}(p)$ helyett röviden csak $\alpha(p)$-t írunk.

1.2.6. definíció. Az $\mathfrak{A}$ DR ΣX_n-faautomata által *felismert fanyelvet* $T(\mathfrak{A})$-val jelöljük, és a következőképpen definiáljuk:

$$T(\mathfrak{A}) = \{p \in T_\Sigma(X_n) \mid a_0 \in \alpha(p)\}.$$

A DR-faautomaták által felismert nyelveket *determinisztikus felszálló fanyelveknek*, vagy röviden *DR-fanyelveknek* is szoktuk nevezni.

1.2.7. megjegyzés. A determinisztikus felszálló fanyelveket szokás *determinisztikus erdőknek* is nevezni.

1.2.8. megjegyzés. A DR ΣX_n-faautomatákat úgy is definiálhatjuk, hogy az $\mathbf{a}$ végállapot vektor helyett az α leképezést adjuk meg, hiszen fentebb már láttuk a köztük lévő szoros összefüggést:

$$\mathbf{a} = (\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)).$$

Ekkor egyszerűen csak $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \alpha)$-t írunk.

Most bevezetünk néhány a fákra és fanyelvekre értelmezett igen hasznos függvény fogalmát.

1.2.9. definíció. Legyen $p \in T_\Sigma(X_n)$ egy tetszőleges fa. Ekkor a p fa

- $\mathrm{height}(p)$ *magassága*,
- $\mathrm{root}(p)$ *gyökere*,
- $\mathrm{leaves}(p)$ *levelei* és

- *részfáinak* $\mathrm{Sub}(p)$ halmaza a következőképpen van definiálva.

Ha $p \in X_n$, akkor

- $\mathrm{height}(p) = 0$,
- $\mathrm{root}(p) = p$,
- $\mathrm{leaves}(p) = \{p\}$, és
- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\}$.

Ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$, $\sigma \in \Sigma_m$, $p_i \in T_\Sigma(X_n)$, $1 \leq i \leq m$, $m > 0$, akkor

- $\mathrm{height}(p) = 1 + \max\{\mathrm{height}(p_i) : 1 \leq i \leq m\}$,
- $\mathrm{root}(p) = \sigma$,
- $\mathrm{leaves}(p) = \bigcup\limits_{1 \leq i \leq m} \mathrm{leaves}(p_i)$, és
- $\mathrm{Sub}(p) = \{p\} \cup \bigcup\limits_{1 \leq i \leq m} \mathrm{Sub}(p_i)$.

A magasság kivételével minden fenti függvény kiterjeszthető fákról fanyelvekre a következő módon. Legyen $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy tetszőleges fanyelv, ekkor

- $\mathrm{root}(S) = \{\mathrm{root}(p) \mid p \in S\}$,
- $\mathrm{leaves}(S) = \bigcup\limits_{p \in S} \mathrm{leaves}(p)$, és
- $\mathrm{Sub}(S) = \bigcup\limits_{p \in S} \mathrm{Sub}(p)$.

A továbbiakban a DR-faautomaták egy hasznos tulajdonságát vezetjük be.

1.2.10. definíció. Legyen $\mathfrak{A}$ egy DR ΣX_n-faautomata, és legyen $a \in A$ annak egy állapota. Az $\mathfrak{A}$ által az a állapotból felismert fanyelvet a következőképpen definiáljuk:

$$T(\mathfrak{A}, a) = \{\ p \in T_\Sigma(X_n) \mid a \in \alpha(p)\}.$$

Egy a állapotot *0-állapotnak* nevezünk, ha $T(\mathfrak{A}, a) = \emptyset$. $\mathfrak{A}$-t *normalizáltnak* mondjuk, ha minden $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $a \in A$ állapotra érvényes, hogy $\sigma^{\mathcal{A}}(a)$ minden komponense 0-állapot, vagy $\sigma^{\mathcal{A}}(a)$ egyetlen komponense sem 0-állapot. Továbbá, $\mathfrak{A}$-t *redukáltnak* mondjuk, ha minden $a, b \in A$ állapotra teljesül, hogy $a \neq b$ maga után vonja $T(\mathfrak{A}, a) \neq T(\mathfrak{A}, b)$-t.

Jól ismert tény, hogy minden DR-fanyelv felismerhető egy normalizált és redukált DR-faautomatával. Ezen összefüggésről további részleteket találhatunk a [7], [8] és [9] irodalmakban.

Most értelmezzük a Σ rangolt ábécéhez tartozó (közönséges) ábécét. Minden $\sigma, \tau \in \Sigma$ műveleti szimbólumra legyen

(i) $\hat{\Sigma}_\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$, ha $\sigma \in \Sigma_m$ $(m > 0)$, és

(ii) $\hat{\Sigma}_\sigma \cap \hat{\Sigma}_\tau = \emptyset$, ha $\sigma \neq \tau$.

Legyen továbbá $\hat{\Sigma}$ a következő halmaz:

$$\hat{\Sigma} = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \hat{\Sigma}_\sigma.$$

Világos, hogy minden Σ rangolt ábécéhez tartozó $\hat{\Sigma}$ ábécé véges.

1.2.11. megjegyzés. Egy tetszőleges $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumhoz tartozó σ_i betűre néha a (σ, i) jelölést is használjuk, ha azt a szövegkörnyezet úgy kívánja $(1 \leq i \leq m)$.

A továbbiakban bevezetünk egy a fák gyökerétől a levelükig vezető utakkal kapcsolatos fogalmat, amely rendkívül hasznos és viszonylag könnyen kezelhető eszköznek bizonyult a DR-fanyelvek jellemzésénél.

1.2.12. definíció. Legyen $p \in T_\Sigma(X_n)$ egy tetszőleges fa, $x \in X_n$ pedig egy tetszőleges változó. A *p-beli x-utak* $g_x(p)$ halmazát a következő módon definiáljuk:

(i) $g_x(x) = \{e\}$,

(ii) minden $y \in X_n$ változóra, melyre $y \neq x$, legyen $g_x(y) = \emptyset$,

(iii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$, $\sigma \in \Sigma_m$, akkor

$$g_x(p) = \sigma_1 g_x(p_1) \cup \ldots \cup \sigma_m g_x(p_m),$$

ahol $p_i \in T_\Sigma(X_n)$, $1 \leq i \leq m$, $m > 0$.

A p-beli x-utak fogalmát a következőképpen tudnánk szavakkal megfogalmazni. Írjuk a p fa σ-val címkézett csúcsából kiinduló i-edik éléhez a σ_i jelölést. Ekkor p-ben a gyökértől az x-szel címkézett levelekig vezető utakon az élek címkéit összeolvasva éppen a p fa x-utait kapjuk.

Az x-utak fogalmát természetes módon terjeszthetjük ki fanyelvekre, azaz bármely $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvre és bármely $x \in X_n$ változóra legyen

$$g_x(T) = \bigcup_{p \in T} g_x(p).$$

A $g_x(T) \subseteq \hat{\Sigma}^*$ halmazokat szokás még T_x-szel jelölni és T *út-nyelveinek* nevezni. Mivel bizonyos esetekben nem csak egy konkrét x változóhoz tartozó x-utakra hivatkozunk, hanem a gyökérből bármilyen más változóhoz vezető utakra is, ezért $g_x(T)$ fogalmát kiterjesztjük változófüggetlen esetre is. Legyen tehát $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy tetszőleges fanyelv, és legyen

$$g(T) = \bigcup_{x \in X} T_x.$$

Amennyiben általánosságban, vagy konkrét változótól függetlenül szeretnénk a fent definiált utakra hivatkozni, akkor az *x-út* vagy *út* kifejezéseket is használjuk.

1.2.13. megjegyzés. Fontos észrevenni, hogy egy tetszőleges $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvre a T_x nyelvek nem feltétlenül páronként diszjunktak. Például, ha T-ben van olyan két különböző p és q fa, amelyek egymástól csak egy levélen szereplő változóban (mondjuk x és y) térnek el egymástól. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben p és q gyökerétől ezen levélig vezető út benne van T_x-ben és T_y-ban is.

Egy $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvet *zártnak* nevezünk, ha tetszőleges $p \in T_\Sigma(X_n)$ fára $p \in T$ akkor és csakis akkor teljesül, ha minden $x \in X_n$ változóra $g_x(p) \subseteq g_x(T)$. Jól ismert összefüggés, hogy egy reguláris fanyelv akkor és csakis akkor DR-felismerhető, ha zárt. A részletekkel kapcsolatban javasoljuk az [1] és [15] irodalmak megtekintését.

1.2.14. példa. Legyen $X = \{x, y\}$ változók egy halmaza, legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma, \omega\}$ a műveleti szimbólumok halmaza, $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ pedig legyen a következő nyelv: $T = \{p_1, p_2, p_3\}$, ahol $p_1 = \sigma(x, x)$, $p_2 = \sigma(\omega(x, y), y)$, $p_3 = \sigma(\omega(y, x), \omega(x, y))$. Ekkor egyrészt $\hat{\Sigma} = \{\sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2\}$, másrészt

$$\text{(i)}\quad \begin{array}{ll} g_x(p_1) = \{\sigma_1, \sigma_2\}, & g_y(p_1) = \{\}, \\ g_x(p_2) = \{\sigma_1\omega_1\}, & g_y(p_2) = \{\sigma_1\omega_2, \sigma_2\}, \\ g_x(p_3) = \{\sigma_1\omega_2, \sigma_2\omega_1\}, & g_y(p_3) = \{\sigma_1\omega_1, \sigma_2\omega_2\}, \end{array}$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{array}{l} g_x(T) = T_x = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\omega_1, \sigma_1\omega_2, \sigma_2\omega_1\}, \\ g_y(T) = T_y = \{\sigma_2, \sigma_1\omega_2, \sigma_1\omega_1, \sigma_2\omega_2\}, \end{array}$$

$$\text{(iii)}\quad g(T) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\omega_1, \sigma_1\omega_2, \sigma_2\omega_1, \sigma_2\omega_2\}.$$

Világos, hogy T nem zárt, ugyanis a $p = \sigma(\omega(x,x),x)$ fa nincs T-ben, ugyanakkor $g_x(p) = \{\sigma_1\omega_1, \sigma_1\omega_2, \sigma_2\} \subseteq T_x$, és persze $g_y(p) = \emptyset \subseteq T_y$.

Bármely $n \in N$ természetes számra és tetszőleges $S_1, \ldots, S_n$ halmazokra legyen $\pi_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to S_i$ az i-edik projekció, azaz minden $(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \in S_1 \times \ldots \times S_n$ elem n-esre $\pi_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) = s_i$ teljesül $(1 \leq i \leq n)$.

Most az x-utak által generált leképezések fogalmát vezetjük be.

1.2.15. definíció. Legyen Σ egy rangolt ábécé, és legyen $\hat{\Sigma}$ a hozzá tartozó közönséges ábécé. Legyen továbbá $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy tetszőleges DR Σ-algebra. Ekkor minden $u \in \hat{\Sigma}^*$ szóra az $u^{\mathcal{A}} : A \to A$ leképezés a következőképpen van definiálva:

(i) Ha $u = e$, akkor $au^{\mathcal{A}} = a$,

(ii) ha $u = \sigma_j v$, akkor $au^{\mathcal{A}} = \pi_j(\sigma(a))v^{\mathcal{A}}$ tetszőleges $a \in A$, $\sigma \in \Sigma_m$, $m > 0$, $v \in \hat{\Sigma}^*$ és $j \in \{1, \ldots, m\}$ elemekre.

Az imént definiált leképezést természetes módon terjeszthetjük ki $\hat{\Sigma}^*$ részhalmazaira. Az értekezés további részében, ha ez nem vezet félreértéshez, elhagyjuk az $\mathcal{A}$ jelölést $u^{\mathcal{A}}$-ból.

Mielőtt tovább haladnánk, ki kell térnünk a fanyelveken értelmezett reguláris műveletekre. Két fanyelv *egyesítése* alatt azok halmazelméleti egyesítését értjük. Bármely $S, T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvekre azok $T \cdot_x S$ *x-szorzata* olyan fanyelvnek értendő, amelyben a fák úgy állnak elő, hogy S minden s fájában az x szimbólummal jelölt levelek előfordulásait valamely T-beli fával helyettesítjük. Az x szimbólum különböző előfordulásait T különböző fáival helyettesíthetjük. Továbbá azt is feltesszük, hogy $T \cdot_y R \cdot_x S$ minden esetben a $T \cdot_y (R \cdot_x S)$ szorzatot jelenti bármely $S, R, T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvekre és $x, y \in X_n$ változókra. Egy tetszőleges $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelv *x-iteráltja* alatt azt a $T^{*,x}$ fanyelvet értjük, amely egyrészt tartalmazza x-et és T fáit, másrészt tartalmazza az összes olyan fát, amelyeket úgy kapunk T-beli fákból, hogy azok x előfordulásait szintén T-beli fákkal helyettesítjük, és ezt a helyettesítést a kapott fákon bármilyen sokszor megismételhetjük. Legyen $\sigma \in \Sigma_m$ ($m > 0$) tetszőleges műveleti szimbólum. Ekkor tetszőleges $T_1, \ldots, T_m$ ΣX_n-fanyelvek *σ-szorzata* alatt a

$$\sigma(T_1, \ldots, T_m) = \{\sigma(p_1, \ldots, p_m) \mid p_i \in T_i,\ 1 \leq i \leq m\}$$

fanyelvet értjük.

Most bevezetjük a reguláris kifejezések fanyelvekre értelmezett formáját. A *reguláris ΣX_n-kifejezések* $\mathrm{RE}(\Sigma X_n)$ halmazát valamint egy tetszőleges $\eta \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$ reguláris ΣX_n-kifejezés által leírt $T(\eta)$ fanyelvet a következő párhuzamos definícióval adjuk meg.

1.2.16. definíció. Legyen Σ egy rangolt ábécé, és legyen X_n változók egy halmaza. Ekkor

- $\emptyset \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\quad T(\emptyset) = \emptyset$,
- $\forall x \in X_n : x \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\quad T(x) = \{x\}$,

továbbá ha $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\sigma \in \Sigma_m$, $m > 0$, $x \in X_n$, akkor

- $(\eta_1) + (\eta_2) \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\quad T((\eta_1) + (\eta_2)) = T(\eta_1) \cup T(\eta_2)$,
- $(\eta_2) \cdot_x (\eta_1) \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\quad T((\eta_2) \cdot_x (\eta_1)) = T(\eta_2) \cdot_x T(\eta_1)$,
- $(\eta_1)^{*,x} \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\quad T((\eta_1)^{*,x}) = T(\eta_1)^{*,x}$,
- $\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$, $\quad T(\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m)) = \sigma(T(\eta_1), \ldots, T(\eta_m))$.

A reguláris ΣX_n-kifejezésekből elhagyhatunk bizonyos zárójeleket, ha feltételezünk egy precedenciarelációt a σ-szorzat, x-iteráció, x-szorzat és egyesítés műveletek között ugyanebben a sorrendben.

1.2.17. definíció. Legyenek η és ζ reguláris ΣX_n-kifejezések. Azt mondjuk, hogy ζ az η *részkifejezése*, ha ζ előfordul η fenti induktív definíciójában. A későbbiekben η összes részkifejezésének halmazát $\mathrm{Sub}(\eta)$-val fogjuk jelölni.

Egy reguláris ΣX_n-kifejezés részkifejezésének elhagyását a következőképpen határozzuk meg. Tetszőleges $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra, $x \in X_n$ változóra, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n)$ reguláris ΣX_n-kifejezésekre tekintsük az $(\eta_1)+(\eta_2)$, $(\eta_2)\cdot_x(\eta_1)$, $(\eta_1)^{*,x}$ és $\sigma(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ reguláris ΣX_n-kifejezéseket. Az η_1 reguláris ΣX_n-kifejezés elhagyásával rendre η_2, η_2, η_1 és $\sigma(\zeta, \eta_2, \ldots, \eta_m)$-et kapunk, ahol ζ egy változó $T(\eta_1)$-ből, ha van ilyen, különben $\zeta = \emptyset$. Azt is megengedjük, hogy η_1 elhagyása $(\eta_1)^{*,x}$-ból x-et eredményezzen. Ha elhagyjuk η_2-t az $(\eta_1)+(\eta_2)$ és $(\eta_2)\cdot_x(\eta_1)$ reguláris ΣX_n-kifejezésekből, akkor rendre az η_1 és η_1 reguláris ΣX_n-kifejezéseket kapjuk. A reguláris ΣX_n-kifejezések részkifejezéseinek a fenti módon értelmezett elhagyása nem egyértelmű, de nincs is rá szükségünk, hogy az legyen.

1.2.18. definíció. Legyen η egy reguláris ΣX_n-kifejezés, és legyen ζ az η egy részkifejezésének egy előfordulása. Azt mondjuk, hogy ζ *redundáns* η*-ban*, ha ζ elhagyható η-ból úgy, hogy $T(\eta)$ nem változik ζ elhagyása után. Egy reguláris ΣX_n-kifejezés *redukált*, ha nincsenek benne redundáns részkifejezések.

Ahogy azt már a sztring nyelvek esetében láttuk, egy reguláris ΣX_n-kifejezésnek több különböző alakban adott redukált formája is lehet.

2. fejezet

Monoton nyelvek

Ebben a fejezetben mind a monoton sztring nyelveket, mind a monoton determinisztikus felszálló fanyelveket reguláris kifejezésekkel fogjuk jellemezni.

2.1. Monoton sztring nyelvek

Először bevezetjük a monoton automata fogalmát.

2.1.1. definíció. Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ X-automata *monoton*, ha létezik olyan $\leq$ parciális rendezés A-n, amelyre minden $a \in A$ állapot és $x \in X$ bemenő jel esetén érvényes az $a \leq \delta(a, x)$ összefüggés. Nyilvánvaló, hogy ilyenkor minden $a \in A$ állapot és $u \in X^*$ szó esetén $a \leq au$ is teljesül.

Ezek után definiáljuk a monoton nyelvek fogalmát.

2.1.2. definíció. Egy tetszőleges $L \subseteq X^*$ nyelv *monoton*, ha létezik olyan $\mathbf{A}$ monoton X-automata, amelyre $L = L(\mathbf{A})$.

Később fel fogjuk használni azt az alapvető összefüggést, hogy minden parciális rendezés kiterjeszthető teljes rendezéssé. További részletek megtalálhatóak az [5] irodalomban.

2.1.3. definíció. Egy $L \subseteq X^*$ nyelv *fundamentális*, ha $L = Y^*$ valamely

$Y \subseteq X$ változóhalmazra. Egy $L \subseteq X^*$ nyelv *láncnyelv* ha L megadható

$$L = L_0 x_1 L_1 x_2 \ldots x_{k-1} L_{k-1} x_k L_k$$

alakban, ahol $x_1, \ldots, x_k \in X$ és minden L_i $(0 \leq i \leq k)$ fundamentális nyelvek egy szorzata. Egy $L = L_0 x_1 L_1 x_2 \ldots \ldots x_{k-1} L_{k-1} x_k L_k$ láncnyelvet *szeminormálisnak* hívunk, ha $x_i \notin L_{i-1}$ teljesül minden $1 \leq i \leq k$ indexre. L *normális*, ha $x_i \notin L_{i-1}$ és $x_i \notin L_i$ $(1 \leq i \leq k)$. Egy $L = L_0 x_1 L_1 x_2 \ldots x_{k-1} L_{k-1} x_k L_k$ szeminormális láncnyelvet *egyszerűnek nevezünk*, ha minden L_i $(0 \leq i \leq k)$ fundamentális.

A következő állítás (amely [5]-ben került kimondásra és bizonyításra) összefüggést ad a monoton nyelvek és a szeminormális láncnyelvek között.

2.1.4. tétel. *Egy nyelv akkor és csakis akkor monoton ha megadható szeminormális láncnyelvek véges egyesítéseként.* □

A következőkben bevezetjük az iterációs magasság fogalmát, amely valamely nyelv iterációjában résztvevő szavak közül a leghosszabb hosszával lesz egyenlő.

2.1.5. definíció. Legyen η egy redukált reguláris kifejezés a $(\zeta)^*$ alakban megadva. Ekkor η *iterációs magassága* (vagy jelölésben $\mathrm{ih}(\eta)$) alatt az

$$\mathrm{ih}(\eta) = \max\{|u| : u \in L(\zeta)\}$$

összefüggéssel definiált nemnegatív egész számot értjük, ha $L(\zeta)$ véges. Ha $L(\zeta)$ végtelen, akkor $\mathrm{ih}(\eta)$ legyen végtelen (∞), amit a legnagyobb egész számként fogunk kezelni. Erre technikai okok miatt van szükség, ugyanis szeretnénk, hogy az ih függvény felvehesse a végtelent mint maximális értéket. Legyen most η egy bármilyen alakban adott redukált reguláris kifejezés. Ekkor $\mathrm{ih}(\eta)$-t úgy definiáljuk mint

$$\mathrm{ih}(\eta) = \max\{\mathrm{ih}((\zeta)^*) \mid (\zeta)^* \in \mathrm{Sub}(\eta)\},$$

ha $\mathrm{Sub}(\eta)$ tartalmaz $(\zeta)^*$ alakú részkifejezést, különben $\mathrm{ih}(\eta) = 0$. Egy L reguláris nyelv iterációs magassága (vagy jelölésben $\mathrm{ih}(L)$) alatt pedig az

$$\mathrm{ih}(L) = \min\{\mathrm{ih}(\eta) \mid \eta \in \mathrm{RE}, L(\eta) = L\}$$

nemnegatív egész számot értjük.

Az iterációs magasság szemléltetéséhez tekintsük a következő példát.

2.1.6. példa. Tekintsük a $\zeta = xx + xxx$ reguláris kifejezést. Az $\mathrm{ih}((\zeta)^*)$ definíciójából kapjuk, hogy $\mathrm{ih}((\zeta)^*) = 3$. Vegyük most az $\eta = x + (\zeta)^*$ reguláris kifejezést. Könnyű látni, hogy $\mathrm{ih}(\eta) = 3$, mivel η-nak van egy $(\zeta)^*$ alakban adott részkifejezése, amire $\mathrm{ih}((\zeta)^*) = 3$. Tekintsük most az $L(\eta)$ nyelvet, amire azt kapjuk, hogy $\mathrm{ih}(L(\eta)) = 1$, mivel $L(\eta)$ leírható az $(x)^*$ reguláris kifejezéssel is, amire $\mathrm{ih}((x)^*) = 1$.

Most kimondjuk és bizonyítjuk a következő segédtételt, amely összefüggést ad egyes monoton nyelveket leíró redukált reguláris kifejezések és ugyanezen nyelvek iterációs magassága között.

2.1.7. segédtétel. *Legyen η egy $(\zeta)^*$ alakban adott redukált X-feletti reguláris kifejezés. Ha $L(\eta)$ monoton, akkor* $\mathrm{ih}(L(\eta)) \leq 1$.

