

Kozma József

**Lokális differenciálható
loopok és kanonikus
koordináta-rendszereik**

Doktori értekezés

Szeged, 1989



TARTALOM

BEVEZETÉS	1
I. FEJEZET	
LIE-CSOPORTOK EGYPARAMÉTERES RÉSZCSOPORTJAI ÉS ELSŐ FAJÚ KANONIKUS KOORDINÁTA-RENDSZEREI	7
I.1. Lie-csoportok balinvariáns vektormezői	9
I.2. Vektormezők integrálgörbéinek létezése	17
I.3. Lie-csoportok egyparaméteres részcsoportjai és a balinvariáns vektormezők integrálgörbéi	21
I.4. Az első fajú kanonikus koordináta-rendszerek és az egyparaméteres részcsoportok	26
II. FEJEZET	
A LOOP-SZORZÁS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA KANONIKUS KOORDINÁTA-RENDSZERBEN	37
II.1. Lokális loopok és kanonikus koordináta- rendszerek	39
II.2. Kanonikus koordináta-rendszer létezése	44
II.3. A linearizáló transzformáció létezésének bizonyítása	50
II.4. Kapcsolat egy loop kanonikus koordináta- rendszerei között	60
III. FEJEZET	
LOOPOK VISELKEDÉSE KANONIKUS KOORDINÁTA- RENDSZEREKBEN	64
III.1. Kanonikus koordináta-rendszerek és első fajú kanonikus koordináta-rendszerek	66
III.2. A részloopok alakja kanonikus koordináta- rendszerekben	69

IV. FEJEZET	
RÉSZLOOPOKKAL RENDELKEZŐ LOOPOK ÉS RÉSZLOOPOK NÉLKÜLI LOOPOK	75
IV.1. Loopok minden irányban létező részloopokkal	80
IV.2. Algebrai azonosságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok	83
IV.3. Az $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loopok geometriai jelentése	97
IV.4. Egyparaméteres részloop nélküli loopok	103
IRODALOMJEGYZÉK	110

BEVEZETÉS

A *Lie-csoportok* elméletében sok vizsgálatnál játszanak igen fontos szerepet az egyparaméteres részcsoporthok. Mivel egy *Lie-csoport*nak minden irányban létezik egyparaméteres részcsoporthja, ezért ezek a részstruktúrák különösen jó szolgálatot tesznek a *Lie-csoportok* jellemzésekor. Ugyanez a helyzet az egyparaméteres részcsoporthokkal rendelkező *loopok* esetében is.

A *Lie-loopok* azonban - amelyeket a *Lie-csoportokból* az asszociativitás feltételének elhagyásával kapunk - általában nem rendelkeznek egyparaméteres részcsoporthokkal.

Ekkor viszont természetesen adódik a következő kérdés: Eljuthatunk-e az ilyen értelemben gyengébb algebrai tulajdonságú *Lie-loopok* jellemzéséhez egyparaméteres *részloopok* leírásán keresztül ?

Mi az analógia az egyparaméteres részcsoporthok és az egyparaméteres *részloopok* között? A vizsgálatok szerint a *Lie-csoportok* egyparaméteres részcsoporthjainak azt a tulajdonságát tekinthetjük alkalmas analógiának, hogy segítségükkel *első fajú kanonikus koordináták* vezethetők be, s ezekben koordinátákban a részcsoporth lineárisává válik.

Ettől a ponttól két lehetséges vizsgálati irány jelölhető ki.

- I. Bizonyítsuk be, hogy egy lokális differenciálható *loop*nak minden irányban létezik egyparaméteres *részloopja*, s ezeknek a *részloopoknak* a segítségével jussunk el kanonikus koordinátákhoz. Vagyis olyan kitüntetett koordináta-rendszert vezessünk be ilyen módon, amelyben a *loopszorzás* s így maga a *loop* is egyszerű alakú lesz.

II. Definiáljunk kanonikus koordinátákat az egyparaméteres részloopok létezésétől - vagy nem létezésétől - függetlenül. Ezután térjünk vissza az egyparaméteres részloopok vizsgálatára, amely során feltehetjük, hogy az egyparaméteres részloop alakja egyszerű.

A loopok és kvázicsoportok (a mi mostani megközelítésünkben "egységelem nélküli loopok") kutatása jelentős részben olyan osztályok vizsgálatára irányul, amelyeket egy vagy több algebrai azonosság segítségével adnak meg: pl. *Bool-loopok*, *Moufang-loopok*, *inverz tulajdonságú loopok* (a definíciókat illetően ld. [1]), *elasztikus*, *alternatív*, *monoasszociatív*, *(erős) hatvány-asszociatív kvázicsoportok* illetve *loopok* (lásd a későbbi IV. FEJEZETBEN).

Az első lehetséges vizsgálati irány jelentős szerephez jutott több olyan munkában is, amelyek a fent felsorolt, vagy hozzájuk hasonlóan definiált további struktúrák elemzésével foglalkoznak. Így például E.N. KUZMIN egy dolgozatában [11] bebizonyította, hogy az *erősen hatványasszociatív loopoknak* minden irányban létezik egyparaméteres *részcsoportha*. ACZÉL JÁNOS [1] cikkében is megtalálható ezen állítás egy részesetének bizonyítása. A szerző megmutatja, hogy egy *egydimenziós erősen hatványasszociatív loop csoport*. Egy projektív hiperfelületekkel megadott (M.A. AKIVISZ [3]) kvázicsoport osztály későbbi vizsgálata során kiderült, hogy ezen osztály loopjainak minden irányban léteznek az egyparaméteres részloopjai, sőt a magasabb dimenziós részloopjai is (M.A. AKIVISZ és A.M. SELEHOV [5]).

A második vizsgálati irány bemutatására is megemlíthető több fontos munka a lokális kvázicsoportok és loopok elméletéből. Kanonikus koordináta-rendszer (kanonikus sorfejtés) bevezetéséről szól M.A. AKIVISZ közleménye [2], *tetszőleges analitikus loopok* esetén. A megfogalmazott állítást egy speciális esetre 1986-ban bizonyította

BEVEZETÉS

A.M. AKIVISZ és M.A. SELEHOV [4]. Az úgynevezett 4 -webekre az általánosítás V.V. GOLDBERG [7] munkájában található meg. A speciális esetre adott bizonyítás lehetővé teszi a kanonikus koordináta-rendszerek olyan definícióját, amely teljesen kielégítő módon vihető át a differenciálható loopok esetére. Amint azt látni fogjuk a III. FEJEZETBEN, az ilyen kanonikus koordináta-rendszerben a loop valóban egyszerű alakú.

Dolgozatunk tárgya a második vizsgálati irány. S miközben bemutatjuk a kanonikus koordináta-rendszerekre és a részloopokra vonatkozó eredményeinket, az is világossá válik, hogy az első vizsgálati irány a loopok esetében nem járható út.

Az I. FEJEZETBEN áttekintjük a Lie-csoportok elméletének néhány klasszikus eredményét. Azokat az összefüggéseket vesszük számba, amelyek az egyparaméteres részcsoportok és az első fajú kanonikus koordináta-rendszerek létezésére, illetve ezek kapcsolataira vonatkoznak. Az előforduló fogalmak definícióját minden esetben megadjuk. Ugyancsak részletesen ismertetjük a felhasznált állítások bizonyítását. Az első három szakaszban az M.M. POSZTNYIKOV művében [13] bemutatott felépítést követjük. Amikor a bizonyításoknak a könyvben elhagyott (elsősorban technikai jellegű) részleteit tárgyaljuk, az A.A. SAGLE és R.E. WALDE könyvében [14] is használatos technikai apparátust alkalmazzuk. A fejezet negyedik szakaszában található az első fajú kanonikus koordináta-rendszerek létezésére vonatkozó tétel. Ennek bizonyítása az L.SZ. PONTRJAGIN monográfiájában [12] adott bizonyítás gondolatmenete szerint történik.

A dolgozat II., III. és IV.FEJEZETE tartalmazza a témakör tanulmányozása során elért saját eredményeket.

Ezek nagyobbik részének publikálása folyamatban van, a

BEVEZETÉS

kisebb, közlésre eddig nem szánt észrevételek szintén szorosan kapcsolódnak a témához. Az ebben a három fejezetben pontokba szedett minden tétel, állítás, következmény, illetve megjegyzés az új eredmények közé tartozik, kivéve a 2.2.2. Tételt (amely S. STERNBERG egy tételének speciális esete), illetve annak bizonyítása során a 2.3.1., 2.3.3. és a 2.3.4. Lemmát.

A II. FEJEZET az úgynevezett kanonikus koordináta-rendszereket vizsgálja C^k osztályú lokális differenciálható loopokra vonatkozóan. A lokális differenciálható loop és a kanonikus koordináta-rendszer fogalmának bevezetése (1. szakasz) után mondjuk ki és igazoljuk a fejezet fő tételét, amely egyben az egész dolgozat egyik legfontosabb eredménye: bármely C^k osztályú lokális differenciálható loophoz létezik kanonikus koordináta-rendszer, és ez a koordináta-rendszer szintén C^k osztályú. Ennek a koordináta-rendszernek a létezése biztosítja az alapot további vizsgálatainkhoz. A differenciálhatósági rend megmaradása pedig - elvi jelentősége mellett - lehetővé teszi, hogy e koordináta-rendszert a loop lokális térképei közül válasszuk ki (2. szakasz). A bizonyítás során alkalmazzuk S. Sternbergnek egy általánosabb érvényű tételét. E tétel igazolását az általunk felhasznált speciális esetre a 3. szakaszban adjuk meg. A 4. szakaszban a kanonikus koordináta-rendszer unicitásának problémáját vizsgáljuk, s megállapítjuk, hogy egy C^k osztályú lokális differenciálható loop kanonikus koordináta-rendszerei csak lineáris transzformációban különböznek egymástól.

A III. FEJEZETBEN térünk rá a részloopok létezésének kérdésére. Az 1. szakaszban megmutatjuk, hogy egy loop egyparaméteres részcsoportjai kanonikus koordináta-rendszerben lineárisak (a Lie-csoportok első fajú kanonikus koordináta-rendszerei pontosan ezzel a tulajdonsággal voltak

definiálva). Az általánosítás következő lépése (3. szakasz) a dolgozat második fő eredményét jelentő tétel. E szerint *kanonikus koordináta-rendszerben tetszőleges r -paraméteres részloop lokálisan megegyezik egy r -dimenziós síkkal*. A tétel jelentősége a következőben áll: kanonikus koordináta-rendszerben könnyen eldönthetjük, hogy egy loopnak valamely irányban létezik-e részloopja vagy sem. E jól használható kritérium lesz az az eszköz, amelyet a következő fejezetben alkalmazni fogunk.

A IV. FEJEZETBEN bizonyos loopok osztályait vizsgáljuk a részloopok létezésének szempontjából. A Bevezetésben bemutatjuk azt a geometriai úton definiált kvázicsoport-osztályt (M.A. AKIVISZ [3]), amelynek szoros kapcsolatát az általunk analitikus úton megadott loop-osztállyal a 3. szakaszban mutatjuk meg. A 2. szakaszban különböző egyszerű algebrai azonosságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopokat vizsgálunk meg, s szükséges és elegendő feltételét adjuk meg annak, hogy egy ilyen loop csoport legyen. A dolgozat legfontosabb eredményeinek sorába tartoznak a következők. Három olyan loop-osztályt adunk meg, amelyek definíciójukat tekintve igen közel állnak egymáshoz, mégis az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopoknak minden irányban létezik részloopja (1. szakasz); az $(\mathbb{R}^n; \alpha, -\alpha; \rho, a)$ -loopoknak csak az a irányban létezik egyparaméteres részloopja; végül az $(\mathbb{R}^n; \alpha, -\alpha; \rho, a; \sigma, b)$ -loopoknak semmilyen irányban sem létezik egyparaméteres részloopja (4. szakasz).

A dolgozatban a közölt definíciókat, példákat, tételeket, azok következményeit, továbbá a fontosabb megjegyzéseket pontokba szedtük. Például a 4.2.3. Definíció számozása arra utal, hogy a IV.FEJEZET 2. szakaszának 3. sorszámozott fogalmáról (más esetben tételéről, stb.) van szó. Az utolsó fejezet Bevezetésében megadott sorszámozott példák ennek a rendnek megfelelően kaptak 4.0.1. és 4.0.2.

BEVEZETÉS

sorszámot. A formulák számozása fejezetenként történik.

Köszönetemet fejezem ki Dr.Nagy Péter tanszékvezető egyetemi docensnek a téma kutatása során nyújtott támogatásáért és a dolgozat elkészítéséhez adott iránymutatásaiért. Köszönet illeti Kurusa Árpád tudományos segédmunkatársat a szövegszerkesztési és grafikai munkák elvégzéséhez nyújtott segítségéért.

I. FEJEZET

LIE-CSOPORTOK EGYPARAMÉTERES RÉSZCSOPORTJAI ÉS ELSŐ FAJÚ KANONIKUS KOORDINÁTA-RENDSZEREI

Ebben a fejezetben a Lie-csoportok elméletének alapvető eredményei közül néhány olyat tekintünk át, amely a loopokra vonatkozó vizsgálatainkban különösen fontos szerepet fog játszani. Elsősorban azoknak az eredményeknek a kifejtésére törekszünk, amelyek megalapozzák a Lie-loopok részloopjainak a Lie-csoportok részcsoporthaival analóg vizsgálatát.

A fent megfogalmazott cél érdekében részletesen ismertetjük mindazokat a fogalmakat és állításokat, amelyek a Lie-csoportok egyparaméteres részcsoporthaival, az e részcsoporthok révén bevezethető első fajú kanonikus koordináta-rendszerekkel és e két fontos fogalom egymáshoz való viszonyával kapcsolatosak.

A Lie-csoportok elméletének legfontosabb fogalmait az 1. szakaszban definiáljuk (balinvariáns vektormező, Lie-csoport, stb.). Megmutatjuk, hogy a *balinvariáns vektormezők tere izomorf az egységpontban vett érintőtérrel* (1.1.5. Lemma), valamint hogy *tetszőleges Lie-csoport párhuzamosítható* (1.1.7. Lemma).

A 2. szakasz fő állítása (1.2.3. Tétel) szerint *egy differenciálható sokaság vektormezőjéhez létezik tetszőleges ponton (0 paraméterérték esetén) áthaladó integrálgörbe*. Egy a későbbiekben alkalmazott technikai lemma (1.2.4. Lemma) bizonyítását is megadjuk.

Az egyparaméteres részcsoporthok és az integrálgörbék kapcsolatára (3. szakasz) a következő tételek igazolásával mutatunk rá: *egy Lie-csoport minden egyparaméteres részcsoporthja egy balinvariáns vektormező integrálgörbéje* (1.3.2. Tétel); *az egységponton ($t=0$ esetén) áthaladó*



bármely maximális integrálgörbe egyparaméteres részcsoport (1.3.3. Tétel).

E három szakaszban a felépítés javarészen az M.M. POSZTNYIKOV [13] által bemutatott gondolatmenetet követi, míg a matematikai apparátus kiépítésében inkább A.A. SAGLE és R.E. WALDE művét [14] tartjuk szem előtt. Néhány esetben azonban a jelölésekben vagy a bizonyítás egyes részleteiben a hivatkozott munkában leírttól eltérünk az egységes szerkezet és jelölésrendszer érdekében.

A 4. szakaszban áttérünk a lokális tárgyalásra. Megadjuk a lokális csoport, a germ és a lokális Lie-csoport illetve az első fajú kanonikus koordináta-rendszer definícióját (a [14] szerint). Ezután igazoljuk az egyparaméteres részcsoport első fajú kanonikus koordináta-rendszerbeli linearitását (1.4.10. Tétel), majd a fejezet legfontosabb eredményét (1.4.11. Tétel): minden C^k osztályú lokális Lie-csoopthoz létezik C^{k-1} osztályú első fajú kanonikus koordináta-rendszer. E tételek igazolásának menete a [12]-ben leírttal egyezik meg.

1.1. Lie-csoportok balinvariáns vektormezői

Bár későbbi vizsgálataink lokális jellegűek lesznek, a fogalmak megadását mégsem a *lokális* Lie-csoportok definiálásával kezdjük - tekintettel arra, hogy az első idézett eredmények nem csak lokális Lie-csoportokra lesznek igazak.

1.1.1. Definíció: A $\mathcal{G}$ analitikus sokaságot a rajta értelmezett ϑ szorzásművelettel *Lie-csoportnak* nevezzük, ha

- a) $(\mathcal{G}; \vartheta)$ csoport, egységeleme e ,
- b) a $\vartheta : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}; (x, y) \mapsto z$ szorzásművelet analitikus a $\mathcal{G}$ analitikus struktúrájára vonatkozóan. $\square$

A következőkben - ha mást nem mondunk - differenciálható leképezés, függvény alatt mindig kellően sokszor differenciálható (ill. analitikus) leképezést értünk. Vagyis a leképezést mindig legalább annyiszor differenciálhatónak tekintjük, mint amennyi az adott definíció ill. állítás szempontjából szükséges. Hasonlóan, külön megjegyzés híján a dolgozatban szereplő sokaságok dimenziója n .

1.1.2. Definíció: A $\mathcal{G}$ differenciálható sokaságnak a $T(\mathcal{G})$ érintőnyalábra való

$$X : \mathcal{G} \rightarrow T(\mathcal{G}) : a \mapsto X_a \quad (a \in \mathcal{G})$$

differenciálható leképezését a $\mathcal{G}$ sokaság *vektormezőjének* nevezzük. $\square$

A $\mathcal{G}$ sokaságon értelmezett vektormezők által alkotott lineáris teret $\alpha(\mathcal{G})$ jelöli. A $\mathcal{G}$ sokaság $a \in \mathcal{G}$ pontbeli érintői (az a pont valamely környezetében differenciálható

valós függvények derivációi) a $T_a(\mathcal{G})$ érintőteret feszítik ki. Az érintőtér - amely szintén lineáris tér - elemei az X_a vektorok.

Legyenek $\mathcal{M}$ és $\mathcal{N}$ differenciálható sokaságok.

1.1.3. Definíció [13]: A $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ differenciálható transzformáció *differenciálja* a

$$d\Phi : T(\mathcal{M}) \longrightarrow T(\mathcal{N}) : X_a \longrightarrow (d\Phi)_a(X_a)$$

leképezés, amelyet a

$$\{ d\Phi(a)(X_a) \}(f) = X_a(f \circ \Phi)$$

kifejezés definiál, ahol f a $\Phi(a)$ pont környezetében differenciálható valós függvény. $\square$

Tekintsük a $(\mathcal{G}; g)$ Lie-csoport következő transzformációját:

$$L_a : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} : b \longmapsto g(a, b)$$

(tetszőleges $b \in \mathcal{G}$ -re), ahol az a rögzített eleme $\mathcal{G}$ -nek. Ezt a differenciálható leképezést *bal eltolásnak* nevezzük.

Az egyparaméteres részcsoporthoz szoros kapcsolatban lesznek a Lie-csoportok balinvariáns vektormezőivel.

1.1.4. Definíció [13]: A $(\mathcal{G}; g)$ Lie-csoport X vektormezőjét *balinvariáns vektormezőnek* nevezzük, ha tetszőleges $a \in \mathcal{G}$ esetén teljesül az alábbi:

$$X \circ L_a = (dL_a) \circ X . \square$$

A definícióban szereplővel egyenértékű a következő

formula:

$$(dL_a)^{-1} \circ X_{g(a,b)} = X_b \quad (1.1)$$

tetszőleges $a, b \in \mathcal{G}$ -re. A balinvariáns vektormezők lineáris terét $L(\mathcal{G})$ jelölje.

Az eddigi fogalmak felhasználásával könnyen adódik a következő lemma.

1.1.5. Lemma [13]: A $\mathcal{G}$ Lie-csoport balinvariáns vektormezőinek tere izomorf a $T_e(\mathcal{G})$ érintőtérrel. $\square$

Bizonyítás: Legyen $A \in T_e(\mathcal{G})$ tetszőleges érintővektor. Ekkor az

$$R_A : \mathcal{G} \longrightarrow T(\mathcal{G}) : a \longmapsto (dL_a)(A) \quad (a \in \mathcal{G})$$

leképezés vektormező. Ehhez azt kell csak megmutatni, hogy az R_A leképezés differenciálható. E célból vezessünk be tetszőleges lokális koordinátákat az

$$x : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^n : p \longmapsto x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$$

koordináta-leképezéssel. Vagyis az x a $p \in \mathcal{G}$ pont valamely környezetében van értelmezve. Továbbá $x^i = u^i \circ x$ az x leképezés i -edik komponense ($i=1, \dots, n$), ahol u^i az i -edik koordináta-függvény: egy $\mathbb{R}^n$ -beli ponthoz annak i -edik koordinátáját rendeli. A $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ($i=1, \dots, n$) koordináta-vektormezők

segítségével bevezethető egy $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}(e), \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}(e) \right\}$ bázis a $T_e(\mathcal{G})$ érintőtéren a $\frac{\partial}{\partial x^i}(p)(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ definícióval.

Ezekben a lokális koordinátákban a $d(L_a)_e$ lineáris transzformáció mátrixát a

$$d(L_a)_e \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(e) \right) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \frac{\partial}{\partial y^j} \quad (a) \in T_a(\mathcal{G}) \quad (i=1, \dots, n)$$

felbontásból kaphatjuk: (b_{ij}) . Itt $a \frac{\partial}{\partial y^j}(a)$ ($i=1, \dots, n$)

bázis az a pont környezetében az y koordináta-leképezéssel bevezetett koordinátákból adódik.