Bizonyítás. Legyen η egy $(\zeta)^*$ alakú redukált reguláris kifejezés, és legyen $\mathbf{A}$ egy X-automata, amely egyrészt felismeri az $L(\eta)$ nyelvet, másrészt monoton a $\leq$ részbenrendezés mellett. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ redukált és összefüggő. Nyilvánvaló, hogy van olyan $a \in A'$ végállapot, amelyre $au = a$ teljesül minden $u \in L(\zeta)$ szóra. Sőt, erre az a állapotra $ax = a$ is teljesül bármely $L(\zeta)$-beli szó bármely x betűjére, ugyanis monoton automatában az átmenet során nem keletkezhet 1-nél hosszabb ciklus. Azt is megállapíthatjuk, hogy a fenti tulajdonságokkal csakis az a állapot rendelkezik, ugyanis ha egy b állapot ugyanilyen tulajdonságú, akkor a és b ekvivalensek. Következésképpen $a = b$, mivel tudjuk, hogy egy redukált automatának nem lehet két különböző ekvivalens állapota. Láthatjuk továbbá, hogy nincs olyan $a' \in A \setminus \{a\}$ állapot, amelyre $a' \leq a$ és $a'x = a'$ együttesen teljesülne, bármilyen $x \in X$ betűt is veszünk. Ha lenne ilyen a' és x, akkor a'-ben $L(\zeta)$-beli szavakat kell tudnunk bármennyiszer feldolgozni, ráadásul betűnként, de ez az a állapot feladata, így ellentmondásba kerülnénk azzal, hogy $\mathbf{A}$ redukált. Ugyanúgy azt is láthatjuk, hogy nincs olyan $a'' \neq a$ végállapot, amelyre $a \leq a''$. Ha lenne ilyen a'', akkor szintén a redukáltsággal kerülnénk ellentmondásba, hiszen a-ból minden $L(\zeta)$-beli szó bármennyiszer levezethető. Mindezek alapján η felírható $\zeta'\zeta''$ alakban, ahol ζ'-ben nem szerepel a * művelet, és ζ' azon szavakból álló nyelvet írja le, amelyeket $\mathbf{A}$-ban

a_0-ból indulva a-ba érkezve fel lehet ismerni, továbbá ζ'' az $(y_1 + \ldots + y_r)^*$ alakban van megadva, ahol $y_1, \ldots, y_r$ az $L(\zeta)$ szavaiban előforduló betűk. Mivel $L(\eta) = L(\zeta'\zeta'')$ és $\mathrm{ih}(\zeta'\zeta'') = 1$, azt kapjuk, hogy $\mathrm{ih}(L(\eta)) \leq 1$.

2.2. Monoton determinisztikus felszálló fanyelvek

Ebben az alfejezetben a monoton determinisztikus felszálló fanyelvekre vonatkozó alapvető ismereteket és összefüggéseket taglaljuk.

2.2.1. definíció. Egy $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ DR Σ-algebrát *monotonnak* nevezünk, ha van olyan $\leq$ részbenrendezés A-n, amelyre $a \leq \pi_i(\sigma^{\mathcal{A}}(a))$ teljesül minden $a \in A$ állapotra és $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra $(1 \leq i \leq m)$. Azt mondjuk, hogy $\mathfrak{A}$ egy *monoton DR ΣX_n-faautomata*, ha a benne szereplő $\mathcal{A}$ DR Σ-algebra monoton. Továbbá, $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ *monoton DR-fanyelv*, ha $T = T(\mathfrak{A})$ valamely $\mathfrak{A}$ monoton DR ΣX_n-faautomatára.

A fenti definíciót megtaláljuk az [5] irodalomban is. A következő segédtétel nyilvánvalóan teljesül.

2.2.2. segédtétel. *Minden véges DR-fanyelv monoton.* □

Most rátérünk az *iterációs magasság* fogalmának fanyelvekre történő általánosítására, amely azon leghosszabb x-út hosszát jelöli majd, amely valamely fanyelv x-iterációjában szerepet játszik.

2.2.3. definíció. Legyen $x \in X$ egy változó, és legyen η egy reguláris ΣX_n-kifejezés a $(\zeta)^{*,x}$ alakban. Az x változó *iterációs magassága* η-ban (jelölésben $\mathrm{ih}_x(\eta)$) az

$$\mathrm{ih}_x(\eta) = \max\{|u| : u \in g_x(T(\zeta))\}$$

nemnegatív egész számként van definiálva, ha $g_x(T(\zeta))$ véges. Ha $g_x(T(\zeta))$ végtelen, akkor legyen $\mathrm{ih}_x(\eta)$ végtelen (∞), amit a legnagyobb természetes számként fogunk kezelni. Erre technikai okok miatt van szükség, ugyanis szeretnénk, hogy az ih_x függvény felvehesse a végtelent mint maximális értéket. Legyen most η egy bármilyen alakban adott redukált reguláris ΣX_n-kifejezés. Ekkor $\mathrm{ih}_x(\eta)$-t az

$$\mathrm{ih}_x(\eta) = \max\{\mathrm{ih}_x((\zeta)^{*,x}) \mid (\zeta)^{*,x} \in \mathrm{Sub}(\eta)\}$$

egyenlőséggel definiáljuk, ha $\mathrm{Sub}(\eta)$ tartalmaz $(\zeta)^{*,x}$ alakban adott kifejezést, különben $\mathrm{ih}_x(\eta) = 0$. Végül az x változó iterációs magasságát egy tetszőleges T reguláris fanyelvben (jelölésben $\mathrm{ih}_x(T)$) az

$$\mathrm{ih}_x(T) = \min\{\mathrm{ih}_x(\eta) \mid \eta \in \mathrm{RE}(\Sigma X_n),\ T(\eta) = T\}$$

összefüggéssel határozzuk meg.

A fanyelvek iterációs magasságának szemléltetéséhez tekintsük a következő példát.

2.2.4. példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$ és $X = \{x, y\}$, valamint tekintsük a $\zeta = \sigma(y, \sigma(y, x)) + \sigma(y, \sigma(y, \sigma(y, x)))$ reguláris ΣX-kifejezést. Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{ih}_x((\zeta)^{*,x}) = 3$. Ha most vesszük az $\eta = \sigma(y, x) + (\zeta)^{*,x}$ reguláris ΣX-kifejezést, akkor azt kapjuk, hogy $\mathrm{ih}_x(\eta) = 3$, mert η-nak van $(\zeta)^{*,x}$ alakban adott részkifejezése, amelyre $\mathrm{ih}_x((\zeta)^{*,x}) = 3$. Ugyanakkor a $T(\eta)$ fanyelvet tekintve azt kapjuk, hogy $\mathrm{ih}_x(T(\eta)) = 1$, mert $T(\eta)$ felírható a $(\sigma(y, x))^{*,x}$ alakban is, amelyre $\mathrm{ih}_x((\sigma(y, x))^{*,x}) = 1$.

A monoton fanyelveket leíró redukált reguláris ΣX-kifejezések és ugyanezen fanyelvek iterációs magassága között hasonló összefüggés van, mint amit a monoton sztring nyelvek esetében láttunk.

2.2.5. segédtétel. *Legyen η egy redukált reguláris ΣX_n-kifejezés a $(\zeta)^{*,x_i}$ alakban megadva. Ha $T(\eta)$ egy monoton DR-fanyelv, akkor* $\mathrm{ih}_{x_i}(T(\eta)) \leq 1$.

Bizonyítás. A bizonyítás menete hasonlít a 2.1.7 segédtétel bizonyításához. Legyen η egy $(\zeta)^{*,x_i}$ alakú redukált reguláris ΣX_n-kifejezés, és legyen $\mathfrak{A}$ egy a $T(\eta)$-t felismerő DR-faautomata, amely monoton a $\leq$ részbenrendezési reláció mellett. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\mathfrak{A}$ redukált és normalizált, így pontosan egy olyan $a \in A$ állapot van, amelyre $a \in \alpha(x_i)$ és $au = a$ teljesül minden $u \in g_{x_i}(T(\zeta))$ útra. Mivel $\mathfrak{A}$ monoton faautomata a $\leq$ részbenrendezés mellett, ezért $aw = a$ teljesül bármely $g_{x_i}(T(\zeta))$-beli szó bármely w betűjére. Továbbá, nincs olyan $a' \in A \setminus \{a\}$ állapot, amelyre $a \leq a'$ és $a' \in \alpha(x_i)$ teljesülnek, és nincs olyan $a'' \in \alpha(x_i) \setminus \{a\}$ állapot sem, amelyre $a'' \leq a$ és $a''w = a''$ teljesülne, bárhogyan is veszünk egy w betűt $g_{x_i}(T(\zeta))$ valamely szavából. Ezek alapján η felírható $(\zeta'')^{*,x_i} \cdot_{x_i} \zeta'$ alakban, ahol egyrészt ζ'-ben nem szerepel a ^{*,x_i} művelet, másrészt ζ' azon fanyelvet írja le, amelyet $\mathfrak{A}$ az $A^{(i)} = \{a\}$ megszorítással ismer fel úgy, hogy minden

$j \neq i$ indexre $A^{(j)}$ változatlan marad, és a-ban nincs átmenet önmagába. Továbbá, ζ'' azon fák halmazát írja le, amelyeket úgy kapunk, hogy minden $p \in T(\zeta)$ fát szétbontunk a $g_{x_i}(p)$-beli utak mentén lévő csúcspontjaiban. Könnyen látható, hogy $T(\eta) = T((\zeta'')^{*,x_i} \cdot_{x_i} \zeta')$ és $\mathrm{ih}_{x_i}((\zeta'')^{*,x_i} \cdot_{x_i} \zeta') = 1$, azaz $\mathrm{ih}_{x_i}(T(\eta)) \leq 1$.

2.3. A monoton DR-fanyelvek egy egyszerű jellemzése

Legyen $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ egy monoton DR ΣX_n-faautomata, ahol $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$, $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$ és $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k$ teljesül. Legyen $\Xi_k = \{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ segédváltozók egy olyan halmaza, amelyre $X_n \cap \Xi_k = \emptyset$ teljesül. Továbbá, legyen $\phi : A \to \Xi_k$ egy kölcsönösen egyértelmű ráképezés a $\phi(a_i) = \xi_i$ hozzárendeléssel definiálva $(0 \leq i \leq k)$. Konstruáljuk most meg az η reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezést a következő módon:

$$\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0,$$

ahol minden i indexre $(0 \leq i \leq k)$

$$\eta_i = (p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i},$$

és ahol

1) az $y_1^i, \ldots, y_{r_i}^i$ elemek pontosan az $\{x_z \in X_n | \; a_i \in A^{(z)}\}$ halmazt adják,

2) $p_s^i = \sigma(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ olyan $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m} \in \Xi_k$ segédváltozókra, hogy egyrészt $\sigma(a_i) = (\phi^{-1}(\xi_{i_1}), \ldots, \phi^{-1}(\xi_{i_m}))$, másrészt nincs olyan v index $(1 \leq v \leq m)$, amelyre $a_i = \pi_v(\sigma(a_i))$ teljesülne $(1 \leq s \leq l_i)$,

3) $t_s^i = \sigma(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ olyan $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m} \in \Xi_k$ segédváltozókra, hogy egyrészt $\sigma(a_i) = (\phi^{-1}(\xi_{i_1}), \ldots, \phi^{-1}(\xi_{i_m}))$, másrészt van olyan v index $(1 \leq v \leq m)$, amelyre $a_i = \pi_v(\sigma(a_i))$ teljesül $(1 \leq s \leq j_i)$,

4) $|\{p_1^i, \ldots, p_{l_i}^i\}| \; + \; |\{t_1^i, \ldots, t_{j_i}^i\}| = |\Sigma|$.

A fent definiált η reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezést az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó *triviális reguláris kifejezésnek* nevezzük, jelölni pedig $\eta_{\mathfrak{A}}$-val fogjuk. Azért használjuk a *triviális* elnevezést, mert $\eta_{\mathfrak{A}}$ úgy írja le $T(\mathfrak{A})$-t, ahogy azt az $\mathfrak{A}$ faautomata állapotról állapotra haladva felismeri, és ahol minden i indexre $(0 \leq i \leq k)$ η_i az a_i állapotból induló átmenetekért felelős. A fenti definíció első pontjában azon változók szerepelnek, amelyek levezethetők az a_i állapotból, míg a második pontban azon műveleti szimbólumok szerepelnek, amelyek az a_i állapoton vett eredményvektorukban nem szerepel a_i. A harmadik pontban azon műveleti szimbólumok szerepelnek, amelyek a_i-n vett eredményvektorukban szerepel az a_i állapot, míg végül a negyedik pont biztosítja azt, hogy minden műveleti szimbólum előfordul a második és harmadik pontok valamelyikében. A későbbiekben η_i azon részét, amely a ${}^{*,\xi_i}$ művelettel van iterálva, η_i *iterációs részének* nevezzük, továbbá η_i azon részét, amely a $\cdot_{\xi_i}$ szorzással van az iterációs rész ξ_i változóiba beszúrva, η_i *termináló részének* nevezzük. Az $\eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ formában adott kifejezéseket *láncoknak* fogjuk nevezni.

Legyen az $\mathfrak{A}$ DR ΣX_n-faautomata monoton az $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k$ lineáris rendezés mellett. Definiáljuk az $\mathfrak{A}_i = (\mathcal{A}_i, a_i, \mathbf{a_i})$ DR ΣX_n-faautomatát, ahol

(i) $\mathcal{A}_i = (A \cap \{a_i, \ldots, a_k\}, \Sigma^{\mathcal{A}})$, és

(ii) $\mathbf{a_i} = (A^{(1)} \cap \{a_i, \ldots, a_k\}, \ldots, A^{(n)} \cap \{a_i, \ldots, a_k\})$.

Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}_i$ pontosan a $T(\mathfrak{A}, a_i)$ fanyelvet ismeri fel.

2.3.1. segédtétel. *Legyen $\mathfrak{A}$ egy monoton DR ΣX_n-faautomata. Ekkor érvényes a $T(\mathfrak{A}) = T(\eta_{\mathfrak{A}})$ összefüggés.*

Bizonyítás. Legyen $\mathfrak{A}$ egy DR ΣX_n-faautomata, ahol $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$, $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ és $A = \{a_0, \ldots, a_k\}$. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ monoton az $a_0 \leq \ldots \leq a_k$ lineáris rendezés mellett. Legyen továbbá $\eta_{\mathfrak{A}}$ az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezés. A bizonyítást $\mathfrak{A}$ állapotainak száma szerinti indukcióval végezzük.

Ha $k = 0$, akkor $T(\mathfrak{A}) = T_\Sigma(X_n \cap \{x_i | \ a_0 \in A^{(i)}\})$ teljesül, mivel A egyelemű. Nyilvánvalóan $\eta_{\mathfrak{A}} = \eta_0$ is fennáll. $\eta_{\mathfrak{A}}$ definíciójából adódik, hogy minden $\sigma \in \Sigma$ műveleti szimbólum jelen van η_0 iterációs részében, illetve minden $x \in \{x_i | \ a_0 \in A^{(i)}\} \subseteq X_n$ változó jelen van η_0 termináló részében. Így $T(\eta_{\mathfrak{A}}) = T_\Sigma(X_n \cap \{x_i | \ a_0 \in A^{(i)}\})$, azaz, $T(\mathfrak{A}) = T(\eta_{\mathfrak{A}})$.

Tegyük most fel indukciós hipotézisként, hogy $T(\mathfrak{A}_i) = \eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_{i+1}} \eta_i$ minden i indexre teljesül ($1 \leq i \leq k$). Megkonstruáljuk az $\mathfrak{A}'$ $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-faautomatát úgy, hogy $\mathfrak{A}' = (\mathcal{A}, a_0, \mathsf{a}')$, ahol

$$\mathsf{a}' = (A^{(1)} \cap \{a_0\}, \ldots, A^{(n)} \cap \{a_0\}, \{a_0\}, \ldots, \{a_k\}) \in \mathfrak{p}(A)^{n+k+1}.$$

Ahhoz, hogy $T(\mathfrak{A}')$ jelentését értelmezzük, tekintsük $X_n \cup \Xi_k$-t úgy mint a X_{n+k+1} halmazt, ahol $x_{n+i+1} = \xi_i$, és legyen az α leképezés a következőképpen definiálva:

$$\alpha(\xi_i) = \alpha(x_{n+i+1}) = A^{(n+i+1)} \ (0 \leq i \leq k).$$

Könnyen látható, hogy $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{A}_k) \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_2} T(\mathfrak{A}_1) \cdot_{\xi_1} T(\mathfrak{A}')$, és $T(\mathfrak{A}') = T(\eta_0)$. Így

$$\begin{aligned}
T(\mathfrak{A}) &= T(\mathfrak{A}_k) \cdot_{\xi_k} T(\mathfrak{A}_{k-1}) \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_2} T(\mathfrak{A}_1) \cdot_{\xi_1} T(\mathfrak{A}') \\
&= T(\eta_k) \cdot_{\xi_k} T(\eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1}) \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_2} T(\eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_2} \eta_1) \cdot_{\xi_1} T(\eta_0) \\
&= T(\eta_k) \cdot_{\xi_k} T(\eta_{k-1}) \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_2} T(\eta_1) \cdot_{\xi_1} T(\eta_0) \\
&= T(\eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_2} \eta_1 \cdot_{\xi_1} \eta_0) \\
&= T(\eta_{\mathfrak{A}}).
\end{aligned}$$

2.4. Megjegyzések η dekompozíciójával kapcsolatban

Ebben az alfejezetben az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezés felbontásával kapcsolatban teszünk néhány állítást. Ha η_i termináló részében legfeljebb egy szimbólum van, akkor az η_i tényezőben történő dekompozíciónak nincs értelme, így ebben az alfejezetben feltesszük, hogy η_i termináló részében legalább két szimbólum van.

Azt mondjuk, hogy az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_{i+1}} \eta_i \cdot_{\xi_i} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ lánc felbontható az η_i tényezőben, ha az megadható az

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+1}} \eta_i \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0 \\
&= \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+1}} (p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \\
&\quad \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i} \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0 \\
&= \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+1}} (y_1^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i} \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0 + \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \ \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+1}} (y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i} \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0 \\
&\quad + \ \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+1}} (p_1^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i} \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0 + \\
&\qquad \vdots \\
&\quad + \ \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+1}} (p_{l_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i} \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0
\end{aligned}$$

alakban, ahol

(i) $y_s^i \in X_n$ $(1 \leq s \leq r_i,\ 0 \leq r_i \leq n)$,

(ii) $p_s^i = \sigma(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ valamely $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $\xi_{i_v} \in \Xi_k$ változóra, $1 \leq v \leq m$, $1 \leq s \leq l_i$,

(iii) $t_s^i = \sigma(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ valamely $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $\xi_{i_v} \in \Xi_k$ változóra, $1 \leq v \leq m$, $1 \leq s \leq j_i$.

Most megadjuk a fenti felbontás létezésének szükséges feltételét.

2.4.1. segédtétel. *Az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezés felbontható az η_i tényezőben, ha η_i iterációs részének minden fája legfeljebb egyszer tartalmazza a leveleiben a ξ_i segédváltozót.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesül a segédtétel feltétele. Jelöljük rendre ebben a bizonyításban az $\eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_{i+2}} \eta_{i+1}$ és $(t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i} \cdot_{\xi_i} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezéseket ζ''-vel és ζ'-vel. Könnyen láthatjuk, hogy minden $t \in T(\zeta')$ fára a $g_{\xi_i}(t)$ halmaz egyelemű vagy üres. A fanyelvek x-szorzatának definíciójából, valamint a segédtétel feltételeiből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
T(\eta) &= T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} (p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} \zeta') \\
&= T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} T(p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \\
&= T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} (\ T(p_1^i) \cup \ldots \cup T(p_{l_i}^i) \cup\ T(y_1^i) \cup \ldots \cup T(y_{r_i}^i)\ ) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \\
&= T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} (\ T(p_1^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \cup \ldots \cup T(p_{l_i}^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \\
&\quad \cup\ T(y_1^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \cup \ldots \cup T(y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta')\ ) \\
&= T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} T(p_1^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \cup \ldots \cup T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} T(p_{l_i}^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \\
&\quad \cup\ T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} T(y_1^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \cup \ldots \cup T(\zeta'') \cdot_{\xi_{i+1}} T(y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} T(\zeta') \\
&= T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} p_1^i \cdot_{\xi_i} \zeta') \cup \ldots \cup T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} p_{l_i}^i \cdot_{\xi_i} \zeta' \\
&\quad \cup\ T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} y_1^i \cdot_{\xi_i} \zeta') \cup \ldots \cup T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} y_{r_i}^i \cdot_{\xi_i} \zeta') \\
&= T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} p_1^i \cdot_{\xi_i} \zeta' + \ldots + \zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} p_{l_i}^i \cdot_{\xi_i} \zeta' \\
&\quad +\ \zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} y_1^i \cdot_{\xi_i} \zeta' + \ldots + \zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} y_{r_i}^i \cdot_{\xi_i} \zeta').
\end{aligned}$$

Azaz az η_i-ben történő dekompozíció egy ekvivalens reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezéshez vezetett. □

Világos, hogy ha a ξ_i segédváltozó nem fordul elő az $\eta_{i-1} \cdot_{\xi_{i-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ részkifejezésben, akkor az η_i tényező törölhető az η kifejezésből. Itt jegyezzük meg, hogy a felbontott részeket is *láncoknak* fogjuk hívni, így például a fent említett η láncot véges sok lánc egyesítésére bontottuk fel.

Az $y_1^i, \ldots, y_{r_i}^i$ változókat bármelyik felbontás utáni láncban hagyhatjuk, ugyanis a ξ_i-szorzat során ezen változók az iterációs részbe való beszúrásával termináljuk a szóban forgó utat, azaz már nem érhető el később segédváltozó ezekből a változókból.

A következő állítás az 2.4.1. segédtétel megfordítottja.

2.4.2. segédtétel. *Ha az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezés felbontható az η_i tényezőben, akkor η_i iterációs részében lévő fák leveleiben legfeljebb egyszer szerepel a ξ_i segédváltozó.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van olyan $t = \sigma(\ldots, \xi_i, \ldots, \xi_i, \ldots)$ fa a szétbontott η_i iterációs részében, amelyre ξ_i legalább kétszer fordul elő t levelei között ($\sigma \in \Sigma_m$). Jelöljék rendre ζ'' és ζ' az $\eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_{i+2}} \eta_{i+1}$ és $\eta_{i-1} \cdot_{\xi_{i-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezéseket. Az egyszerűség kedvéért $\tilde{\sigma}(\xi_i, \xi_i)$-t fogunk írni $\sigma(\xi_1', \ldots, \xi_{v_1}', \xi_i, \xi_1'', \ldots, \xi_{v_2}'', \xi_i, \xi_1''', \ldots, \xi_{v_3}''')$ helyett, ahol

$v_1, v_2, v_3 \in \{0, 1, \ldots, m-2\}$, $v_1 + v_2 + v_3 = m - 2$, és $\xi'_{z'}, \xi''_{z''}, \xi'''_{z'''} \in \Xi_k$ $(1 \leq z' \leq v_1,\ 1 \leq z'' \leq v_2,\ 1 \leq z''' \leq v_3)$. Nyilvánvaló, hogy

$$T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} (p^i_1 + \cdots + p^i_{l_i} + y^i_1 + \cdots + y^i_{r_i}) \cdot_{\xi_i} \tilde{\sigma}(\xi_i, \xi_i) \cdot_{\xi_i} \zeta') \subset T(\eta).$$

Továbbá,

$$T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} \tilde{\sigma}(s_1, s_2) \cdot_{\xi_i} \zeta') \subset T(\eta)$$

is fennáll minden különböző $s_1, s_2 \in \{p^i_1, \ldots, p^i_{l_i}, y^i_1, \ldots, y^i_{r_i}\}$ szimbólumpárra. Ekkor azonban a $T = T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} \tilde{\sigma}(s_1, s_2) \cdot_{\xi_i} \zeta')$ jelölést használva kapjuk, hogy

$$T \not\subseteq \bigcup_{1 \leq v \leq l_i} T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} \tilde{\sigma}(p^i_v, p^i_v) \cdot_{\xi_i} \zeta') \cup \bigcup_{1 \leq v \leq r_i} T(\zeta'' \cdot_{\xi_{i+1}} \tilde{\sigma}(y^i_v, y^i_v) \cdot_{\xi_i} \zeta'),$$

ami ellentmondás, mivel léteznek olyan $T(\eta)$-beli fák, amelyek nincsenek jelen η szétbontott láncaiban. □

Az előző két állítás a következő tételben foglalható össze.

2.4.3. tétel. *Az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezés akkor és csakis akkor bontható fel az η_i tényezőben, ha η_i iterációs részében lévő minden fa leveleiben legfeljebb egyszer szerepel a ξ_i segédváltozó.*

2.5. Megjegyzések az $\eta_{\mathfrak{A}}$-ban lévő segédváltozók számával kapcsolatban

Jelen alfejezetben az $\eta_{\mathfrak{A}}$-ban előforduló segédváltozók számára vonatkozóan teszünk állításokat, valamint adunk egy eljárást, amellyel ez a szám többnyire csökkenthető. Nyilvánvaló, hogy ha az $\mathfrak{A}$ faautomatának k állapota van, akkor $\eta_{\mathfrak{A}}$ jellemzéséhez elég k segédváltozó.

Azt mondjuk, hogy egy $p \in T_\Sigma(X_n)$ fával *termináljuk* az $x \in X_n$ változót egy $t \in T_\Sigma(X_n)$ fában, ha az x változó nem fordul elő $\{p\} \cdot_x \{t\}$ fáinak levelei között. Legyen ζ egy reguláris ΣX_n-kifejezés. Azt mondjuk, hogy egy $x \in X_n$ változó *terminálva van* ζ-ban, ha az x változó nem fordul elő $T(\zeta)$ fáinak leveleiben.

Nyilvánvaló, hogy a felhasznált segédváltozók száma potenciálisan csökkenthető ha felbontjuk $\eta_{\mathfrak{A}}$-t minden lehetséges tényezőben (ahogy azt az előző alfejezetben láttuk), és minden így kapott láncban egymástól függetlenül újraszámozzuk a segédváltozókat 0-tól.

Világos, hogy egy ξ_i változó terminálva van az η_i részben, azaz a ξ_i változó nem fordul elő egyetlen levélen sem ezután az $\eta_{\mathfrak{A}}$ jobbról balra történő kiértékelésében. Ez azt jelenti, hogy egyes segédváltozókat újra felhasználhatunk a láncon belül. Tegyük fel, hogy van egy ξ_j segédváltozó a láncban amely legelőször η_i termináló részében szerepel (a lánc jobbról balra történő kiértékelése folyamán). Ebben az esetben ξ_j minden $\eta_{\mathfrak{A}}$-beli előfordulása helyettesíthető ξ_i-vel, amivel egy ekvivalens átalakítást hajtottunk végre. Valójában X_n elemeit is felhasználhatjuk a segédváltozók számának csökkentésére. A módszer ugyanaz, azaz egy létező ξ_i segédváltozót helyettesíthetünk egy x változóval, ha ξ_i előbb terminálódik mint x első előfordulása.

A fentieket alapul véve a következő lépések csökkenthetik a segédváltozók számát:

(i) bontsuk fel $\eta_{\mathfrak{A}}$-t minél több lánc egyesítésére,

(ii) csökkentsük ezen láncokban külön-külön a segédváltozók számát,

(iii) számozzuk újra a segédváltozókat 0-tól minden láncban egymástól függetlenül.

Az előző módszert mutatja be a következő példa.

2.5.1. példa. Legyen $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ egy DR ΣX_3-faautomata, ahol $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$, $A = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $\sigma_i \in \Sigma_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, és $\mathbf{a} = (\{a_0\}, \{a_0, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\})$. Legyen Σ a következőképpen realizálva $\mathcal{A}$-ban:

$$\begin{array}{lll}
\sigma_1(a_0) = (a_1), & \sigma_2(a_0) = (a_0, a_1), & \sigma_3(a_0) = (a_0, a_0, a_1), \\
\sigma_1(a_1) = (a_3), & \sigma_2(a_1) = (a_2, a_2), & \sigma_3(a_1) = (a_1, a_3, a_3), \\
\sigma_1(a_2) = (a_3), & \sigma_2(a_2) = (a_2, a_3), & \sigma_3(a_2) = (a_2, a_3, a_3), \\
\sigma_1(a_3) = (a_3), & \sigma_2(a_3) = (a_3, a_3), & \sigma_3(a_3) = (a_3, a_3, a_3).
\end{array}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}$ monoton az $a_0 \leq \ldots \leq a_3$ rendezés mellett. Az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezés a következő:

$$\begin{aligned}
\eta_{\mathfrak{A}} &= \eta_3 \cdot_{\xi_3} \eta_2 \cdot_{\xi_2} \eta_1 \cdot_{\xi_1} \eta_0 \\
&= (x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*, \xi_3} \\
&\quad \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + x_2 + x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*, \xi_2} \\
&\quad \cdot_{\xi_2} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_2, \xi_2) + x_3) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*, \xi_1} \\
&\quad \cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*, \xi_0}
\end{aligned}$$

A fenti lánc η_1 tényezőben való felbontása a következő kifejezést eredményezi:

$$
\begin{aligned}
&(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
&\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + x_2 + x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
&\cdot_{\xi_2} (\sigma_1(\xi_3)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
&\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
&\qquad\qquad\qquad + \\
&(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
&\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + x_2 + x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
&\cdot_{\xi_2} (x_3) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
&\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
&\qquad\qquad\qquad + \\
&(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
&\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + x_2 + x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
&\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_2)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
&\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0}
\end{aligned}
$$

Az imént kapott kifejezés egyszerűsítése után (ami jelen esetben η_2 az egyes láncokból való elhagyása volt) a következőt kapjuk:

$$
\begin{aligned}
&(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
&\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
&\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
&\qquad\qquad\qquad + \\
&(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
&\cdot_{\xi_3} (x_3) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
&\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
&\qquad\qquad\qquad + \\
&(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
&\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + x_2 + x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
&\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_2)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
&\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0}
\end{aligned}
$$

Megfigyelhetjük, hogy a fenti láncok a (megmaradt) η_2 tényezőben is felbonthatóak:

$$
\begin{array}{l}
(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
\cdot_{\xi_3} (x_3) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
\cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3)) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_2)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
\cdot_{\xi_3} (x_2) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_2)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_3} (\sigma_1(\xi_3) + \sigma_2(\xi_3, \xi_3) + \sigma_3(\xi_3, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_3} \\
\cdot_{\xi_3} (x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_3) + \sigma_3(\xi_2, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_2} \\
\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2, \xi_2)) \cdot_{\xi_1} (\sigma_3(\xi_1, \xi_3, \xi_3))^{*,\xi_1} \\
\cdot_{\xi_1} (\sigma_1(\xi_1) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0, \xi_1) + \sigma_3(\xi_0, \xi_0, \xi_1))^{*,\xi_0}
\end{array}
$$

Ha a fenti láncokban újra felhasználjuk a ξ_0 és x_3 változókat ($\xi_0 \to \xi_3$, $x_3 \to \xi_1$), akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$
\begin{array}{l}
(x_3) \cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0) + \sigma_2(\xi_0,\xi_0) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_0} \\
\cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0)) \cdot_{x_3} (\sigma_3(x_3,\xi_0,\xi_0))^{*,x_3} \\
\cdot_{x_3} (\sigma_1(x_3) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0,x_3) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,x_3))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0) + \sigma_2(\xi_0,\xi_0) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_0} \\
\cdot_{\xi_0} (x_3) \cdot_{x_3} (\sigma_3(x_3,\xi_0,\xi_0))^{*,x_3} \\
\cdot_{x_3} (\sigma_1(x_3) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0,x_3) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,x_3))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0) + \sigma_2(\xi_0,\xi_0) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_0} \\
\cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0)) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2,\xi_0) + \sigma_3(\xi_2,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_2} \\
\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2,\xi_2)) \cdot_{x_3} (\sigma_3(x_3,\xi_0,\xi_0))^{*,x_3} \\
\cdot_{x_3} (\sigma_1(x_3) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0,x_3) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,x_3))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0) + \sigma_2(\xi_0,\xi_0) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_0} \\
\cdot_{\xi_0} (x_2) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2,\xi_0) + \sigma_3(\xi_2,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_2} \\
\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2,\xi_2)) \cdot_{x_3} (\sigma_3(x_3,\xi_0,\xi_0))^{*,x_3} \\
\cdot_{x_3} (\sigma_1(x_3) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0,x_3) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,x_3))^{*,\xi_0} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + \\
(x_3) \cdot_{\xi_0} (\sigma_1(\xi_0) + \sigma_2(\xi_0,\xi_0) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_0} \\
\cdot_{\xi_0} (x_3) \cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2,\xi_0) + \sigma_3(\xi_2,\xi_0,\xi_0))^{*,\xi_2} \\
\cdot_{\xi_2} (\sigma_2(\xi_2,\xi_2)) \cdot_{x_3} (\sigma_3(x_3,\xi_0,\xi_0))^{*,x_3} \\
\cdot_{x_3} (\sigma_1(x_3) + x_1 + x_2) \cdot_{\xi_0} (\sigma_2(\xi_0,x_3) + \sigma_3(\xi_0,\xi_0,x_3))^{*,\xi_0}
\end{array}
$$

Láthatjuk, hogy a segédváltozók számát a kezdeti négyről kettőre csökkentettük. Ebben a konkrét esetben ezt az értéket a segédváltozók újraszámozásával már nem tudjuk csökkenteni.

Jelen alfejezetet a következő állítással zárjuk.

2.5.2. segédtétel. *Tegyük fel, hogy $\Sigma = \Sigma_1$. Ekkor bármely $\mathfrak{A}$ monoton DR ΣX_n-faautomatához elég egy segédváltozó $\eta_{\mathfrak{A}}$ felírásához.*

Bizonyítás. Legyen $\Sigma = \Sigma_1$, és legyen $\eta_{\mathfrak{A}}$ az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$ kifejezés. Mivel csak unáris műveleti szimbólumaink vannak, ξ_i legfeljebb egyszer fordul elő bármely η_i iterációs részének bármely fájának levelei között. Így $\eta_{\mathfrak{A}}$ felbontható véges sok lánc egyesítésére, továbbá a felbontás minden η_i tényezőben elvégezhető. A $\Sigma = \Sigma_1$ feltételből az is következik, hogy a kifejezés kiértékelése során minden lépésben pontosan egy segédváltozó van, amely nincs terminálva. Mivel a ξ_0 változó az η_0 tényező termináló részében terminálódik, így ξ_0-t újra felhasználhatjuk egy új segédváltozó bevezetése helyett. Ezen ötlet folytatásával az összes felbontott láncot átírhatjuk úgy, hogy az csupán a ξ_0-t tartalmazza segédváltozóként.

2.6. A monoton DR-fanyelvek jellemzése

Jól ismert összefüggés, hogy a DR-fanyelvek osztálya zárt a σ-szorzatra nézve, de nem zárt az egyesítés, x-szorzat és x-iteráció műveletekre. Ez azt jelenti, hogy monoton DR-fanyelvek x-szorzata, x-iteráltja és egyesítése nem feltétlenül determinisztikus (tekintsük a [3],[12] és [13] hivatkozásokat). A fenti három művelet alkalmazása nem zárt fanyelveken azonban eredményezhet zárt (sőt, akár monoton) DR-fanyelveket is. Erre adunk egy-egy példát az alábbiakban.

2.6.1. példa. Tekintsük az $S = \{\sigma(x,x),\ \sigma(y,y)\}$ és $T = \{\sigma(x,y),\ \sigma(y,x)\}$ reguláris fanyelveket. Világos, hogy sem S, sem T nem zárt, de az $S \cup T = \{\sigma(x,x),\ \sigma(y,y),\ \sigma(x,y),\ \sigma(y,x)\}$ fanyelv zárt, azaz DR-felismerhető. Ráadásul $S \cup T$ monoton is.

2.6.2. példa. Legyen most $S = \{z,\ \sigma(x,x), \sigma(y,y)\}$ és $T = \{\sigma(x,y),\ \sigma(y,x)\}$ reguláris fanyelvek. Világos, hogy egyikük sem zárt, azonban a $T \cdot_z S = \{\sigma(x,x),\ \sigma(y,y),\ \sigma(x,y),\ \sigma(y,x)\}$ fanyelv zárt, így DR-felismerhető, sőt, $T \cdot_z S$ monoton is.

2.6.3. példa. Legyen S a következő reguláris fanyelv:
$S = \{\sigma(x,\sigma(x,y)),\ \sigma(x,\sigma(y,x)),\ \sigma(x,x),\ \sigma(y,y),\ \sigma(x,y),\ \sigma(y,x)\}$. S nem zárt, de az $(S)^{*,x}$ reguláris fanyelv zárt, és ezen felül még monoton is.

Legyen Σ_S az S*-ben előforduló műveleti szimbólumok* halmaza, amelyet egyben a $\Sigma_S = \mathrm{root}(\mathrm{Sub}(S)) \setminus X_n$ összefüggéssel is definiálunk. Jelölje továbbá $\Sigma_{S,x}$ a $\{ \sigma \in \Sigma \mid \exists u \in g_x(S),\ \exists v \in \hat{\Sigma}^*,\ \exists z \in X_n\ :\ uv \in g_z(S),\ v = (\sigma, i) \ldots (\omega, j),\ \omega \in \Sigma,\ i, j \in N\}$ halmazt. Világos, hogy $\Sigma_{S,x}$ azokat a σ műveleti szimbólumokat tartalmazza, amelyekre léteznek S-beli x-utak úgy, hogy ezt az x-utat valamely alkalmas $\hat{\Sigma}_\sigma$-beli betűvel kiegészítve és további alkalmas $\hat{\Sigma}^*$-beli szót hozzávéve egy másik S-beli úthoz jutunk.

2.6.4. megjegyzés. Az imént bevezetett $\Sigma_{S,x}$ halmazt egy kicsit másképp definiáltuk [11]-ben, bár ugyanazt a halmazt jelöltük vele. Ott a

$$\{\sigma \in \Sigma_m \mid \exists u \in g_x(S),\ \exists v \in \hat{\Sigma}^*,\ \exists i \in \{1, \ldots, m\}\ :\ u\sigma_i v \in g(S),\ m > 0\}$$

definíció szerepelt.

Most megadunk egy feltételt, amely mellett két monoton DR-fanyelv x-szorzata monoton marad.

2.6.5. tétel. *Legyenek $S, T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ monoton DR-fanyelvek, és legyen $x_i \in X_n$ tetszőleges változó. Ha $\Sigma_{S,x_i} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$, akkor $T \cdot_{x_i} S$ monoton.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesülnek a tétel feltételei. Legyenek $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ rendre az S és T DR-fanyelveket felismerő DR ΣX_n-faautomaták, ahol

(i) $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}}),\ A = \{a_0, \ldots, a_k\},\ \mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$,

(ii) $\mathcal{B} = (B, \Sigma^{\mathcal{B}}),\ B = \{b_0, \ldots, b_l\},\ \mathbf{b} = (B^{(1)}, \ldots, B^{(n)})$, valamint

(iii) $A \cap B = \emptyset$.

Tegyük fel továbbá azt is, hogy $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ monotonok rendre az $a_0 \leq \ldots \leq a_k$ és $b_0 \leq \ldots \leq b_l$ rendezések mellett.

A következő lépésben megszerkesztünk egy $\mathfrak{C} = (\mathcal{C}, c_0, \mathbf{c})$ monoton DR ΣX_n-faautomatát, amely a $T \cdot_{x_i} S$ fanyelvet ismeri majd fel. Legyen

$$\mathcal{C} = (C, \Sigma^{\mathcal{C}}),\ C = A \cup B,\ c_0 = a_0 \text{ és } \mathbf{c} = (C^{(1)}, \ldots, C^{(n)}),$$

ahol $\mathbf{c}$ a következőképpen van definiálva:

$$C^{(j)} = \begin{cases} A^{(j)} \cup B^{(j)} \cup A^{(i)}, & \text{ha } x_j \in T,\ j \neq i, \\ A^{(j)} \cup B^{(j)}, & \text{ha } x_j \notin T,\ j \neq i, \\ B^{(j)} \cup A^{(i)}, & \text{ha } x_j \in T,\ j = i, \\ B^{(j)}, & \text{ha } x_j \notin T,\ j = i. \end{cases}$$

Még meg kell adnunk Σ elemeinek realizáltját $\mathcal{C}$-ben. Tetszőleges $\sigma \in \Sigma$ műveleti szimbólumra és $c \in C$ változóra legyen

$$\sigma^{\mathcal{C}}(c) = \begin{cases} \sigma^{\mathcal{B}}(c), & \text{ha } c \in B, \\ \sigma^{\mathcal{B}}(b_0), & \text{ha } c \in A^{(i)} \text{ és } \sigma \in \mathrm{root}(T), \\ \sigma^{\mathcal{A}}(c), & \text{különben.} \end{cases}$$

$\mathfrak{C}$ konstrukciója a $\Sigma_{S,x_i} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$ feltételen alapul. Ez biztosítja számunkra azt, hogy egy tetszőleges fa $\mathfrak{C}$-beli feldolgozásának minden lépésében el tudjuk dönteni, hogy a következő szimbólumot $\mathfrak{A}$ vagy $\mathfrak{B}$ szerint dolgozzuk-e fel. Amint elérünk egy $a \in A^{(i)}$ állapotot, a $\mathrm{root}(T)$-beli szimbólumok egy $b \in B$-beli állapothoz fognak vezetni, ahonnan a feldolgozást már $\mathfrak{B}$ szerint folytathatjuk. Ha az a állapotban alkalmazott input szimbólum $\Sigma \setminus \mathrm{root}(T)$-ben van, akkor őt $\mathfrak{A}$ szerint dolgozzuk fel. Ezek alapján egyszerű számítással igazolható, hogy $\mathfrak{C}$ felismeri $T \cdot_{x_i} S$-t, és $\mathfrak{C}$ monoton az $a_0 \leq \ldots \leq a_k \leq b_0 \leq \ldots \leq b_l$ lineáris rendezés mellett, ami azt jelenti, hogy $T \cdot_{x_i} S$ monoton. □

Az alábbi egyszerű következmény nyilvánvaló.

2.6.6. következmény. *Legyenek $S, T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ monoton DR-fanyelvek, és legyen $x_i \in X_n$. Ha $\Sigma_S \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$, akkor $T \cdot_{x_i} S$ monoton.*

Bizonyítás. Mivel $\Sigma_{S,x_i} \subseteq \Sigma_S$, ezért teljesülnek a 2.6.5. tétel feltételei, azaz $T \cdot_{x_i} S$ monoton. □

A 2.6.5. tétel megfordítása nem érvényes, ahogy azt az alábbi példa bizonyítja.

2.6.7. példa. Legyenek S és T rendre a $\{\sigma(x, z), \sigma(\sigma(z, z), z)\}$ és $\{\sigma(z, z)\}$ DR-fanyelvek. Könnyen látható, hogy S és T monoton, továbbá $T \cdot_x S = \{\sigma(\sigma(z, z),\ z)\}$ is monoton. Ugyanakkor $\Sigma_{S,x} \cap \mathrm{root}(T) = \{\sigma\} \neq \emptyset$.

A következő tulajdonság fogja majd azt biztosítani, hogy ha egy DR-faautomatában két különböző állapotból is le lehet vezetni ugyanazt a változót, akkor e két állapotból ugyanazon részfákat lehessen felismerni.

2.6.8. definíció. Legyen $x \in X_n$. Egy T fanyelvet *x-homogénnek* nevezünk, ha nincs olyan $p \in T$ fa, amelyre létezik $u, v \in g_x(p)$, $w \in \hat{\Sigma}^*$ és $z \in X_n$, hogy $uw \in g_z(T)$ és $vw \notin g_z(T)$.

A következő segédtételekkel megszorítást tehetünk arra a feltételre, amely mellett a monoton DR-fanyelvek osztálya zárt az x-iterációra nézve.

2.6.9. segédtétel. *Legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy DR-fanyelv, $x \in X_n$, és legyen $T^{*,x}$ determinisztikus. Ha T nem x-homogén, akkor $T^{*,x}$ nem monoton.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesülnek a segédtétel feltételei. Ebből az következik, hogy létezik olyan $p \in T$ fa, amelyre léteznek egymástól különböző $u, v \in g_x(p)$ utak, valamint létezik olyan $w \in \hat{\Sigma}^*$ szó és $z \in X_n$ változó, hogy $uw \in g_z(T)$ és $vw \notin g_z(T)$ teljesülnek. Továbbá, tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ egy a $T^{*,x}$-et felismerő redukált monoton DR ΣX_n-faautomata. Legyen $a_i = a_0 u$ és $a_j = a_0 v$. Mivel $uw \in g_z(T)$ és $vw \notin g_z(T)$, azt kapjuk, hogy $a_i \neq a_j$. Nyilvánvaló, hogy $a_i, a_j \in \alpha(x)$, és mivel minden $\alpha(x)$-beli állapotból kiindulva fel kell tudni ismerni bármennyi T-beli fát, így azt kapjuk, hogy $T(\mathfrak{A}, a_i) = T^{*,x}$ és $T(\mathfrak{A}, a_j) = T^{*,x}$. Felhasználva azt, hogy $\mathfrak{A}$ redukált, $T(\mathfrak{A}, a_i) = T(\mathfrak{A}, a_j)$-ből következik az $a_i = a_j$ egyenlőség, ami ellentmondás. Ezek szerint $T^{*,x}$ nem monoton. □

2.6.10. segédtétel. *Legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy tetszőleges DR-fanyelv, $x \in X_n$ egy változó, és legyen $T^{*,x}$ determinisztikus. Ha $\mathrm{ih}_x(T^{*,x}) > 1$, akkor $T^{*,x}$ nem monoton.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T egy olyan DR-fanyelv, amelyre $T^{*,x}$ determinisztikus és $\mathrm{ih}_x(T^{*,x}) > 1$. Jelölje T-t a ζ reguláris ΣX_n-kifejezés. Az ih_x definíciója szerint van olyan η redukált reguláris ΣX_n-kifejezés, amelyre $T(\eta) = T^{*,x}$, $\mathrm{ih}_x(\eta) > 1$ és η a $(\zeta)^{*,x}$ alakban adott. A 2.2.5. segédtétel felhasználásával kapjuk, hogy $T(\eta)$ nem monoton, azaz $T^{*,x}$ sem monoton. □

Az előző két segédtételből kontrapozícióval kapjuk az alábbi következményt.

2.6.11. következmény. *Legyen $x \in X_n$ egy tetszőleges változó, és legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy DR-fanyelv. Tegyük fel továbbá, hogy $T^{*,x}$ determinisztikus. Ha $T^{*,x}$ monoton, akkor T x-homogén és $\mathrm{ih}_x(T^{*,x}) \leq 1$.* □

Most megadjuk azt a feltételt, amely mellett egy monoton DR-fanyelv x-iteráltja is monoton.

2.6.12. tétel. *Legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy monoton DR-fanyelv és legyen $x_i \in X_n$ egy tetszőleges változó. Ha T x_i-homogén, $\mathrm{ih}_{x_i}(T^{*,x_i}) \leq 1$ és $\Sigma_{T,x_i} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$, akkor T^{*,x_i} monoton.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesülnek a tétel feltételei. Legyen $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ egy olyan T-t felismerő redukált DR ΣX_n-faautomata, amelyre

$$\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}}),\ A = \{a_0, \ldots, a_k\} \text{ és } \mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}).$$

Tegyük fel továbbá azt, hogy $\mathfrak{A}$ monoton az $a_0 \leq \ldots \leq a_k$ lineáris rendezés mellett.