Legyenek $L_a^k = y^k \circ L_a$ ($k=1, \dots, n$), vagyis az L_a leképezés komponensei az y koordináta-rendszerben. Mivel y^k az a pontnál differenciálható valós függvény, ezért

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} L_a^k(e) &= \frac{\partial}{\partial x^i}(e)(y^k \circ L_a) = \left[d(L_a)_e \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(e) \right) \right] (y^k) = \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ji} \frac{\partial y^k}{\partial y^j}(a) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \delta_j^k = b_{ki}, \end{aligned}$$

amely szerint (b_{ij}) az L_a Jacobi-mátrixa ezekben a koordinátákban. Így ilyen koordináta-rendszerben az

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}(e) \text{ felbontás mellett}$$

$$\begin{aligned} R_A(a) &= (dL_a)_e(A) = (dL_a)_e \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}(e) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha^i (dL_a)_e \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(e) \right) = \sum_{i=1}^n \alpha^i \sum_{j=1}^n b_{ji} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}(a) \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha^i b_{ji} \frac{\partial}{\partial y^j}(a). \end{aligned}$$

Mivel a $\frac{\partial}{\partial y^j}$ ($j=1, \dots, n$) koordináta-vektormezők differenciálhatóak az a argumentum szerint, ezért ez igaz az R_A -ra is. Az R_A vektormezőre tetszőleges $a, b \in \mathcal{G}$ esetén az

$$\begin{aligned} R_A(g(a, b)) &= (dL_{g(a, b)})_e(A) = (d(L_a L_b))_e(A) = \\ &= (dL_a)_{L_b(e)} \circ (dL_b)_e(A) = (dL_a)_b \circ (dL_b)_e(A) = \end{aligned}$$

$$= (dL_a)_b \circ (dL_b)_e \circ R_A(e) = (dL_a)_b \circ R_A(b)$$

összefüggést nyerjük, ahol csak a definíciókat kellett használnunk. Itt először a -t a^{-1} -gyel helyettesítve az

$$R_A(g(a^{-1}, b)) = (dL_{a^{-1}})_b \circ R_A(b)$$

kifejezést, majd $g(a^{-1}, b) = c$ -t írva az

$$R_A(c) = (dL_{a^{-1}})_{g(a, c)} \circ R_A(g(a, c)),$$

végül c helyébe b -t írva az

$$R_A(b) = (dL_{a^{-1}})_{g(a, b)} \circ R_A(g(a, b)),$$

ami éppen az (1.1) összefüggés az R_A vektormezőre, vagyis R_A balinvariáns vektormező $\mathcal{G}$ -n.

Ezzel a $T_e(\mathcal{G})$ érintőtér minden A vektorára definiálva van egy R_A balinvariáns vektormező. Különböző A illetve B vektorhoz különböző R_A illetve R_B vektormező tartozik, hiszen ezeknek az e pontban felvett értékére $R_A(e) = A \neq B = R_B(e)$. Továbbá a $T_e(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{G}) : A \rightarrow R_A$ leképezés ráképezés is, mert bármely balinvariáns vektormezőre létezik inverze: az

$$\mathcal{I}(\mathcal{G}) \rightarrow T_e(\mathcal{G}) : X \rightarrow X_a = A$$

leképezés. A szükséges izomorfizmus a fenti $\mathcal{I}(\mathcal{G}) \rightarrow T_e(\mathcal{G})$ leképezés. $\square$

Ennek az izomorfizmusnak a segítségével azonosíthatjuk az $\mathcal{I}(\mathcal{G})$ és $T_e(\mathcal{G})$ lineáris tereket, amelyek dimenziója így természetesen megegyezik.

A következő lépés annak megmutatása, hogy a $\mathcal{G}$ Lie-csoport párhuzamosítható.

Legyen $\mathcal{M}$ differenciálható sokaság, és jelölje $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ az $\mathcal{M}$ -en értelmezett differenciálható függvények halmazát.

Értelmezzük tetszőleges $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ függvényre és $X \in \mathfrak{a}(\mathcal{M})$ vektormezőre az fX vektormezőt az alábbi formulával:

$$(fX)_a = f(a) \cdot X_a$$

tetszőleges $a \in \mathcal{M}$ -re.

1.1.6. Definíció [13]: Ha létezik az $\mathfrak{a}(\mathcal{M})$ -beli vektormezőknek olyan $X_1, \dots, X_n$ rendszere, hogy tetszőleges $\mathfrak{a}(\mathcal{M})$ -beli vektormező egyértelműen állítható elő

$$X = f^1 X_1 + \dots + f^n X_n$$

alakban $(f^1, \dots, f^n \in \mathcal{F}(\mathcal{M}))$, akkor az $\mathcal{M}$ sokaságot *párhuzamosíthatónak* nevezzük. $\square$

1.1.7. Lemma [13]: Tetszőleges $\mathcal{G}$ Lie-csoport párhuzamosítható. $\square$

Bizonyítás: Legyen $X \in \mathfrak{a}(\mathcal{G})$ tetszőleges vektormező, és legyen $X_1, \dots, X_n$ a balinverz vektormezők $\mathfrak{l}(\mathcal{G})$ lineáris terének bázisa. Bármely $a \in \mathcal{G}$ -re ekkor X_a egyértelműen felbontható az $\langle X_1 \rangle_a, \dots, \langle X_n \rangle_a$ bázisban. Ezért bármely $X \in \mathfrak{a}(\mathcal{G})$ vektormezőre léteznek olyan f^i függvények, amelyeket az a pontban az előző felbontás együtthatóiként definiálunk:

$$f^i : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R} ; a \longmapsto f^i(a) \quad (i=1, \dots, n)$$

bármely $a \in \mathcal{G}$ -re. Vagyis

$$X = f^1 X_1 + \dots + f^n X_n.$$

Igy azt kell megmutatnunk, hogy ezek az f^i függvények differenciálhatóak: $f^i \in \mathcal{F}(\mathcal{G})$, $(i=1, \dots, n)$.

Jelölje $(U; \phi)$ a $\mathcal{G}$ sokaság tetszőleges koordináta-térképét, és legyenek $x^1, \dots, x^n$ az egyes koordinátafüggvények. Az X_j vektormezők differenciálhatóak, ezért a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ koordináta-vektormezők szerinti

$$X_j = X_j^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + X_j^n \frac{\partial}{\partial x^n} \quad (j=1, \dots, n)$$

felbontásaikban szereplő X_j^i függvények $(i, j=1, \dots, n)$ is differenciálhatóak. Az U környezet bármely pontjára $(X_1)_a, \dots, (X_n)_a$ a $T_a(\mathcal{G})$ tér bázisa, ezért az (X_j^i) átmenetmátrix a $\left[\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right]$ bázisra nemelfajuló az U környezetben: $\det(X_j^i) \neq 0$. Következésképpen létezik az inverze, az (Y_i^k) mátrix. Vagyis

$$\sum_{i=1}^n X_j^i Y_i^k = \delta_j^k \quad (j, k=1, \dots, n),$$

ahol δ_j^k a Kronecker-delta. A feltételek szerint

$X = \sum_{j=1}^n f^j X_j$, ezért

$$\begin{aligned} X &= \sum_{j=1}^n f^j X_j \left[\sum_{i=1}^n X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f^j X_j^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= \left[\sum_{j=1}^n f^j X_j^1 \right] \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \left[\sum_{j=1}^n f^j X_j^n \right] \frac{\partial}{\partial x^n}, \end{aligned}$$

vagyis a differenciálható X vektormezőnek a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ $(i=1, \dots, n)$

koordináta-vektormezők szerinti komponensei $\sum_{j=1}^n f^j X_j^i$ $(i=1, \dots, n)$, és ezért differenciálható függvények. Érvényes továbbá az

$$f^k = \sum_{j=1}^n f^j \delta_j^k = \sum_{j=1}^n f^j \sum_{i=1}^n X_j^i Y_i^k = \sum_{i=1}^n X_j^i \left(\sum_{j=1}^n f^j X_j^i \right) Y_i^k$$

kifejezés, amelyben Y_i^k komponensfüggvények, valamint a $\sum_{j=1}^n f^j X_j^i$ ($i=1, \dots, n$) függvények is differenciálhatók, így az f^k függvények is azok az U környezetben. Mivel az f^k függvények minden U koordináta-környezetben differenciálhatók, ezért az egész $\mathcal{G}$ sokaságon is azok, s ezzel a bizonyítás kész. $\square$

I.2. Vektormezők integrálgörbéinek létezése

A következőkben rátérhetünk az integrálgörbék létezésének bizonyítására. Síma görbén általában egy

$$\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M} ; t \longmapsto \gamma(t)$$

differentiálható leképezést értünk. (Néha ezt a leképezést azonosítjuk a képhalmazával, és a görbén a $\gamma(t)$ ponthalmazt is értjük.)

1.2.1. Definíció [13]: A $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M} ; t \longmapsto \gamma(t)$ síma görbét az $X \in \alpha(\mathcal{M})$ vektormező *integrálgörbéjének* nevezzük, ha bármely t pontjában $X_{\gamma(t)}$ az érintővektora. $\square$

1.2.2. Definíció [14]: A γ görbe t pontbeli érintőjét $\dot{\gamma}(t)$ -vel jelöljük, és a

$$\dot{\gamma}(t) = \langle D\gamma \rangle_t \left(\frac{d}{du} \right)_t$$

kifejezéssel értelmezzük, ahol u az $\mathbb{R}$ sokaságot $\mathbb{R}$ -be leképező természetes koordináta-függvény:

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; t \longmapsto t,$$

és a neki megfelelő koordináta-vektormező $\frac{d}{du}$. $\square$

Írjuk fel $\dot{\gamma}(t)$ -t a lokális $(U; \phi)$ környezetben, ahol $x^1, \dots, x^n$ jelölik a koordináta-függvényeket:

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (x^i \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

I.2. Vektormezők integrálgörbéinek létezése

Az X vektormező az $(U; \phi)$ koordináta-környezetben felírva:

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

ahol a_i az M -en értelmezett síma függvény.

Ekkor az $(U; \phi)$ koordinátákban kifejezve a definíció feltételét, azt kapjuk, hogy γ az X vektormező integrálgörbéje akkor és csak akkor, ha

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (x^i \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n a_i (x^1 \circ \gamma(t), \dots, x^n \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i},$$

vagyis

$$\frac{d}{dt} (x^i \circ \gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i} = a_i (x^1 \circ \gamma(t), \dots, x^n \circ \gamma(t))$$

($i=1, \dots, n$). Ezek az integrálgörbék eleget tesznek a $\gamma(0) = a$ kezdeti feltételnek. Így ennek a differenciálegyenletnek az (egyértelmű) megoldásai a definíció értelmében integrálgörbéi lesznek az X vektormezőnek. A fenti megfontolásokat a következő formában foglalhatjuk össze:

1.2.3 Tétel: Legyen M C^k osztályú differenciálható sokaság, $X \in \mathfrak{a}(M)$ C^k osztályú differenciálható vektormező és $a \in M$. Ekkor létezik C^{k-1} osztályú maximális γ_a integrálgörbe X -hez, amely $t=0$ esetén áthalad az a ponton, vagyis $\gamma_a(0) = a$. $\square$

Az integrálgörbe maximális volta azt jelenti, hogy nem restriktója valamely bővebb intervallumon értelmezett integrálgörbének.

A következőkben fontos lesz a Lie-csoportok balinvariáns vektormezőinek alábbi jellemzése.

I.2. Vektormezők integrálgörbéinek létezése

1.2.4. Lemma [13]: Az X vektormező a $\mathcal{G}$ Lie-csoporton akkor és csak akkor balinvariáns, ha a $\mathcal{G}$ tetszőleges két a , b pontjára érvényes a

$$\gamma_{g(a,b)} = L_a \circ \gamma_b \quad (1.2)$$

ahol $\gamma_{g(a,b)}$ illetve γ_b az X vektormezőnek a $g(a,b)$ ill. b ponton átmenő maximális integrálgörbéje, vagyis érvényes a

$$\gamma_{g(a,b)}(t) = g(a, \gamma_b(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

egyenlőség. $\square$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy (1.2) érvényes az X vektormező integrálgörbéire. Jelölje a γ görbe t pontbeli érintőjét $\dot{\gamma}(t) = (D\gamma)_t \left(\frac{d}{du} \right)_t$. Tetszőleges rögzített $a \in \mathcal{G}$ esetén a

$$\psi_b(t) = L_a \circ \gamma_{g(a^{-1}, b)}(t)$$

kifejezés tetszőleges $b \in \mathcal{G}$ pontra egy $\psi_b : t \mapsto \psi_b(t)$ görbét definiál. Ez a görbe $t = 0$ esetén átmegy a b ponton, mivel

$$\psi(0) = L_a \circ \gamma_{g(a^{-1}, b)}(0) = \gamma_{g(a, g(a^{-1}, b))} = \gamma_b(0) = b.$$

Tekintsük tetszőleges $b \in \mathcal{G}$ -re a ψ_b görbe $t = 0$ pontbeli

$$\dot{\psi}_b(0) = (D\psi_b)_0 \circ \frac{d}{du} = Y_b$$

érintőjét. Ez a hozzárendelés vektormezőt definiál $\mathcal{G}$ -n:

$$Y : b \mapsto Y_b,$$

amelyre

I.2. Vektormezők integrálgörbéinek létezése

$$\begin{aligned}
 Y_b &= (D\psi_b)_0 \circ \frac{d}{du} = \left(D \left(L_a \circ \gamma_{g(a^{-1}, b)} \right) \right)_0 \frac{d}{du} = \\
 &= (DL_a)_{\gamma_{g(a^{-1}, b)}(0)} \circ \left(D\gamma_{g(a^{-1}, b)} \right)_0 \frac{d}{du} = \\
 &= (DL_a)_{g(a^{-1}, b)} \circ \left(D\gamma_{g(a^{-1}, b)} \right)_0 \frac{d}{du} = \\
 &= (DL_a)_{g(a^{-1}, b)} \circ \dot{\gamma}_{g(a^{-1}, b)}(0) = (DL_a)_{g(a^{-1}, b)} \circ X_{g(a^{-1}, b)}.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Nyilvánvaló, hogy az $(L_a)_{g(a^{-1}, b)}$ és az $X_{g(a^{-1}, b)}$ a $g(a^{-1}, b)$ szerint, és $g(a^{-1}, b)$ a b szerint differenciálható, így Y_b is differenciálható b szerint, amiért ezzel Y_b valóban vektormező.

Mivel (1.2) érvényes, ezért $\psi_b(t) = \gamma_b(t)$, és így $\psi(t)$ az X vektormező b ponton $t = 0$ paraméterérték esetén áthaladó integrálgörbéje, vagyis $X_b = Y_b$. Eszerint

$$X_b = (DL_a)_{g(a^{-1}, b)} \left(X_{g(a^{-1}, b)} \right),$$

és ha itt b -t a -val helyettesítjük, akkor adódik, hogy

$$X_b = (DL_a)_e (X_e),$$

ami az 1.1.4. Definíció utáni megjegyzés szerint az X vektormező balinvarianciáját jelenti.

Tegyük fel most, hogy az X vektormező balinvariáns. Ha a balinvariáns vektormezőt definiáló egyenlőségben a -t a^{-1} -gyel helyettesítjük, akkor (1.3) szerint $X_b = Y_b$ tetszőleges $b \in \mathcal{G}$ -re, ezért $X = Y$. Így az Y vektormező integrálgörbéi megegyeznek az X vektormezőéivel. A $t \mapsto \psi(t)$ görbék (maximális) integrálgörbéi az Y vektormezőnek, s az $X = Y$ egyenlőség miatt az X vektormezőnek is. Ezért a b ponton átmenő integrálgörbe egyértelműsége miatt

$$\gamma_b(t) = \psi_b(t) = g(a, \gamma_{g(a^{-1}, b)}(t)),$$

amivel a bizonyítás kész. $\square$

1.3. Lie-csoportok egyparaméteres részcsoporthai és a balinvariáns vektormezők integrálgörbéi

Mielőtt e szakasz fő állítására rátérnénk, megadjuk az egyparaméteres részcsoporthok definícióját.

1.3.1. Definíció: Legyen $(\mathcal{G}; g)$ Lie-csoport. A síma $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}$ görbét a Lie-csoport *egyparaméteres részcsoporthjának* nevezzük, ha

$$\beta(t+s) = g(\beta(t), \beta(s)). \quad \square$$

Ez azt jelenti, hogy egy Lie-csoport egyparaméteres részcsoporthja a valós számok additív csoportjának diffeomorfizmusa a $\mathcal{G}$ sokaságba. A leképezés definíciójából következik, hogy $\beta(0) = e$, ahol e a $\mathcal{G}$ csoport egységeleme.

Azt az állítást, hogy a Lie-csoportok egyparaméteres részcsoporthjai (amennyiben léteznek) balinvariáns vektormezők integrálgörbéi a $\mathcal{G}$ egységelemén keresztül, az alábbi tétel fejezi ki.

1.3.2. Tétel [13]: A $(\mathcal{G}; g)$ Lie-csoport minden egyparaméteres β részcsoporthja integrálgörbéje a $\mathcal{G}$ Lie-csoport valamely balinvariáns X vektormezőjének. $\square$

A részcsoporth definíciójából következően ezen β integrálgörbék mindegyikére $\beta(t) \Big|_{t=0} = e$.

Bizonyítás: Defináljuk a γ_a görbét a következő formulával:

$$\gamma_a(t) = g(a, \beta(t)) \quad a \in \mathcal{G}, t \in \mathbb{R}.$$

Ez a görbe t szerint síma lesz, és $t = 0$ esetén átmegy az a ponton. Az

I.3. Az egyparaméteres részcsoportok és az integrálgörbék

$$X : \mathcal{G} \longrightarrow T(\mathcal{G}) ; a \longmapsto \dot{\gamma}_a(0)$$

hozzárendelés vektormező $\mathcal{G}$ -n. Ehhez csak az X differenciálható voltát kell igazolni, ami viszont az

$$X_a = \dot{\gamma}_a(0) = D(g(a, \beta(t)))_0 \frac{d}{du} \Big|_0$$

kifejezés lokális $(U; \phi) = (U; x^1, \dots, x^n)$ koordináta-rendszerbeli

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(x^i \circ g(a, \beta(t)) \right)_0 \frac{\partial}{\partial x^i}$$

felírásából látható, hiszen az

$$\begin{aligned} x^i \circ g(a, \beta(t)) &= x^i \circ g \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1}) \circ (\phi \times \phi)(a, \beta(t)) = \\ &= x^i \circ g \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})(\phi(a), \phi(\beta(t))) \end{aligned}$$

$(i=1, \dots, n)$ koordináta-függvények $\phi(a)$ (és $\beta(t)$) szerint differenciálhatóak minden i -re a g differenciálhatósága miatt. Ennek a vektormezőnek az integrálgörbéi a $\gamma_a(t)$ görbék. Ehhez azt kell megmutatni, hogy $\dot{\gamma}_a(t) = X_{\gamma_a(t)}$, tetszőleges t pontban.

Tekintsük a $\gamma_a(t)$ görbe t paraméterértékéhez tartozó $L_a(\beta(t)) = c$ pontbeli $\dot{\gamma}_a(t)$ érintőjét. Az érintőleképezés definíciója szerint

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}_a(t))_0 &= (\dot{\gamma}_a(t))_{L_a(\beta(t))} = (DL_a)_{\beta(t)}(\dot{\beta}(t))_{\beta(t)} = \\ &= (DL_a)_{\beta(t)} \circ (DL_{\beta(t)})_e = (DL_{g(a, \beta(t))})_e \circ (\dot{\beta}(0)) = \\ &= (DL_{\gamma_a(t)})_e(\dot{\beta}(0)) . \end{aligned}$$

I.3. Az egyparaméteres részcsoportok és az integrálgörbék

$X_{\gamma_a(t)} = X_c$ viszont a definíciója szerint a $\dot{\beta}(0)$ érintőnek a $(DL_c)_e = (DL_{\gamma_a(t)})_0$ érintőleképezés melletti képe, vagyis éppen a fenti $(\dot{\gamma}_a(t))_c$ -vel egyenlő.

Igy speciálisan az $a = e$ választás mellett $\gamma_e(t) = \beta(t)$, vagyis $\beta(t)$ is az X vektormező integrálgörbéje. Továbbá a $\beta(t)$ integrálgörbére

$$\gamma_{g(a,b)}(t) = g(g(a,b), \beta(t)) = g(a, g(b, \beta(t))) = g(a, \gamma_b(t)). \square$$

A fenti állítás megfordítása, amelynek bemutatása ezen szakasz fő célja, a következőképpen fogalmazható meg.

1.3.3. Tétel [13]: A $\mathcal{G}$ Lie-csoport tetszőlegesen adott X balinvariáns vektormezőinek a $t = 0$ esetén az e ponton áthaladó maximális integrálgörbéi a $\mathcal{G}$ Lie-csoport egyparaméteres részcsoportjai. $\square$

Bizonyítás: A maximális integrálgörbék szükségképpen a teljes $\mathbb{R}$ halmazon értelmezve vannak (az egyparaméteres részcsoport definíciójának megfelelően), amennyiben a tétel állítása igaz. Mivel X balinvariáns vektormező, ezért integrálgörbéire teljesül a $\gamma_{g(a,b)} = L_a \gamma_b$ összefüggés, amely $b = e$ esetén azt jelenti, hogy a γ_a integrálgörbe és a $\gamma_e = \beta$ integrálgörbe ugyanazon a maximális $\mathbb{I}$ intervallumon vannak meghatározva.