Megszerkesztjük azt a T^{*,x_i}-t felismerő $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ monoton DR ΣX_n-faautomatát, ahol $\mathcal{B} = (B, \Sigma^{\mathcal{B}})$, $B = A \cup \{b_0\}$, b_0 pedig egy új állapot. A végállapotok $\mathbf{b}$ vektora legyen

$$\mathbf{b} = (B^{(1)}, \ldots, B^{(i-1)},\ \{a_0, b_0\},\ B^{(i+1)}, \ldots, B^{(n)}),$$

ahol az egyes komponensek két lépésben vannak definiálva az alábbiak szerint:

(1) Minden $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ indexre legyen

$$B^{(j)} := \begin{cases} A^{(j)} \cup \{b_0\}, & \text{ha } a_0 \in A^{(j)}, \\ A^{(j)}, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2) Minden $a \in A^{(i)}$ állapotra és $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ indexre ha $a \in A^{(j)}$, akkor legyen

$$B^{(j)} := B^{(j)} \cup \{a_0\}.$$

$\Sigma^{\mathcal{B}}$ definícióját négy lépésben adjuk meg, a következő sorrendben:

(3) Minden $\sigma \in \mathrm{root}(T)$ műveleti szimbólumra és $a' \in A^{(i)}$ állapotra legyen

$$\sigma^{\mathcal{B}}(a_0) := \begin{cases} (\ldots, a_0, \ldots), & \text{ha } \sigma^{\mathcal{A}}(a_0) = (\ldots, a', \ldots), \\ \sigma^{\mathcal{A}}(a_0), & \text{különben.} \end{cases}$$

(4) Minden $\sigma \in \Sigma \setminus \mathrm{root}(T)$ műveleti szimbólumra legyen

$$\sigma^{\mathcal{B}}(a_0) := \begin{cases} \sigma^{\mathcal{A}}(a'), & \text{ha } A^{(i)} \neq \emptyset \text{ (ahol } a' \in A^{(i)} \text{ tetszőleges)}, \\ \sigma^{\mathcal{A}}(a_0), & \text{ha } A^{(i)} = \emptyset. \end{cases}$$

(5) Minden $\sigma \in \mathrm{root}(T)$ műveleti szimbólumra legyen

$$\sigma^{\mathcal{B}}(b_0) := \sigma^{\mathcal{B}}(a_0).$$

(6) Minden $\sigma \in \Sigma$ műveleti szimbólumra és $a \in A \setminus \{a_0\}$ állapotra legyen

$$\sigma^{\mathcal{B}}(a) := \sigma^{\mathcal{A}}(a).$$

$\mathfrak{B}$ konstrukciója a $\Sigma_{T,x_i} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$ feltételen alapul. Ez biztosítja számunkra azt, hogy minden $a \in A^{(i)}$ állapotban minden σ input szimbólumra el tudjuk dönteni, hogy folytassuk-e egy fa már megkezdett felismerését, vagy kezdjük el egy T-beli fa felismerését annak gyökerétől. Minden más esetben $\mathfrak{B}$ úgy viselkedik (azaz úgy ismer fel fákat) mint $\mathfrak{A}$. T x_i-homogenitása és az $\mathrm{ih}_{x_i}(T^{*,x_i}) \leq 1$ egyenlőtlenség biztosítja azt, hogy egyetlen állapot elegendő a T-beli x_i-utak iterálására, amely valójában minden iterációra alapuló automata konstrukció alapötlete. Ezek alapján egyszerű számítással kaphatjuk, hogy $T(\mathfrak{B}) = T^{*,x_i}$, és $\mathfrak{B}$ monoton a $b_0 \leq a_0 \leq \ldots \leq a_k$ lineáris rendezés mellett. Ez utóbbi viszont azt jelenti, hogy T^{*,x_i} monoton. $\square$

A következő segédtétel nyilvánvaló.

2.6.13. segédtétel. *Bármely rögzített $x \in X_n$ változóra a fanyelvek x-szorzata asszociatív, azaz bármely S, R és T fanyelvekre érvényes a $T \cdot_x (R \cdot_x S) = (T \cdot_x R) \cdot_x S$ egyenlőség.* $\square$

Most bevezetjük a reguláris ΣX_n-kifejezések azon speciális alakját, amelyek a monoton DR-fanyelveket fogják leírni.

2.6.14. definíció. Egy $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ fanyelvet *R-láncnyelvnek* nevezünk, ha minden i indexre ($0 \leq i \leq k$)

(i) η_i a $(T_i) \cdot_{\xi_i} (S_i)^{*,\xi_i}$ alakban adott,

(ii) S_i és T_i véges DR-fanyelvek,

(iii) S_i ξ_i-homogén,

(iv) $\mathrm{ih}_{\xi_i}((S_i)^{*,\xi_i}) \leq 1$,

(v) $\mathrm{root}(S_i) \cap \Sigma_{S_i,\xi_i} = \emptyset$, és

(vi) $\mathrm{root}(T_i) \cap (\mathrm{root}(S_i) \cup \Sigma_{S_i,\xi_i}) = \emptyset$.

Továbbá, jelöljük az $\eta_{i-1} \cdot_{\xi_{i-1}} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ fanyelvet ζ_i-vel. Az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ R-láncnyelvet *általánosítottnak* mondjuk, ha $\mathrm{root}(T(\eta_i)) \cap \Sigma_{T(\zeta_i),\xi_i} = \emptyset$ minden i indexre teljesül ($1 \leq i \leq k$).

Az alábbi tétel, amely a monoton fanyelvekről szóló fejezet főeredménye is egyben, megadja a monoton DR-fanyelvek reguláris kifejezésekkel történő jellemzését.

2.6.15. tétel. *Legyen T egy DR-fanyelv. T akkor és csakis akkor monoton, ha megadható általánosított R-láncnyelvként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T egy monoton DR-fanyelv. Legyen $\mathfrak{A}$ egy a T-t felismerő redukált monoton DR-faautomata. Ha megkonstruáljuk az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó $\eta_{\mathfrak{A}}$ triviális reguláris kifejezést, akkor egy általánosított R-láncnyelvet kapunk, amelyre $T = T(\eta_{\mathfrak{A}})$.

Fordítva, legyen T egy DR-fanyelv, és írja őt le az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ általánosított R-láncnyelv. A 2.2.2. segédtételből valamint a 2.6.5. és 2.6.12. tételekből azonnal kapjuk, hogy minden $T(\eta_i)$ monoton ($0 \leq i \leq k$). A 2.6.13. segédtétel és a 2.6.5. tétel felhasználásával egyből kapjuk, hogy $T(\eta)$ monoton, így T is monoton.

3. fejezet

Nilpotens nyelvek

Ebben a fejezetben rátérünk a nilpotens sztring nyelvek, illetve nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek ismertetésére. A monoton nyelvek tárgyalásához hasonlóan a sztring nyelvekkel kezdjük.

3.1. Nilpotens sztring nyelvek

Egy $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ X-automata *nilpotens*, ha van olyan $k \geq 0$ természetes szám és $\bar{a} \in A$ állapot, amelyre $au = \bar{a}$ teljesül minden $a \in A$ állapotra és legalább k hosszúságú $u \in X^*$ szóra. Az $\bar{a}$ állapotot $\mathbf{A}$ *nilpotens elemének* hívjuk, és a legkisebb olyan k számot, amelyre a fenti feltétel teljesül, $\mathbf{A}$ *nilpotencia fokának* nevezzük. Egy $L \subseteq X^*$ nyelv *nilpotens*, ha létezik olyan $\mathbf{A}$ nilpotens X-automata, amelyre $L(\mathbf{A}) = L$.

3.1.1. megjegyzés. A nilpotens elem más néven is szerepel az irodalomban, ilyen az *abszorbens elem* (lásd [2]), vagy például a *csapda állapot*. Ebben az értekezésben a *nilpotens elem* terminológiát fogjuk használni.

3.1.2. megjegyzés. Amennyiben egy nilpotens nyelv nilpotencia fokáról beszélünk, akkor alatta mindig az őt felismerő minimális állapotszámú nilpotens automata nilpotencia fokát értjük.

Egy $L \subseteq X^*$ nyelv *komplementerét* úgy definiáljuk mint $X^* \setminus L$, és rá a $\mathrm{c}(L)$ jelölést fogjuk használni. A következő segédtétel igen ismert (lásd [6]).

3.1.3. segédtétel. *Egy $L \subseteq X^*$ nyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha L vagy $\mathrm{c}(L)$ véges.* □

A következő definíció egy speciális láncnyelvet nevez meg, amely a nilpotens sztring nyelvek leírásánál kap fontos szerepet.

3.1.4. definíció. Egy $L = L_0x_1L_1x_2\ldots x_{k-1}L_{k-1}x_kL_k \subseteq X^*$ láncnyelvet *simának* nevezünk, ha egyrészt minden i indexre $L_i = \{e\}$ $(0 \leq i < k)$, másrészt $L_k = Y^*$, ahol $Y = \emptyset$ vagy $Y = X$.

A sima láncnyelvek jelölésére általában a $\zeta, \eta, \theta, \ldots$ görög kisbetűket fogjuk használni.

Legyen $\zeta = x_1x_2\ldots x_kL_k$ egy sima láncnyelv. Világos, hogy ζ véges, ha $L_k = \{e\}$, ugyanakkor ζ végtelen, ha $L_k = X^*$. Továbbá, ζ *hosszát* k-ban állapítjuk meg és $|\zeta|$-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy egy $\zeta' = x_1x_2\ldots x_j$ sima láncnyelv *prefixe* ζ-nak, ha $1 \leq j \leq k$, vagy ha $j > k$, ahol $x_{k+1}\ldots x_j \in L_k$. Itt hívjuk fel a figyelmet arra, hogy X^* minden szava tekinthető véges sima láncnyelvnek.

A következő állítások nyilvánvalóak.

3.1.5. segédtétel. *Minden egyelemű automatával felismerhető nyelv nilpotens.* □

3.1.6. következmény. *Az $\{e\}$ és X^* nyelvek nilpotensek.* □

3.1.7. segédtétel. *Minden véges nyelv megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként.* □

A következő segédtétel egy elegendő feltételt ad arra vonatkozóan, hogy egy nyelv mikor nilpotens.

3.1.8. segédtétel. *Legyen $L \subseteq X^*$ egy végtelen nyelv, amely a $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ sima láncnyelvek egyesítéseként van megadva $(l \in N)$. Ha bármely X^*-beli szó prefixe valamely ζ_i-nek $(1 \leq i \leq l)$, akkor L nilpotens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesülnek a segédtétel feltételei. Megszerkesztünk egy $\mathbf{A} = (X^{*,k} \cup \{\bar{a}\}, X, \delta, \{e\}, A')$ X-automatát, ahol $k = \max\{|\zeta_i| : 1 \le i \le l\}$. Minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ betűre a δ átmenetfüggvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\delta(a,x) = \begin{cases} ax, & \text{ha } a \in X^{*,k-1}, \\ \bar{a}, & \text{ha } a \in X^{*,k} \text{ és } |a| = k, \\ \bar{a}, & \text{ha } a = \bar{a}. \end{cases}$$

Az A' végállapothalmaz definiálásához legyen kiindulásképpen $\bar{a} \in A'$. Továbbá, minden $x_1 \dots x_j L_j \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_l\}$ sima láncnyelvre legyen $x_1 \dots x_j \in A'$, és ha $L_j = X^*$, akkor minden $u \in X^{*,k-j}$ szóra legyen $x_1 \dots x_j u \in A'$.

Tekintsünk egy $u \in L$ szót, és legyen $\zeta \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_l\}$ egy olyan legrövidebb sima láncnyelv, amelyre u prefixe ζ-nak. Ha $|u| > k$, akkor $a_0 u = \bar{a}$, így $u \in L(\mathbf{A})$. Ha $|u| \le k$, akkor $|\zeta| \le |u|$ teljesül, mivel u ζ által van reprezentálva L-ben, így A' konstrukciója miatt azt kapjuk, hogy $u \in L(\mathbf{A})$. Vegyünk most egy $w \in L(\mathbf{A})$ szót. Az A' konstrukciójából következik, hogy van olyan $\zeta \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_l\}$ sima láncnyelv, amelyre w prefixe ζ-nak és $|\zeta| \le |w|$. Mivel ζ részt vesz L reprezentálásában, így azt kapjuk, hogy $w \in L$. Mindezért $L = L(\mathbf{A})$. Nyilvánvaló, hogy $ev = \bar{a}$ bármely olyan $v \in X^*$ szóra, amelyre $|v| > k$. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy $\mathbf{A}$ nilpotens az $\bar{a}$ nilpotens elemmel, valamint nilpotencia foka $k+1$, így L is nilpotens. □

Legyenek $\mathbf{A} = (A, X, \delta_\mathbf{A}, a_0, A')$ és $\mathbf{B} = (B, X, \delta_\mathbf{B}, b_0, B')$ X-automaták. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ valamely *direkt szorzata* alatt olyan $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A \times B, X, \delta, (a_0, b_0), F)$ X-automatát értünk, amelyre $F \subseteq A \times B$, és ahol minden $a \in A$, $b \in B$ állapotokra és $x \in X$ változóra $\delta((a,b),x) = (\delta_\mathbf{A}(a,x), \delta_\mathbf{B}(b,x))$ teljesül.

Legyen τ egy leképezés A-ból B-be. Azt mondjuk, hogy τ *homomorfizmus* $\mathbf{A}$-ból $\mathbf{B}$-be, ha minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ változóra teljesülnek az alábbiak:

(i) $\tau(\delta_\mathbf{A}(a,x)) = \delta_\mathbf{B}(\tau(a), x)$,

(ii) $\tau(a_0) = b_0$,

(iii) $\tau^{-1}(B') = A'$.

Amennyiben τ ráképezés, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ (τ melletti) *homomorf képe*.

A nilpotens automaták következő tulajdonsága jól ismert.

3.1.9. segédtétel. *Nilpotens automaták direkt szorzata és homomorf képe is nilpotens.*

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a nilpotens automaták osztálya zárt a direkt szorzatra nézve (lásd [6]).

Ahhoz, hogy belássuk, a nilpotens automaták osztálya zárt a homomorf kép képzésre, legyen a $\mathbf{B} = (B, X, \delta_{\mathbf{B}}, b_0, B')$ X-automata az $\mathbf{A} = (A, X, \delta_{\mathbf{A}}, a_0, A')$ nilpotens X-automata homomorf képe egy $\tau : A \to B$ homomorfizmus mellett. Legyen az $\bar{a} \in A$ állapot az $\mathbf{A}$ nilpotens eleme, és legyen k az $\mathbf{A}$ nilpotencia foka. Legyen továbbá $\tau(\bar{a}) = \bar{b}$. Ekkor bármilyen, legalább k hosszúságú $u \in X^*$ szóra és $a \in A$ elemre azt kapjuk, hogy $au = \bar{a}$, és így $\tau(a)u = \tau(\bar{a})$. Mivel B minden elemének van τ-szerinti őse A-ban, megállapíthatjuk, hogy $\mathbf{B}$ nilpotens a $\bar{b}$ nilpotens elemmel, továbbá a nilpotencia foka legfeljebb k. □

Széles körben használt tulajdonsága a reguláris nyelveknek az, hogy adott automaták által felismert nyelvek egyesítése és metszete felismerhető a szóban forgó automaták egy direkt szorzatával (lásd [6]). Az is világos, hogy egy nilpotens nyelv komplementere szintén nilpotens (lásd újra [6]). Mindezeket összegezve kapjuk a következő állítást.

3.1.10. következmény. *A nilpotens nyelvek osztálya zárt az egyesítésre, metszetre és komplementerképzésre.* □

3.1.11. segédtétel. *Egy nilpotens automata összefüggő részautomatája szintén nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta_{\mathbf{A}}, a_0, A')$ egy nilpotens X-automata, amelynek a nilpotens eleme $\bar{a}$, a nilpotencia foka pedig k. Továbbá, legyen $\mathbf{B} = (B, X, \delta_{\mathbf{B}}, b_0, B')$ az $\mathbf{A}$ összefüggő részautomatája. A nilpotens X-automata és az összefüggő részautomata definíciójából következik, hogy $\bar{a} \in B$. Ugyancsak az összefüggő részautomata definíciójából kapjuk, hogy $b_0 u = \bar{a}$ minden legalább k hosszú $u \in X^*$ szóra. Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy $\mathbf{B}$ nilpotens. □

Egy további jól ismert összefüggés szerint egy L nyelvet felismerő minimális állapotszámú automata előáll bármely L-et felismerő automata összefüggő részautomatájának homomorf képeként (lásd [9]). Így érvényes a következő állítás.

3.1.12. következmény. *Egy nyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha az őt felismerő minimális automata nilpotens.* □

A nilpotens nyelvek további vizsgálata előtt kitérünk a monoton és nilpotens nyelvek közötti alapvető összefüggésekre.

A következő alapvető eredmény jól ismert (lásd [14]).

3.1.13. segédtétel. *Minden nilpotens nyelv monoton.*

Bizonyítás. Legyen $L \subseteq X^*$ egy nilpotens nyelv, és legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ egy az L-et felismerő nilpotens X-automata. Továbbá tegyük fel, hogy L nem monoton. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan különböző $a, b \in A$ állapotok és $u, v \in X^*$ szavak, melyekre $au = b$ és $bv = a$ teljesül. Legyen k az $\mathbf{A}$ nilpotencia foka. Ekkor $a(uv)^k = a$ és $b(vu)^k = b$ is teljesül, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy $\mathbf{A}$ nilpotens a k nilpotencia fokkal. □

3.1.14. megjegyzés. A 3.1.13. segédtétel bizonyításában feltettük, hogy léteznek olyan a és b állapotok, valamint u és v szavak, hogy $a \neq b$, $au = b$ és $bv = a$ teljesül. Ha nincsenek az előbbi feltételt kielégítő a és b állapotok, akkor az $a' \leq a'u$ egyenlőtlenséggel definiált reláció monoton rendezés minden $a' \in A$ állapotra és $u \in X^*$ szóra.

A 3.1.13. segédtételből egyszerűen kapjuk az alábbi következményt.

3.1.15. következmény. *Legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ egy tetszőleges nilpotens X-automata. Ekkor létezik olyan $\leq$ lineáris rendezés A-n, hogy $a \leq ax$ teljesül minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ betűre.* □

A 3.1.13. segédtétel megfordítása nem teljesül, ahogy azt a következő példa is mutatja.

3.1.16. példa. Legyen adott az $L = xy^*$ reguláris nyelv. Világos, hogy L monoton, de nem nilpotens. Egy végtelen nilpotens nyelvet felismerő automata nilpotens eleme ugyanis szükségképpen végállapot, azonban az xy^kx szó nem vezethet végállapotba, még ha k nagyobb is mint ennek az automatának a nilpotencia foka.

A továbbiakban a nilpotens nyelveket sima láncnyelvekkel fogjuk jellemezni.

3.1.17. segédtétel. *Minden $L \subseteq X^*$ nilpotens nyelv megadható véges sok $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ sima láncnyelv egyesítéseként ($l \in N$), ahol ha L végtelen, akkor bármely X^*-beli szó prefixe valamely ζ_i-nek ($1 \leq i \leq l$).*

Bizonyítás. Legyen $L \subseteq X^*$ egy nilpotens nyelv. Ha L véges, akkor a 3.1.7. segédtétel szerint L megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként. Ha L végtelen, akkor legyen $\mathbf{A} = (A, X, \delta, a_0, A')$ az L-et felismerő minimális állapotszámú nilpotens X-automata. Ha A egyelemű, akkor $L(\mathbf{A}) = X^*$, így L egy sima láncnyelv, és nyilvánvalóan X^* bármely szava prefixe ennek a sima láncnyelvnek. Tegyük most fel, hogy $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ ($n > 0$), és legyen az a_n állapot az $\mathbf{A}$ nilpotens eleme. A 3.1.15. következményt felhasználva azt kapjuk, hogy van egy olyan $\leq$ lineáris rendezésünk A-n, amelyre $a_0 \leq \ldots \leq a_n$ teljesül. Mivel $\mathbf{A}$ nilpotens és minimális, minden $a \in A$ állapotra és $x \in X$ betűre az $ax = a$ egyenlőség maga után vonja az $a = a_n$ egybeesést. Definiáljuk most minden $0 \leq i, j \leq n$ indexekre az $\mathbf{A}_{i,j} = (A, X, \delta, a_i, \{a_j\})$ X-automatát. Továbbá, minden $x \in X$ betűre definiáljuk az $\mathbf{A}_x = (A, X, \delta, a_0, A_x)$ X-automatát, ahol $A_x = \{a \in A \setminus \{a_n\} \mid ax = a_n\}$. Az imént bevezetett automatákkal felírhatjuk az $L(\mathbf{A}_{0,n})$ nyelvet a következő módon:

$$L(\mathbf{A}_{0,n}) = \bigcup_{x \in X} L(\mathbf{A}_x) x L(\mathbf{A}_{n,n}).$$

Mivel $L(\mathbf{A}_x)$ véges és $L(\mathbf{A}_{n,n}) = X^*$, azt kapjuk, hogy $L(\mathbf{A}_{0,n})$ előáll sima láncnyelvek véges egyesítéseként. Ezután az $L(\mathbf{A}_{i,j})$ nyelveket felhasználva felírhatjuk L-t az

$$L = L(\mathbf{A}) = \bigcup_{a_m \in A'} L(\mathbf{A}_{0,m}) = \bigcup_{a_m \in A' \setminus \{a_n\}} L(\mathbf{A}_{0,m}) \cup \bigcup_{x \in X} L(\mathbf{A}_x) x L(\mathbf{A}_{n,n})$$

formában, ahol minden $L(\mathbf{A}_{0,m})$ véges ($0 \leq m < n$), így a 3.1.7. segédtétel szerint megadtuk L-t véges sok sima láncnyelv egyesítéseként. Vegyünk most egy $u \in X^*$ szót, és legyen $w \in X^*$ bármilyen olyan szó, amelyre $|uw| \geq n$. Mivel $a_0 uw = a_n$, létezik olyan ζ sima láncnyelv $L(\mathbf{A}_{0,n})$ fenti reprezentálásában, amelyre u prefixe ζ-nak. $\square$

A 3.1.3., 3.1.8. és 3.1.17. segédtételekből azonnal kapjuk az alábbi tételt.

3.1.18. tétel. *Legyen $L \subseteq X^*$ egy reguláris nyelv. L akkor és csakis akkor nilpotens, ha L megadható véges sok $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ sima láncnyelv egyesítéseként ($l \in N$), ahol ha L végtelen, akkor bármely X^*-beli szó prefixe valamely ζ_i-nek ($1 \leq i \leq l$).*

3.2. Nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek

A nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek tárgyalását a formális definíciókkal kezdjük.

3.2.1. definíció. Egy $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ DR Σ-algebra *nilpotens*, ha van olyan $k \geq 0$ egész szám és $\bar{a} \in A$ elem, hogy $au = \bar{a}$ teljesül minden $a \in A$ elemre és legalább k hosszúságú $u \in \hat{\Sigma}^*$ szóra. Az $\bar{a}$ elemet $\mathcal{A}$ *nilpotens elemének* nevezzük, továbbá azt a legkisebb k egész számot, amelyre az előző feltétel teljesül, $\mathcal{A}$ *nilpotencia fokának* nevezzük. Egy $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ DR ΣX_n-faautomatát *nilpotensnek* nevezünk, ha az őt alkotó $\mathcal{A}$ DR Σ-algebra nilpotens. Végül, egy T ΣX_n-fanyelv *nilpotens*, ha őt felismeri egy nilpotens DR ΣX_n-faautomata.

A nilpotens sztring nyelvekhez hasonlóan itt is megjegyezzük, hogy ha egy nilpotens DR-fanyelv nilpotencia fokáról beszélünk, akkor alatta az őt felismerő minimális állapotszámú nilpotens DR-faautomata nilpotencia fokát értjük.

3.2.2. megjegyzés. A nilpotens DR Σ-algebrák egy eltérő definícióját és egy tipikus jellemzését találjuk a [4] irodalomban. Meg fogjuk mutatni, hogy mindkét definíció a DR Σ-algebrák ugyanazon osztályát határozzák meg.