Legyen $s \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $s \in \mathbb{I}$, és tekintsük azokat a $t \in \mathbb{R}$ értékeket, amelyekre $s+t \in \mathbb{I}$. Ezekre a t pontokra a $\gamma_e : t \mapsto \gamma_e(t+s)$ az X vektormező integrálgörbéje, mert a $\gamma_e(t+s)$ görbe t pontbeli érintője a $\gamma_e(t)$ görbe $(t+s)$ pontbeli érintője. A $\gamma_e(t+s)$ görbe $t = 0$ esetén a $\gamma_e(s) = b$ ponton megy át, s ezért megegyezik az ezen a ponton átmenő egyetlen $\gamma_b(t)$ integrálgörbével:

$$\gamma_e(t+s) = \gamma_b(t) .$$

Mindezek alapján

$$\begin{aligned}\beta(s+t) &= \beta(t+s) = \gamma_e(t+s) = \gamma_e(t) = \vartheta(b, \gamma_e(t)) = \\ &= \vartheta(\gamma_e(s), \gamma_e(t)) = \vartheta(\beta(s), \beta(t)),\end{aligned}\tag{1.4}$$

vagyis az $\mathbb{I}$ intervallumon β eleget tesz az egyparaméteres részcsoporth definíciójának. Ezért azt kell még megmutatnunk, hogy $\mathbb{I} \in \mathbb{R}$. Defináljuk tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ esetén $\beta(t)$ -t a következő módon. Legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\frac{t}{n} \in \mathbb{I}$, és legyen ekkor $\beta(t) = \left[\beta\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$, ahol a hatványozás a ϑ szorzásművelettel van természetes módon értelmezve. Ez a definíció független attól, hogy a $\frac{t}{n} \in \mathbb{I}$ feltételnek eleget tevő természetes számok közül melyiket választjuk. Ha pl. $\frac{t}{n}, \frac{t}{m} \in \mathbb{I}$, akkor

$$\beta(t) = \left[\beta\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n = \left[\beta\left(\frac{t}{nm}\right)^m \right]^n = \left[\beta\left(\frac{t}{nm}\right)^n \right]^m = \left[\beta\left(\frac{t}{m}\right) \right]^m = \beta(t).$$

Ezzel a β görbét kiterjesztettük az egész $\mathbb{R}$ halmazra.

A ϑ szorzásművelet differenciálhatósága miatt, a β görbe mindenütt differenciálható is, és eleget tesz az (1.4) egyenlőségnek, ezért egyparaméteres részcsoporth is.

Ha belátjuk, hogy a kiterjesztett $\beta(t)$ görbe integrálgörbe az egész $\mathbb{R}$ -en, akkor a tétel állítását beláttuk. Legyen $t \in \mathbb{R}$ és $f \in \mathcal{F}(a)$, ahol $\mathcal{F}(a)$ az $a \in \mathcal{G}$ valamely környezetében síma függvények halmaza, továbbá $a = \beta(t_0)$. Definíció szerint a $\dot{\beta}(t_0)_{a=\beta(t_0)}$ vektor hatása az f függvényen:

$$\dot{\beta}(t_0)(f) = \left[(D\beta(t))_{t_0} \frac{d}{du}(t_0) \right](f) = \left(\frac{d}{du}(t_0) \right)(f \circ \beta).$$

Ugyanez a $t = 0$ pontban felírva:

$$\dot{\beta}(0)(f) = \left[(D\beta(t))_0 \frac{d}{du}(0) \right](f) = \left(\frac{d}{du}(0) \right)(f \circ \beta).$$

I.3. Az egyparaméteres részcsoporthok és az integrálgörbék

Ezért tetszőleges $f \in \mathcal{F}(a)$ függvényre

$$\begin{aligned} \left[(DL_a)_e \dot{\beta}(0) \right] (f) &= \left[(DL_a)_{\beta(0)} (D\beta)_0 \frac{d}{du}(0) \right] (f) = \\ &= (D(L_a \circ \beta)_0) \left(\frac{d}{du}(0) \right) (f) = \frac{d}{du}(0) (f \circ L_a \circ \beta)_0 = \\ &= \frac{d}{du}(0) \left[f(\varphi(a, \beta(u))) \right]_0 = \frac{d}{du}(0) \left[D(f \circ \beta(t+t_0)) \right]_0 = \\ &= \frac{d}{du}(0) \left[D(f \circ \beta(t)) \right]_{t_0} = \left[(D\beta(t))_{t_0} \frac{d}{du}(0) \right] (f) = \dot{\beta}(t_0)(f). \end{aligned}$$

Ez alapján

$$(DL_a)_e \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}(t_0)(f). \quad (1.5)$$

Tudjuk, hogy $t \in \mathbb{I}$ estén β az X vektormező integrálgörbéje. Ezért $t = 0$ esetén $\dot{\beta}(0) = X_{\beta(0)} = X_e$. Figyelembe véve ezen kívül az X balinverz voltát is, $(DL_a)_e X_e = X_a$. Tekintettel az $a = \beta(t_0)$ -ra és az (1.5) összefüggésre,

$$X_{\beta(t_0)} = X_a = (DL_a)_e X_e = (DL_a)_e \dot{\beta}(0) = \dot{\beta}(t_0),$$

tehát $\beta(t)$ valóban integrálgörbe az X vektormezőhöz. $\square$

Ezzel a Lie-csoportok egyparaméteres részcsoporthjainak létezését teljesen beláttuk. E tétel értelmében úgy is fogalmazhatunk, hogy a $\mathcal{G}$ Lie-csoportnak "minden irányban" létezik egyparaméteres részcsoporthja. Ezen azt értjük, hogy a $T_e(\mathcal{G})$ érintőtér bármely vektorához (lokális koordinátákban fogalmazva: az $\mathbb{R}^n$ tér minden 0 -tól különböző vektorához vagy "irányához") létezik a fenti izomorfizmussal hozzárendelt balinvariáns vektormező, amelynek egyértelműen meghatározott integrálgörbéje egyparaméteres részcsoporthja $\mathcal{G}$ -nek.

I.4. Az első fajú kanonikus koordináta-rendszerek és az egyparaméteres részcsoportok

A további megfontolások *lokális* Lie-csoportokra vonatkoznak annak érdekében, hogy az analógia a lokális loopokra vonatkozó későbbi vizsgálatainkkal minél közvetlenebb legyen. Ehhez szükség van először a lokális csoport definíciójára.

1.4.1. Definíció [14]: *Lokális csoport* egy $\mathcal{X}$ Hausdorff tér a rajta értelmezett binér

$$\hbar : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} ; (a,b) \longmapsto \hbar(a,b)$$

szorzásművelettel, ha

a) $\hbar$ *parciális*, vagyis bizonyos $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ párokra van értelmezve,

b) $\hbar$ *asszociatív*, ahol értelmezve van, vagyis:

$$\hbar(a, \hbar(b,c)) = \hbar(\hbar(a,b), c)$$

amennyiben e szorzatok értelmezve vannak $(a,b,c \in \mathcal{X})$,

c) létezik egy *e* *egységelem* $\mathcal{X}$ -ban, vagyis bármely $a \in \mathcal{X}$ -ra $\hbar(a,e)$ és $\hbar(e,a)$ létezik, továbbá

$$\hbar(a,e) = \hbar(e,a) = a ,$$

d) adott $\mathcal{X}$ -n egy *parciális* *unér* művelet, az *inverzképzés*, vagyis

$$\tau : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X} ; x \longmapsto x^{-1}$$

bizonyos $x \in \mathcal{X}$ elemekre úgy, hogy ha x^{-1} definiálva van, akkor $\hbar(x, x^{-1})$ és $\hbar(x^{-1}, x)$ is definiálva van, és

$$\hbar(x, x^{-1}) = \hbar(x^{-1}, x) = e ,$$



I.4. Első fajú kanonikus koordináták és a részcsoportok

e) a $\wedge$ és τ leképezések folytonosak, ahol definiálva vannak. $\square$

A definícióból következik, hogy e -nek létezik olyan U , V , illetve W környezete, hogy $\wedge : V \times W \longrightarrow U$, és $x \in V$ -hez ($y \in W$ -hez) létezik az $x^{-1} \in W$ ($y^{-1} \in V$), hogy $\wedge(x, x^{-1}) = e$ ($\wedge(y^{-1}, y) = e$). Az inverzelem létezésének egyenes következménye a $\wedge$ szorzásművelet invertálhatósága és kancellativitása, vagyis a "jobbról és balról" való egyértelmű megoldhatósága a megfelelő ismeretlenre.

A lokális Lie-csoportok definiálása és jellemzése során szükségünk lesz a következő állításra, illetve a következményeképpen bevezethető fogalomra.

1.4.2. Tétel [14]: Legyen $(\mathcal{X}; \wedge)$ lokális csoport. Ekkor létezik az e elemnek egy olyan $U \subset \mathcal{X}$ környezete, amelyre

a) $\wedge(\wedge(x, y), z) = \wedge(x, \wedge(y, z))$, minden $x, y, z \in U$ esetén,

b) $\wedge(x, x^{-1}) = \wedge(x^{-1}, x) = e$, minden $x \in U$ -ra,

c) $\wedge(e, x) = \wedge(x, e) = x$, minden $x \in U$ -ra,

d) bármely $x \in U$ esetén $x^{-1} \in U$,

ahol a fenti szorzások elvégezhetők $\mathcal{X}$ -ban. $\square$

1.4.3. Definíció [14]: Az előző tétel feltételeit kielégítő környezetet a lokális $\mathcal{X}$ csoport germjének nevezzük. $\square$

Bizonyítás: Legyen $\bar{U}$ a lokális csoport egységelemének valamely környezete. Mivel a $\wedge$ szorzás folytonos, létezik olyan P és Q környezete e -nek, hogy $P, Q \subset \mathcal{X}$, és $\wedge(P, Q) \subset \bar{U}$. A P környezetnek létezik olyan e körüli R részkörnyezete, hogy $R \subset P \cap Q$ és $\wedge(R, R) \subset P \cap Q$, következésképpen

$$\wedge(R, \wedge(R, R)) \subset \bar{U}, \quad \wedge(\wedge(R, R), R) \subset \bar{U}. \quad (1.6)$$

I.4. Első fajú kanonikus koordináták és a részcsoporthok

Ha $U = R \cap R^{-1}$, akkor $U = U^{-1}$, vagyis a d) feltétel teljesül, és ugyancsak teljesül a b) is a lokális csoport definíciója és a d) miatt. Az a) feltétel teljesülése pedig (1.6)-nak közvetlen következménye. $\square$

Ezután a C^k osztályú lokális Lie-csoport definícióját is megadjuk. A Lie-csoportok elméletének egyik igen fontos eredménye, hogy ha egy lokális Lie-csoport C^k ($k \geq 3$) osztályú, akkor analitikus is. Ezért szokás a lokális Lie-csoportokat eleve C^ω osztályúként - vagyis analitikus szorzásművelettel - definiálni. Mi most nem ezt az utat követjük, hiszen célunk az analitikusságot bizonyító gondolatmenet első lépésének a bemutatása lesz: nevezetesen az, hogy bevezethetők lokális Lie-csoportokon első fajú kanonikus koordináta-rendszerek.

1.4.4. Definíció [14]: Legyen $\mathcal{G}$ egy C^m osztályú differenciálható sokaság. A $\mathcal{G}$ sokaság a C^k osztályú ρ szorzásművelettel *lokális Lie-csoport*, ha

- a) a $\mathcal{G}$ összefüggő sokaság,
- b) $(\mathcal{G}; \rho)$ lokális csoport a $\mathcal{G}$ Hausdorff tér topológiájára vonatkozóan,
- c) a $\mathcal{G}$ -ben van olyan nyílt U germ, hogy az $U \times U \longrightarrow \mathcal{G}; (x, y) \longmapsto \rho(x, y)$ leképezés C^k osztályú differenciálható leképezés. $\square$

A differenciálható sokaság differenciálhatósági rendjétől itt és később is azt követeljük meg, hogy benne C^k osztályú szorzásművelet definiálható legyen, vagyis $m \geq k$. (A differenciálhatóság rendje természetesen végtelen illetve ω is lehet.) A fenti feltétel teljesülését akkor is feltételezzük a továbbiakban, ha külön azt nem említjük. Amint a definíció előtt utaltunk rá, a legalább háromszor folytonosan differenciálható Lie-csoport analitikus is, természetesen azzal a kikötéssel, hogy a sokaság is analitikus.

1.4.5. Definíció: Legyen $(\mathcal{G}; g)$ lokális C^k osztályú Lie-csoport. A

$$\beta : (-\alpha, \alpha) \longrightarrow \mathcal{G} ; t \longmapsto \beta(t)$$

C^1 osztályú leképezés egyparaméteres részcsoport, ha $|t|, |s| < \alpha$, $|t+s| < \alpha$ esetén

$$g(\beta(t), \beta(s)) = \beta(t+s) . \square$$

1.4.6. Megjegyzések: 1. Ha a lokális Lie-csoport szorzásművelete C^k osztályú (analitikus), akkor a $\tau : U \longrightarrow U^{-1} ; x \longmapsto x^{-1}$ invertálás művelet is C^k osztályú (analitikus) az U valamely W részkörnyezetén.

2. Ha az előző szakasz globális állításait lokális Lie-csoportra fogalmazzuk meg, akkor végső eredményként megállapíthatjuk, hogy a lokális Lie-csoportnak az e pontbeli érintőtér minden vektorához létezik azt érintő lokális integrálgörbéje, következésképpen egyparaméteres részcsoportja is.

3) Ha U egy e -t tartalmazó környezete a $\mathcal{G}$ C^k osztályú Lie-csoportnak, akkor $(U; g)$ lokális Lie-csoport. $\square$

Az utóbbi megjegyzés alapján lokális Lie-csoportokkal mindig úgy fogunk foglalkozni, hogy a Lie-csoportot eleve egy U germjén tekintjük. Így az 1.4.4. Definícióban megadott helyett az alábbi fogjuk lokális Lie-csoporton érteni:

1.4.7. Definíció [8]: Legyen $\mathcal{G}$ egy C^k osztályú (analitikus) sokaság és U egy koordináta-környezet $\mathcal{G}$ -ben. Az U -t a rajta értelmezett C^k osztályú

$$g : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G} ; (x, y) \longmapsto z$$

I.4. Első fajú kanonikus koordináták és a részcsoportok

szorzásművelettel C^k osztályú lokális Lie-csoportnak nevezzük, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

a) létezik olyan $V \subset U$ környezet $\mathcal{G}$ -ben, hogy $V \times V \longrightarrow U$ és $z = g(x,y) \in U$ bármely $x,y \in V$ esetén,

b) tetszőleges $x \in V$ és $z \in U$ ($y \in V$ és $z \in U$) esetén létezik pontosan egy $y \in U$ ($z \in U$) úgy, hogy $g(x,y) = z$, vagyis a $g(x,y) = z$ egyenlőség x -re illetve y -ra U -ban megoldható,

c) a V környezetben létezik olyan e elem, amelyre

$$g(x,e) = g(e,x) = x$$

bármely $x \in U$ esetén,

d) ha az U környezeten az $(U; \phi)$ térképet tekintjük, akkor a ϕ leképezésről feltesszük, hogy

$$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n ; e \longmapsto \Phi ,$$

ahol Φ az $\mathbb{R}^n$ tér origója. $\square$

A d) feltétel teljesülése elérhető például úgy, hogy tetszőleges $(U; \psi)$ térképhez olyan λ lineáris transzformációt tekintünk, amelyre $\lambda \circ \psi(e) = \Phi$. Ekkor az $(U; \lambda \circ \psi)$ koordináta-térkép kompatibilis a sokaságot definiáló atlással.

Ezen előkészületek után rátérhetünk az első fajú kanonikus koordináta-rendszer bevezethetőségének a kérdésére C^k osztályú lokális Lie-csoportokon.

1.4.8. Definíció [12]: Legyen $\mathcal{G}$ lokális C^k osztályú Lie-csoport ($k \geq 2$) és $(U; \phi)$ egy C^k osztályú térkép. Az e pont körüli $V \subseteq U$ tartományt csillagszerűnek nevezzük, ha bármely $x \in V$ esetén a környezethez tartozik minden olyan ξ pont is, amelyre $\phi(\xi) = t\phi(x)$, $|t| \leq 1$ esetén. $\square$

I.4. Első fajú kanonikus koordináták és a részcsoporthok

1.4.9. Definíció [12]: Az U valamely csillagszerű tartományán az $(U; \phi)$ párral megadott $\mathcal{D}$ koordináta-rendszert (ahol $\phi \in C^k$ osztályú diffeomorfizmus) első fajú kanonikus koordináta-rendszernek nevezzük, ha minden

$$\phi(x) = a \cdot t$$

egyenlőség egyparaméteres részcsoporthot definiál $\mathcal{G}$ -ben a t minden olyan értékére, amelyre $\phi^{-1}(a \cdot t)$ az U -hoz tartozik. $\square$

Az első fajú kanonikus koordináta-rendszereket fel tudjuk használni arra, hogy egy görbéről eldöntsük: egyparaméteres lokális részcsoporth vagy sem. Ezt fogalmazza meg a következő tétel állítása.

Legyen $(\mathcal{G}; g)$ lokális C^k osztályú Lie-csoport és $\mathcal{D}$ az $(U; \phi)$ térképpel adott első fajú kanonikus koordináta-rendszer.

1.4.10. Tétel [12]: $\mathcal{G}$ -nek minden olyan differenciálható $\beta = \beta(t)$ egyparaméteres részcsoporthja, amely a $|t| \leq \alpha$ esetén értelmezve van (s ezzel biztosítva van $\beta(t) \in U$ a $|t| \leq \alpha$ esetén), rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\phi \circ \beta(t) = a \cdot t \quad |t| \leq \alpha,$$

ahol az $a = (a_1, \dots, a_n)$ komponensei az

$$a_i = \frac{d}{du} \left(x^i \circ \beta(t) \right)_0$$

valós számok. $\square$

Bizonyítás: Vezessük be a $h(t) = \phi^{-1}(a \cdot t)$ jelölést. A definíció értelmében ez lokális egyparaméteres részcsoporth t

I.4. Első fajú kanonikus koordináták és a részcsoporthok

minden olyan értékre, amelyre értelmezve van (vagyis $\phi^{-1}(a \cdot t) \in U$). Az U környezet szimmetrikus volta miatt ezek az értékek egy szimmetrikus intervallum elemei: $-\alpha' < t < \alpha'$. A $h(t)$ és $\beta(t)$ egyparaméteres részcsoporthok $t = 0$ pontbeli érintővektorainak komponensei megegyeznek. Ezért $h(t)$ és $\beta(t)$ a t mindazon értékeire megegyeznek, ahol h és β is értelmezve van. Így elegendő azt megmutatni, hogy $\alpha \leq \alpha'$. Ugyanis ha $\alpha > \alpha'$ lenne, akkor β értelmezve lenne α' -nél, s ezért $\phi \circ \beta(\alpha') = a\alpha' = \phi \circ h(\alpha')$, ami nem lehet, mert $h(t)$ α' -re nincs értelmezve. $\square$

Rátérünk arra a tételre, amely e dolgozat szempontjából nagy jelentőségű; ennek analógonját fogjuk keresni általánosabb differenciálható struktúra esetén.

1.4.11. Tétel [12]: Legyen $(\mathcal{G}; g)$ C^k osztályú $(C^\omega$ osztályú) lokális Lie-csoport, és legyen $(U; \phi)$ -vel adott egy C^k osztályú $\mathcal{D}$ koordináta-rendszer. Akkor megadható olyan $\phi \in C^{k-1}$ osztályú $(C^\omega$ osztályú) homeomorfizmus $U \rightarrow n$, hogy az $(U; \phi^*)$ párral adott $\mathcal{D}^*$ koordináta-rendszer első fajú kanonikus koordináta-rendszer. A $\mathcal{D}$ -ről a $\mathcal{D}^*$ -ra való C^{k-1} osztályú $(C^\omega$ osztályú) áttérés Jacobi-mátrixa az origónál az egységmátrix. $\square$

1.4.12. Megjegyzés: A $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^{k-1} osztályú differenciálható koordináta-leképezés ($k \geq 2$) az U tartománnyal nem tartozik hozzá a $\mathcal{G}$ sokaságon adott C^k osztályú $\mathcal{A}$ atlaszhoz. Ezt már az első fajú kanonikus koordináta-rendszer definíciójában sem követeltük meg. Ahhoz, hogy $(U'; \phi)$ kompatibilis legyen az $\mathcal{A}$ atlaszsal, (definíció szerint) szükséges és elegendő, hogy $\phi \in C^k$ osztályú leképezés legyen. Ez a fenti tétel értelmében nem teljesül automatikusan. Azonban a C^k osztályú Lie-csoportok analitikusságának bebizonyításával ez a probléma elesik. Az általunk a

I.4. Első fajú kanonikus koordináták és a részcsoporthok

későbbiekben vizsgálandó Lie-loopoknál viszont jelentősége lesz annak, hogy az első fajú kanonikus koordináta-rendszer az $(U; \phi)$ koordináta-térképek közül legyen kitüntethető. Ezt ott azzal fogjuk elérni, hogy bebizonyítjuk a bevezethető kanonikus koordináta-rendszerek C^k osztályúságát. $\square$

Bizonyítás: Legyen β C^{k-1} osztályú ($k \geq 3$) egyparaméteres részcsoporth, amely e pontbeli érintővektorának komponensei $(U; \phi)$ -ben

$$a_i = \frac{d}{du} (x^i \circ \beta) \quad (i=1, \dots, n) \quad (1.7)$$

Az $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vektor jelöli a $\beta(t)$ e -beli egyértelműen meghatározott érintővektorát: $\frac{d}{dt} \beta(0) = a$. Azt, hogy a $\beta(t)$ egyparaméteres részcsoporth érintővektora a , külön is jelöljük: $\beta(t) = \beta(a, t)$. Tekintsük a $\beta(c \cdot t)$ függvényt, ahol $c \in \mathbb{R}$. Ez is egyparaméteres részcsoporth azon t értékekre, amelyekre az utóbbi kifejezés értelmezve van, minthogy:

$$g(\beta(c \cdot s), \beta(c \cdot t)) = \beta(c \cdot s + c \cdot t) = \beta(c \cdot (s+t)).$$

A $\beta : t \mapsto \beta(c \cdot t)$ egyparaméteres részcsoporth érintővektora ca . Valóban,

$$\begin{aligned} \dot{\beta}(ct)_0 &= \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\beta(ct)) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{du} (x^i \circ \beta(ct)) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} (\beta(ct))_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{du} (x^i \circ \beta(ct)) \frac{d}{du} (c \cdot t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} (\beta(ct))_0 = \\ &= \sum_{i=1}^n c \frac{d}{du} (x^i \circ \beta(ct)) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} (\beta(ct))_0 = \sum_{i=1}^n ca_i \frac{\partial}{\partial x^i} (\beta(ct))_0. \end{aligned}$$

Mivel egy $T_e(\mathcal{G})$ -beli a érintővektorhoz pontosan egy egyparaméteres részcsoporth tartozik, ezért

$$\beta(a, ct) = \beta(ca, t). \quad (1.8)$$

Az 1.2.3. Tétel szerint a $\beta(t) = \beta(a, t)$, s ezért a $\beta(ca, t)$ egyparaméteres részcsoporth is C^{k-1} osztályú (C^ω osztályú) - egy elegendően kicsiny $\varepsilon > 0$ számot véve - minden $|t| \leq \varepsilon$ és $|a_i| \leq \varepsilon$ esetén. Az (1.8) összefüggés szerint

$$\beta(a \cdot t) = \beta(a, \frac{t}{\varepsilon} \varepsilon) = \beta\left(\frac{a \cdot t}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$$

vagyis a $\beta(at)$ függvény ezzel értelmezve van minden olyan a és t értékre, amelyre $|a_i t| \leq \varepsilon^2$. Ha itt $t=1$ -et tekintünk, akkor $\beta(a, t)$ értelmezve van $|a_i| \leq \varepsilon^2$ esetén. Vezessük be a

$$h: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad a \longmapsto \phi \circ \beta(a, 1)$$

leképezést, amely eleget tesz a $h(0) = 0$ feltételnek, mert

$$h(0) = h(0a) = \phi(\beta(0a, 1)) = \phi(\beta(a, 0)) = \phi(e) = 0.$$

Számítsuk ki a h leképezés 0 -beli Jacobi-mátrixát, vagyis a $D_j(u^i \circ h)(0)$ parciális deriváltakat, ahol u^i jelöli az i -edik koordináta-függvényt. Jelölje továbbá e_j a $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ vektort, amelyben a j -edik helyen áll 1, a többi helyen 0. A h leképezés és az (1.8) összefüggést figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} D_j(u^i \circ h)(0)(s) &= D_j(u^i \circ h)(0)(e_j s) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[(u^i \circ h)(e_j s t) - (u^i \circ h)(0) \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[u^i \circ \beta(e_j s t, 1) - u^i \circ \beta(e_j s t, 0) \right] = \end{aligned}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[(u^i \circ \beta)(e_j, st) - (u^i \circ \beta)(e_j, 0) \right] =$$

$$= D_j (x^i \circ \beta)(e_j, 0)(s),$$

mivel

$$(u^i \circ h)(\emptyset) = (x^i \circ \beta)(e_j, 0) = 0.$$

Az $(x^i \circ \beta)(e_j, t)$ valós függvény deriváltjára érvényes az (1.7) formula, így

$$D_j (u^i \circ h)(\emptyset) = D_j (x^i \circ \beta)(e_j, 0) = \frac{d}{du} (x^i \circ \beta)(0) = a_i,$$

ahol a_i a $\beta(e_j, t)$ görbe érintőjének i -edik komponense az $(U; \phi)$ -ben. A $\beta(e_j, t)$ definíciója szerint viszont e kifejezés értéke 1, ha $i = j$ és 0, ha $i \neq j$, tehát

$$D_j (u^i \circ h)(\emptyset) = \delta_{ij}.$$

Mivel $h \in C^{k-1}$, ezért $h^{-1} \in C^{k-1}$, és $h^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Továbbá h^{-1} Jacobi-mátrixa ugyancsak az egységmátrix.

A tétel igazolásához azt kell még megmutatnunk, hogy az $(U; h^{-1} \circ \phi)$ pár első fajú kanonikus koordináta-rendszert határoz meg. A $\mathcal{D}$ -ről a $\mathcal{D}^*$ koordináta-rendszerre való áttérés ekkor a h^{-1} transzformációval adott: $\phi' = h^{-1} \circ \phi$.

Tekintsünk e célból egy $\beta^*(t)$ görbét, amelyre az $(U; \phi')$ koordináta-rendszerben

$$\phi' \circ \beta^*(t) = a \cdot t. \quad (1.9)$$

Be kell látnunk, hogy $\beta^*(t)$ egyparaméteres részcsoport. Ez viszont könnyen adódik az $(U; \phi)$ koordináta-rendszerben:

$$\phi' \circ \beta^*(t) = h^{-1} \circ \phi \circ \beta^*(t) = a \cdot t,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$h \circ \phi' \circ \beta^*(t) = \phi \circ \beta^*(t) = h(at) =$$

$$= \phi \circ \beta(at, 1) = \phi \circ \beta(a, t),$$

tehát

$$\beta^*(t) = \phi \circ \beta(a, t).$$

Igy az $(U; \phi)$ koordináta-rendszerben $\beta^*(t)$ pontosan az a érintővektorú egyparaméteres részcsoporth. Ezért az (1.9) egyenlőséggel adott minden $\beta^*(t)$ görbe egyparaméteres részcsoporth, ami pontosan az első fajú kanonikus koordináta-rendszer definíciója. Minthogy a β és ezzel a h leképezés is C^{k-1} osztályú (analitikus), ezért az áttérés a $\mathcal{D}^*$ koordináta-rendszerre C^{k-1} osztályú (analitikus). Következésképpen a $\mathcal{D}^*$ első fajú kanonikus koordináta-rendszer C^{k-1} osztályú. $\square$

II. FEJEZET

A LOOP-SZORZÁS DIFFERENCIÁLHATÓSÁGA KANONIKUS KOORDINÁTA-RENDSZERBEN

Mint ahogyan azt az előző fejezetben említettük, a Lie-csoportok elméletéből jól ismert tény, hogy ha egy Lie-csoporthoz adott egy C^k osztályú koordináta-rendszer, akkor létezik egy első fajú kanonikus koordináta-rendszer is a Lie-csoporthoz, amelyben a csoport-szorzásnak megfelelő függvények analitikusak. Az állítás első részének igazolása az I. FEJEZET témája volt.

E tétel klasszikus bizonyítása a differenciálhatósági rend vonatkozásában is két részből áll. Az első részben az egyparaméteres részcsoportok differenciálegyenleteinek vizsgálata révén bizonyítják, hogy a csoport-szorzás C^{k-1} osztályú (lásd L.SZ. PONTRJAGIN [12], 59.fejezet). A második részben a C^ω -tulajdonság megmutatása következik a Lie-csoportok és a Lie-algebrák közötti összefüggések, illetve az ezekkel kapcsolatos differenciálegyenletek konstans együtthatós egyenletekre visszavezetésének segítségével.

A bizonyítás első fele közvetlenül kiterjeszthető lokális differenciálható loopok bizonyos osztályaira (lásd pl. E.N.KUZMIN [11]).

Ebben a fejezetben azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogyan lehet kiterjeszteni a kanonikus koordináta-rendszer fogalmát loopok általánosabb osztályaira is - anélkül, hogy a differenciálhatósági rend csökkenne.

Egy speciális kanonikus koordináta-rendszer létezését lokális analitikus loopokra vonatkozóan M.A. AKIVISZ [2,1969] állította, a bizonyítást később egy részesetre M.A. AKIVISZ és A.M. SELEHOV [4,1986] adta meg. Analóg

II. Bevezetés

állítást lokális analitikus n -ér loopokra V.V. GOLDBERG [7,1987] bizonyított be. Első fajú kanonikus koordináta-rendszer létezését igazolta erősen hatvány-asszociatív loopokra E.N. KUZMIN [11,1971]. Erősen hatvány-asszociatív egydimenziós loopok esetére a fenti probléma megoldása egyszerűen levezethető ACZÉL J. [1,1964] egyik eredményéből, amely szerint ebben az esetben a loop izomorf a valós számok additív csoportjával.

A $(p+1)$ -szövetek osztályozása során J.P. DUFOUR és P. JEAN [6,1985] egy olyan módszert adtak, amely a mi esetünkben is jól alkalmazható.

Fő célunk a következő állítás bebizonyítása: ha egy loop k -szor folytonosan differenciálható egy koordináta-rendszerben, akkor létezik egy úgynevezett kanonikus koordináta-rendszer (a [4]-beli definíció értelmében), amelyben a loop-művelet k -szor folytonosan differenciálható. Továbbá azt is megkapjuk az állítás egyszerű következményeként, hogy az első fajú kanonikus koordináta-rendszer is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal (feltéve, hogy ilyen koordináta-rendszer létezése az adott loop esetén egyáltalán bizonyítható).

II.1. Lokális loopok és kanonikus koordináta-rendszerek

Ebben a szakaszban bevezetjük azt a két fogalmat, amely mindvégig tárgyalásunk középpontjában fog állni. Először a vizsgálataink tárgyát képező lokális differenciálható loopok meghatározását adjuk meg.

2.1.1. Definíció [8]: Legyen $\mathcal{F}$ egy n -dimenziós differenciálható sokaság. A C^k osztályú

$$f : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} ; (x,y) \longmapsto z$$

parciális leképezést, ahol $x,y,z \in \mathcal{F}$, C^k osztályú lokális differenciálható loop-szorzásnak, az $(\mathcal{F} ; f)$ struktúrát pedig C^k osztályú lokális differenciálható loopnak nevezzük, ha a következő feltételek teljesülnek:

a) A loop-szorzás lokálisan definiálva van, vagyis léteznek olyan V, U ($V \subseteq U$) nyílt környezetek, hogy

$$f : V \times V \longrightarrow U \tag{2.1}$$

$$f(x,y) = z \in U$$

minden $x,y \in V$ esetén. Továbbá tetszőleges $x \in V$, $z \in U$ (illetve $y \in V$, $z \in U$) elemek esetén létezik egy és csak egy olyan $y \in U$ (illetve $x \in U$) amelyre $f(x,y) = z$.

b) A loopnak van egy $e \in V$ *egységeleme*, vagyis az U környezetben egy kitüntetett e elem, amelyre

$$f(x,e) = f(e,x) = x \tag{2.2}$$

bármely $x \in V$ esetén.

c) $f \in C^k$, vagyis az f loop-szorzás C^k osztályú differenciálható leképezés az U környezeten az $(U; \phi)$ -vel bevezetett $\mathcal{D}$ koordináta-rendszerben. $\square$

2.1.2. Megjegyzés: Az a) feltétel első része *lokális grupoidot* definiál az $\mathcal{F}$ differenciálható sokaságon. Az a) feltétel második része a balról illetve jobbról való megoldhatóságot biztosítja, mégpedig az egyértelmű megoldhatóságot, vagyis a szorzásművelet lokális invertálhatóságát és kancellativitását jelenti. E két rész együttesen *lokális kvázicsoportot* definiál (pontosabban *lokális egybázisú kvázicsoportot*).

A b) feltétel az egységelem létezését kívánja meg: ezzel már egységelemes lokális kvázicsoportot, vagyis *lokális loopot* kaptunk.

A c) feltétel pedig a művelet differenciálhatóságával biztosítja, hogy C^k osztályú lokális loopot kapjunk. $\square$

A definícióhoz szorosan kapcsolódik a koordináták bevezetése, hiszen ezeken keresztül definiálható a C^k osztályúság.

A továbbiakban loopokon olyan koordináta-rendszereket (olyan $(U; \phi)$ koordináta-térképeket) fogunk tekinteni, amelyek a következő leképezéseket létesítik:

$$\phi_i : U \longrightarrow W_i \subseteq \mathbb{R}^n ; \quad e \longmapsto \mathbb{O} ,$$

ahol $\mathbb{O}$ az $\mathbb{R}^n$ tér origója.

Alkalmazni fogjuk a koordináta-leképezés reprezentálására a

$$\phi \quad x \longmapsto x , \quad y \longmapsto y , \quad z \longmapsto z$$

jelölést, ahol $x, y, z \in V$ és $x, y, z \in W$.

A differenciálhatóság definíciója azt jelenti, hogy az

$$F = \phi \circ f \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})$$

kifejezéssel definiált

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ; \quad W \times W \longrightarrow W , \quad (2.1')$$

$$F(x, y) = z$$

függvény i -edik komponense, $f^i \in C^k$ osztályú : $f^i \in C^k$ ($i = 1, \dots, n$), ($k \geq 2$). Ekkor $F \in C^k$ szintén teljesül.

A fenti definíciót összevetve a lokális Lie-csoportok 1.4.7. Definíciójával, megállapíthatjuk - nem pontos szóhasználat, ugyanakkor a lényeget jól kifejezve -, hogy egy C^k osztályú lokális loop egy nemasszociatív lokális Lie-csoport.

Az $F = \phi \circ f \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1})$ leképezésről azt is mondhatjuk - és fogjuk is mondani a következőkben -, hogy az f loop-szorzás alakja az $(U; \phi)$ -vel adott $\mathcal{D}$ koordináta-rendszerben. Más koordináta-rendszerre áttérve a loop-szorzás alakja is más lehet. Az $(\tilde{U}; \tilde{\phi})$ -vel megadott $\tilde{\mathcal{D}}$ koordináta-rendszerben f alakja $\tilde{F} = \tilde{\phi} \circ f \circ (\tilde{\phi}^{-1} \times \tilde{\phi}^{-1})$, és az áttérés a két koordináta-rendszer között a $\psi = \tilde{\phi} \circ \phi^{-1}$ leképezéssel adott.

A loop-szorzásra (2.1') helyett a $\tilde{\mathcal{D}}$ koordináta-rendszerben

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{z}$$

érvényes, ahol

$$\tilde{\phi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{W} \subseteq \mathbb{R}^n ,$$

$$\tilde{\phi} : e \longmapsto \mathbb{O} , x \longmapsto \tilde{x} , y \longmapsto \tilde{y} , z \longmapsto \tilde{z} ,$$

itt $\tilde{W}$ az $\mathbb{O}$ egy környezete.

Az f különböző koordináta-rendszerbeli alakjai között pedig az

$$\tilde{F} = \psi \circ F \circ (\psi^{-1} \times \psi^{-1})$$

összefüggés mutatja a kapcsolatot.

Most bevezetünk egy koordináta-rendszert azzal a tulajdonsággal, hogy az f loop-műveletnek különösen egyszerű alakja legyen ezekben a koordinátákban. Ez a definíció pontosan megfelel annak a meghatározásnak, amelyet a [4]-ben találhatunk. A loop és a $\tilde{D}$ koordináta-rendszer olyanok, mint ahogyan az a 2.1.1. Definícióban illetve az azt követő megjegyzésekben leírtuk.

2.1.3. Definíció [8]: Legyen $(\mathcal{F}; f)$ egy C^k osztályú lokális differenciálható loop $(k \geq 2)$. Az $(\tilde{U}; \tilde{\phi})$ $\tilde{\phi} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\phi}(e) = \mathbb{O}$ koordináta-térképpel adott $\tilde{D}$ koordináta-rendszert *kanonikus koordináta-rendszernek* nevezzük az $(\mathcal{F}; f)$ *loopra vonatkozóan*, ha a $\tilde{D}$ koordináta-rendszerben érvényes a következő összefüggés:

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x}) = 2\tilde{x}$$

minden $\tilde{x} \in \tilde{W}$ esetén. $\square$

2.1.4. Megjegyzés: A definícióban szereplő feltétel tartalmazza azt az állítást, hogy a kanonikus koordinátázás az $\mathcal{F}$ sokaság lokális térképeivel történhet. Valójában ez a lehetőség e fejezet fő tételének következményeképpen lesz adott. A helyzet

használt a Lie-csoportoknál látotthoz, csak ott az első fajú kanonikus koordináta-rendszerbeli differenciálhatósági rend az analitikusság következtében egyezik meg a kiindulási koordináta-rendszerbeli differenciálhatósági renddel. Itt a következőkben közvetlenül bizonyítjuk a differenciálhatósági rend megmaradását. $\square$

2.1.5. Jelölés: A Lie-csoport elméletben használt első fajú kanonikus koordináta-rendszert (lásd pl. L.SZ. PONTRJAGIN, [12]) a rövidség kedvéért a továbbiakban EFK-koordináta-rendszernek nevezzük. A 2.1.3. Definícióban szereplő kanonikus koordináta-rendszert pedig röviden K-koordináta-rendszernek nevezzük. $\square$

Loopok esetén EFK-koordináta-rendszeren ugyanazt értjük, mint Lie-csoportoknál: bármely $a \cdot \tilde{x}$ alakban előálló görbe lokális egyparaméteres részcsoporthoz (lásd az 1.4.9. Definíciót). A különbség annyi, hogy a loopok esetén nincsen biztosítva az egyparaméteres részcsoporthoz létezése a tetszőleges $\tilde{x}$ irányban. Vagyis loopokra EFK-koordináta-rendszer csak bizonyos esetekben definiálható.

2.1.6. Megjegyzés: 1. A definícióból azonnal következik, hogy egy EFK-koordináta-rendszer (amennyiben az adott loopra létezik egyáltalán) mindig K-koordináta-rendszer is egyben.

2. A koordináta-rendszer fenti definíciója akkor lesz kellően megalapozott, ha megmutatjuk, hogy K-koordináta-rendszer olyankor is létezik, amikor EFK-koordináta-rendszer nem (lásd a 2.2.1. Tételt). $\square$

II.2. Kanonikus koordináta-rendszer létezése

Ebben a szakaszban fogjuk megvizsgálni azt a kérdést, hogy a 2.1.3. Definícióban adott K -koordináta-rendszer egy lokális differenciálható loopra vonatkozóan létezik-e.

Az alábbi tétel kettős állítást tartalmaz. Egyrészt pozitív választ a fenti kérdésre, másrészt azt fogalmazza meg, hogy az ilyen koordináta-rendszerben a differenciálhatóság rendje nem csökken.

2.2.1. Tétel [8]: Legyen $(\mathcal{F}; f)$ egy C^k osztályú lokális differenciálható loop $(k \geq 2)$. Ekkor létezik C^k osztályú K -koordináta-rendszer az $(\mathcal{F}; f)$ -re vonatkozóan. $\square$

Bizonyítás: Legyen $\mathcal{D}$ egy koordináta-rendszer, és F az f loop-szorzás alakja $\mathcal{D}$ -ben. Ekkor tehát teljesül, hogy $F \in C^k$. Jelölje $J(F)$ az F leképezés Jacobi-mátrixát az $(\mathbb{O}, \mathbb{O})$ pontban. Mit mondhatunk ekkor a $J(F)$ mátrix alakjáról?

A (2.2) alapján a $\mathcal{D}$ koordináta-rendszerben

$$F(x, \mathbb{O}) = F(\mathbb{O}, x) = x$$

bármely $x \in W$ -re, és ezért

$$\begin{aligned} D_j f^i(\mathbb{O}, \mathbb{O}) &= \delta_{ij} \\ D_{n+j} f^i(\mathbb{O}, \mathbb{O}) &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n \end{array} \right],$$

ahol D_j jelöli a j -edik parciális deriválás operátort. Ezek szerint a $J(F)$ mátrixra a következőt kapjuk:

$$J(F) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \\ 0 & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & 1 & & & \end{array} \right).$$

Vezessük most be az alábbi függvényeket az $\mathcal{O}$ valamely kellően kicsiny környezetében. Először tekintsük a Q diagonális függvényt:

$$Q : U \longrightarrow U \times U ; \quad x \longmapsto (x, x).$$

Ezután definiáljuk a T függvényt a következőképpen:

$$T = F \circ Q \tag{2.4}$$

$$T : U \longrightarrow U ; \quad x \longmapsto F \circ Q(x).$$

A definíciókból világos, hogy

$$T(\mathcal{O}) = \mathcal{O},$$

vagyis a T leképezés az $\mathbb{R}^n$ tér origóját fixen hagyja.

Ha kiszámítjuk a $DQ(\mathcal{O})$ lineáris transzformáció mátrixát, könnyen látható, hogy a következő alakú lesz:

$$(DQ(\mathcal{O})) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \\ \hline 1 & & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & 0 & & & 1 \end{array} \right),$$

minthogy a Q leképezés Q^i komponens függvényeire érvényesek az alábbi összefüggések:

$$\begin{aligned} D_j Q^i < \Phi, \Phi > &= \delta_{ij} \\ D_{n+j} Q^i < \Phi, \Phi > &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n \end{array} \right).$$

A (2.3) egyenlőség mindkét oldalát differenciálva, azt kapjuk, hogy

$$DT(\Phi) = DF(Q(\Phi)) \circ DQ(\Phi) = DF(\Phi, \Phi) \circ DQ(\Phi).$$

Ily módon a $DT(\Phi)$ mátrixára a következő alakot kapjuk:

$$(DT(\Phi)) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & & 1 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} 2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2 \end{array} \right],$$

vagyis

$$(DT(\Phi)) = 2(E),$$

ahol E az identikus leképezés $\mathbb{R}^n$ -ben. A fentiek szerint a $DT(\Phi)$ lineáris leképezésnek csak egyetlen sajátértéke van, a 2 (de ez a sajátérték n multiplicitású).

Mivel $F \in C^k$ és Q hasonlóan C^k osztályú, a T leképezés szintén C^k osztályú az Φ valamely környezetében. Ekkor létezik a T inverz leképezése az Φ egy környezetében, és igaz, hogy

$$D(T^{-1})(\Phi) = (DT(\Phi))^{-1},$$

továbbá $T^{-1} \in C^k$ ebben a környezetben.