Legyen $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy DR Σ-algebra, $a \in A$ egy elem, és legyen $p \in T_\Sigma(X_n)$ egy fa. Az $\overline{\mathrm{fr}}(ap) \in A^*$ szót a következőképpen definiáljuk:

(i) ha $p \in X_n$, akkor $\overline{\mathrm{fr}}(ap) = a$,

(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $\overline{\mathrm{fr}}(ap) = \overline{\mathrm{fr}}(a_1p_1) \ldots \overline{\mathrm{fr}}(a_mp_m)$, ahol $\sigma \in \Sigma_m$, $\sigma^{\mathcal{A}}(a) = (a_1, \ldots, a_m)$, $p_1, \ldots, p_m \in T_\Sigma(X_n)$, $m > 0$.

Bármely $p \in T_\Sigma(X_n)$ fára legyen $\mathrm{mh}(p) = \min\{|u| : u \in g(p)\}$, azaz $\mathrm{mh}(p)$ a legrövidebb, p gyökerétől valamely leveléig vezető út hossza. Most felidézzük a nilpotens DR Σ-algebrák definícióját [4]-ből.

3.2.3. definíció. Egy $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ DR Σ-algebra *nilpotens*, ha van olyan $k \geq 0$ egész szám és $\bar{a} \in A$ elem, hogy minden $a \in A$ elemre és $p \in T_\Sigma(X_n)$

fára, ahol $\mathrm{mh}(p) \geq k$, teljesül az $\overline{\mathrm{fr}}(ap) = \bar{a}^l$ egyenlőség valamely l természetes számra. Ezen $\bar{a}$ elemet $\mathcal{A}$ *nilpotens elemének* szoktuk hívni, továbbá a legkisebb olyan k egész számot, amire a fenti feltétel teljesül, $\mathcal{A}$ *nilpotencia fokának* nevezzük.

3.2.4. segédtétel. *A nilpotens DR algebrák mindkét előbb ismertetett definíciója ugyanazt a DR Σ-algebra osztályt határozzák meg.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy DR Σ-algebra, legyen k egy természetes szám, és legyen $\bar{a} \in A$ egy olyan elem, amelyre teljesül, hogy bármely $a \in A$ elemre és $p \in T_\Sigma(X_n)$ fára, ahol $\mathrm{mh}(p) \geq k$, érvényes az $\overline{\mathrm{fr}}(ap) = \bar{a}^l$ egyenlőség valamely l természetes számra. Tekintsünk most egy legalább k hosszúságú $u \in \hat{\Sigma}^*$ szót. Ekkor tetszőleges olyan $t \in T_\Sigma(X_n)$ fára, amire u a legrövidebb út $g(t)$-ben, azt kapjuk, hogy $\overline{\mathrm{fr}}(at) = \bar{a}^{l'}$ valamely l' természetes számra. Ez azt jelenti, hogy $au = \bar{a}$.

A fordított irány igazolásához legyen $k \geq 0$ egy természetes szám, és legyen $\bar{a} \in A$ egy olyan állapot, amelyre minden $a \in A$ elemre és minden legalább k hosszúságú $u \in \hat{\Sigma}^*$ szóra $au = \bar{a}$ teljesül. Tekintsünk most egy tetszőleges $p \in T_\Sigma(X_n)$ fát, amelyre $\mathrm{mh}(p) \geq k$ teljesül. Mivel $g(p)$-ben minden út legalább k hosszú, azt kapjuk, hogy $\overline{\mathrm{fr}}(ap) = \bar{a}^l$ valamely l természetes számra. Ezek szerint a szóban forgó definíciók a DR Σ-algebrák ugyanazon osztályát definiálják. □

Ahogy azt a sztring nyelveknél is láthattuk már, létezik egy alapvető összefüggés a nilpotens és monoton DR-fanyelvek között, ezt mondjuk ki a következő állításban.

3.2.5. segédtétel. *Minden nilpotens DR-fanyelv monoton.* □

3.2.6. következmény. *Legyen $\mathfrak{A}$ egy nilpotens DR ΣX_n-faautomata, ahol $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$. Van olyan $\leq$ lineáris rendezés A-n, hogy $a \leq \pi_i(\sigma(a))$ teljesül minden $a \in A$ állapotra, $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $i \in \{1, \ldots, m\}$ indexre ($m > 0$).* □

Ugyancsak a sztring nyelvekhez hasonlóan a 3.2.5. segédtétel megfordítása nem érvényes.

Mivel minden $\mathfrak{A}$ nilpotens DR-fanyelv monoton, felírhatjuk rá a 2.3. alfejezetben definiált $\mathfrak{A}$-hoz tartozó $\eta_{\mathfrak{A}}$ triviális reguláris kifejezést:

$$\eta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0,$$

ahol minden i indexre $(0 \le i \le k)$

$$\eta_i = (p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i},$$

és ahol

1) az $y_1^i, \ldots, y_{r_i}^i$ elemek pontosan az $\{x_z \in X_n | \; a_i \in A^{(z)}\}$ halmazt adják,

2) $p_s^i = \sigma(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ olyan $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m} \in \Xi_k$ segédváltozókra, hogy egyrészt $\sigma(a_i) = (\phi^{-1}(\xi_{i_1}), \ldots, \phi^{-1}(\xi_{i_m}))$, másrészt nincs olyan v index $(1 \le v \le m)$, amelyre $a_i = \pi_v(\sigma(a_i))$ teljesülne $(1 \le s \le l_i)$,

3) $t_s^i = \sigma(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m})$ olyan $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_m} \in \Xi_k$ segédváltozókra, hogy egyrészt $\sigma(a_i) = (\phi^{-1}(\xi_{i_1}), \ldots, \phi^{-1}(\xi_{i_m}))$, másrészt van olyan v index $(1 \le v \le m)$, amelyre $a_i = \pi_v(\sigma(a_i))$ teljesül $(1 \le s \le j_i)$,

4) $|\{p_1^i, \ldots, p_{l_i}^i\}| \; + \; |\{t_1^i, \ldots, t_{j_i}^i\}| = |\Sigma|$.

Vizsgáljuk meg az imént részletezett $\eta_{\mathfrak{A}}$ reguláris $\Sigma(X_n \cup \Xi_k)$-kifejezést. Nyilvánvaló, hogy minden η_i-ben $(0 \le i < k)$ az iterációs rész üres, mivel nincs olyan $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólum és $a \in A \setminus \{a_k\}$ állapot, amelyekre a előfordulna $\sigma(a)$ eredményvektorában. Ezek szerint ezeket az iterációs részeket elhagyhatjuk $\eta_{\mathfrak{A}}$-ból. Ezekkel az elhagyásokkal leegyszerűsítettük az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezést, amit az *$\mathfrak{A}$-hoz tartozó sima reguláris kifejezésnek* nevezünk, és őt $\zeta_{\mathfrak{A}}$-val fogjuk jelölni.

3.3. A nilpotens DR-fanyelvek jellemzése

Később használni fogjuk a következő segédtételt.

3.3.1. segédtétel. *Minden véges DR-fanyelv nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen T egy tetszőleges véges DR-fanyelv, és legyen $\mathfrak{A}$ egy a T-t felismerő redukált és összefüggő DR-faautomata. Nyilvánvaló, hogy $g(T)$ véges, és így van $g(T)$-ben leghosszabb út. Ebből az következik, hogy minden ennél hosszabb szó beolvasása $\mathfrak{A}$-ban egy csapda állapotba vezet, de mivel $\mathfrak{A}$ redukált és összefüggő, így benne pontosan egy csapda állapot van. Ezek alapján $\mathfrak{A}$ nilpotens az $1 + \max\{u \mid u \in g(T)\}$ nilpotencia fokkal és a csapda állapottal mint nilpotens elemmel. □

A következő segédtétel hasonló a monoton fejezetben látott 2.6.5. tételhez azzal a különbséggel, hogy nem követeljük meg a monotonitást.

3.3.2. segédtétel. *Legyen S és T DR-fanyelvek, és legyen $x \in X_n$ egy változó. Ha $\mathrm{root}(T) \cap \Sigma_{S,x} = \emptyset$, akkor $T \cdot_x S$ determinisztikus.*

Bizonyítás. A bizonyítás menete megegyezik a monoton fejezetben látott 2.6.5. tétel bizonyításának menetével azzal a különbséggel, hogy mind a feltételekből mind a konklúzióból elhagyjuk a monotonitást mint tulajdonságot. □

Most bevezetünk egy fogalmat, amely majd a nilpotens DR-fanyelvek x-szorzatra való zártságának vizsgálatánál kap fontos szerepet.

3.3.3. definíció. Azt mondjuk, hogy egy $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelv *út-teljes*, ha bármely $u \in g(S)$ szóra és u bármely $w = w_1 \ldots w_{l-1} w_l$ prefixére, a $w_1 \ldots w_{l-1} \bar{w}$ szó prefixe valamely $g(S)$-beli szónak ($\bar{w}, w_1, \ldots, w_l \in \hat{\Sigma}, l \in N$).

Mint ahogy azt az alábbi segédtétel is mutatja, az x-szorzat megőrzi az út-teljes tulajdonságot.

3.3.4. segédtétel. *Legyen $x \in X_n$ egy tetszőleges változó, valamint legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ tetszőleges fanyelvek. Ha S és T út-teljes, akkor $T \cdot_x S$ is út-teljes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a segédtétel feltételei teljesülnek. Vegyünk egy u szót $g(T \cdot_x S)$-ből, és vegyük u egy tetszőleges $w = w_1 \ldots w_{l-1} w_l$ prefixét ($w_1, \ldots, w_l \in \hat{\Sigma}$, $l \in N$). Legyen továbbá $\bar{w} \in \hat{\Sigma}$ szintén tetszőlegesen választott. Ha $u \in g(S)$, akkor $w_1 \ldots w_{l-1} \bar{w}$ prefixe valamely $g(S)$-beli szónak, mivel S út-teljes, és így $w_1 \ldots w_{l-1} \bar{w}$ prefixe valamely $g(T \cdot_x S)$-beli szónak. Ha $u = u_S u_T$, ahol $u_S \in g_x(S)$ és $u_T \in g(T)$, akkor három esetet különböztetünk meg:

(i) Ha w prefixe u_S-nek, akkor $w_1 \ldots w_{l-1} \bar{w}$ prefixe valamely $g(S)$-beli szónak, mivel S út-teljes. Így $w_1 \ldots w_{l-1} \bar{w}$ prefixe valamely $g(T \cdot_x S)$-beli szónak.

(ii) Ha $u_S = e$, akkor $w_1 \dots w_{l-1}\bar{w}$ prefixe valamely $g(T)$-beli szónak, mivel T út-teljes. Így $w_1 \dots w_{l-1}\bar{w}$ prefixe valamely $g(T \cdot_x S)$-beli szónak.

(iii) Ha u_S prefixe w-nek, akkor létezik olyan i pozitív egész szám, hogy $u_S = w_1 \dots w_i$ teljesül. Ebben az esetben $w_{i+1} \dots w_{l-1}\bar{w}$ prefixe valamely $g(T)$-beli szónak. Mivel $u_S \in g_x(S)$, ezért $w_1 \dots w_i w_{i+1} \dots w_{l-1}\bar{w}$ prefixe valamely $g(T \cdot_x S)$-beli szónak.

Mivel minden esetben $w_1 \dots w_{l-1}\bar{w}$ prefixe valamely $g(T \cdot_x S)$-beli szónak, ezzel beláttuk, hogy $T \cdot_x S$ út-teljes. □

A fenti segédtétel [11]-ben a DR-fanyelvekre lett kimondva, de az a fanyelvek osztályára is érvényes.

A következő tulajdonság szintén a nilpotens DR-fanyelvek x-szorzatra való zártságának biztosításához fog kelleni.

3.3.5. definíció. Legyen $x \in X_n$ egy tetszőleges változó. Egy $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvet *x-terminálónak* nevezünk, ha teljesül rá a következő feltétel. Minden $u \in g(S)$ útra, ha u nem valódi prefixe egyetlen $w \in g(S)$ útnak sem, akkor $u \in g_x(S)$.

Most pedig az imént definiált fogalmak felhasználásával adjuk meg a nilpotens DR-fanyelvek x-szorzatra való zártságának elégséges feltételét.

3.3.6. tétel. *Legyen $x_i \in X_n$ egy változó, valamint legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ nilpotens DR-fanyelvek. Ha $\mathrm{root}(T) \cap \Sigma_{S,x_i} = \emptyset$, valamint S véges, út-teljes és x_i-termináló, akkor $T \cdot_{x_i} S$ nilpotens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy teljesülnek a tétel feltételei. Legyenek $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ rendre S-t és T-t felismerő redukált, összefüggő és normalizált nilpotens DR ΣX_n-faautomaták, ahol

- $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$, $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$,
- $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$, $\mathbf{b} = (B^{(1)}, \dots, B^{(n)})$, és
- $A \cap B = \emptyset$.

Legyenek rendre k és l az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ nilpotencia fokai, valamint legyenek rendre $\bar{a}$ és $\bar{b}$ az $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ nilpotens elemei.

Megszerkesztünk egy $\mathfrak{C} = (\mathcal{C}, c_0, \mathbf{c})$ nilpotens DR ΣX_n-faautomatát, amely felismeri $T \cdot_{x_i} S$-t. Legyen

$$\mathcal{C} = (C, \Sigma),\ C = (A \cup B) \setminus \{\bar{a}\},\ c_0 = a_0 \text{ és } \mathbf{c} = (C^{(1)}, \ldots, C^{(n)}),$$

ahol $\mathbf{c}$ komponensei a következőképpen vannak definiálva:

$$C^{(j)} = \begin{cases} A^{(j)} \cup B^{(j)} \cup A^{(i)}, & \text{ha } x_j \in T,\ j \neq i, \\ A^{(j)} \cup B^{(j)}, & \text{ha } x_j \notin T,\ j \neq i, \\ B^{(j)} \cup A^{(i)}, & \text{ha } x_j \in T,\ j = i, \\ B^{(j)}, & \text{ha } x_j \notin T,\ j = i. \end{cases}$$

Ezek után Σ elemeinek $\mathcal{C}$-ben való realizáltjait adjuk meg. Minden $\sigma \in \Sigma$ műveleti szimbólumra és $c \in C$ állapotra legyen

$$\sigma^{\mathcal{C}}(c) = \begin{cases} \sigma^{\mathcal{B}}(c), & \text{ha } c \in B, \\ \sigma^{\mathcal{B}}(b_0), & \text{ha } c \in A^{(i)},\ \sigma \in \mathrm{root}(T), \\ \sigma^{\mathcal{B}}(b_0), & \text{ha } c \in A^{(i)},\ cu^{\mathcal{A}} = \bar{a} \text{ bármely } u \in \hat{\Sigma}\text{-re}, \\ \sigma^{\mathcal{A}}(c), & \text{máskülönben.} \end{cases}$$

Először megmutatjuk, hogy $T(\mathfrak{C}) = T \cdot_{x_i} S$. Ahhoz hogy belássuk a $T(\mathfrak{C}) \subseteq T \cdot_{x_i} S$ tartalmazást, tekintsük $\mathbf{c}$ definícióját. Nyilvánvaló, hogy $C^{(j)}$-nek minden esetben tartalmaznia kell $B^{(j)}$-t. Ezután, ha $j \neq i$, akkor $C^{(j)}$-nek tartalmaznia kell $A^{(j)}$-t, hogy $T(\mathfrak{C})$-ben megtartsunk minden olyan x_j-utat, ami $T(\mathfrak{A})$-ban is megvolt. Végül, ha $x_j \in T$, akkor le kell tudnunk $\mathfrak{C}$-ben vezetni x_j-t $A^{(i)}$ minden állapotából, ugyanis ebben az esetben $g_{x_i}(S)$ minden útja benne van $g_{x_j}(T \cdot_{x_i} S)$-ben is. A $T \cdot_{x_i} S \subseteq T(\mathfrak{C})$ tartalmazás igazolásához tekintsük $\sigma^{\mathcal{C}}(c)$ definiálását, amely ugye négy részből áll. Az elsőben $\mathfrak{B}$ szerinti felismerést biztosítunk $\mathfrak{C}$-ben. A második és harmadik rész biztosítja azt, hogy egy $T \cdot_{x_i} S$-beli út felismerése, amely éppen egy $a \in A^{(i)}$ állapotban tart, folytatható $\mathfrak{B}$-ben. Ez azért fontos, mert bármely $x_j \in X_n$ változóra és bármely olyan $uv \in g_{x_j}(T \cdot_{x_i} S)$ útra, ahol $v \in g_{x_j}(T)$ és $u \in g_{x_i}(S)$, fenn kell állnia a $c_0 uv \in C^{(j)}$ tartalmazásnak. Végül, a negyedik rész biztosítja bármely $g(S)$-beli út feldolgozását $\mathfrak{C}$-ben. A $\mathrm{root}(T) \cap \Sigma_{S,x_i} = \emptyset$ feltétel garantálja számunkra azt, hogy $\mathfrak{C}$ egy tetszőleges fa felismerésének bármelyik lépésében el tudja dönteni, hogy a következő szimbólumot még $\mathfrak{A}$-ban vagy már $\mathfrak{B}$-ben kell kiértékelni. Így megkaptuk a kívánt $T(\mathfrak{C}) = T \cdot_{x_i} S$ egyenlőséget.

Most megmutatjuk, hogy $\mathfrak{C}$ nilpotens. Nyilvánvaló, hogy $\bar{a}$ az $\mathfrak{A}$ csapdaállapota, mivel S véges. Sőt, minden $a \in A$ állapotra és $u, u' \in \hat{\Sigma}$ betűkre

$au = \bar{a}$ maga után vonja az $au' = \bar{a}$ egyenlőséget, ugyanis S út-teljes. Továbbá, mivel S x_i-termináló, ezért minden olyan $a \in A \setminus \{\bar{a}\}$ állapotra, amelyre $av = \bar{a}$ teljesül valamely $v \in \hat{\Sigma}$ betűre, azt kapjuk, hogy $a \in A^{(i)}$. Így felhasználva azt, hogy T nilpotens, könnyen kapjuk a $cw = \bar{b}$ egyenlőséget minden $c \in C$ állapotra és minden legalább $k + l$ hosszúságú $w \in \hat{\Sigma}^*$ útra. Mindezek alapján megállapíthatjuk, hogy $\mathfrak{C}$ nilpotens a $\bar{b}$ nilpotens elemmel és $k + l$-nél nem nagyobb nilpotencia fokkal. □

3.3.7. segédtétel. *A $T_\Sigma(Y)$ DR-fanyelv bármely $Y \subseteq X_n$ változóhalmazra nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen $Y \subseteq X_n$ változók egy halmaza, és legyen $T = T_\Sigma(Y)$ egy tetszőleges DR-fanyelv. Megkonstruálunk egy olyan $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ DR ΣX-faautomatát, amelyre $\mathcal{A} = (\{a_0\}, \Sigma)$, $\sigma^{\mathcal{A}}(a_0) = (a_0, \ldots, a_0)$ bármely $\sigma \in \Sigma$ műveleti szimbólumra, és $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$, ahol $A^{(i)} = \{a_0\}$, ha $x_i \in Y$, különben $A^{(i)} = \emptyset$. Nyilvánvalóan $T(\mathfrak{A}) = T$, továbbá $\mathfrak{A}$ nilpotens az a_0 nilpotens elemmel és a 0 nilpotencia fokkal. □

Most bevezetjük a reguláris ΣX_n-kifejezések azon speciális alakját, amelyek a nilpotens DR-fanyelveket fogják leírni.

3.3.8. definíció. Egy $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ lánccal megadott fanyelvet *sima R-láncnyelvnek* nevezünk, ha egyrészt minden i indexre $(0 \le i < k)$

(i) $T(\eta_i)$ véges és út-teljes,

(ii) $\emptyset \neq \mathrm{leaves}(T(\eta_i) \setminus X_n) \subseteq \{\xi_{i+1}, \ldots, \xi_k\}$, és

(iii) $\mathrm{root}(T(\eta_{i+1})) \cap \Sigma_{T(\eta_i \cdot_{\xi_i} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0), \xi_{i+1}} = \emptyset$,

másrészt $T(\eta_k) = Z \cdot_{\xi_k} T_\Sigma(Y \cup \{\xi_k\})$, ahol $Y, Z \subseteq X_n$.

A nilpotens DR-fanyelvek reguláris kifejezéssel történő jellemzésének főeredménye a következő tétel.

3.3.9. tétel. *Legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy DR-fanyelv. T akkor és csakis akkor nilpotens, ha ő egy sima R-láncnyelv.*

Bizonyítás. Legyen T egy nilpotens DR-fanyelv, és legyen $\mathfrak{A}$ az őt felismerő redukált és normalizált nilpotens DR ΣX_n-faautomata. Szerkesszük meg az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó $\zeta_{\mathfrak{A}}$ sima reguláris kifejezést, amivel T-t éppen sima R-láncnyelvként adtuk meg.

A fordított irány igazolásához legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy DR-fanyelv, és legyen $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ egy sima R-láncnyelv, amelyre $T(\eta) = T$. A 3.3.7. segédtétel alapján nyilvánvaló, hogy $T(\eta_k)$ nilpotens. A 3.3.2. és 3.3.4. segédtételek ismételt alkalmazásával azt kapjuk, hogy $T(\eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0)$ út-teljes DR-fanyelv, sőt, nilpotens is a 3.3.1. segédtétel miatt. Továbbá láthatjuk, hogy $T(\eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0)$ ξ_k-termináló, mivel $T(\eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0)$ minden z-útja valódi kezdőszelete $T(\eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0)$ valamely ξ_k-útjának ($z \in X_n$). Így a 3.3.6. tétel felhasználásával kapjuk, hogy $T(\eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0)$ nilpotens, azaz T is nilpotens.

4. fejezet

Zártsági tulajdonságok vizsgálata

Az előző fejezetekben ismertetett eredmények vizsgálata során akarva – vagy éppen akaratlanul – találkozunk az adott DR-fanyelv vagy annak egy részosztályának zártsági tulajdonságaival. Ebben a fejezetben a determinisztikus felszálló fanyelvek Boole- és reguláris műveletekre való zártsági tulajdonságait gyűjtjük össze, ahol kitérünk a monoton-, valamint a nilpotens részosztályokra is. Egyes műveleteknél megemlítünk olyan szükséges és/vagy elegendő feltételeket is, amelyek mellett az éppen vizsgált osztály (vagy annak egy részosztálya) zárt, vagy éppen nem zárt az adott műveletre. A DR-fanyelvek zártsági tulajdonságaira vonatkozóan [12]-ben több más műveletre kiterjedő összegzést is találunk.

4.1. Egyesítés

Ismert tény, és korábban már hivatkoztunk is rá, hogy a DR-fanyelvek nem zártak az egyesítésre. Ezt az alábbi klasszikus példa is igazolja.

4.1.1. példa. Vegyük az $S = \{\sigma(x, x)\}$ és $T = \{\sigma(y, y)\}$ DR-fanyelveket. Nyilvánvaló, hogy S és T determinisztikusak, de $S \cup T$ nem determinisztikus, mert nem is zárt.

Az előző példából az is következik, hogy sem a monoton-, sem a nilpotens DR-fanyelvek osztálya nem zárt az egyesítésre, ugyanis S és T egyszerre monoton és nilpotens DR-fanyelvek. Más a helyzet azonban akkor, ha két DR-fanyelv egyesítésének determinisztikussága már adott. Ennek megvizsgálásához szükségünk lesz a következő definíciókra.

4.1.2. definíció. Az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ és $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$ DR Σ-algebrák *direkt szorzatán* az $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (A \times B, \Sigma)$ DR Σ-algebrát értjük, ahol bármely $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumra és $(a, b) \in A \times B$ elempárra

$$\sigma^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a,b)) = ((\pi_1(\sigma^{\mathcal{A}}(a)), \pi_1(\sigma^{\mathcal{B}}(b))), \ldots, (\pi_m(\sigma^{\mathcal{A}}(a)), \pi_m(\sigma^{\mathcal{B}}(b))))$$

teljesül.