Mivel a $(DT(\Phi))^{-1}$ leképezés mátrixa

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & 0 & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

egyben a T^{-1} leképezés origóbeli Jacobi-mátrixa, azt nyertük, hogy a $J(T^{-1})$ Jacobi-mátrixnak egyetlen sajátértéke van, az $\frac{1}{2}$.

A továbbiakban keressük azt a transzformációt, amely a $\tilde{D}$ koordináta-rendszerre való átmenetet meghatározza. E célból felhasználjuk S. STERNBERG egy eredményét [15, Theorem 2, 1957], egy kis módosítással.

Jelölje T^k az összes olyan C^k osztályú homeomorfizmus halmazát, amelyek az $\mathbb{R}^n$ tér origójának valamely környezetében értelmezve vannak, az origót fixen hagyják és Jacobi-determinánsuk ott nem tűnik el. Jelölje továbbá $JT(\Phi)$ a T leképezés Jacobi-mátrixát az origónál.

2.2.2. Tétel: Legyen T egy olyan transzformáció T^k -ban, amelyekre $JT(\Phi) = \frac{1}{2}(E)$, valamint $k \geq 2$. Ekkor létezik olyan R transzformáció a T^k -ban, amelyre

$$JT(\Phi) = R \circ T \circ R^{-1}. \quad (2.4)$$

Sternberg tételének fenti módosított változatára a bizonyítást a következő szakaszban adjuk meg.

Ha alkalmazzuk a 2.2.2. Tételt a (2.4) formulával definiált T transzformáció inverzére, akkor egy $R \in T^k$ transzformációt kapunk, amelyre érvényesek az alábbiak:

$$R(\Phi) = R^{-1}(\Phi) = \Phi ,$$

$$D(T^{-1})(\Phi) = R \circ T^{-1} \circ R^{-1} .$$

Ha kiszámítjuk mindkét oldal inverzét, akkor azt találjuk, hogy

$$D T (\Phi) = R \circ T \circ R^{-1} , \quad (2.5)$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$R^{-1} \circ D T (\Phi) \circ R = T .$$

Tehát a T transzformáció linearizálható egy G^k osztályú R belső automorfizmussal.

Az R transzformáció segítségével most már bevezethetünk új koordinátákat a következő módon:

$$R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ; x \longmapsto \tilde{x} , y \longmapsto \tilde{y} , z \longmapsto \tilde{z} .$$

Igy már adott egy új $\tilde{D}$ koordináta-rendszer az $(\tilde{U}; \tilde{\phi})$ térkép segítségével, ahol

$$\tilde{\phi} = R \circ \phi ,$$

és a loop-szorzás alakja pedig (ahogyan azt az előző szakaszban megállapítottuk):

$$\tilde{F} = R \circ F \circ (R^{-1} \times R^{-1}) . \quad (2.6)$$

Vagyis, ha $F(x, y) = z$, akkor

II.2. Kanonikus koordináta-rendszer létezése

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= R \circ F \circ (R^{-1} \times R^{-1})(\tilde{x}, \tilde{y}) = \\ &= R \circ F(x, y) = R(z) = \tilde{z}.\end{aligned}$$

Végül már csak az $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x})$ kiszámítása maradt hátra. A (2.6) összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x}) = R \circ F \circ (R^{-1} \times R^{-1})(\tilde{x}, \tilde{x}).$$

Mivel a (2.3) képletből az következik, hogy

$$F = T \circ Q^{-1},$$

az előző sor alapján adódik az

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x}) &= R \circ T \circ Q^{-1} \circ (R^{-1} \times R^{-1})(\tilde{x}, \tilde{x}) = \\ &= R \circ T \circ Q^{-1}(R^{-1}(\tilde{x}), R^{-1}(\tilde{x})) = R \circ T \circ R^{-1}(\tilde{x}).\end{aligned}$$

Végül a (2.6) behelyettesítésével kapjuk a K-koordináta-rendszer definiáló egyenlőségét, vagyis hogy

$$\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x}) = D T(0)(\tilde{x}) = 2\tilde{x},$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

II.3. A linearizáló transzformáció létezésének bizonyítása

Ezen szakasz tárgya S.Sternberg lokális kontrakciók normálformájára vonatkozó, az előző szakaszban idézett tétele módosított változatának (2.2.2. Tétel) bizonyítása. A bizonyítás során követni fogjuk az eredeti gondolatmenetet, de egyrészt az eltérő (speciális) kiindulási feltételek a bizonyítás során lehetővé tesznek bizonyos egyszerűsítéseket, másrészt az eredetitől eltérő bizonyítási technikát is alkalmazunk pl. a konvergencia igazolása során.

Bizonyítás [8]: a) A tétel állítását először speciális transzformációkra igazoljuk. Legyen $\mathcal{F}^k$ az olyan - konstans tag nélküli - n változós valós polinomok n -eseinek tere, amelyek legfeljebb k -adfokú tagokat tartalmaznak és amelyek elsőfokú tagjainak mátrixa nemelfajuló. Az $\mathcal{F}^k$ téren két polinom n -es szorzását úgy értelmezzük, hogy az első i -edik változójának helyébe beírjuk a második n -es i -edik polinomját ($i=1, \dots, n$), majd a k -nál magasabb fokszerű tagokat elhagyjuk. Röviden szólva: behelyettesítés után k -adik rendben levágunk.

2.3.1. Lemma: Legyen T egy olyan eleme az $\mathcal{F}^k$ -nak, amely lineáris tagjainak mátrixa $\frac{1}{2}(E)$. Ekkor T ekvivalens lineáris tagjai mátrixával egy $\mathcal{F}^k$ -hoz tartozó R_0 belső automorfizmus által. $\square$

Bizonyítás (2.3.1. Lemma): Mivel a lineáris tagok mátrixa tulajdonképpen a T leképezés Jacobi-mátrixa a $\mathbb{O}$ -nál, olyan R_0 transzformációt keresünk, amelyre teljesül, hogy

$$\mathcal{J} T (\mathbb{O}) = R_0 \circ T \circ R^{-1}, \quad (2.7)$$

vagy ami ezzel egyenértékű:

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

$$R_0 \circ T = \varphi(T(\Phi)) \circ R_0. \quad (2.7')$$

A T transzformáció formája polinom n -esek alakjában kifejezve a következő:

$$T = (t^1, \dots, t^n) = \left\{ \frac{1}{2}x_1 + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} t_{i_1, \dots, i_n}^1 x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \dots \right. \\ \left. \dots, \frac{1}{2}x_n + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} t_{i_1, \dots, i_n}^n x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right\}.$$

Mivel olyan R_0 transzformációt keresünk, amely lineáris tagjainak mátrixa az egységmátrix, R_0 alakjára írható a következő:

$$R = (r^1, \dots, r^n) = \\ = \left\{ \dots, x_i + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} r_{i_1, \dots, i_n}^i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}, \dots \right\}$$

Ha ezeket a formulákat behelyettesítjük a (2.7') összefüggésbe, az i -edik komponensre ($i = 1, \dots, n$) a következőt írhatjuk:

$$\frac{1}{2} \left[x_i + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} r_{i_1, \dots, i_n}^i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} x_i + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} t_{i_1, \dots, i_n}^1 x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \\
 &+ \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} r_{i_1, \dots, i_n}^i \left(\frac{1}{2} x_1 + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} t_{i_1, \dots, i_n}^1 x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \dots \\
 &\dots \left(\frac{1}{2} x_{2n} + \sum_{\substack{2 \leq \sum_j i_j \leq k}} t_{i_1, \dots, i_n}^n x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right).
 \end{aligned}$$

Összehasonlítva az $x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}$ együtthatóit, lépésről lépésre kiszámíthatjuk az $r_{i_1, \dots, i_n}^i$ konstansokat, kezdve a legalacsonyabb fokú tag együtthatójával. Ezzel a fenti eljárással a kívánt R_0 transzformációt magát is megkapjuk, s így a lemma bizonyítását befejeztük. $\square$

b) A célból, hogy egy a tétel feltételeit kielégítő, T^k -hoz tartozó R transzformációt találjunk, amely most már nincsen feltétlenül $\mathcal{F}^k$ -ban, egy speciális normát vezetünk be. Ebben az invariáns normában fogjuk megvizsgálni egy transzformációsorozat konvergenciáját, amelynél a határérték éppen a szükséges tulajdonságú leképezés lesz.

Legyen $\mathcal{V}_n^k$ az $\mathbb{R}^n$ tér mindazon C^k osztályú leképezéseinek tere, amelyek definiálva vannak az origó egy N környezetén és az origónál k -adik rendben eltűnnek.

2.3.2. Definíció: A $\mathcal{V}_n^k$ téren definiáljuk a $\|\cdot\|_n^k$ -nel jelölt normát a következő módon. A $\mathcal{V}_n^k$ -hez tartozó tetszőleges f leképezésre

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

$$\|f\|_n^k = \sup_x \sup_{v_1, \dots, v_k} \frac{\|Df(x)(v_1, \dots, v_k)\|}{\|v_1\| \dots \|v_k\|},$$

ahol a supremumokat minden olyan x -re és $v_1, \dots, v_k$ -ra tekintjük, amelyek N -hez tartoznak, továbbá $\|\cdot\|$ jelöli a közöséges euklideszi normát. $\square$

Nyilvánvaló, hogy $\|\cdot\|_n^k$ valóban norma, és az is, hogy $f \in \mathcal{V}_n^k$ -ből következik az, hogy $f \in \mathcal{V}_n^{k'}$ minden $k' \leq k$ és $N' \subseteq N$ esetén.

A későbbiekben szükségünk lesz az alábbi technikai jellegű lemmára.

2.3.3. Lemma: Legyen f egy $\mathcal{V}_n^k$ -beli transzformáció. Ekkor tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy elegendően kicsiny N^ε környezete Φ -nak úgy, hogy

$$\|f\|_{N^\varepsilon}^l < \varepsilon \|f\|_{N^\varepsilon}^k$$

minden olyan l -re, amelyre $1 \leq l \leq k-1$. $\square$

Bizonyítás (2.3.3. Lemma): A bizonyítást elegendő megadni arra az esetre, amikor $l = k-1$, mivel az általános eset az

$$\|f\|_{N^\varepsilon}^l < \varepsilon \|f\|_{N^\varepsilon}^{l+1}$$

egyenlőtlenségből közvetlenül adódik.

A becsléshez felhasználjuk a középértéktételt. Ennek értelmében valamely $0 \leq t \leq 1$ értékre, figyelembe véve a $D^l f(\Phi) = 0$ feltételt is, érvényes a következő:

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{N^\varepsilon}^l &= \sup_x \sup_{v_1, \dots, v_l} \frac{\|D^l f(x)(v_1, \dots, v_l)\|}{\|v_1\| \dots \|v_l\|} = \\
 &= \sup_x \sup_{v_1, \dots, v_l} \frac{\|D^{l+1} f(tx)(v_1, \dots, v_l)\|}{\|x\| \|v_1\| \dots \|v_l\|} \leq \\
 &\leq \sup_x \sup_{v_1, \dots, v_l} \frac{\|D^{l+1} f(x)(v_1, \dots, v_l)\|}{\|x\| \|v_1\| \dots \|v_l\|} \sup_x \|x\| < \varepsilon \|f\|_{N^\varepsilon}^l,
 \end{aligned}$$

mivel a $\sup_x \|x\| < \varepsilon$, amennyiben N^ε elegendően kicsiny, ezzel a lemma bizonyítása kész. $\square$

c) A keresett $R \in T^k$ transzformációra vonatkozó (2.4) formula átírható a következő alakba

$$R = \mathcal{D}_T (R),$$

ahol a $\mathcal{D}_T$ operátort a következőképpen értelmezzük. Ha R egy transzformáció T^k -ban, akkor

$$\mathcal{D}_T : R \longmapsto \left(\mathcal{J}T(\mathcal{O}) \right)^{-1} \circ R \circ T.$$

Ha a $\mathcal{D}_T$ operátort a $\mathcal{V}_N^k$ téren definiáljuk, akkor érvényes lesz az alábbi lemma.

2.3.4. Lemma: Legyen f a $\mathcal{V}_N^k$ térhez tartozó leképezés, T pedig a T^k eleme, amelyre $\mathcal{J}T(\mathcal{O}) = \frac{1}{2} E$. Ekkor létezik az origónak egy olyan N' környezete, amelyben

$$\|\mathcal{D}_T f\|_{N'}^k < K \|f\|_{N'}^k,$$

valamely $K < 1$ pozitív valós számra. $\square$

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

Bizonyítás (2.3.4. Lemma): A bizonyítás során az előző lemma felhasználásával végezzük a becslést.

$$\begin{aligned}
 \| \mathcal{D}_T f \|_{N'}^k &= \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\| D^k (2f \circ T)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \|}{\|\mathbf{v}_1\| \dots \|\mathbf{v}_k\|} = \\
 &= 2 \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\| D^k (f \circ T)(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \|}{\|\mathbf{v}_1\| \dots \|\mathbf{v}_k\|} \leq \\
 &\leq 2 \left\{ \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\| D^k f(T(\mathbf{x}))(DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \dots, DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k)) \|}{\|\mathbf{v}_1\| \dots \|\mathbf{v}_k\|} + \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\left\| \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \right\|}{\|\mathbf{v}_1\| \dots \|\mathbf{v}_k\|} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Itt $P_{\lambda}(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ a következő alakú kifejezések jelölésére szolgál:

$$\begin{aligned}
 P_{\lambda}(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) &= D^s f(T(\mathbf{x})) (D^{-1} T(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_1}), \dots, \\
 &\quad \dots, D^{-s} T(\mathbf{x})(\mathbf{v}_{m_1 + \dots + m_{s-1} + 1}, \dots, \mathbf{v}_{m_1 + \dots + m_s})),
 \end{aligned}$$

ahol $1 \leq s \leq k$ és $\sum_{i=1}^s m_i = k$. továbbá (2.7)-ben az összegzést az összes lehetséges $P_{\lambda}(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ tagra kell elvégezni.

A (2.7) jobb oldalán a második tag becslése a következőképpen történhet:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\left\| \sum_{\lambda} P_{\lambda}(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \right\|}{\|\mathbf{v}_1\| \cdots \|\mathbf{v}_k\|} \leq \\
 & \leq \sum_{\lambda} \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\left\| P_{\lambda}(\mathbf{x}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \right\|}{\|\mathbf{v}_1\| \cdots \|\mathbf{v}_k\|} \leq \\
 & \leq \sum_{\lambda} \left\{ \left(\sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{P_{\lambda}}{A_1 \cdots A_s} \right) \left(\sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_1} \prod_{j=1}^{m_1} \|\mathbf{v}_j\|} \frac{A_1}{m_1} \right) \cdots \right. \\
 & \quad \left. \left(\sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_{m_1+\dots+m_{s-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{m_1+\dots+m_s} \prod_{j=m_1+\dots+m_{s-1}+1}^{m_s} \|\mathbf{v}_j\|} \frac{A_s}{m_1+\dots+m_s} \right) \right\} \leq \\
 & \leq \sum_{\lambda} \left\{ \|f\|_{N'}^s \|T\|_{N'}^{m_1} \cdots \|T\|_{N'}^{m_s} \right\} \leq \sum_{\lambda} M_{\lambda} \|f\|_{N'}^s < \sum_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} \|f\|_{N'}^k < \varepsilon \|f\|_{N'}^k.
 \end{aligned}$$

A fenti becslésben a rövidebb írásmód céljából a következő jelölést alkalmaztuk:

$$A_1 = \left\| D^{m_1} T(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{m_1}) \right\|, \dots,$$

$$A_s = \left\| D^{m_s} T(\mathbf{x})(\mathbf{v}_{m_1+\dots+m_{s-1}+1}, \dots, \mathbf{v}_{m_1+\dots+m_s}) \right\|.$$

Figyelembe vettük a 2.3.3. Lemma állítását, és ε_{λ} -t elegendően kicsinyre választottuk, végül az N' környezetet

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

az ε_λ számoknak megfelelően határoztuk meg.

A (2.7) jobb oldalán álló első tag becslése az előzőhöz hasonlóan történik:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\|D^k f(T(\mathbf{x})) (DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \dots, DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k))\|}{\|\mathbf{v}_1\| \dots \|\mathbf{v}_k\|} \leq \\
 & \leq \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k} \frac{\|D^k f(T(\mathbf{x})) (DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1), \dots, DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k))\|}{\|DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1)\| \dots \|DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k)\|} \cdot \\
 & \cdot \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_1} \frac{\|DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1)\|}{\|\mathbf{v}_1\|} \cdot \dots \cdot \sup_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{v}_k} \frac{\|DT(\mathbf{x})(\mathbf{v}_k)\|}{\|\mathbf{v}_k\|} = \\
 & = \|f\|_{N'}^k \left[\sup_{\mathbf{x}} \|DT(\mathbf{x})\| \right]^k \leq \|f\|_{N'}^k \left[\frac{1}{2} + \delta \right]^k,
 \end{aligned}$$

mivel T síma az $\mathbb{O}$ valamely környezetében. A fentiek alapján azt kapjuk, hogy

$$\|D_T f\|_{N'}^k \leq \|f\|_{N'}^k 2 \left[\left[\frac{1}{2} + \delta \right]^k + \varepsilon \right] < K \|f\|_{N'}^k,$$

valamilyen $K < 1$ számra, elegendően kicsiny N' környezetre és következésképpen kis ε illetve δ számokra, valamint $k \geq 2$ esetén. A becslésnek ez a $k \geq 2$ kikötése az, amelyik későbbi tételeinkben is rendre megjelenik a differenciálhatóság rendjére vonatkozóan. $\square$

d) Egy a 2.2.2. Tétel feltételeinek eleget tevő T^k -beli T transzformáció esetén a 2.3.1. Lemma biztosítja egy olyan $R_0 \in \mathcal{F}^k \subset T^k$ transzformáció létezését, amelyre a $\mathcal{V}_N^k$ térhez

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

fog tartozni a

$$\left(\mathcal{J}T(\Phi) \right)^{-1} \circ R_0 \circ T - R_0$$

transzformáció is.

Valóban, megállapíthatjuk, hogy a T^k térben - a szorzásművelet elvégzésének szabályát figyelembe véve - a $\left(\mathcal{J}T(\Phi) \right)^{-1} \circ R_0 \circ T$ szorzattranszformáció Φ körüli sorfejtésének tagjai k -adik rendig megegyeznek az R_0 sorfejtési együtthatóival (lásd az a) részben ezeknek a plinom n -eseknek a felírását), s ezért ezek a tagok a különbségből eltűnnek.

Igy alkalmazhatjuk a $\|\cdot\|_N^k$ normát egy olyan $\left\{ R_n - R_0 \right\}_{n=1}^{\infty}$ transzformáció sorozatra, amelyet a következő módon definiálunk:

$$\begin{aligned} R_n &= \left(\mathcal{J}T(\Phi) \right)^{-n} \circ R_0 \circ T^n = \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{D}_T^k \left[\left(\mathcal{J}T(\Phi) \right)^{-1} \circ R_0 \circ T - R_0 \right] \right\} + R_0 . \end{aligned}$$

A 2.3.4. Lemma értelmében az $\left\{ R_n - R_0 \right\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat egyenletesen konvergens az Φ valamely környezetében, és tart valamilyen T^k -beli R' transzformációhoz. Továbbá ekkor a T^k -beli R_n sorozat is konvergens, és tart valamilyen $R = R' - R_0$ transzformációhoz T^k -ban.

A fentiek alapján írhatjuk egyrészt, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\mathcal{J}T(\Phi) \right)^{-1} \circ R_n \circ T \right] = \left(\mathcal{J}T(\Phi) \right)^{-1} \circ R \circ T ,$$

másrészt pedig azt, hogy

II.3. A linearizáló transzformáció létezése

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\mathcal{P}^T(\mathbb{D}) \right)^{-1} \circ R_n \circ T \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1} = R.$$

A jobb oldalak egyenlősége a tétel állítását fejezi ki, s ezzel a bizonyítást elvégeztük. $\square$

II.4. Kapcsolat egy loop kanonikus koordináta-rendszerei között

Egy Lie-csoport EFK-koordináta-rendszerei lineáris transzformáció erejéig egyértelműen meghatározottak. Az olyan speciális loop-osztályok esetében, amelyeknek léteznek az egyparaméteres részcsoporthaj, EFK-koordináta-rendszer vezethető be. (Mint látni fogjuk, ez az állítás a III.1. szakasz telének egyszerű következménye.)

Ezek után természetesen vetődik fel a kérdés: *milyen összefüggés van egy C^k osztályú lokálisan differenciálható loop kanonikus koordináta-rendszerei között?* Kissé másként megfogalmazva e kérdést: megadható-e valamilyen osztályozása a K-koordináta-rendszereknek?

Ebben a szakaszban ezekre a kérdésekre adunk választ.

Először azt az állítást igazoljuk, hogy a K-koordináta-rendszernek nincsen unicitása, lineáris transzformációval újabbakat kaphatunk.

2.4.1. Tétel [8]: Legyen Φ az $\mathbb{R}^n$ lineáris homeomorfizmusa. Jelöljön $\mathcal{D}$ egy C^k osztályú K-koordináta-rendszert a C^k osztályú $(\mathcal{F}; f)$ loopra vonatkozóan, és jelölje $\tilde{\mathcal{D}}$ azt a koordináta-rendszert, amelyet $\mathcal{D}$ -ből a Φ transzformációval kapunk. Ekkor $\tilde{\mathcal{D}}$ szintén K-koordináta-rendszer az $(\mathcal{F}; f)$ loopra vonatkozóan. $\square$

Bizonyítás: Mivel az áttérés az új koordináta-rendszerre Φ -vel van megadva, a loop-szorzásnak e két koordináta-rendszerbeli alakja között az összefüggés:

$$\tilde{F} = \Phi \circ F \circ (\Phi^{-1} \times \Phi^{-1}) .$$

Ha x és $\tilde{x}$ olyanok, hogy

$$\phi : x \longmapsto \tilde{x} ,$$

akkor kiszámolva az $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x})$ értékét, a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{x}) &= \Phi \circ F(\Phi^{-1}x, \Phi^{-1}x)(\tilde{x}, \tilde{x}) = \\ &= \Phi \circ F(\Phi^{-1}(\tilde{x}), \Phi^{-1}(\tilde{x})) = \Phi \circ F(x, x) = \Phi(2x) = \\ &= 2\Phi(x) = 2\tilde{x} . \end{aligned}$$

Ez az egyenlőség pontosan azt fejezi ki, hogy a $\tilde{D}$ az $(\mathcal{F}; f)$ -re vonatkozóan K-koordináta-rendszer. $\square$

A következő tétel a loopok esetére alkalmazott módosított változata egy állításnak, amely [10]-ben található meg.

2.4.2. Tétel [8]: Két, ugyanazon $(\mathcal{F}; f)$ lokális C^k osztályú loopra vonatkozóan kanonikus koordináta-rendszer között a Φ átmenet transzformáció lineáris homeomorfizmus. $\square$

Bizonyítás: Mivel loopok koordináta-rendszereiről van szó, az átmenet az egyikről a másikra nyilvánvalóan homeomorfizmus.

Jelölje az f loop-szorzás alakjait a két K-koordináta-rendszerben F illetve $\tilde{F}$. Ekkor érvényes a következő:

$$\Phi \circ F = \tilde{F} \circ (\Phi \times \Phi) . \quad (2.8)$$

Legyen W az Φ -nak egy a 2.2.1. Definíciónak megfelelő környezete. Ha $x \in W$ ($x \neq \Phi$), és n tetszőleges pozitív

II.4. Kapcsolat egy loop K -koordináta-rendszerei között

egész, akkor $\frac{x}{2^n} \in W$ szintén teljesül (ennek az egyszerű állításnak a részletesebb indoklását lásd pl. a következő fejezet tételének bizonyításánál). Figyelembe véve azt, hogy mindkét koordináta-rendszer kanonikus, továbbá alkalmazva a (2.8) összefüggést, a következő egyenlőséghez jutunk:

$$\begin{aligned} 2 \Phi \left(\frac{x}{2} \right) &= \tilde{F} \left[\Phi \left(\frac{x}{2} \right), \Phi \left(\frac{x}{2} \right) \right] = \\ &= \tilde{F} \circ (\Phi \circ \Phi) \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2} \right) = \Phi \circ F \left(\frac{x}{2}, \frac{x}{2} \right) = \Phi(x), \end{aligned}$$

vagyis

$$\Phi \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2} \Phi(x).$$

A fenti egyenlőségben x -et $\frac{x}{2}$ -vel helyettesítve kapjuk, hogy

$$\Phi \left(\frac{x}{2^2} \right) = \frac{1}{2} \Phi \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{1}{2^2} \Phi(x).$$

még $(n-2)$ -ször megismételve a fenti lépést, adódik a következő:

$$\Phi \left(\frac{x}{2^n} \right) = \frac{1}{2^n} \Phi(x), \quad (2.9)$$

minden pozitív n egészre (pontosabban fogalmazva: ez n szertinti teljes indukcióval adódik). Mivel C^k osztályú koordináta-rendszerek között az átmenet is k -szor folytonosab differenciálható ($k \geq 2$), Φ -re felírható a következő:

$$\Phi(x) = D \Phi(0)(x) + \|x\| \varepsilon(x), \quad (2.10)$$

ahol, $\|\cdot\|$ a közöséges euklideszi normát jelöli, és

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

A (2.10) összefüggést $\frac{x}{2^n}$ -re alkalmazva, felírható, hogy

$$\Phi \left(\frac{x}{2^n} \right) = D \Phi(0) \left(\frac{x}{2^n} \right) + \left\| \frac{x}{2^n} \right\| \varepsilon \left(\frac{x}{2^n} \right).$$

Kihasználhatjuk a $D \Phi(0)$ leképezés linearitását s ugyanígy az euklideszi normáét is. Ha még ezután mindkét oldalt 2^n -nel szorozzuk, és tekintettel vagyunk a (2.8)-ra is, akkor az alábbihoz jutunk:

$$\Phi(x) = D \Phi(0)(x) + \|x\| \varepsilon \left(\frac{x}{2^n} \right).$$

Összehasonlítva ezt a (2.10) sorral, megállapíthatjuk, hogy

$$\|x\| \varepsilon(x) = \|x\| \varepsilon \left(\frac{x}{2^n} \right),$$

minden pozitív n egész számra. A fentiből adódik a következő:

$$\varepsilon(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{x}{2^n} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

és ez a Φ transzformáció linearitását fejezi ki, ha figyelembe vesszük a (2.10) felírást. $\square$

2.4.3. Megjegyzés: A fenti két tétel alapján megállapíthatjuk, hogy a C^k osztályú K -koordináta-rendszerek is lineáris transzformáció erejéig vannak egyértelműen meghatározva egy C^k osztályú loopra vonatkozóan.

Úgy is fogalmazhatunk, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér lineáris homeomorfizmusainak csoportja osztályozza a K -koordináta-rendszereket, s ennél az osztályozásnál az összes K -koordináta-rendszer egy osztályba tartozik. $\square$

III. FEJEZET

LOOPOK VISELKEDÉSE KANONIKUS KOORDINÁTA-RENDSZEREK BEN

Ebben a fejezetben folytatjuk a C^k osztályú lokális loopok kanonikus koordináta-rendszereinek vizsgálatát.

Az I. FEJEZET 1.4.10. Tétele szerint a Lie-csoportok egyparaméteres részcsoportjai igen könnyen felismerhetők: lineárisak. Ugyanez érvényes természetesen az EFK-koordináta-rendszerrel rendelkező loopokra is: EFK-koordináta-rendszerben egy loop egyparaméteres részcsoportja lineáris.

Ez a jellemzés lehetővé teszi az ilyen loopok egyparaméteres részcsoportjainak felismerését. Csak a következőket kell tennünk: tekintünk a loophoz egy EFK-koordináta-rendszert, és megvizsgáljuk, hogy ezekben a koordinátákban az egydimenziós lokális alterek (az origón átmenő egyenes megfelelő szakaszai) egyparaméteres részcsoportok-e vagy sem. Ha egy ilyen lokális egyenes részcsoport, akkor irányában létezik egyparaméteres részcsoport, ha pedig nem részcsoport, akkor nem létezik. *Vagyis az egyparaméteres részcsoportok létezése dönthető el a fenti módon.*

Ezt a kritériumot fogjuk általánosítani két lépésben. Az első szakaszban az egyparaméteres részcsoportok K -koordináta-rendszerbeli viselkedését vizsgáljuk meg, s jutunk a fentivel megegyező eredményre: *egy loop bármely egyparaméteres részcsoportja lineáris egy K -koordináta-rendszerben* (1. szakasz, 3.1.1. Tétel).

Ezután adunk választ a második szakaszban arra a kérdésre, hogy K -koordináta-rendszerben a részloopok

III. Bevezetés

alakjáról mit lehet állítani. Először a részloopot definiáljuk. Nem különböztetjük meg az egyparaméteres esetet, hanem azonnal az r -paraméteres részloopok fogalmát határozzuk meg. Így a válasz a fenti kérdésre speciális esetként fogja tartalmazni az egyparaméteres részloopok alakjára vonatkozó állítást:

Kanonikus koordináta-rendszerben az egyparaméteres részloopok lokálisan egy egyenessel egyeznek meg. Az r -paraméteres részloopok pedig lokálisan r -dimenziós síkokkal egyeznek meg.

III.1. Kanonikus koordináta-rendszerek és első fajú kanonikus koordináta-rendszerek

E fejezet első szakaszában a K-koordináta-rendszerek felhasználásával igazolunk egy állítást, amely az egyparaméteres részcsoportok létezése esetén lehetővé teszi a K-koordináta-rendszerek és az EFK-koordináta-rendszerek azonosítását.

3.1.1. Tétel [8]: Legyen $\mathcal{D}$ egy K-koordináta-rendszer az $(\mathcal{F}; \ell)$ lokális G^k osztályú loopra vonatkozóan. Ekkor az $(\mathcal{F}; \ell)$ minden $x(t)$ egyparaméteres részcsoportja a $\mathcal{D}$ koordinátaiban úgy írható fel, mint

$$x(t) = a \cdot t,$$

ahol $t \in \mathbb{I}$ (egy alkalmas intervallum 0 körül) és $a \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Bizonyítás: Ha F az ℓ loop-szorzás alakja $\mathcal{D}$ -ben, akkor

$$F(x(t), x(t)) = 2x(t).$$

Másrészt

$$F(x(t), x(t)) = x(t + t) = x(2t),$$

vagy egy ezzel ekvivalens formában t helyébe $\frac{t}{2} = t$ helyettesítve):

$$x\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}x(t).$$

Ahogy az már az előző szakasz második tételénél is megjegyeztük, ha $x(t) \in W$, akkor $x\left(\frac{t}{2^n}\right) \in W$ is

teljesül minden pozitív egész n számra. A fenti egyenlőségből az következik, hogy

$$x \left(\frac{t}{2^n} \right) = \frac{1}{2^n} x(t) \quad (3.1)$$

minden pozitív egész n számra. Valóban, egyszerűen írjunk t helyébe $\frac{t}{2} - t$, ezt ismételjük meg még $(n-1)$ -szer, s ezek után végezzünk n szerinti teljes indukciót.

Mivel $x(t)$ differenciálható, rá felírható a következő:

$$x(t) = D x(0)t + |t| \varepsilon(t), \quad (3.2)$$

ahol $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$. Ha ezt $x \left(\frac{t}{2^n} \right)$ -re alkalmazzuk, az alábbihoz jutunk:

$$x \left(\frac{t}{2^n} \right) = D x(0) \left(\frac{t}{2^n} \right) + \left| \frac{t}{2^n} \right| \varepsilon \left(\frac{t}{2^n} \right),$$

ahol

$$\lim_{\frac{t}{2^n} \rightarrow 0} \varepsilon \left(\frac{t}{2^n} \right) = 0.$$

Mindkét oldalt 2^n -nel megszorozva, és a (3.1)-et alkalmazva, nyerjük, hogy

$$x(t) = D x(0) t + |t| \varepsilon \left(\frac{t}{2^n} \right).$$

Ezt az utolsó egyenlőséget összehasonlítva (3.2)-tel, következik az alábbi egyenlőség minden n pozitív egész számra:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon \left(\frac{t}{2^n} \right).$$

Mint ahogy

$$\lim_{\frac{t}{2^n} \rightarrow 0} \varepsilon \left(\frac{t}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon \left(\frac{t}{2^n} \right) = 0 ,$$

ezért

$$\varepsilon (t) = 0 ,$$

vagyis $D x (0) = t$ a -val jelölve, (3.2)-ből azt kapjuk, hogy

$$x (t) = a t . \square$$

3.1.2. Következmény: Ha egy loop esetén minden irányban létezik egyparaméteres részcsoport, akkor létezik EFK-koordináta-rendszer. Ilyen esetekben egy K-koordináta-rendszer mindig EFK-koordináta-rendszer is egyben. Vagyis ilyen feltételek mellett a K-koordináta-rendszerek és az EFK-koordináta-rendszerek megegyeznek. $\square$

Bizonyítás: Mivel egy adott irányban az egyparaméteres részcsoporthoz loopok esetén is unicitása van, és az előző tétel értelmében egy ilyen részcsoporthoz $a t$ alakú egyparaméteres struktúra, ezért az EFK-koordináta-rendszer definíciójában adott $a t$ lokális egydimenziós altér a lineáris homeomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott lokális egyparaméteres részcsoporthoz. $\square$

III.2. A részloopok alakja kanonikus koordináta-rendszerekben

Mint az előző szakaszban láttuk, K -koordináta-rendszerben az egyparaméteres részcsoporthok lineárisak. Második lépésként most kettős általánosítása következik a 3.1.1. Tételnek. Részloopra, sőt nem csupán egyparaméteres, hanem azonnal magasabb paraméterszámú részloopra igazoljuk, hogy K -koordináta-rendszerben lokálisan egy alteret tölt ki.

Először a szükséges definíciókat adjuk meg.

3.2.1. Definíció: Egy C^k osztályú lokális differenciálható $(\mathcal{F}; f)$ loopot r -paraméteresnek nevezünk, ha $\mathcal{F}$ r -dimenziós sokaság. $\square$

A továbbiakban loopon mindig C^k osztályú lokális differenciálható loopot értünk.

A jelen szakasz vizsgálatának tárgyát képező részloopok fogalmát az alábbi definícióban fogalmazzuk meg.

3.2.2. Definíció: Legyen $(\mathcal{F}; f)$ és $(\mathcal{G}; g)$ két loop, és legyen ξ egy C^k osztályú lokális beágyazás:

$$\xi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} .$$

Ha

$$f \left(\xi(x), \xi(y) \right) = \xi \left(g(x,y) \right)$$

minden olyan $x, y \in \mathcal{G}$ esetén, ahol a $g(x,y)$ loop-szorzás definiálva van, akkor a $(\mathcal{G}; g)$ loopot az $(\mathcal{F}; f)$ loop részloopjának nevezzük, és $(\mathcal{G}; g; \xi)$ vel jelöljük. Ha $\dim \mathcal{G} = r$, akkor $(\mathcal{G}; g; \xi)$ -t az $(\mathcal{F}; f)$ loop r -paraméteres részloopjának nevezzük. $\square$

Fő célunk annak megmutatása, hogy egy lokális differenciálható loop r -paraméteres részloopjai kanonikus koordináta-rendszerben lokálisan r -dimenziós síkok.

3.2.3. Tétel [9]: Legyen $(\mathcal{F}; f)$ lokális $\mathbb{C}^k$ osztályú loop és $\mathcal{D}$ egy koordináta-rendszer az $(U; \phi)$ -vel megadva. Legyen továbbá $(\mathcal{G}; g; \xi)$ egy r -paraméteres lokális differenciálható részloopja az $(\mathcal{F}, f)$ loopnak. Ekkor a $(\mathcal{G}; g; \xi)$ részloop a $\mathcal{D}$ koordináta-rendszerben lokálisan egy az $\mathbb{O}$ -n áthaladó r -dimenziós sík. Továbbá ebben az r -dimenziós síkban az $(\mathcal{F}; f)$ loop $\mathcal{D}$ K -koordináta-rendszere által indukált lineáris koordináta-rendszer a $(\mathcal{G}; g; \xi)$ részloop K -koordináta-rendszere. $\square$

Bizonyítás: Legyen $(\mathcal{F}, f)$ egy loop és $\mathcal{D}$ az (U, ϕ) koordináta-térképpel adott K -koordináta-rendszer. Tekintsük továbbá $(\mathcal{F}; f)$ -nek a $\xi \in \mathbb{C}^k$ beágyazással megadott lokális részloopját. Definiálhatunk egy $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ loopot az $\mathbb{R}^n$ térben a ϕ diffeomorfizmus segítségével. A loop-szorzást ekkor a következő módon adjuk meg:

$$\sigma : \tilde{V} \times \tilde{V} \longrightarrow \tilde{U} ,$$

$$\sigma = \phi \circ f \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1}) ,$$

ahol $\mathbb{O} \in \tilde{V} \subseteq \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{O}$ az $\mathbb{R}^n$ tér origója). A 3.2.2. Definíció szerint a $(\mathcal{G}; g; \xi)$ loopra érvényes az alábbi összefüggés:

$$g : V^r \times V^r \longrightarrow U^r ,$$

$$g = \xi^{-1} \circ f \circ (\xi \times \xi) ,$$

ahol $\xi^{-1}(e) \in V^r \subseteq U^r \subseteq \mathcal{G}$ (e a $\mathcal{G}$ egységeleme).

III.2. A részloopok alakja K-koordináta-rendszerben

Vezessünk be egy K-koordináta-rendszert a $(\mathcal{G}; g)$ loopon az (U^r, ψ) koordináta-térképpel, ugyanúgy, mint az $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ loop esetén.

A következő diagram mutatja a fent bevezetett leképezéseket és loopokat:

$$\mathbb{R}^r \xleftarrow{\psi} \mathcal{G} \xrightarrow{\xi} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{U}^r \xleftarrow{\psi} U^r \xrightarrow{\xi} U \xrightarrow{\phi} \tilde{U}.$$

A $(\mathcal{G}; g)$ loop (U^r, ψ) -vel definiált kanonikus koordináta-rendszerében szintén definiálhatunk egy τ loop-szorzást a következőképpen:

$$\tau : \tilde{V}^r \times \tilde{V}^r \longrightarrow \tilde{U}^r ;$$

$$\tau = \psi \circ \xi^{-1} \circ f \circ \left[(\xi \circ \psi^{-1}) \times (\xi \circ \psi^{-1}) \right].$$

Világos, hogy a kölcsönösen egyértelmű

$$\kappa = \phi \circ \xi \circ \psi^{-1}$$

leképezés egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}^r, \tau)$ loopról az $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ loopra, vagyis

$$\kappa \circ \tau(x, y) = \sigma \circ (\kappa \times \kappa)(x, y)$$

teljesül minden $x, y \in \tilde{V}^r$ esetén.

Most megmutatjuk, hogy κ lineáris leképezés. Mivel ϕ és ψ kanonikus koordináta-rendszereket határoznak meg, megállapíthatjuk, hogy

$$\tau(x, x) = 2x$$

továbbá

$$\alpha(\kappa(x), \kappa(x)) = 2\kappa(x)$$

minden $x \in \tilde{V}^r$ esetén. A fenti izomorfizmusból nyerjük, hogy

$$\kappa(2x) = \kappa \circ \tau(x, x) =$$

$$= \alpha(\kappa(x), \kappa(x)) = 2\kappa(x)$$

tetszőleges $x \in \tilde{V}^r$ -re. Könnyen beláthatjuk, hogy $x \in \tilde{V}^r$ -ből következik az $\frac{1}{2}x \in \tilde{V}^r$. Tegyük fel ennek ellenkezőjét, vagyis legyen igaz, hogy $x \in \tilde{V}^r$, ugyanakkor $\frac{1}{2}x \notin \tilde{V}^r$. Ekkor $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x \right] = \frac{1}{4}x \notin \tilde{V}^r$, mivel az $\frac{1}{4}x \in \tilde{V}^r$ tartalmzásból az következne, hogy $\tau\left(\frac{1}{4}x, \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{2}x$ a $\tilde{V}^r$ környezethez tartozik, ami viszont nem igaz. Így egyszerű teljes indukcióval azt kaphatjuk, hogy $\frac{1}{2^l}x \in \tilde{V}^r$ valamennyi

$l \geq 2$ természetes számra. Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan $\frac{1}{2^l}x$ pontok tetszőlegesen közel Φ -hoz, amelyek nem tartoznak $\tilde{V}^r$ -hez. Ebből azonban az következik, hogy Φ nem lehet egy belső pontja $\tilde{V}^r$ -nek, ami viszont ellentmond a V -re vonatkozó alapfeltevésnek, nevezetesen, hogy az Φ egy környezete.

Ezek után indukcióval azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2^m}x \in \tilde{V}^r$ bármely n pozitív egészre. Ezért felírható, hogy

$$\kappa\left(\frac{1}{2^m}x\right) = \frac{1}{2^m}\kappa(x) \quad (3.3)$$

bármely $x \in \tilde{V}^r$ esetén igaz. Mivel κ diffeomorfizmus, érvényes a következő:

III.2. A részloopok alakja K-koordináta-rendszerben

$$\kappa(x) = D\kappa(0)(x) + \|x\| \varepsilon(x),$$

ahol $\| \cdot \|$ a közönséges euklideszi normát jelöli, továbbá $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Ugyanezt az összefüggést felírhatjuk az

$\frac{1}{2^m} x$ elemre is:

$$\kappa\left(\frac{1}{2^m} x\right) = D\kappa(0)\left(\frac{1}{2^m} x\right) + \left\|\frac{1}{2^m} x\right\| \varepsilon\left(\frac{1}{2^m} x\right).$$

Figyelembe véve a $D\tau(0)$ transzformáció linearitását és a (3.3) összefüggést, a következő formulához jutunk:

$$\frac{1}{2^m} \kappa(x) = \frac{1}{2^m} D\kappa(0)(x) + \frac{1}{2^m} \|x\| \varepsilon\left(\frac{1}{2^m} x\right)$$

az összes $x \in \tilde{V}^r$ elemre. Mindkét oldalt 2^m -mel megszorozva, majd a $\kappa(x)$ -re kapott két egyenlőséget összehasonlítva nyerjük az alábbi:

$$\|x\| \varepsilon(x) = \|x\| \varepsilon\left(\frac{1}{2^m} x\right)$$

minden $x \in \tilde{V}^r$ esetén és minden m -re. Ebből az következik, hogy

$$\varepsilon(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon\left(\frac{1}{2^m} x\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0,$$

ami viszont közvetlenül mutatja κ linearitását a $\tilde{V}^r$ környezetben.

A κ linearitása azt jelenti, hogy $\kappa(\tilde{V}^r)$ lokálisan egy r -dimenziós altere $\mathbb{R}^n$ -nek az 0 körül. Ezért $\phi \circ \xi = \kappa \circ \psi$ egy lokális leképezése a V^r térnek az $\mathbb{R}^n$ tér $\kappa(\tilde{V}^r)$ lineáris alterére. Más szavakkal: a lokális r -paraméteres $(\mathcal{E}; \theta; \xi)$ részloop lokálisan az $\mathbb{R}^n$ tér egy r -dimenziós

síkjával egyezik meg.