4.1.3. definíció. Az $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ DR ΣX_n-faautomaták *egyesítés direkt szorzatán* az

$$\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}, (a_0, b_0), \mathbf{a} \times^{\cup} \mathbf{b})$$

DR ΣX_n-faautomatát értjük, ahol egyrészt $\mathbf{a} \times^{\cup} \mathbf{b} \in \mathfrak{p}(A \times B)^n$, másrészt $(\mathbf{a} \times^{\cup} \mathbf{b})^{(i)} = (A^{(i)} \times B) \cup (A \times B^{(i)})$ $(1 \leq i \leq n)$.

Az előző definícióval egy hatékony eszközt kaptunk arra, hogy az egyesítésre való zártság szükséges és elegendő feltételét megfogalmazzuk. Az Egyesítés alfejezetben szereplő összes eredmény [3]-ból származik.

4.1.4. tétel. *Legyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ két normalizált DR ΣX_n-faautomata. Ekkor $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$ akkor és csakis akkor determinisztikus, ha $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B})$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$ determinisztikus. Figyeljük meg, hogy

$$T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B}) \subseteq T(\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B})$$

tetszőleges $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ DR ΣX_n-faautomatákra teljesül. Vegyünk most egy $p \in T(\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B})$ fát. Ekkor az egyesítés direkt szorzat definíciója alapján, felhasználva $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ normalizáltságát, azt kapjuk, hogy a $g_x(p) \subseteq g_x(T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B}))$ tartalmazás minden $x \in X_n$ változóra teljesül. Ezek szerint p benne van $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$ lezártjában. Ugyanakkor, mivel $T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$ determinisztikus, így zárt is, azaz egybeesik a lezártjával. Így azt kapjuk, hogy $p \in T(\mathfrak{A}) \cup T(\mathfrak{B})$.

A fordított irány nyilvánvaló, hiszen $\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B}$ determinisztikus. $\square$

A következő segédtételre szükségünk lesz.

4.1.5. segédtétel. *Legyen $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ egy nilpotens DR ΣX_n-faautomata. Létezik olyan $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ normalizált nilpotens DR ΣX_n-faautomata, amelyre $T(\mathfrak{A}) = T(\mathfrak{B})$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{A}$ egy nilpotens DR ΣX_n-faautomata, amelynek $\bar{a}$ a nilpotens eleme, nilpotencia foka pedig k. Normalizáljuk $\mathfrak{A}$-t a következő módon: ha $\sigma(a)$ ($\sigma \in \Sigma$, $a \in A$) tartalmaz 0-állapotot, és $\bar{a}$ maga is egy 0-állapot, akkor $\sigma(a)$-t helyettesítsük a $\sigma(a) = (\bar{a}, \ldots, \bar{a})$ értékkel. (Vegyük észre, hogy ha $\bar{a}$ nem 0-állapot, akkor egyetlen állapot sem az.) Jelöljük az így kapott DR ΣX_n-faautomatát $\mathfrak{A}^* = (\mathcal{A}^*, a_0, \mathbf{a})$-val. Ekkor $\mathfrak{A}^*$ normalizált, determinisztikus, és $T(\mathfrak{A}^*) = T(\mathfrak{A})$ (ahogy az már [9]-ben is ismertetésre került). Amit még meg kell mutatni, hogy $\mathfrak{A}^*$ nilpotens. Ehhez elegendő azt az esetet megvizsgálni, amikor $\bar{a}$ 0-állapot. Legyen tehát $a \in A$ egy állapot és $p \in T_\Sigma(X_n)$ egy olyan fa, amelyre $\mathrm{mh}(p) \geq k$. Ekkor p $\mathfrak{A}$-ban és $\mathfrak{A}^*$-ban való feldolgozása az a állapotból kiindulva egybeesik egészen addig, amíg $\mathfrak{A}$-ban el nem érünk egy 0-állapotot. Itt $\mathfrak{A}^*$ az $\bar{a}$ állapotba került, és itt is marad amíg a maradék részfát feldolgozzuk. Így $\mathfrak{A}^*$ is nilpotens az $\bar{a}$ nilpotens elemmel, a nilpotencia foka pedig szintén k. □

A nilpotens DR-fanyelvek zártságára vonatkozóan érvényes a következő tétel.

4.1.6. tétel. *Legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ nilpotens DR-fanyelvek. Ekkor $S \cup T$ akkor és csakis akkor nilpotens, ha determinisztikus.*

Bizonyítás. Ha $S \cup T$ nilpotens, akkor definíció szerint determinisztikus is.

A fordított irány igazolásához tegyük fel, hogy $S \cup T$ determinisztikus. Legyen $S = T(\mathfrak{A})$ és $T = T(\mathfrak{B})$, ahol $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ normalizált nilpotens DR ΣX_n-faautomaták, amelyeknek a nilpotencia foka rendre k és l. A 4.1.5 segédtétel szerint ilyen $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ létezik. Továbbá, a 4.1.4 tétel miatt $S \cup T = T(\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B})$. Innen már egyszerű módon igazolható, hogy $\mathfrak{A} \times^{\cup} \mathfrak{B}$ nilpotens a $\max\{k, l\}$ nilpotencia fokkal. □

Nyilvánvaló, hogy hasonló állítást tehetünk a monoton DR-fanyelvekre is.

A továbbiakban – az érdekesség kedvéért – arra vonatkozóan is adunk szükséges és elegendő feltételt, hogy mikor nem determinisztikus két DR-fanyelv egyesítése.

4.1.7. tétel. *Legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ DR-fanyelvek. Ekkor $S \cup T$ akkor és csakis akkor nem determinisztikus, ha van olyan $p \in T_\Sigma(X_n)$*

fa, $x, y \in X_n$ változók, valamint $u \in g_x(p)$ és $v \in g_y(p)$ különböző utak, hogy $u \in g_x(S)$, de $u \notin g_x(T)$, valamint $v \in g_y(T)$, de $v \notin g_y(S)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $S \cup T$ nem determinisztikus. Legyenek $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ normalizált DR ΣX_n-faautomaták, melyek rendre az S és T DR-fanyelveket ismerik fel. Mivel $S \cup T$ nem determinisztikus, ezért létezik olyan $p \in T_\Sigma(X_n)$ fa, amelyre $p \in T(\mathfrak{A} \times^\cup \mathfrak{B})$, de $p \notin T(\mathfrak{A})$ és $p \notin T(\mathfrak{B})$. Ennél fogva vannak olyan $x, y \in X_n$ változók és $u \in g_x(p)$, $v \in g_y(p)$ utak, hogy egyrészt $u \neq v$, másrészt $u \in g_x(S) \setminus g_x(T)$ és $v \in g_y(T) \setminus g_y(S)$.

A fordított irány bizonyításához tegyük fel, hogy van olyan $p \in T_\Sigma(X_n)$ fa, $x, y \in X_n$ változók és $u \in g_x(p)$, $v \in g_y(p)$ utak, hogy egyrészt $u \neq v$, másrészt $u \in g_x(S) \setminus g_x(T)$ és $v \in g_y(T) \setminus g_y(S)$. Jelöljük w-vel u és v maximális közös kezdőszeletét. Ekkor u és v felírható az $u = w\sigma_i u'$ és $v = w\sigma_j v'$ alakban, ahol $i \neq j$. Mivel $u \in g_x(S)$, ezért van olyan $q \in S$ fa, amelyre $u \in g_x(q)$. Hasonlóan létezik olyan $q' \in T$ fa, amelyre $v \in g_y(q')$. Legyen r az a fa, amelyet úgy kapunk q'-ből, hogy annak a $w\sigma_i$ pontjában lévő részfáját lecseréljük a q fa $w\sigma_i$ pontjában lévő részfájával. Nyilvánvalóan r nincs benne $S \cup T$-ben, de benne van $S \cup T$ lezártjában. Így $S \cup T$ nem determinisztikus. □

Nyilvánvaló, hogy az előző tétel feltételeit kielégítő fák nem unárisak. Így érvényes az alábbi következmény.

4.1.8. következmény. *Legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ DR-fanyelvek. Amennyiben $S \setminus T \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$ vagy $T \setminus S \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$, akkor $S \cup T$ determinisztikus.* □

Ezen utóbbi állítás a 4.1.6 tétellel együtt a következő állítást eredményezi.

4.1.9. következmény. *Legyen $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ két nilpotens DR-fanyelv. Ha S és T közül az egyik csupán az unáris fáiban különbözik a másiktól, akkor $S \cup T$ nilpotens.* □

A 4.1.6 és 4.1.7. tételekből kapjuk az alábbi következményt.

4.1.10. következmény. *Legyen $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ két (nilpotens) DR-fanyelv. Ha érvényes a $\mathrm{root}(S) \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$ összefüggés, akkor $S \cup T$ is (nilpotens) DR-fanyelv.* □

Könnyen látható, hogy az előző következményt monoton DR-fanyelvekre is kimondhatjuk.

Az alábbi nyilvánvaló állításra még szükségünk lesz.

4.1.11. segédtétel. *Legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ nilpotens DR-fanyelvek. Ekkor minden $x \in X_n$ változóra érvényes, hogy amennyiben $g_x(S)$ és $g_x(T)$ végtelenek, akkor $g_x(S) \setminus g_x(T)$ és $g_x(T) \setminus g_x(S)$ végesek.* □

4.1.12. következmény. *Legyenek $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ olyan nilpotens DR-fanyelvek, amelyekre $S \setminus T \nsubseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$. Ha valamely $x \in X_n$ változóra $g_x(T) \setminus g_x(S)$ végtelen, akkor $S \cup T$ nem nilpotens.*

Bizonyítás. Legyen $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ két nilpotens DR-fanyelv és tegyük fel, hogy $S \setminus T \nsubseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$. Legyen továbbá $x \in X_n$ egy olyan változó, amelyre $g_x(T) \setminus g_x(S)$ végtelen. Vegyünk most egy olyan $p \in S \setminus T$ fát, amelyre $p \notin T_{\Sigma_1}(X_n)$. Ekkor létezik olyan $y \in X_n$ változó és $u \in g_y(p)$ út, hogy $u \notin g_y(T)$. Tegyük fel, hogy S és T nilpotencia foka rendre k és l. Ekkor minden olyan $r \in T_\Sigma(X_n)$ fa benne van T-ben, amelyre $\mathrm{mh}(r) \geq l$ és $\overline{\mathrm{fr}}(r) = x^t$ valamely $t \in N$ mellett. Legyen q az a fa, amelyet úgy kapunk p-ből, hogy p minden levelét – kivéve azt, amelyhez az u út vezet – helyettesítjük egy olyan r fával, amelyre $\mathrm{mh}(r) \geq \max\{k, l\}$ és $\overline{\mathrm{fr}}(r) = x^t$ valamely $t \in N$ mellett. A 4.1.11 segédtétel miatt $g_x(S)$ véges, így q nyilvánvalóan kielégíti a 4.1.7 tétel feltételeit. Ezek szerint $S \cup T$ nem determinisztikus, és így a 4.1.6 tétel miatt nem is nilpotens. □

Az előző állításból azonnal kapjuk az alábbi következményt.

4.1.13. következmény. *Legyen $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ és $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ két nilpotens DR-fanyelv. Ha S véges, T végtelen és $S \setminus T \nsubseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$, akkor $S \cup T$ nem nilpotens.* □

4.2. Metszet

A metszetre való zártság tárgyalásához vegyük a következő definíciót.

4.2.1. definíció. Az $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ és $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ DR ΣX_n-faautomaták *metszet direkt szorzatán* az

$$\mathfrak{A} \times^\cap \mathfrak{B} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}, (a_0, b_0), \mathbf{a} \times^\cap \mathbf{b})$$

DR ΣX_n-faautomatát értjük, ahol egyrészt $(\mathbf{a} \times^{\cap} \mathbf{b}) \in \mathfrak{p}(A \times B)^n$, másrészt $(\mathbf{a} \times^{\cap} \mathbf{b})^{(i)} = A^{(i)} \times B^{(i)}$ $(1 \leq i \leq n)$.

Ez a definíció nagy segítséget nyújt a metszetre való zártság igazolásához. Az alábbi két tétel [3]-ból származik.

4.2.2. tétel. *Legyenek* $\mathfrak{A}$ *és* $\mathfrak{B}$ *DR* ΣX_n*-faautomaták. Ekkor* $T(\mathfrak{A}) \cap T(\mathfrak{B}) = T(\mathfrak{A} \times^{\cap} \mathfrak{B})$. □

Nyilvánvaló, hogy nilpotens DR-fanyelvek metszet direkt szorzata is nilpotens, így érvényes a következő tétel.

4.2.3. tétel. *A nilpotens DR* ΣX_n*-fanyelvek osztálya zárt a metszetképzésre nézve.* □

Könnyű igazolni, hogy a monoton DR-fanyelvek osztálya is zárt a metszetképzésre.

4.3. Komplementerképzés

Legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy fanyelv. T komplementere alatt a $T_\Sigma(X_n) \setminus T$ fanyelvet értjük, és $\mathrm{c}(T)$-vel jelöljük. Továbbá, minden $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvre és $x \in X_n$ változóra jelölje $T(x)$ a $T \cap T_{\Sigma_1}(\{x\})$ fanyelvet, azaz $T(x)$ azon T-beli (unáris) fákból áll, amelyek levelei mindegyikén az x változó szerepel.

A DR-fanyelvek osztálya nem zárt a komplementerképzésre, ezt bizonyítja az alábbi példa.

4.3.1. példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$, $x \in X_n$, és legyen adott a $T = \{\sigma(x,x)\}$ DR-fanyelv. Ekkor a $p = \sigma(x,x)$ fára nyilvánvalóan $p \notin \mathrm{c}(T)$. A $\sigma(x, \sigma(x,x))$ és $\sigma(\sigma(x,x),x)$ fák azonban benne vannak $\mathrm{c}(T)$-ben, így $\sigma_1, \sigma_2 \in g_x(\mathrm{c}(T))$. Ez azt jelenti, hogy a p fa benne van $\mathrm{c}(T)$ lezártjában, de mivel tudjuk, hogy $\mathrm{c}(T)$-ben nincs benne, így $\mathrm{c}(T)$ nem zárt. Ez azt jelenti, hogy $\mathrm{c}(T)$ nem is determinisztikus.

Ugyanezt az eredményt az egyesítésre és metszetre való zártsági tulajdonságokból is megkaphatjuk. Elég arra gondolni, hogy tetszőleges A, B

halmazokra érvényes az $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ összefüggés. Ugyanezen meggondolás miatt kijelenthetjük, hogy a monoton DR-fanyelvek osztálya sem zárt a komplementerképzésre.

A nilpotens DR-fanyelvek komplementerképzésre való zártsága is meg lett vizsgálva [3]-ban, innen származnak az alábbi eredmények.

4.3.2. segédtétel. *Tegyük fel, hogy $\Sigma_i = \emptyset$ minden $i > 1$ indexre. Ekkor egy $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha minden $x \in X_n$ változóra $T(x)$ vagy $\mathrm{c}(T)(x)$ véges.*

Bizonyítás. Ha T nilpotens, akkor nyilvánvalóan minden $x \in X_n$ változóra $T(x)$ is nilpotens. Ekkor azonban felhasználhatjuk a nilpotens sztring nyelvek egyik jól ismert összefüggését (3.1.3. segédtétel), így kapjuk, hogy $T(x)$ vagy $\mathrm{c}(T)(x)$ véges.

A fordított irány igazolásához tegyük fel, hogy minden $x \in X_n$ változóra $T(x)$ vagy $\mathrm{c}(T)(x)$ véges. Vegyük észre, hogy ebben az esetben bármilyen $S \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelvre és $x \in X_n$ változóra a $g_x(S)$ és $g_x(S(x))$ út-nyelvek egybeesnek. Továbbá, a nilpotens sztring nyelvek egy másik klasszikus jellemzése szerint (lásd [14]), a nilpotens sztring nyelvek szintaktikus félcsoportjai nilpotensek. Ezek szerint $g_x(T)$ és $g_x(\mathrm{c}(T))$ szintaktikus félcsoportjai nilpotensek. Ebből (a [4]-ben lévő Theorem 5 bizonyítását is felhasználva) következik, hogy T és $\mathrm{c}(T)$ nilpotensek. □

Az előző állításból azonnal adódik az alábbi következmény.

4.3.3. következmény. *Amennyiben $\Sigma_i = \emptyset$ minden $i > 1$ indexre, akkor egy $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ fanyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha annak $\mathrm{c}(T)$ komplementere nilpotens.* □

Eddig csupán unáris műveleti szimbólumokból álló rangolt ábécét vettünk alapul. Most kitérünk a nem unáris esetre is.

4.3.4. segédtétel. *Tegyük fel, hogy Σ-ban létezik legalább egy olyan műveleti szimbólum, amelynek aritása nagyobb 1-nél. Legyen továbbá $T \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$ egy fanyelv. Ekkor T akkor és csakis akkor nilpotens, ha véges. Továbbá, ha T nilpotens, akkor $\mathrm{c}(T)$ is nilpotens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy végtelen, nilpotens DR-fanyelv, amelyet felismer egy k nilpotencia fokú $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ DR ΣX_n-faautomata. Legyen $\bar{a}$ az $\mathfrak{A}$ nilpotens eleme. Mivel T végtelen, ezért létezik olyan $p(x) \in T$ fa $(x \in X_n)$, amelyre $\mathrm{height}(p) \geq k$. Ennél fogva $\bar{a} \in \alpha(x)$. Ez viszont azt jelenti, hogy minden olyan $q \in T_\Sigma(\{x\})$ fa, amelyre $\mathrm{mh}(q) \geq k$ teljesül, benne van T-ben. Ez azonban ellentmond azzal a feltevéssel, hogy $T \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$.

A fordított irány igazolásához tegyük fel, hogy $T \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$ véges. Konstruáljuk meg az $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ DR ΣX_n-faautomatát a következőképpen. Legyen $k = \max\{\mathrm{height}(p) \mid p \in T\}$. Az A állapothalmazt határozzuk meg úgy mint

$$A = \{u \in \hat{\Sigma}^* \ : \ |u| \leq k\} \cup \{*\}.$$

Továbbá, minden $\sigma \in \Sigma_m$ $(m > 0)$ műveleti szimbólumra és $u \in \hat{\Sigma}^*$ szóra legyen

$$\sigma^{\mathcal{A}}(u) = \begin{cases} (u\sigma_1, \ldots, u\sigma_m), & \text{ha } |u| < k, \\ (*, \ldots, *), & \text{különben,} \end{cases}$$

és legyen

$$\sigma^{\mathcal{A}}(*) = (*, \ldots, *).$$

A kezdőállapotot határozzuk meg az $a_0 = e$ összefüggéssel, míg a végállapot vektor legyen $\mathbf{a} = (g_{x_1}(T), \ldots, g_{x_n}(T))$. Nyilvánvaló, hogy $\mathfrak{A}$ nilpotens a $*$ nilpotens elemmel és a $k+1$ nilpotencia fokkal, valamint az is nyilvánvaló, hogy $T = T(\mathfrak{A})$. Könnyen látható továbbá, hogy az $\mathfrak{A}' = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a}')$ DR ΣX_n-faautomata, ahol $\mathbf{a}' = (A \setminus A^{(1)}, \ldots, A \setminus A^{(n)})$, éppen $\mathrm{c}(T)$-t ismeri fel, így $\mathrm{c}(T)$ is nilpotens. □

Ezután feltételeket adunk arra vonatkozóan, hogy mikor nem nilpotens egy nilpotens DR-fanyelv komplementere.

4.3.5. segédtétel. *Tegyük fel, hogy Σ-ban létezik legalább egy olyan műveleti szimbólum, amelynek aritása nagyobb 1-nél. Legyen továbbá $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy végtelen nilpotens fanyelv. Ha $\mathrm{c}(T) \nsubseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$, akkor $\mathrm{c}(T)$ nem nilpotens.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy T-t felismeri az $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ nilpotens DR ΣX_n-faautomata az $\bar{a}$ nilpotens elemmel és a k nilpotencia fokkal. Mivel T végtelen, így van olyan $\bar{z} \in X_n$ változó, amelyre $\bar{a} \in \alpha^{\mathfrak{A}}(\bar{z})$. Tegyük most fel, hogy $\mathrm{c}(T) \nsubseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$ nilpotens, és őt felismeri a $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, b_0, \mathbf{b})$ nilpotens DR ΣX_n-faautomata a $\bar{b}$ nilpotens elemmel és az l nilpotencia fokkal. Vegyünk most egy olyan $p \in \mathrm{c}(T)$ fát, amelyre $p \notin T_{\Sigma_1}(X_n)$. Ekkor valamely (nem feltétlenül különböző) $x, y \in X_n$ változókra léteznek olyan különböző $u \in g_x(p)$ és $v \in g_y(p)$ utak, hogy $a_0u \notin \alpha^{\mathfrak{A}}(x)$ vagy $a_0v \notin \alpha^{\mathfrak{A}}(y)$ teljesül. Tegyük fel, hogy $a_0u \notin \alpha^{\mathfrak{A}}(x)$, és tegyük fel, hogy $l \geq k$. Most vegyük azt a q

fát, amelyet úgy kapunk p-ből, hogy benne a v úttal jelölt levélen lévő y változót helyettesítjük egy olyan tetszőleges $r \in T_\Sigma(\{z\})$ fával ($z \in X_n$), amelynek magassága legalább l. Nyilvánvalóan $q \in \mathrm{c}(T)$. Ekkor $\bar{b} \in \alpha^{\mathfrak{B}}(z)$ minden $z \in X_n$ változóra teljesül. Ezek alapján minden olyan $t \in T_\Sigma(X_n)$ fa, amelyre $\mathrm{mh}(t) \geq l$, benne van $\mathrm{c}(T)$-ben. Azonban az eddigi feltevésünk alapján minden olyan $t \in T_\Sigma(\{\bar{z}\})$ fa, amelyre $\mathrm{mh}(t) \geq l$, benne van T-ben is, ami ellentmondás.

A $k > l$ esetet hasonlóképpen igazolhatjuk. □

A 4.3.5. segédtételt felhasználva mutatunk egy példát olyan nilpotens fanyelvre, melynek komplementere nem nilpotens.

4.3.6. példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$. Vegyük az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ DR Σ-algebrát, ahol $A = \{a_0\}$ és $\sigma^{\mathcal{A}}(a_0) = (a_0, a_0)$. Végül legyen $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ az a DR ΣX_2-faautomata, amelyre $A^{(1)} = \{a_0\}$ és $A^{(2)} = \emptyset$. Nyilvánvalóan $\mathfrak{A}$ nilpotens és $T(\mathfrak{A}) = T_\Sigma(\{x_1\})$. Mivel $T(\mathfrak{A})$ végtelen és $\Sigma_1 = \emptyset$, így a 4.3.5. segédtétel miatt $\mathrm{c}(T(\mathfrak{A}))$ nem nilpotens.

Végül azon T DR fanyelveket fogjuk jellemezni, amelyekre mind T, mind $\mathrm{c}(T)$ nilpotens. A $\Sigma = \Sigma_1$ esetet a 4.3.2. segédtétel fedi le.

4.3.7. tétel. *Tegyük fel, hogy Σ-ban létezik legalább egy olyan műveleti szimbólum, amelynek aritása nagyobb 1-nél, és legyen $T \subseteq T_\Sigma(X_n)$ egy fanyelv. Ekkor T és $\mathrm{c}(T)$ akkor és csakis akkor egyidejűleg nilpotens, ha az alábbi állítások közül valamelyik igaz:*

(i) $T \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$ *és* T *véges.*

(ii) $\mathrm{c}(T) \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$ *és* $\mathrm{c}(T)$ *véges.*

Bizonyítás. Ha (i) teljesül, akkor a 4.3.4 segédtétel miatt T és $\mathrm{c}(T)$ egyszerre nilpotensek. A (ii) eset igazolásánál hasonlóan járhatunk el.