Vizsgáljuk meg végül a lokális $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ loopot a $\left[\phi \circ \xi(U^r); \phi \right]$ koordináta-rendszerben. Azt látjuk, hogy ez a loop lokálisan egy r -dimenziós sík az $\mathbb{R}^n$ térben az $\mathcal{O}$ -n keresztül. Ekkor ennek a síknak egy szokásos lineáris paraméterezése éppen egy kanonikus koordináta-rendszer. $\square$

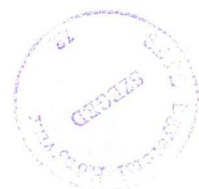
3.2.4. Megjegyzés: A fenti tétel kimondásakor a feltételt valójában ki kellene egészíteni a következővel: *ha a loopnak egyáltalán létezik részloopja.* Látni fogjuk ugyanis a következő fejezetben, hogy vannak olyan loopok, amelyeknek egyáltalán nincsenek részloopjai. $\square$

Ez a tétel alkalmas a részloopok létezésének vizsgálatára. Ha el akarjuk dönteni, hogy egy adott altér irányában létezik-e részloop, elegendő egy K -koordináta-rendszerbeli altérről megállapítani, hogy részloop-e vagy sem.

3.2.5. Következmény: Egy loopnak egy adott altér irányában csak akkor létezik lokális részloopja, ha valamely K -koordináta-rendszerben a megfelelő altér lokális loop. $\square$

A IV. FEJEZETBEN a fenti követelményt az egyparaméteres részloopok speciális esetére fogjuk alkalmazni.

3.2.6. Következmény: Egy loopnak egy adott irányban akkor létezik egyparaméteres részloopja, ha kanonikus koordináta-rendszerben a megfelelő irányú egyenes lokálisan egyparaméteres loop. $\square$



IV. FEJEZET

RÉSZLOOPOKKAL RENDELKEZŐ LOOPOK ÉS RÉSZLOOPOK NÉLKÜLI LOOPOK

A lokális loopok elméletében különösen nagy jelentősége van azoknak a loopoknak, amelyek rendelkeznek egyparaméteres részloopokkal.

M.A. AKIVISZ egy érdekes példát adott olyan kvázicsoportokra [3], amelyek úgynevezett loop-izotópjainak létezik minden altér irányában részloopja [5].

Az 1987-ben Szegeden megtartott szövetgeometriai konferencián K.H.HOFMANN vetette fel olyan loop megadásának problémáját, amelynek valamely irányban nem létezik egyparaméteres részloopja. Miközben a dolgozat eddigi fejezeteiben leírt eredmények felhasználásával megoldást keresünk erre a problémára, lényegében a következő kérdést tesszük vizsgálat tárgyává: *Az egyparaméteres részloopok létezése általánosan jellemző tulajdonsága-e a lokális loopoknak?*

További vizsgálataink konkrét célja a következőkben foglalható össze. Egy formulával egyszerűen megadható loop-osztályt definiálunk, amely módosított változataival együtt könnyen vizsgálható a részloopok létezésének szempontjából.

Kissé részletesebben e fejezet célkitűzései az alábbiak:

1. Megadunk egy olyan loop-osztályt (4.1.3. Definíció), amelynek minden altér irányában létezik részloopja. Ezen loop-osztály esetén megvizsgáljuk az asszociativitás feltételét, vagyis azt, hogy az osztály loopjai milyen feltétel mellett lesznek csoportok (4.2.1. Tétel).

2. Az előző osztályban (analitikus) példákat

keresünk egyrészt olyan elasztikus loopokra, amelyek nem csoportok, másrészt további példákat olyan elasztikus loopokra, amelyeknek az egyparaméteres részloopjai nem egyparaméteres részcsoporthoz tartoznak. Így el fogjuk tudni határolni egymástól az analitikus elasztikus loopokat és a jobb alternatív loopokat (4.2.6. Megjegyzés).

3. Megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a fenti loop-osztály izomorf a 4.0.2. Példabeli loopok osztályával (4.3.2. Tétel és 4.3.4. Tétel).

4. Olyan loop-osztályt keresünk (4.4.3. Definíció), amely loopjainak csak egyetlen irányban létezik részloopja (4.4.4. Tétel).

4. Végül példát (4.4.5. Definíció) adunk egyparaméteres részloopok nélküli loopra.

E fejezet minden eredménye lényegében a 2.2.1. Tételre (vagyis a kanonikus koordináta-rendszerek létezésére) és a 3.2.5. Következményre (a részloopok K -koordináta-rendszerbeli viselkedésére) alapszik.

A felsorolt eredményekből jól látható, hogy a dolgozat bevezetésében felvetett első vizsgálati irányt nem lehet követni: K -koordináta-rendszert nem lehet egyparaméteres részloopokon keresztül bevezetni.

Az M.A. AKIVISZ által adott fent említett példa volt a kiindulópontja azoknak a vizsgálatoknak, amelyek a felsorolt eredményekhez elvezettek. Ezért röviden itt ismertetjük ezt a konstrukciót. A 3. szakaszban látni fogjuk, hogy az általunk adott loop-osztálynak és a most ismertetendő példabeli kúdzicsoporthoz tartozó loop-osztálynak van egy közös loop-osztálya.

4.0.1. Példa: Tekintsünk az $(r+1)$ -dimenziós $\mathbb{P}_{r+1}$ projektív térben három általános helyzetű síma hiperfelületet,

legyenek ezek U , V és W . Legyen továbbá l_0 egy olyan egyenes, amely ezeket a felületeket rendre az E , F és G pontban metszi (4.1. ábra). Ekkor minden olyan l egyenes, amely az U illetve V felületen levő, az E és F pont közelében kicsiny környezetéhez tartozó K illetve L pontokon megy át, metszeni fogja a W felületet egy a G pont alkalmasan választott kis környezetéhez tartozó M pontban. Az ilyen módon megadott

$$h : U \times V \longrightarrow W ; \quad (K, L) \longmapsto M$$

leképezés nyilvánvalóan differenciálható és invertálható, és ezért lokális differenciálható kvázicsoportot határoz meg. $\square$

Mivel dolgozatunkban loopokkal foglalkozunk, vizsgáljuk meg, hogy a fenti (hárombázisú) kvázicsoporthoz hogyan találhatunk egybázisú, vagyis egyetlen felületen értelmezett kvázicsoportot, illetve loopot.

4.0.2. Példa: Eleve loopot fogunk definiálni, mégpedig az U felületen, sőt az egységelemet is előre rögzíthetjük az E pontnak. Meg kell adnunk az U felület E pontjának valamely alkalmas környezetébe tartozó tetszőleges A és B pontjain elvégzett szorzás eredményét. A BF egyenes és a W hiperfelület metszéspontja legyen B_v , az EB_v egyenes és a V hiperfelület metszéspontja pedig B'_v (4.1. ábra). Az AB'_v egyenes metsse W -t a C_v pontban. Végül a C_vF egyenes és az U hiperfelület metszéspontja C . A szorzásművelet ekkor:

$$h^* : U \times U \longrightarrow U ; \quad (A, B) \longmapsto C.$$

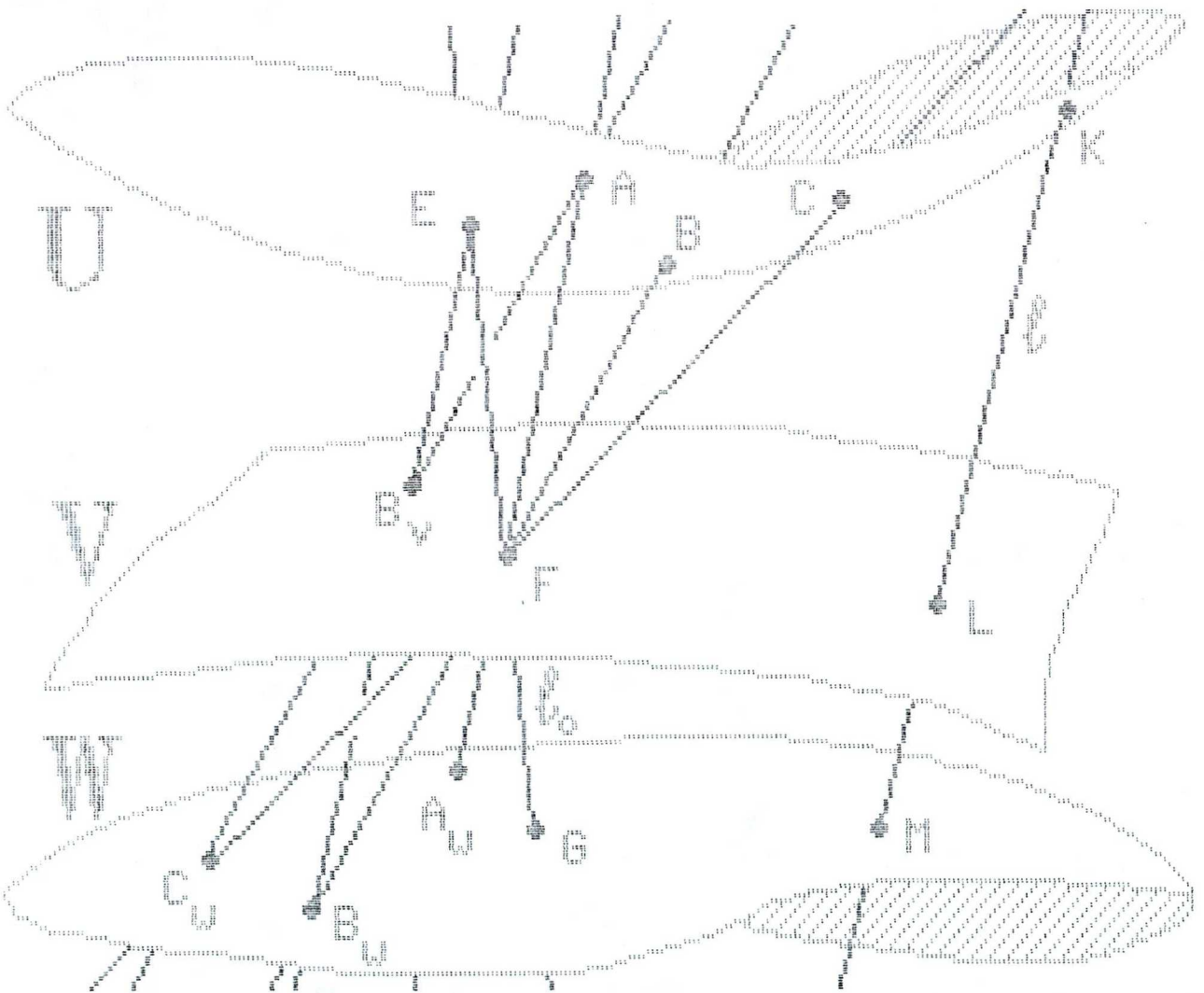
A megadott eljárásból jól követhető, hogy a szorzás valóban invertálható és egységeleme E . Ha tekintjük még az AF egyenesnek a W felülettel való A_v metszéspontját, akkor észrevehetjük, hogy a fenti

IV. Bevezetés

megfeleltetéseket végezve, a W hiperfelületen is indukálódik egy loop-szorzás a G egységelemmel. Szemléletesen a következőt is mondhatjuk: a W felületen a loopot úgy kapjuk, hogy az (U, h^*) loopot a V felület F egységpontjából a W felületre vetítjük. Az indukált loop-szorzás ekkor:

$$h_V^* : W \times W \longrightarrow W ; \quad (A_V, B_V) \longmapsto C_V .$$

Hasonlóan, egy loopot kaphatunk a V felületen is a (U, h^*) loopnak a W felület egységpontjából a V felületre vetítésével. $\square$



4.1. ábra

4.0.3. Megjegyzések: 1. A fenti példák konstrukciójából jól látható, hogy a definiált kvázicsoport illetve loop lokális. Ugyanis a metszéspontok egyértelműségét csak lokálisan követelhetjük meg. A művelet tehát ilyen módon nem terjeszthető ki a teljes felületre.

2. Az is könnyen adódik, hogy az EFG egységtengelyt tartalmazó bármely r -dimenziós sík a loopból r -paraméteres részloopot metsz ki. Valóban, a loop-szorzást meghatározó egyenesek és pontok mind az adott síkban lesznek. $\square$

IV.1. Loopok minden irányban létező részloopokkal

Célunk egy olyan loop-osztály felírása, amely loopjainak minden irányban léteznek a részloopjai.

4.1.1. Definíció: Egy lokális szorzást

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ; V \times V \longrightarrow U$$

(ahol V, U a $\mathbb{O}$ megfelelő környezetei) (α, β) -szorzásnak nevezünk, ha minden $x, y \in V$ esetén az

$$F(x, y) = x + y + \alpha(y)x + \beta(x)y \quad (4.1)$$

egyenlőséggel van definiálva, ahol

$$\alpha, \beta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; \mathbb{O} \longmapsto 0$$

valós C^k osztályú függvények. $\square$

Ezután azt fogjuk igazolni, hogy az így definiált lokális szorzás loopot határoz meg.

4.1.2. Állítás: Egy (α, β) -szorzás egy lokális loop-szorzás az $\mathbb{R}^n$ tér origójának egy V környezetében. A loop-szorzás egységeleme az $\mathbb{O}$ origó. $\square$

4.1.3. Definíció: Egy lokális C^k osztályú $(\mathbb{R}^n ; F)$ loopot az (α, β) -szorzásművelettel $(\mathbb{R}^n ; \alpha, \beta)$ -loopnak nevezünk. $\square$

Bizonyítás: Belátjuk, hogy a 2.1.1. Definíció egyes pontjaiban kirótt feltételek rendre teljesülnek.

a) Mivel α és β is definiálva van $\mathbb{R}^n$ -en, $F(x, y)$

jól definiált a V környezet tetszőleges megfelelő választása mellett. A szorzás balról és jobbról lokálisan megoldható, mert amint arról rövid számolással meggyőződhetünk,

$$D_1 F(\Phi, \Phi) = I, \quad D_2 F(\Phi, \Phi) = I,$$

ahol D_1 és D_2 az $\mathbb{R}^n$ -beli első illetve második változó szerinti parciális deriválást jelöli és I az identikus leképezés az $\mathbb{R}^n$ térben.

b) Az Φ origó a szorzásművelet egységeleme, hiszen telejesül, hogy

$$F(x, \Phi) = x + \Phi + \alpha(\Phi) + \beta(x)\Phi = x,$$

és hasonlóan:

$$F(\Phi, y) = y.$$

c) A loop-szorzás C^k osztályú, mivel α és β szintén C^k osztályú leképezések $\mathbb{R}^n$ -ben. $\square$

Ezután következhet annak megmutatása, hogy ezek a loopok minden irányban rendelkeznek részloopokkal.

4.1.4. Tétel [10]: Az $\mathbb{R}^n$ tér bármely $\mathcal{A}$ lineáris alterére az F -fel jelölt (α, β) -szorzás $F|_{\mathcal{A} \times \mathcal{A}}$ megszorítása az $\mathcal{A}$ altérre lokális loop-szorzás az altér Φ_A origójának valamely környezetében. $\square$

4.1.5. Definíció: Az $(\mathcal{A}; F)$ részloopot $(\mathcal{A}; \alpha, \beta)$ -loopnak nevezzük. $\square$

Bizonyítás: Ha $\mathcal{A} = \Phi$ vagy $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ triviális altér, akkor a tétel állítása nyilvánvalóan teljesül. Legyen $\mathcal{A}$ egy az

IV.1. Loopok minden irányban létező részloopokkal

előzőektől különböző altere az $\mathbb{R}^n$ térnek. Ekkor tetszőleges $x, y \in \mathcal{A}$ pontokra a

$$z = F(x, y) = [1 + \alpha(y)]x + [1 + \beta(x)]y$$

pont nyilvánvalóan ismét az $\mathcal{A}$ altérhez fog tartozni.

Hasonlóan, ha x, z (illetve y, z) az $\mathcal{A}$ altér elemei, akkor y (illetve x) szintén az $\mathcal{A}$ -hoz tartozik. A fentiekből pedig az következik, hogy az F szorzás megszorítása az $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ szorzathalmazra lokális differenciálható részloopja az $(\mathbb{R}^n; F)$ loopnak. $\square$

Külön is hangsúlyozzuk a fenti eredmény két elemét.

4.1.6. Következmény: Az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ loop az $\mathbb{R}^n$ tér minden r -dimenziós alterének irányában rendelkezik r -paraméteres részlooppal. Speciális esetként az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ loopnak minden irányban létezik egyparaméteres részloopja. $\square$

IV.2. Algebrai azonosságoknak eleget tevő

$(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok

Az algebrai azonosságoknak eleget tevő $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok tanulmányozását a legtermészetesebbnek tekinthető kérdéssel kezdjük. Az (egyparaméteres) részloopokkal rendelkezés tulajdonsága nem valamilyen különösen erős algebrai azonosság - esetleg az asszociativitás - következménye-e?

Az asszociativitás megvizsgálása után foglalkozunk néhány egyszerű, a kvázicsoportok elméletében is szerepet játszó azonosságnak eleget tevő $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -looppal.

Kezdjük tehát vizsgálatainkat az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok asszociativitási kritériumával. Az $n = 1$ esetben érvényes Aczél János már említett (tetszőleges loopra igaz) eredménye [1], amely szerint szükséges és elegendő feltétel a loop erős hatványasszociativitása.

4.2.1. Tétel [10]: Legyen F egy (α, β) -szorzás, amely az $\mathbb{O}$ körüli valamely $V \subset \mathbb{R}^n$ környezetben van definiálva. Ekkor az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop $(n \geq 2)$ csoport akkor és csak akkor, ha i)

$$\alpha \{ F(x, y) \} = \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y)$$

bármely $x, y \in V$ pontokra, valamint ii) az $\alpha - \beta$ függvény lineáris. $\square$

Bizonyítás: A bizonyítás viszonylag hosszabb levezetést és többféle megfontolást igényel, ezért szakaszokra bontjuk.

1. Először megmutatjuk, hogy az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop csoport akkor és csak akkor, ha $x, y \in V$ pontokra teljesülnek a következő feltételek:

$$\alpha \left(F(x, y) \right) = \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y), \quad (4.2a)$$

$$\beta \left(F(x, y) \right) = \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y). \quad (4.2b)$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Egy loop egységelemes kvázicsoport lévén akkor és csak akkor csoport, ha asszociatív, vagyis felírható a következő azonosság:

$$F \left(F(x, y), z \right) = F \left(x, F(y, z) \right).$$

A (4.1) kifejezés beírása után azt kapjuk, hogy ez az azonosság ekvivalens a következővel:

$$\begin{aligned} & \left[\alpha \left(F(y, z) \right) - \left(\alpha(y) + \alpha(z) + \alpha(y)\alpha(z) \right) \right] x = \\ & = \left[\beta \left(F(x, y) \right) - \left(\beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y) \right) \right] z \end{aligned}$$

minden $x, y, z \in V$ pontra. Könnyen látható, hogy ez az azonosság viszont valóban ekvivalens (4.2a)-val és (4.2b)-vel. Valóban, ha rögzítünk egy x értéket, akkor x együtthatója a bal oldalon szükségképpen 0-val egyenlő minden y -ra és x -szel nem arányos z -re. Ha pedig ezután egy x -szel nem arányos x' -t tekintünk, akkor a bal oldali együttható az előbb kizárt z -kre és tetszőleges y -ra is 0 lesz. Ugyanezeket a megfontolásokat elvégezhetjük a jobb oldali együtthatóra is. Megfordítva, a (4.2a) és a (4.2b) azonosságok teljesüléséből következik az asszociativitást kifejező előbbi azonosság érvényessége.

2. Könnyen látható, hogy az

$$\alpha \left(F(x, y) \right) = \alpha \left(F(y, x) \right)$$

és

$$\beta \left(F(x, y) \right) = \beta \left(F(y, x) \right)$$

egyenlőségek fennállnak minden $x, y \in V$ pontra, amennyiben $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ csoport. Ez egyszerű következménye annak, hogy a (4.2a) és a (4.2b) azonosságok jobb oldalain álló kifejezések szimmetrikusak az y és z , illetve az x és y változókban.

Vegyük észre, hogy a feltétel szükséges részének i) pontját is igazoltuk.

3. Belátjuk a szükséges feltétel második, ii) részét: megmutatjuk, hogy ha $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ csoport, akkor az $\alpha - \beta$ függvény lineáris.