A fordított irány igazolásához tegyük fel, hogy T és $\mathrm{c}(T)$ egyszerre nilpotensek. Ha T véges, akkor $\mathrm{c}(T)$ végtelen, így a 4.3.5 segédtételt használva kapjuk, hogy $T \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$, azaz (i) teljesül. Ha T végtelen, akkor szintén a 4.3.5 segédtétel miatt $\mathrm{c}(T) \subseteq T_{\Sigma_1}(X_n)$. Ebből a 4.3.4 segédtétel és $\mathrm{c}(T)$ nilpotens volta alapján kapjuk, hogy $\mathrm{c}(T)$ véges, azaz (ii) is fennáll. □

4.4. x-szorzat

Amint azt az alábbi példa mutatja, a DR-fanyelvek osztálya nem zárt az x-szorzatra.

4.4.1. példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$, $x \in X_n$. Vegyük az $S = \{x, \sigma(x,x)\}$ és $T = \{\sigma(x,x)\}$ DR-fanyelveket. Vegyük továbbá a $p = \sigma(x, \sigma(x,x))$ fát. Világos, hogy p előállítható $g_x(T \cdot_x S)$ utakból, azonban $p \notin T \cdot_x S = \{\sigma(x,x), \sigma(\sigma(x,x), \sigma(x,x))\}$, így $T \cdot_x S$ nem zárt, és ezért nem is determinisztikus.

A fenti példában szereplő S és T DR-fanyelvek nilpotensek, és így egyben monotonok is, így sem a nilpotens-, sem a monoton DR-fanyelvek osztálya nem zárt az x-szorzatra. A 3.3.2. segédtétel elégséges feltételt ad két DR-fanyelv x-szorzatának determinisztikusságára. Ugyanezt (pontosabban a 2.6.5. segédtételt) felhasználva kapunk egy elégséges feltételt a monoton DR-fanyelvek esetére. A nilpotens DR-fanyelvek esetében a 3.3.6. tétel ad elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy mikor nilpotens két nilpotens DR-fanyelv x-szorzata.

4.5. x-iteráció

A következő példát tekintve megállapíthatjuk, hogy a DR-fanyelvek osztálya az x-iterációra sem zárt.

4.5.1. példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$, és legyen $x, z \in X_n$, ahol $x \neq z$. Vegyük továbbá a $T = \{\sigma(x,x), \sigma(x,z), \sigma(x, \sigma(z,x))\}$ DR-fanyelvet. Tekintsük a $p = \sigma(x, \sigma(z,z))$ fát. Könnyen látható, hogy p előállítható a $g_x(T^{*,x})$ utakból, azonban $p \notin T^{*,x}$, azaz $T^{*,x}$ nem zárt, és így nem is determinisztikus.

Mivel a fenti példában szereplő T DR-fanyelv nilpotens, és így egyben monoton is, ez azt jelenti, hogy sem a nilpotens-, sem a monoton DR-fanyelvek osztálya nem zárt az x-iterációra. A monoton DR-fanyelvek esetében azonban tudunk mondani olyan elégséges feltételt, amely mellett az x-iteráció megőrzi a monotonitást (2.6.12. tétel). Az érdekesség kedvéért megemlítünk két segédtételt (2.6.9., 2.6.10.), amelyek arra adnak elégséges feltételt, hogy mikor nem monoton egy monoton DR-fanyelv x-iteráltja.

4.6. σ-szorzat

Ismeretes tény, hogy a DR-fanyelvek zártak a σ-szorzatra. Egy tetszőleges $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólumhoz és $T_1, \ldots, T_m \subseteq T_\Sigma(X_n)$ DR-fanyelvekhez könnyű lenne konstruálni olyan DR-faautomatát, amely a $\sigma(T_1, \ldots, T_m)$ DR-fanyelvet ismeri fel. Egyszerűen csak venni kell a $T_1, \ldots, T_m$ DR-fanyelveket felismerő DR-faautomatákat (amelyekre nyugodtan feltehetjük, hogy állapothalmazaik páronként diszjunktak), és ezek egyesítését kiegészíteni egy új kezdőállapottal, ahonnan a σ művelettel pont a komponens-faautomaták kezdőállapotai alkotta állapotvektorba jutnánk.

Az iménti konstrukcióból az is látszik, hogy ha a komponens-faautomaták állapothalmazainak mindegyikén érvényben volt egy-egy részbenrendezési reláció, akkor azok "sértetlenek" maradnak az újonnan konstruált faautomatában (lévén az állapothalmazok diszjunktak voltak), sőt, ezek még kiterjeszthetőek is oly módon, hogy az új faautomata kezdőállapota relációban legyen a komponens-faautomaták kezdőállapotaival. Így megállapíthatjuk, hogy a monoton DR-fanyelvek osztálya is zárt a σ-szorzatra.

A nilpotens DR-fanyelvek osztályánál azonban más a helyzet, ahogy azt az alábbi példa is mutatja.

4.6.1. példa. Legyen $x \in X_n$ és $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, ahol $\Sigma_1 = \{\omega\}$ és $\Sigma_2 = \{\sigma\}$. Vegyük a $T_1 = \{\omega(x)\}$ és $T_2 = T_\Sigma(\{x\})$ fanyelveket, amelyekről könnyű látni, hogy nilpotens DR-fanyelvek. Tegyük fel, hogy a $T = \sigma(T_1, T_2)$ DR-fanyelv nilpotens. Továbbá tegyük fel, hogy $T = T(\mathfrak{A})$, ahol $\mathfrak{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ egy nilpotens DR-faautomata, amely nilpotencia foka k, valamint nilpotens eleme $\bar{a}$. Nyilvánvaló, hogy ekkor $\bar{a}w = \bar{a}$ teljesül minden $w \in \hat{\Sigma}$ betűre, és mivel T végtelen, így $\bar{a}$ végállapot is egyben, azaz $\bar{a} \in \alpha(x)$. Vegyünk most egy legalább k hosszúságú $u \in \hat{\Sigma}^*$ szót, amely $u = \sigma_1\omega_1 v$ alakú, ahol $v \in \hat{\Sigma}^+$. Mivel $\mathfrak{A}$ nilpotens, ezért $a_0 u = \bar{a}$. Ekkor viszont létezik olyan $t \in \sigma(\omega(T_\Sigma(\{x\})), T_\Sigma(\{x\}))$ fa, amelyre egyrészt $\mathrm{mh}(t) \geq k$, másrészt $u \in g_x(t)$. Mivel minden $u' \in g_x(t)$-beli útra $a_0 u' = \bar{a}$, így az $\bar{a} \in \alpha(x)$ összefüggést felhasználva kapjuk, hogy $t \in T(\mathfrak{A})$, ez azonban ellentmondás, hiszen $t \notin T$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy a nilpotens DR-fanyelvek osztálya nem zárt a σ-szorzatra nézve.

4.7. Zártsági tulajdonságok összegzése

Az alábbi táblázatban foglaljuk össze a determinisztikus felszálló fanyelvek, illetve a nilpotens- és monoton DR-fanyelvek zártsági tulajdonságait a Boole- és a reguláris műveletekre nézve.

	$\cup$	$\cap$	$\setminus$	x-szorzat	x-iteráció	σ-szorzat
DR	nem zárt	zárt	nem zárt	nem zárt	nem zárt	zárt
nilpotens	nem zárt	zárt	nem zárt	nem zárt	nem zárt	nem zárt
monoton	nem zárt	zárt	nem zárt	nem zárt	nem zárt	zárt

Értékelés, összegzés

Az értekezés elsődleges célja a sztring nyelvek és a determinisztikus felszálló fanyelvek monoton- illetve nilpotens alosztályainak reguláris kifejezésekkel történő jellemzése volt. Ezen eredmények felírásához szükség volt néhány zártsági tulajdonság megvizsgálására is, így az erre irányuló eredmények is összegzésre kerültek a teljesség igénye nélkül.

A monoton sztring nyelvek felírása reguláris kifejezésekkel már megtörtént [5]-ben, ezen eredmények említésre kerültek az értekezés elején. Bevezettük továbbá az iterációs magasság fogalmát, majd meghatároztuk annak összefüggését a monotonitással. A monoton determinisztikus felszálló fanyelvek jellemzésének érdekében először adaptáltuk az iterációs magasság fogalmát, és annak összefüggéseit. Ezután definiáltuk a monoton DR-faautomatákhoz tartozó triviális reguláris kifejezést, majd ezen kifejezés egyszerűsítésével és ekvivalens átalakításával foglalkoztunk. Ezt követően olyan elégséges feltételeket határoztunk meg, amelyek mellett a monoton determinisztikus felszálló fanyelvek zártak az x-szorzat és x-iteráció műveletekre. Végül bevezettük az általánosított R-láncnyelv fogalmát, amelyek pontosan a monoton determinisztikus felszálló fanyelveket írják le.

A nilpotens sztring nyelvek jellemzésének céljából bevezettük a sima láncnyelv fogalmát, és kitértünk annak alapvető tulajdonságaira. A nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek esetében először az út-teljes és x-termináló tulajdonságokat definiáltuk, ezek segítségével határoztuk meg az x-szorzatra való zártság elégséges feltételeit. Végül, a sima R-láncnyelvek fogalma került bevezetésre, amelyek mint reguláris kifejezések, pontosan a nilpotens determinisztikus felszálló fanyelveket írják le. Mind a sztring-, mind a fanyelvek esetében kitértünk a nilpotens nyelvek monoton nyelvekkel való kapcsolatára is.

Az értekezés utolsó részében a determinisztikus felszálló fanyelvek Boole- és reguláris műveletekre való zártsági tulajdonságait gyűjtöttük össze, külön kitérve a monoton-, illetve a nilpotens alosztályokra. Egyes esetekben, amikor egy adott osztály nem volt zárt egy adott műveletre, összegyűjtöttük azon feltételeket, amelyek elégségesek (vagy akár szükségesek is) a zártság biztosításához.

Az értekezésen túl érdekes témakörnek kínálkozik a determinisztikus felszálló fanyelvek egyéb (pl. definit) alosztályainak reguláris kifejezésekkel történő jellemzése, valamint az erre vonatkozó zártsági tulajdonságok megvizsgálása. Értelemszerűen ezekre nem tértünk ki jelen értekezésben.

Köszönetnyilvánítás

Rendkívül sok köszönettel tartozom Dr. Gécseg Ferenc professzor úrnak a doktori tanulmányaim alatt tanúsított töretlen támogatásáért és türelméért. Köszönöm, hogy bevezetett a faautomaták, és azon belül a determinisztikus felszálló fanyelvek témakörébe, hálás vagyok mind az önzetlen szakmai-, mind az emberi támogatásáért, és köszönöm hogy szakértelmével segített a helyes irány mindenkori betartásában. Köszönettel tartozom továbbá Dr. Fülöp Zoltán professzor úrnak a doktori tanulmányaim alatt biztosított támogatásáért. Végül, de nem utolsó sorban, hálás vagyok a családomnak, és külön köszönöm feleségemnek, Csillának, a rengeteg türelmet és biztatást, amellyel átsegített a kritikus pontokon, és hogy végig hitt a cél elérésében.

Irodalomjegyzék

[1] Courcelle, B.: A representation of trees by languages I, *Theoretical Computer Science*, **6** (1978), 255-279.

[2] Gécseg, F.: On some classes of tree automata and tree languages, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, Mathematica.* **25** (2000), 325-336.

[3] Gécseg, F. and Gyurica, Gy.: On the closedness of nilpotent DR tree languages under Boolean operations, *Acta Cybernetica,* **17** (2006), 449-457.

[4] Gécseg, F. and Imreh, B.: On definite and nilpotent DR tree languages, *Journal of Automata, Languages, and Combinatorics.* **9:1** (2004), 55-60.

[5] Gécseg, F. and Imreh, B.: On monotone automata and monotone languages, *Journal of Automata, Languages, and Combinatorics.* **7** (2002), 71-82.

[6] Gécseg, F. and Peák, I.: *Algebraic Theory of Automata,* Akadémiai Kiadó, Budapest 1972.

[7] Gécseg, F. and Steinby, M.: Minimal ascending tree automata, *Acta Cybernetica,* **4** (1978), 37-44.

[8] Gécseg, F. and Steinby, M.: Minimal Recognizers and Syntactic Monoids of DR Tree Languages, in *Words, Semigroups, & Transductions*, World Scientifics (2001), 155-167.

[9] Gécseg, F. and Steinby, M.: *Tree Automata,* Akadémiai Kiadó, Budapest 1984.

[10] Gyurica, Gy.: On monotone languages and their characterization by regular expressions, *Acta Cybernetica,* **18** (2007), 117-134.

[11] Gyurica, Gy.: On nilpotent languages and their characterization by regular expressions, *Acta Cybernetica*, **19** (2009), 231-244.

[12] Jurvanen, E.: *On Tree Languages Defined by Deterministic Root-to-frontier Recognizers*, Ph.D. Thesis, University of Turku, Turku, 1995, ISBN 952-90-7096-9.

[13] Jurvanen, E.: The Boolean closure of DR-recognizable tree languages, *Acta Cybernetica,* **10** (1992), 255-272.

[14] Ševrin, L. N.: On some classes of abstract automata. *Uspehi matem. nauk,* **17:6 (108)** (1962), 219.

[15] Virágh, J.: Deterministic ascending tree automata I, *Acta Cybernetica,* **5** (1980), 33-42.

Összefoglaló

Speciális faautomata osztályok jellemzése

A fanyelvek különböző osztályai közül a determinisztikus felszálló fanyelvek (a továbbiakban DR-fanyelvek) kitüntetett figyelmet kaptak az elmúlt évtizedekben, leginkább azért, mert azok a reguláris fanyelvek valódi részosztálya. A DR-fanyelvek egyes alosztályai (monoton, nilpotens, definit, stb.) is meg-megvizsgálásra kerültek, és különböző módon, például szintaktikus monoidokkal jellemezték őket. A monoton sztring nyelvekre, ahol a sztring nyelvek alatt a klasszikus értelemben ismert véges automaták által felismert nyelveket értjük, Gécseg F. és Imreh B. adott egy reguláris kifejezésekkel történő jellemzést is. Ez adta az ötletet, hogy vizsgáljuk meg a DR-fanyelvek monoton és nilpotens alosztályainak reguláris kifejezésekkel történő jellemzését. Ezen irányú kutatásunk eredményei adják jelen értekezés gerincét. Az értekezés végén a DR-fanyelvek zártsági tulajdonságai is összegzésre kerülnek a Boole-, valamint a reguláris műveletekre nézve.

Alapfogalmak

Az értekezés elején az alapfogalmakat definiáltuk, ezek ismeretére mindenképpen szükség van a főeredmények megértéséhez. Itt kerülnek ismertetésre az ábécé, véges automata, nyelv, valamint a reguláris kifejezések fogalma. A reguláris kifejezéseknél definiáljuk a redundáns részkifejezés fogalmát (úgy mint azon részkifejezés, amelynek elhagyásával az egész reguláris kifejezés által leírt nyelv nem változik), és ezzel vezetjük be a redukált reguláris kifejezés fogalmát (amely nem tartalmaz redundáns részkifejezéseket).

Később hasonló módon ismertetjük a determinisztikus felszálló algebra, faautomata és fanyelv fogalmát. Ugyanúgy felidézzük a reguláris ΣX_n-kifejezéseket és definiáljuk azok redukált formáit. Definiáljuk a DR-fanyelvek vizsgálatában igen hasznos x-utakat (melyek halmazát g_x-szel jelöljük), és néhány fákon értelmezett függvényt, mint például a root, height, leaves és Sub, amelyeket később előszeretettel használunk.

Monoton sztring nyelvek

Gécseg és Imreh megállapította, hogy egy sztring nyelv akkor és csakis akkor monoton, ha előállítható véges sok szeminormális láncnyelv egyesítéseként. Ez a jellemzés gyakorlatilag azt írja le, hogy egy monoton automata milyen sorrendben halad az állapotain keresztül, míg fel nem ismeri a vizsgált szót, ahol az összes ilyen lehetséges állapotsorozat egy szeminormális láncnak felel meg. Ez adta az ötletet, hogy a monoton DR-fanyelveket is az őket felismerő monoton DR-faautomaták állapotainak sorozata szerint írjuk majd le.

Ezután bevezettük az iterációs magasság fogalmát mind a reguláris kifejezésekre, mind az általuk leírt sztring nyelvekre. Egy nyelv iterációs magassága az annak iterációjában résztvevő szavak közül a leghosszabb hosszával egyenlő. Ugyan az iterációs magasságnak a monoton DR-fanyelvek vizsgálatánál lesz fontos szerepe, azok az eredmények azonban a sztring nyelvekre is érvényesek. Eszerint egy $(\zeta)^*$ alakban adott monoton sztring nyelvet leíró redukált reguláris kifejezés iterációs magassága legfeljebb 1.

Monoton determinisztikus felszálló fanyelvek

A DR-fanyelvek esetében is definiáljuk az (x-szerinti) iterációs magasságot, amely azon leghosszabb x-út hosszát jelöli, amely valamely fanyelv x-iterációjában szerepet játszik. Ugyanúgy megmutatjuk a $(\zeta)^{*,x}$ alakban adott redukált reguláris ΣX_n-kifejezések által leírt fanyelvekről, hogy amennyiben ők monotonok, akkor az x-szerinti iterációs magasságuk legfeljebb 1. Ennek később is lesz szerepe, amikor a monoton DR-fanyelvek zártságát vizsgáljuk az x-iterációra nézve.

A következőkben vegyünk egy $\mathfrak{A}$ monoton DR-faautomatát. Ahogy a sztring esetben is megfigyelhettük, itt is felírható az állapotok egy sorrendje, amelyeken végighaladva egy-egy fát felismerünk. Ennek leírására alkottuk meg az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezést:

$$\eta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0,$$

ahol minden η_i

$$(p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i}$$

alakú. Ez a kifejezés (jobbról balra olvasva) gyakorlatilag $\mathfrak{A}$ működését írja le. Minden egyes η_i egy a_i állapot működését szimulálja, ahol a t^i-k olyan $\sigma(\xi, \ldots, \xi)$ alakú fák, amelyekre a_i előfordul $\sigma(a_i)$ elemei között, míg a p^i-k olyan $\omega(\xi, \ldots, \xi)$ alakú fák, amelyekre a_i nem fordul elő $\omega(a_i)$ elemei között. A ξ-k mindegyike a $\xi_0, \ldots, \xi_k$ segédváltozókból kerül ki, ezek egy az egyben $\mathfrak{A}$ állapotait jelentik. Az y^i-k azok a változók, amelyeket le tudunk vezetni a_i-ből. Megfigyelhetjük, hogy a t^i fákat összefogja még egy ξ_i-iteráció, ugyanis a t^i-k gyökerében lévő műveleti szimbólumokat a_i-n bármennyiszer alkalmazva mindig egy olyan állapotvektort kapunk, amelyben szerepel a_i. A könnyebb hivatkozás céljából az egész $\eta_{\mathfrak{A}}$ kifejezést láncnak, a t^i-s részt iterációs résznek, a p^i-ket és y^i-ket összefogó részt pedig termináló résznek nevezzük.

Ez a triviális leírás természetesen egyszerűsíthető, már csak azért is, mert egy DR-fanyelvet több különböző DR-faautomata is fel tud ismeri. Ezért is volt érdemes megvizsgálni $\eta_{\mathfrak{A}}$ ekvivalens átalakításait, hiszen azokkal általánosabb formát kaphatunk. Az egyik kézenfekvő átalakítás az η_i tényezőben való felbontás, ha ez egyáltalán lehetséges. Erre vonatkozóan született meg az a tétel, mely kimondja, hogy az $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezés akkor és csakis akkor bontható fel az η_i tényezőben, ha η_i iterációs részében lévő minden fa leveleiben legfeljebb egyszer szerepel a ξ_i segédváltozó.

Egy másik egyszerűsítési lehetőség a segédváltozók számának csökkentése. Ezt úgy érhetjük el, hogy egyes változókat vagy segédváltozókat újra felhasználunk a fenti triviális leírásban. Ha például van a fenti láncban egy ξ_j segédváltozó, amely az η_i tényező termináló részében fordul elő először (a lánc jobbról balra haladó kiértékelése folyamán), akkor ξ_j minden láncbeli előfordulását helyettesíthetjük ξ_i-vel. Ezt azért is tehetjük meg, mert ξ_i már nincs használva η_i termináló részében, vagy ennél magasabb indexű η_i-kben. Ennek kapcsán egy érdekes állítás is igazolásra került, miszerint a $\Sigma = \Sigma_1$ esetben bármely $\mathfrak{A}$ monoton DR-faautomatához tartozó $\eta_{\mathfrak{A}}$ felírható legfeljebb egy segédváltozó használatával.

A monoton DR-fanyelvek jellemzése felé haladva fel kell idéznünk azt a tényt, hogy a DR-fanyelvek (és a monoton alosztálya is) ugyan zártak a σ-szorzatra, de nem zártak a többi reguláris műveletre. Ezért vált szükségessé azon feltételek meghatározása, amelyek mellett a monoton DR-fanyelvek zártak az x-szorzat, illetve az x-iteráció műveletekre. Ehhez legyen $\Sigma_{S,x}$ azon

σ műveleti szimbólumokat tartalmazó halmaz, amelyekre léteznek S-beli x-utak úgy, hogy ezt az x-utat egy $\hat{\Sigma}_\sigma$-beli betűvel kiegészítve és további alkalmas szavakat hozzávéve egy másik S-beli úthoz jutunk. Ezen fogalom használatával egy fontos tételt fogalmaztunk meg, miszerint tetszőleges S és T monoton DR-fanyelvekre, ha $\Sigma_{S,x}$ és $\mathrm{root}(T)$ (ami T gyökérszimbólumainak halmaza) diszjunkt, akkor $T \cdot_x S$ is monoton.

Egy további fontos tulajdonság az x-homogenitás. Azt mondjuk, hogy egy T fanyelv x-homogén, ha nincs olyan $p \in T$ fa, amelyre létezik $u, v \in g_x(p)$, $w \in \hat{\Sigma}^*$ és $z \in X_n$, hogy $uw \in g_z(T)$ és $vw \notin g_z(T)$. Ez fogja majd biztosítani azt, hogy ha egy DR-faautomatában két különböző állapotból is le lehet vezetni az x változót, akkor e két állapotból ugyanazon részfákat lehessen felismerni. Megállapítottuk, hogy ha egy T DR-fanyelv $T^{*,x}$ iteráltja monoton DR-fanyelv, akkor T x-homogén és $T^{*,x}$ iterációs magassága legfeljebb 1. Azt is megállapítottuk, hogy ha T monoton DR-fanyelv x-homogén, $T^{*,x}$ iterációs magassága legfeljebb 1, valamint $\Sigma_{T,x}$ és $\mathrm{root}(T)$ diszjunkt, akkor $T^{*,x}$ monoton DR-fanyelv.

Az eddigi eredményekkel minden eszköz a rendelkezésünkre áll, hogy végre leírjuk a monoton DR-fanyelveket. Egy $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ fanyelvet R-láncnyelvnek nevezünk, ha minden η_i a $(T_i) \cdot_{\xi_i} (S_i)^{*,\xi_i}$ alakban adott, ahol S_i és T_i véges DR-fanyelvek, és amelyekre S_i ξ_i-homogén, $(S_i)^{*,\xi_i}$ iterációs magassága legfeljebb 1, $\mathrm{root}(S_i) \cap \Sigma_{S_i,\xi_i} = \emptyset$ és $\mathrm{root}(T_i) \cap (\mathrm{root}(S_i) \cup \Sigma_{S_i,\xi_i}) = \emptyset$ $(0 \leq i \leq k)$. A fenti η R-láncnyelvet általánosítottnak mondjuk, ha $\mathrm{root}(T(\eta_i)) \cap \Sigma_{T(\eta_{i-1} \cdot_{\xi_{i-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0), \xi_i} = \emptyset$ minden i indexre teljesül $(1 \leq i \leq k)$. Ezzel kimondhatjuk a kívánt jellemzést, miszerint egy DR-fanyelv akkor és csakis akkor monoton, ha megadható általánosított R-láncnyelvként.

Nilpotens sztring nyelvek

A nilpotens nyelveket felismerő automatákban közös az, hogy van bennük egy nilpotens elem (csapda állapot), amelybe minden az automata nilpotencia fokánál nem rövidebb szó olvasása elvezet, és onnan már nem is lehet más állapotokat elérni, sőt, ez az egyedüli állapot, amelyből önmagába lehet jutni. Ez azt jelenti, hogy ha le szeretnénk írni az automata állapotainak szavak olvasásához köthető lehetséges sorozatait, akkor egy monoton sorozatot kapnánk, ezért is mondhatjuk, hogy minden nilpotens nyelv monoton. Ugyanakkor ezt a szabályszerűséget szeretnénk kihasználni, amikor a nilpotens nyelveket jellemezzük.

Bevezettünk egy új fogalmat, amely szerint egy $L_0 x_1 L_1 x_2 \ldots x_k L_k \subseteq X^*$

láncnyelvet simának nevezünk, ha minden k-nál kisebb i indexre $L_i = \{e\}$, és ha $L_k = Y^*$, ahol $Y = \emptyset$ vagy $Y = X$. A sima láncnyelvek tehát $\zeta = x_1 x_2 \ldots x_k L_k$ alakúak. Azt mondjuk, hogy ζ véges, ha $L_k = \{e\}$, illetve ζ végtelen, ha $L_k = X^*$, továbbá ζ hosszát k-ban állapítjuk meg. Azt mondjuk, hogy egy $\zeta' = x_1 x_2 \ldots x_j$ sima láncnyelv prefixe ζ-nak, ha $1 \leq j \leq k$, vagy ha $j > k$, de ekkor $x_{k+1} \ldots x_j \in L_k$. Ezek alapján X^* minden szava tekinthető véges sima láncnyelvnek. Sőt, minden véges nyelv megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként.

A sima láncnyelvekkel és azok prefixeivel hatékonyan tudjuk jellemezni a nilpotens nyelveket. Igazoltuk, hogy amennyiben egy sima láncnyelvek véges egyesítéseként megadott végtelen nyelvre igaz, hogy bármelyik X^*-beli szó prefixe a szóban forgó sima láncnyelvek egyikének, akkor ez a nyelv nilpotens. Sőt, ennek megfordítását is beláttuk, miszerint minden nilpotens nyelv megadható véges sok sima láncnyelv egyesítéseként, ahol amennyiben a szóban forgó nyelv végtelen, akkor minden X^*-beli szó prefixe a nyelvet leíró sima láncnyelvek egyikének. Ezeket összegezve megkaptuk a nilpotens sztring nyelvek reguláris kifejezésekkel való jellemzését.

Nilpotens determinisztikus felszálló fanyelvek

Mivel a nilpotens DR-fanyelvek egyben monoton DR-fanyelvek is, így logikusnak tűnik a triviális reguláris kifejezés megvizsgálása egy tetszőleges $\mathfrak{A}$ nilpotens DR-faautomata esetében. Vegyük az így kapott $\zeta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ kifejezést. Nyilvánvaló, hogy η_k-t kivéve minden η_i-ben az iterációs rész üres, mivel nincs olyan műveleti szimbólum és a nilpotens elemtől különböző állapot, amelyre ez az állapot előfordulna a művelettel vett eredményvektorában. Ezek szerint ezeket az iterációs részeket elhagyhatjuk $\zeta_{\mathfrak{A}}$-ból. Ezzel leegyszerűsítettük az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó triviális reguláris kifejezést, amelyet az $\mathfrak{A}$-hoz tartozó sima reguláris kifejezésnek fogunk nevezni.

Ezután a nilpotens DR-fanyelvek x-szorzatra való zártságát szerettük volna biztosítani, ehhez szükségesek a következő fogalmak. Egy S fanyelv út-teljes, ha bármely S-beli út bármely prefixében az utolsó betűt egy másikra cserélve olyan szót kapunk, ami szintén egy S-beli út prefixe. Megállapítottuk, hogy két út-teljes fanyelv x-szorzata is út-teljes. Egy másik fontos fogalom az x-termináló tulajdonság, amivel akkor rendelkezik egy tetszőleges S fanyelv, ha bármely olyan S-beli u útra, amely nem valódi prefixe egyetlen más S-beli útnak sem, teljesül, hogy u egy S-beli x-út. Ezen fogalmak segítségével már meg tudjuk fogalmazni azokat a feltételeket, amelyek ahhoz kellenek, hogy két nilpotens DR-fanyelv x-szorzata is nilpotens legyen. Legyenek tehát S és T tetszőleges nilpotens DR-fanyelvek, ahol S véges, út-teljes és x-termináló, valamint $\Sigma_{S,x}$ és $\mathrm{root}(T)$ diszjunkt. Ekkor $T \cdot_x S$ is nilpotens.

Az eddigiek után nem maradt más hátra, mint kimondani a nilpotens DR-fanyelvek reguláris kifejezésekkel való jellemzését. Nevezzük el ehhez sima R-láncnyelvnek az olyan $\eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ alakú láncokat, ahol minden k-nál kisebb i indexre $T(\eta_i)$ véges és út-teljes, a $T(\eta_i) \setminus X_n$ fák leveleinek halmaza a $\{\xi_{i+1}, \ldots, \xi_k\}$ nemüres részhalmaza, valamint $\mathrm{root}(T(\eta_{i+1}))$ és $\Sigma_{T(\eta_i \cdot_{\xi_i} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0), \xi_{i+1}}$ diszjunktak, továbbá $T(\eta_k) = Z \cdot_{\xi_k} T_\Sigma(Y \cup \{\xi_k\})$, ahol Y és Z a változók halmazának egy-egy részhalmaza. Ekkor megállapíthatjuk, hogy egy DR-fanyelv akkor és csakis akkor nilpotens, ha ő egy sima R-láncnyelv.

Zártsági tulajdonságok

Az értekezés során többször szükségünk volt a DR-fanyelvek, illetve azok nilpotens- és monoton alosztályainak a Boole- és reguláris műveletekre vonatkozó zártsági tulajdonságaira, így hasznosnak találtuk azok összegzését, esetenként megvizsgálását. Több esetben, amikor egy adott osztály nem volt zárt az adott műveletre, összegyűjtöttünk olyan feltételeket is, amelyekkel biztosítható volt a zártság. Az értekezés fókusza azonban a reguláris kifejezésekkel való jellemzésre irányult, így a zártsági tulajdonságok vizsgálata alárendelt szerepet kapott.

Summary

Characterization of special classes of tree automata

Deterministic root-to-frontier tree languages (DR-languages in short) were given special attention in the past mainly because they form a proper subclass of all regular tree languages. Some subclasses of DR-languages such as monotone, nilpotent and definite DR-languages were also studied and they were characterized, among others, by means of syntactic monoids. Gécseg F. and Imreh B. gave a characterization of monotone string languages also by regular expressions. This implied the idea of examining monotone and nilpotent DR-languages in terms of their characterization by regular expressions. The result of our research on this topic represents the basis of this dissertation. There is also a summary of closure properties of DR-languages under Boolean and regular operations where we detailed the monotone and nilpotent subclasses as well.

Preliminaries

Before we detail the results we need to introduce some basic concepts like alphabet, languages, recognizers and regular expressions. These are substantial concepts that we need to clarify in order to understand the results. For regular expressions we introduce the concept of redundant subexpressions which are those parts of regular expressions that can be omitted without changing the languages they represent. This will be used then to define reduced regular expressions as those expressions that do not contain redundant subexpressions.

Similarly, we introduce the concept of deterministic root-to-frontier algebras, tree automata and tree languages, and then the usual and reduced regular ΣX_n-expressions. We recall the concept of x-paths (the set of which is denoted by g_x) that is a very useful tool in studying DR-languages. Furthermore, we highlight some functions on trees like root, height, leaves and Sub, these are used quite commonly.

Monotone string languages

It was proved by Gécseg and Imreh that a string language is monotone if and only if it can be given as a finite union of seminormal chain languages. This representation indeed describes the sequence of states a monotone recognizer would use to process a word, and each of these potential state sequences corresponds to a seminormal chain language in the representation. Hence came the idea that monotone DR-languages could be characterized using a similar approach.

Then we established the concept of iterational height for both regular expressions and string languages. Iterational height identifies the length of the longest word that will be used in the iteration of a particular string language. The importance of iterational height will come up when studying monotone DR-languages although the corresponding results are valid for the string case, too. Namely, if a reduced regular expression is in form $(\zeta)^*$ and it represents a monotone string language, then its iterational height is not greater than 1.

Monotone deterministic root-to-frontier tree languages

In case of DR-languages we define (x-based) iterational height as the length of the longest x-path that will be used in an x-iteration of a particular tree language. Similarly we show that if a reduced regular ΣX_n-expression is given in the form $(\zeta)^{*,x}$ and it represents a monotone DR-language, then its x-based iterational height is not greater than 1. This will be important later when we examine the closure properties of monotone DR-languages under x-iteration.

Let us now take a monotone DR-recognizer $\mathfrak{A}$. As we have seen it in the string case, $\mathfrak{A}$ has a sequence of states that are used for processing trees. To describe this, we have established the trivial regular expression belonging to $\mathfrak{A}$ as

$$\eta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0,$$

where every η_i is in form

$$\eta_i = (p_1^i + \ldots + p_{l_i}^i + y_1^i + \ldots + y_{r_i}^i) \cdot_{\xi_i} (t_1^i + \ldots + t_{j_i}^i)^{*,\xi_i}.$$

This form, reading it from right to left, indeed describes the processing in $\mathfrak{A}$. Every single η_i simulates the functionality of a state a_i, where t^is represent trees in form $\sigma(\xi, \ldots, \xi)$ for which the state a_i appears at least once among the elements of $\sigma(a_i)$ and where p^is represent trees in form $\omega(\xi, \ldots, \xi)$ for which the state a_i does not appear among the elements of $\omega(a_i)$. Each of the ξs is a member of the auxiliary variable set $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, they are corresponding exactly to the states of $\mathfrak{A}$. The y^is are the variables that can be derived from the state a_i. The trees of t^is are encapsulated into a ξ_i-iteration because the application of the operational symbols of the t^is any number of times will still contain a_i in the resulting state vector. For easier reference, we will call the entire expression of $\eta_{\mathfrak{A}}$ as chain, moreover, the part containing the t^is will be called the iterating part of η_i, and the part containing p^is and y^is will be called the terminating part of η_i.

Most of the time the recently introduced trivial representation can be simplified because there are many different DR-recognizers recognizing the same DR-language. It justifies the examination of equivalent transformations on $\eta_{\mathfrak{A}}$ since it may lead to a more general form. One of the obvious transformations would be a decomposition in η_i if it is possible at all. The research on this led to a theorem which states that the expression $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ can be decomposed in the η_i part if and only if every tree in the iterating part of η_i contains the auxiliary variable ξ_i at most once among its leaves.

Another potential simplification would be the reduction of the number of the auxiliary variables. This can be achieved by reusing some (auxiliary) variables in the trivial form above. For example, if there is an auxiliary variable ξ_j appearing the first time in the terminating part of η_i (when reading the chain from right to left), then every occurrence of ξ_j in the chain can be replaced with ξ_i. This replacement can be done because ξ_i is not used in the terminating part of η_i or in any further parts of the chain. There is an interesting statement regarding this in the case $\Sigma = \Sigma_1$, namely, for every monotone DR-recognizer $\mathfrak{A}$ one auxiliary variable is enough to represent $\eta_{\mathfrak{A}}$.

It is a well known fact that the class of (monotone) DR-languages is closed under σ-product but it is not closed under other regular operations. This is why it was necessary to find conditions beside which the class of monotone DR-languages is closed under x-product and x-iteration. In order to find them, let $\Sigma_{S,x}$ be the set of those σ operational symbols for which there exists an x-path in S that we can extend by a letter from $\hat{\Sigma}_\sigma$ and then by any applicable word so that we end up in a path in S. Using this concept we stated an important theorem, that is, if S and T are monotone DR-languages and $\Sigma_{S,x} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$, then $T \cdot_x S$ is monotone.

Another important concept is the x-homogeneous property. We say that a tree language T is x-homogeneous if there is no such tree $p \in T$ for which there exist $u, v \in g_x(p)$, $w \in \hat{\Sigma}^*$ and $z \in X_n$ where $uw \in g_z(T)$ but $vw \notin g_z(T)$. This will guarantee us that if there are two different states in a DR-recognizer from which we can derive the variable x, then from these two states we can derive exactly the same set of trees. It turned out that for any DR-language T if $T^{*,x}$ is monotone DR-language, then T is x-homogeneous and the iterational height of $T^{*,x}$ is not greater than 1. We also proved that if a monotone DR-language T is x-homogeneous, the iterational height of $T^{*,x}$ is not greater than 1 and $\Sigma_{T,x} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$, then $T^{*,x}$ is a monotone DR-language.

Now we have all the necessary concepts to characterize monotone DR-languages. A tree language $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \ldots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ is called R-chain language if every η_i is given in the form $(T_i) \cdot_{\xi_i} (S_i)^{*,\xi_i}$, where S_i and T_i are finite DR-languages, S_i is ξ_i-homogeneous, the iterational height of $(S_i)^{*,\xi_i}$ is not greater than 1, $\mathrm{root}(S_i) \cap \Sigma_{S_i,\xi_i} = \emptyset$ and $\mathrm{root}(T_i) \cap (\mathrm{root}(S_i) \cup \Sigma_{S_i,\xi_i}) = \emptyset$ $(0 \leq i \leq k)$. The above R-chain language is said to be generalized if $\mathrm{root}(T(\eta_i)) \cap \Sigma_{T(\eta_{i-1} \cdot_{\xi_{i-1}} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0),\xi_i} = \emptyset$ holds for every $i \in \{1, \ldots, k\}$. This helps us to state the main result of this section, that is, a DR-language is monotone if and only if it can be given as a generalized R-chain language.

Nilpotent string languages

It is common across all nilpotent recognizers that they have a nilpotent element (also known as trap state) and the processing of every word not shorter than the degree of nilpotency of the given recognizer will lead to this element. What is more, no other states are reachable from this state and this is the only state from which there is transition into itself. This means that if we would describe the potential sequences of states that a nilpotent recognizer would go through when reading a word, then we would get a monotone sequence, this is why every nilpotent language is monotone. We would use this normality when characterizing nilpotent languages.

We say that an $L_0 x_1 L_1 x_2 \ldots x_k L_k \subseteq X^*$ chain language is plain if $L_i = \{e\}$

holds for every index i ($< k$) and if $L_k = Y^*$, where $Y = \emptyset$ or $Y = X$. Plain chain languages are therefore in form $\zeta = x_1 x_2 \ldots x_k L_k$. We say that ζ is finite if $L_k = \{e\}$ or ζ is infinite when $L_k = X^*$, moreover, the length of ζ is k. A plain chain language $\zeta' = x_1 x_2 \ldots x_j$ is called to be a prefix of ζ if either $1 \leq j \leq k$ or $j > k$ with $x_{k+1} \ldots x_j \in L_k$. This also means that every word in X^* is a plain chain language. Furthermore, every finite string language can be given as a finite union of plain chain languages.

Plain chain languages and their prefixes can be used effectively to characterize nilpotent string languages. We proved that if an infinite string language is given as a finite union of plain chain languages and every word in X^* is a prefix of a plain chain language from this union, then the string language in question is nilpotent. Moreover, we proved the converse, that is, every nilpotent string language can be given as a finite union of plain chain languages where in case the language in question is infinite then every word in X^* is a prefix of a plain chain language from the above representation. Thus we got the representation of nilpotent string languages by means of regular expressions.

Nilpotent deterministic root-to-frontier tree languages

Since nilpotent DR-languages are monotone it seems obvious to examine the trivial regular expression belonging to a nilpotent DR-recognizer $\mathfrak{A}$. Let us take the resulting chain $\zeta_{\mathfrak{A}} = \eta_k \cdot_{\xi_k} \eta_{k-1} \cdot_{\xi_{k-1}} \ \ldots \ \cdot_{\xi_1} \eta_0$. It is clear that apart from η_k the iteration part in every η_i is empty because there are no such operational symbol σ and state a different from the nilpotent element for which $\sigma(a)$ contains a. This means that we can omit these iterational parts from $\zeta_{\mathfrak{A}}$ hence we simplified the trivial regular expression belonging to $\mathfrak{A}$. We will call the result the plain regular expression belonging to $\mathfrak{A}$.

Now we have to study those conditions that will make nilpotent DR-languages closed under x-product. We will need the following concepts. A tree language S is called path complete if in any prefix of any path in S we replace the last letter with any other letter, we get a prefix of a path in S. It turned out that the x-product of two path complete tree languages is path complete. Another important concept is the following. A tree language S is said to be x-terminating if every path u in S is an x-path in S provided u is not a proper prefix of any other paths in S. These concepts help us to state conditions by which the x-product of two nilpotent DR-languages is nilpotent. Let S and T be nilpotent DR-languages where S is finite, path complete and x-terminating, and let $\Sigma_{S,x} \cap \mathrm{root}(T) = \emptyset$. Then $T \cdot_x S$ is nilpotent.

The only thing remained is to characterize nilpotent DR-languages by regular expressions. A tree language represented by $\eta = \eta_k \cdot_{\xi_k} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0$ is called plain R-chain language if for all $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ $T(\eta_i)$ is finite and path complete, the set of leaves of the trees from $T(\eta_i) \setminus X_n$ is a nonempty subset of $\{\xi_{i+1}, \ldots, \xi_k\}$, $\mathrm{root}(T(\eta_{i+1})) \cap \Sigma_{T(\eta_i \cdot_{\xi_i} \cdots \cdot_{\xi_1} \eta_0), \xi_{i+1}} = \emptyset$ and $T(\eta_k) = Z \cdot_{\xi_k} T_\Sigma(Y \cup \{\xi_k\})$, where Y and Z are subsets of the set of variables. Then, a DR-language is nilpotent if and only if it is a plain R-chain language.

Closure properties

Since we had to use some closure properties of DR-languages under Boolean and regular operations (with respect to the monotone and nilpotent subclasses), it was reasonable to summarize — or even to examine — these properties. In some cases when a class was not closed under an operation, we gathered conditions that guaranteed closedness of that particular class under that particular operation. The focus of this dissertation was however directed towards the characterization of monotone- and nilpotent DR-languages by means of regular expressions, hence the study of closure properties was secondary.

Tárgymutató

ΣX-fa, 11
ΣX_n-faautomata
  determinisztikus felszálló $\sim$, 12
  DR $\sim$, 12
Σ-algebra
  determinisztikus felszálló $\sim$, 12
  DR $\sim$, 12
  monoton DR $\sim$, 23
  nilpotens DR $\sim$, 48
  véges $\sim$, 12
σ-szorzat
  fanyelv $\sim$a, 18
x-iterált
  fanyelv $\sim$ja, 17
x-szorzat
  fanyelv $\sim$a, 17

ábécé, 6
  rangolt $\sim$, 11
  rangolt ábécéhez tartozó közönséges $\sim$, 15
abszorbens elem, 42
állapot
  0-$\sim$, 14
  automata $\sim$a, 7
  csapda $\sim$, 42
átmenetfüggvény
  $\sim$ kiterjesztése, 7
  automata $\sim$e, 7
automata, 7
  X-$\sim$, 7
  X-feletti $\sim$, 7
  monoton $\sim$, 20
  nilpotens $\sim$, 42
  összefüggő rész$\sim$, 8

direkt szorzat
  Σ-algebrák $\sim$a, 57
  automaták $\sim$a, 44
  egyesítés $\sim$, 57
  metszet $\sim$, 60

egyesítés
  fanyelv $\sim$e, 17
  nyelv $\sim$e, 9
erdő
  determinisztikus $\sim$, 13

fa
  $\sim$ gyökere, 13
  $\sim$ levelei, 13
  $\sim$ magassága, 13
  $\sim$ részfáinak halmaza, 14
faautomata
  DR-$\sim$, 12
  monoton DR-$\sim$, 23
  nilpotens DR-$\sim$, 48
  normalizált DR-$\sim$, 14
  redukált DR-$\sim$, 15
fanyelv
  x-homogén $\sim$, 38

- x-termináló ∼, 52
- determinisztikus felszálló ∼, 13
- DR-∼, 13
- DR-faautomata által felismert ∼, 13
- DR-faautomata egy állapotából felismert ∼, 14
- monoton DR-∼, 23
- nilpotens DR-∼, 48
- reguláris ΣX_n-kifejezés által leírt ∼, 18
- út-teljes ∼, 51
- zárt ∼, 16

homomorf kép
- automata ∼e, 44

homomorfizmus, 44

iterációs magasság
- reguláris ΣX_n-kifejezés ∼a, 23
- reguláris fanyelv ∼a, 24
- reguláris kifejezés ∼a, 21
- reguláris nyelv ∼a, 21

iterációs rész
- triviális reguláris kifejezés ∼e, 26

iterált
- nyelv ∼ja, 9

kezdőállapot
- automata ∼a, 7
- DR-faautomata ∼a, 12

kezdőszelet
- szó ∼e, 7
- szó valós ∼e, 7

komplementer
- fanyelv ∼e, 61
- nyelv ∼e, 42

konkatenáció
- nyelv ∼ja, 9

lánc, 26

láncnyelv, 21
- R-∼, 40
- általánosított R-∼, 41
- egyszerű szeminormális ∼, 21
- normális ∼, 21
- sima ∼, 43
- sima ∼ hossza, 43
- sima R-∼, 54
- szeminormális ∼, 21
- véges sima ∼, 43
- végtelen sima ∼, 43

nilpotencia fok
- Σ-algebra ∼a, 48
- nilpotens automata ∼a, 42
- nilpotens DR fanyelv ∼a, 48
- nilpotens nyelv ∼a, 42

nilpotens elem
- Σ-algebra ∼e, 48
- nilpotens automata ∼e, 42

nyelv, 7
- X-feletti ∼, 7
- automata által felismert ∼, 8
- felismerhető ∼, 8
- fundamentális ∼, 20
- monoton ∼, 20
- nilpotens ∼, 42
- reguláris ∼, 10
- reguláris kifejezés által leírt ∼, 9
- sztring ∼, 7

prefix
- sima láncnyelv ∼e, 43
- szó ∼e, 7

reguláris ΣX_n-kifejezés, 18
  $\sim$ redundáns részkifejezése, 19
  $\sim$ részkifejezése, 18
  redukált $\sim$, 19
reguláris kifejezés
  X-feletti $\sim$, 9
  $\sim$ redundáns részkifejezése, 10
  $\sim$ részkifejezése, 10
  DR-faautomatához tartozó sima $\sim$, 50
  DR-faautomatához tartozó triviális $\sim$, 26
  redukált $\sim$, 10

szó
  $\sim$ hossza, 6
  üres $\sim$, 6
szavak
  X-feletti $\sim$, 6
  X-feletti összes $\sim$ halmaza, 6

termináló rész
  triviális reguláris kifejezés $\sim$e, 26
terminált változó
  reguláris ΣX_n-kifejezés $\sim$ja, 30

út, 16
  $\sim$ által generált leképezés, 17
  x-$\sim$, 15
út-nyelv
  fanyelv $\sim$ei, 16

végállapot
  automata $\sim$a, 7
  DR-faautomata $\sim$ vektora, 12