Tekintsük az $\alpha - \beta$ függvényt az λ lineáris függvény és az ρ "maradék" függvény összegének:

$$(\alpha - \beta)(x) = \lambda(x) + \rho(x),$$

vagy az átrendezés utáni alakban ugyanezt a felbontást:

$$\alpha(x) = \beta(x) + \lambda(x) + \rho(x), \quad (4.3)$$

ahol

$$\lim_{x \rightarrow \mathbb{O}} \frac{\rho(x)}{\|x\|} = 0. \quad (4.4)$$

A második pont szerint feltehetjük, hogy tetszőleges három pontra V -ben, így az x, y és x (!) V -beli pontokra is teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

$$\alpha \left(F(x, y) \right) = \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y), \quad (4.2a')$$

$$\beta \left(F(x, y) \right) = \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y). \quad (4.2b')$$

Kifejthetjük az $\alpha \left(F(x, y) \right)$ -t, aminek során először a

(4.2b) összefüggést alkalmazzuk, ezt követően a (4.1) definiáló egyenlőséget, majd rendre a λ linearitását és a (4.3) formulát háromszor. Ilyen lépésekben a levezetés:

$$\begin{aligned}
 \alpha(F(x,y)) &= \beta(F(x,y)) + \lambda(F(x,y)) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y) + \lambda(F(x,y)) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y) + \lambda(x+y+\alpha(y)x+\beta(x)y) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y) + \lambda(x) + \lambda(y) + \alpha(y)\lambda(x) + \beta(x)\lambda(y) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \alpha(x) - \rho(x) + \alpha(y) - \rho(y) + \beta(x)[\beta(x) + \lambda(y)] + \alpha(y)\lambda(x) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \alpha(x) + \alpha(y) + \beta(x)\alpha(y) - \beta(x)\rho(y) - \rho(x) - \rho(y) + \alpha(y)\lambda(x) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(y)[\beta(x) + \lambda(x)] - \beta(x)\rho(y) - \rho(x) - \rho(y) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(y)\rho(x) - \beta(x)\rho(y) - \rho(x) - \rho(y) + \rho(F(x,y)) = \\
 &= \alpha(F(x,y)) + [\rho(F(x,y)) - \alpha(y)\rho(x) - \beta(x)\rho(y) - \rho(x) - \rho(y)] .
 \end{aligned}$$

Igy minden $x, y \in V$ pontra igaz, hogy

$$\rho(F(x,y)) = \alpha(y)\rho(x) + \beta(x)\rho(y) + \rho(x) + \rho(y) . \quad (4.5)$$

A λ linearitásának bizonyításához azt mutatjuk meg, hogy a ρ függvény szintén lineáris. Ehhez először azt kell látnunk, hogy ha az $x_0 \in V$ pont közel van az $\mathbb{O}$ origóhoz, akkor létezik olyan $x_1 \in V$ pont, amelyre

$$F(x_1, x_1) = [\alpha(x_1) + \beta(x_1) + 2] x_1 = x_0 .$$

Valóban, tudjuk, hogy bevezethetők kanonikus koordináták egy nyílt $\tilde{V} \subset V$ környezeten, az $x \in \tilde{V}$ pont koordinátáit $\tilde{x}^i(x)$

IV.2. $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok algebrai azonosságokkal

$(i=1, \dots, n)$ jelöli. Ekkor ebben a K -koordináta-rendszerben van olyan $x' \in \tilde{V}$, pont amelynek koordinátái $\frac{1}{2} \tilde{x}^i(x)$. Ezt az egyszerű állítást már megmutattuk a 3.2.3. Tétel bizonyítása során. Ezért az x' pontra teljesül, hogy $F(x', x') = x$.

Ehhez a fenti x_1 ponthoz is tudunk találni egy $x_2 \in V$ pontot, amely hasonló feltételnek tesz eleget:

$$x_1 = F(x_2, x_2) = [\alpha(x_2) + \beta(x_2) + 2] x_2 = \sigma_2 x_2,$$

s ezt az eljárást folytatva, teljes indukcióval kimutathatóan megkaphatjuk V -beli pontoknak egy olyan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatát, amelyekre igaz, hogy:

$$x_{n-1} = F(x_n, x_n) = [\alpha(x_n) + \beta(x_n) + 2] x_n = \sigma_n x_n.$$

Vegyük észre, hogy az x_0 pontnak az $\mathbb{O}$ -hoz kellően közeli választásakor $\sigma_n > \frac{2}{3}$. Ez viszont minden x_0 -ra teljesül, ha V alkalmasan van megválasztva. A fenti kifejezés alkalmazásával x_0 a következőképpen fejezhető ki:

$$x_0 = \sigma_1 x_1 = \sigma_1 \sigma_2 x_2 = \dots = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n x_n = \left(\prod_{i=1}^n \sigma_i \right) x_n, \quad (4.6)$$

minden kezdő $x_0 \in V$ pontra és $n = 1, 2, \dots$ esetén. Az $x = y$ helyettesítést alkalmazva a (4.4) összefüggésben, adódik a következő

$$\rho(F(x, x)) = \rho([\alpha(x) + \beta(x) + 2]x) = \alpha(x)\rho(x) + \beta(x)\rho(x) + 2\rho(x)$$

összefüggés, amelyből átalakítás után kapjuk, hogy

$$\rho([\alpha(x) + \beta(x) + 2]x) = [\alpha(x) + \beta(x) + 2]\rho(x).$$

Alkalmazzuk ezt az összefüggést a korábban definiált x_i ($i = 1, 2, \dots$) pontsorozatra. Akkor felírhatjuk, hogy:

$$\rho(\alpha_i x_i) = \alpha_i \rho(x_i),$$

és ebből következően:

$$\rho \left(\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) x_n \right) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) \rho(x_n) \quad (4.7)$$

tetszés szerinti x_0 kezdő értékre. Ha behelyettesítjük az x_0 (4.6)-beli kifejezését a (4.4) formulába, akkor a (4.7) figyelembe vételével azt kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \frac{\rho(x_0)}{\|x_0\|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(x_0)}{\|x_0\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho \left(\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right) x_n \right)}{\prod_{i=1}^n \alpha_i \|x_n\|} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\rho(x_n)}{\|x_n\|} = \lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\rho(x_n)}{\|x_n\|} = 0, \end{aligned}$$

mivel az

$$\frac{\|x_{i+1}\|}{\|x_i\|} = \frac{1}{\alpha_{i+1}} < \frac{2}{3}$$

egyenlőtlenségből egyenesen következik, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$.

Ezért $\rho(x_0) = 0$ tetszőleges $x_0 \in V$ pont esetén. Ami viszont a ρ definíciója szerint pontosan azt jelenti, hogy $\alpha - \beta$ lineáris.

4. Bebizonyítjuk a tételbeli feltétel elegendőségét. Tegyük fel ezért, hogy a $\lambda = \alpha - \beta$ függvény lineáris, és az

$$\alpha(F(y, z)) = \alpha(y) + \alpha(z) + \alpha(y)\alpha(z)$$

IV.2. $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok algebrai azonosságokkal

feltétel teljesül minden $y, z \in V$ pontpár esetén. Speciálisan az $x, y \in V$ változókra az α függvény $(\lambda + \beta)$ -val helyettesítése után a fenti egyenlőség bal oldala:

$$\begin{aligned} \alpha(F(x, y)) &= \\ &= \lambda(F(x, y)) + \beta(F(x, y)) = \\ &= \lambda(x) + \lambda(y) + \alpha(y)\lambda(x) + \beta(x)\lambda(y) + \beta(F(x, y)) = \\ &= \left[\lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(y)\lambda(x) + \beta(y)\lambda(x) + \beta(x)\lambda(y) \right] + \left[\beta(F(x, y)) \right]. \end{aligned}$$

A jobb oldal pedig ekkor a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y) &= \\ &= \left[\lambda(x) + \lambda(y) + \lambda(x)\lambda(y) + \lambda(x)\beta(y) + \beta(x)\lambda(y) \right] + \\ &\quad + \left[\beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y) \right]. \end{aligned}$$

Ezzel azt kaptuk, hogy a (4.2a) feltételből és $\lambda = \alpha - \beta$ linearitásából

$$\beta(F(x, y)) = \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y)$$

következik bármely $x, y \in V$ esetén. Ez utóbbi viszont éppen a (4.2b) azonosság. A bizonyításunk 1. pontja szerint viszont (4.2a) és (4.2b)-ből együtt már következik az, hogy a vizsgált loop csoport. $\square$

4.2.2. Megjegyzések: 1. A fenti eredményeknek megfelelően egy $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop nem csoport, ha $\alpha - \beta$ nem lineáris ($n \geq 2$). Például ha a β függvény azonosan 0

és az α függvény nem lineáris. Ezért a (4.1) általában nemtriviális loopot definiál.

2. A 4.1.6. Következmény szerint az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ loop $(\mathcal{A}; \alpha, \beta)$ r -paraméteres részloopjai minden $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ altér esetén léteznek. Mivel a 4.1.4. Tétel érvényes ezekre a (rész)loopokra is, azt kapjuk, hogy az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ loop r -paraméteres $(r \geq 2)$ részloopjai sem r -paraméteres részcsoporthok, ha $\alpha - \beta$ nem lineáris. $\square$

Az eddigiekben megkerestük az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok csoportokból álló alosztályát. Ezután néhány további olyan alosztályt jellemzünk, amelyeket hasonlóan egyszerű algebrai azonossággal adhatunk meg. Először tekintsük a definíciókat. (A loopok szorzásműveleteit eleve F -fel jelöljük, minthogy ezeket a loopokat is csak egy meghatározott sokaságon, az $\mathbb{R}^n$ téren fogjuk vizsgálni.)

4.2.3. Definíció: Egy loopot *bal inverz tulajdonságú loopnak* (*jobb inverz tulajdonságú loopnak*) nevezünk, ha bármely $x \in V$ esetén létezik egy olyan $\bar{x}_l \in V$ elem $(\bar{x}_r \in V \text{ elem})$, amelyre minden $y \in V$ esetén teljesül az

$$F(\bar{x}_l, F(x, y)) = y \quad \left[F(F(y, x), \bar{x}_r) = y \right], \quad (4.8)$$

azonosság. Speciálisan $y = \oplus$ esetén érvényes, hogy

$$F(\bar{x}_l, x) = \oplus \quad \left[F(x, \bar{x}_r) = \oplus \right]. \quad (4.9)$$

Az F loopot *bal alternatív loopnak* (*jobb alternatív loopnak*) nevezzük, ha minden $x, y \in V$ -re érvényes a következő azonosság:

$$F(F(x, x), y) = F(x, F(x, y)). \quad (4.10)$$

$$\left[F(y, F(x, x)) = F(F(y, x), x) \right]$$

Egy loopot *elasztikus tulajdonságúnak* nevezünk, ha minden $x, y \in V$ esetén teljesül az alábbi egyenlőség:

$$F(x, F(y, x)) = F(F(x, y), x). \quad \square \quad (4.11)$$

A továbbiakban bemutatunk néhány eredményt a fenti azonosságokkal definiált $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopokra vonatkozóan. Négy szükséges és elegendő feltételt fogunk találni arra, hogy egy ilyen loop csoport legyen. Továbbá igazolunk egy állítást, amely az elasztikus loop-alosztály elhatárolását teszi lehetővé.

4.2.4. Tétel [10]: Egy $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop $(n \geq 2)$ csoport akkor és csak akkor, ha

a) rendelkezik a bal inverz tulajdonsággal (a jobb inverz tulajdonsággal), és $\alpha - \beta$ lineáris.

b) rendelkezik a bal alternativitás tulajdonságával (a jobb alternativitás tulajdonságával), és $\alpha - \beta$ lineáris. $\square$

4.2.5. Tétel [10]: Létezik az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopoknak $(n \geq 1)$ elasztikus loopokból álló olyan alosztálya, amely nem tartalmaz csoportot. $\square$

Bizonyítás (4.2.4. Tétel): a) A tétel első részének igazolása céljából írjuk be a (4.1) kifejezést a (4.8) és a (4.9) azonosságba. Ekkor az alábbi összefüggésekhez jutunk:

$$\begin{aligned} & \left[1 + \alpha(x + y + \alpha(y)x + \beta(x)y) \right] \bar{x}_1 + \left[1 + \alpha(y) + \beta(\bar{x}_1) + \alpha(y)\beta(\bar{x}_1) \right] x + \\ & + \left[\beta(x) + \beta(\bar{x}_1) + \beta(x)\beta(\bar{x}_1) \right] y = 0, \end{aligned} \quad (4.8')$$

illetve

$$\left[1 + \alpha(x) \right] \bar{x}_1 + \left[1 + \beta(\bar{x}_1) \right] x = 0 \quad (4.9')$$

bármely x, y és $\bar{x}_1 \in V$ -re. Kivonva (4.9')-t a (4.8')-ből, adódik az alábbi egyenlőség:

$$\begin{aligned} & \left[\alpha(x + y + \alpha(y)x + \beta(x)y) - \alpha(x) \right] \bar{x}_1 + \alpha(y) \left[1 + \beta(\bar{x}_1) \right] x + \\ & + \left[\beta(x) + \beta(\bar{x}_1) + \beta(x)\beta(\bar{x}_1) \right] y = 0 \end{aligned}$$

minden x, y és $\bar{x}_1 \in V$ esetén. Ha a bal oldali második tagot (4.9') segítségével kiküszöböljük, akkor egyenletünk az alábbira módosul:

$$\begin{aligned} & \left[\alpha(x + y + \alpha(y)x + \beta(x)y) - \alpha(x) - \alpha(y) - \alpha(x)\alpha(y) \right] \bar{x}_1 + \\ & + \left[\beta(x) + \beta(\bar{x}_1) + \beta(x)\beta(\bar{x}_1) \right] y = 0 \end{aligned}$$

minden x, y és $\bar{x}_1 \in V$ esetén. Vegyük észre, hogy az $\bar{x}_1 = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$. Valóban, ez a (4.9) közvetlen következménye. Így a (4.8) azonosság akkor és csak akkor teljesül egy $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopra, ha a következő két azonosság is teljesül:

$$\alpha(x+y+\alpha(y)x+\beta(x)y) = \alpha(x)+\alpha(y)+\alpha(x)\alpha(y) \quad (4.10a)$$

$$0 = \beta(x)+\beta(\bar{x}_l)\beta(x)\beta(\bar{x}_l) \quad (4.10b)$$

minden $x, y \in V$ esetén. Mivel $\alpha - \beta$ feltevés szerint lineáris, továbbá a (4.10a) feltétel ugyanaz, mint a (4.2a) feltétel, ez a loop csoport. Tekintettel arra, hogy egy csoport viszont mindig rendelkezik a bal inverz tulajdonsággal és a 4.2.1. Tétel szerint egy $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopra $\alpha - \beta$ lineáris, a feltétel szükséges voltát is beláttuk a bal inverz tulajdonságú loopokra.

Vegyük észre, hogy a (4.10b) és a (4.9') egyenlőségekből $\bar{x}_l$ kifejezhető a következő formában:

$$\bar{x}_l = \frac{1}{\begin{bmatrix} 1+\alpha(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\beta(x) \end{bmatrix}} x.$$

A jobb inverz tulajdonságú $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopokra a bizonyítást a fentihez hasonló módon teljesen elvégezhetjük. E helyett azonban egy másik kínálkozó utat követünk, az ilyen loopok egy további tulajdonságának bemutatására.

Észrevehetjük, hogy a bal inverz tulajdonságból és az $\alpha - \beta$ linearitásából következik az, hogy F csoportot definiál. Ebből pedig következik, hogy ez a $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop jobb inverz tulajdonságú. Megjegyezhetjük még azt is, hogy ebben az esetben egy elem bal inver és jobb inverz eleme megegyezik.

b) A (4.10) összefüggést az (4.1) alapján kifejtve azt kapjuk, hogy a (4.10) azonosság ekvivalens a következő kettővel:

$$\alpha(x+y+\alpha(y)x+\beta(x)y) = \alpha(x)+\alpha(y)+\alpha(x)\alpha(y) \quad (4.11a)$$

$$\beta(2x+\alpha(x)x+\beta(x)x) = 2\beta(x)+\beta(x)\beta(x) \quad (4.11b)$$

Azonnal láthatjuk, hogy (4.11a) és a (4.2a) azonosságok ekvivalensek. Ezért az $\alpha - \beta$ linearitásából és a bal alternatív tulajdonságból következik az, hogy ez a $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop csoport. A megfordítás nyilvánvaló, továbbá a jobb alternatív tulajdonságú $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop esete ugyanilyen módon vizsgálható. Ezzel a b) rész bizonyítását elvégeztük. $\square$

Bizonyítás (4.2.5. Tétel): A (4.1) definiáló egyenlőségnek a (4.11) azonosságba helyettesítésével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y) - \alpha(x+y+\alpha(x)y+\beta(y)x) = \\ = \beta(x) + \beta(y) + \beta(x)\beta(y) - \beta(x+y+\alpha(y)x+\beta(x)y) \end{aligned}$$

teljesül minden $x, y \in V$ pont esetén. A kérdés az, hogy milyen feltételeknek kell ilyen esetben teljesülni az α és β függvényekre. Világos, hogy ha $\alpha \equiv \beta$, akkor ez az egyenlőség azonosan teljesül minden $x, y \in V$ -re. Vagyis az $\alpha \equiv \beta$ teljesülése esetén az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop elasztikus lesz.

Legyenek most speciálisan az $\alpha \equiv \beta$ függvények lineárisak. Tételezzük fel továbbá, hogy az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop csoport, és $n \geq 2$.

Ekkor a (4.2a) azonosság teljesül, és elvégezhetjük az alábbi levezetést:

IV.2. $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok algebrai azonosságokkal

$$\alpha \left(F(x, y) \right) = \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y)$$

$$\alpha(x + y + \alpha(y)x + \alpha(x)y) = \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y)$$

$$\alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(y)\alpha(x) + \alpha(x)\alpha(y) = \alpha(x) + \alpha(y) + \alpha(x)\alpha(y)$$

$$\alpha(x)\alpha(y) = 0$$

igaz lesz minden $x, y \in V$ -re. Ez azonban azt jelenti, hogy $\alpha \equiv \beta \equiv 0$. Így az $\alpha \equiv \beta \not\equiv 0$ lineáris függvényekre az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \alpha)$ loop elasztikus, de nem csoport.

Egy másik (kevésbé nyilvánvaló) példa egy olyan $(\mathbb{R}^n; \alpha, \alpha)$ -loop ($n \geq 1$), ahol $\alpha(x)$ kvadratikus függvény, például $\alpha(x) = \|x\|^2$. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben az egyparaméteres részloopok nem egyparaméteres részcsoporthoz tartoznak. Valóban, tetszőleges $s, t, u \in \mathbb{R}$ és $x \in \mathbb{R}^n$ esetén teljesül, hogy

$$\begin{aligned} & F(F(sx, tx), ux) - F(sx, F(tx, ux)) = \\ &= s \cdot t \cdot u \|x\|^4 \left\{ (3t + 2s + 2u)(s - u) + \right. \\ & \quad \left. + \|x\|^2 t (t(s^3 - u^3) + 2t^2(s^2 - u^2) + t^3(s - u)) \right\} x. \end{aligned}$$

Így ezek a részloopok (minden x -re az x irányába eső részloop) nem részcsoporthoz tartoznak, mivel a bal oldali vektorok különbsége sosem 0, amikor $0 < u < s < t$. Következésképpen ezek a speciális $(\mathbb{R}^n; \alpha, \alpha)$ -loopok nem csoportok. $\square$

4.2.6. Megjegyzés: L.V.SZABINYIN és P.O.MIHEJEV bebizonyították [16], hogy az analitikus jobb alternatív tulajdonsággal rendelkező loopok erősen

IV.2. $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok algebrai azonosságokkal

hatványasszociatívok (vagyis $F(x^m, x^n) = x^{m+n}$ minden $x \in \mathcal{F}$ és m valamint n egész szám esetén). Könnyen rámutathatunk azonban arra, hogy *analitikus elasztikus loopokra ez az állítás már nem igaz*. Elég azt figyelembe vennünk, hogy az erősen hatványasszociatív loopok minden irányban rendelkeznek egyparaméteres részcsoporttal (lásd E.N.KUZMIN [11]), míg az általunk az előzőekben mutatott példában szereplő elasztikus $(\mathbb{R}^n, \alpha, \alpha)$ -loop $(\alpha(x) = \|x\|^2)$ egyparaméteres részloopjai nem egyparaméteres részcsoportok. S ezért ezek a loopok nem lehetnek erősen hatványasszociatívok. Ezzel a jobb alternatív és az elasztikus loopok közötti elhatárolásra is adtunk egy példát. $\square$

IV.3. Az $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loopok geometriai jelentése

Ebben a szakaszban azt mutatjuk meg, hogy az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopoknak az α és β megfelelő választása esetén konkrét geometriai jelentése van. Nevezetesen azt bizonyítjuk, hogy egy $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loop izomorf egy olyan looppal, amelyet a 4.0.2. Példában adtunk meg; feltéve, hogy a felületeket alkalmasan választottuk meg.

4.3.1. Példa: Tekintsük az $(n+1)$ -dimenziós $\mathcal{A}^{n+1}$ affin teret. Legyen továbbá $\mathcal{P}$ egy $\mathbb{C}^k$ osztályú ($k \geq 2$) hiperfelület és $\mathcal{P}$ egy r -dimenziós hipersík ebben az affin térben. Legyen O az $\mathcal{P}$ felületnek olyan pontja, amely nem tartozik $\mathcal{P}$ -hez. Vegyük most az $\mathcal{A}^{n+1}$ affin térnek egy olyan U környezetét, hogy $O \in U$, $U \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, $U \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, de $\mathcal{P} \cap \mathcal{P} \cap U = \emptyset$. Definálunk egy-egy lokális szorzást az $\mathcal{P} \cap U$ és $\mathcal{P} \cap U$ felületdarabokon egyidejűleg, a következő módon (4.2.ábra).

Tekintsünk egy $O_1 \in \mathcal{P} \cap U$ pontot. Legyenek az A és B tetszőleges olyan pontok, amelyekre $A, B \in \mathcal{P} \cap V$ ($\subseteq U$; $O, O_1 \in V$). Vegyük azt a BB_1 egyenest, amely párhuzamos az OO_1 egyenessel, és $B_1 \in \mathcal{P}$. (Itt feltettük a V környezetről azt, hogy $B \in \mathcal{P} \cap V$ esetén a $B_1 \in \mathcal{P} \cap V$ tartalmazás is teljesül.) Ezután tekintsük azt az AC_1 egyenest, amely párhuzamos az OB_1 egyenessel, és $C_1 \in \mathcal{P}$. Végül legyen a CC_1 egy olyan, az OO_1 egyenessel párhuzamos egyenes, amelyre $C \in \mathcal{P}$. (Itt azt tettük fel, hogy $C_1, C \in U$ teljesül.)

4.3.2. Definíció: A 4.3.1. Példa jelöléseivel legyen az $\mathcal{P}$ hiperfelületen illetve a $\mathcal{P}$ hipersíkon az f illetve az f_1 szorzásművelet a következő módon értelmezve:

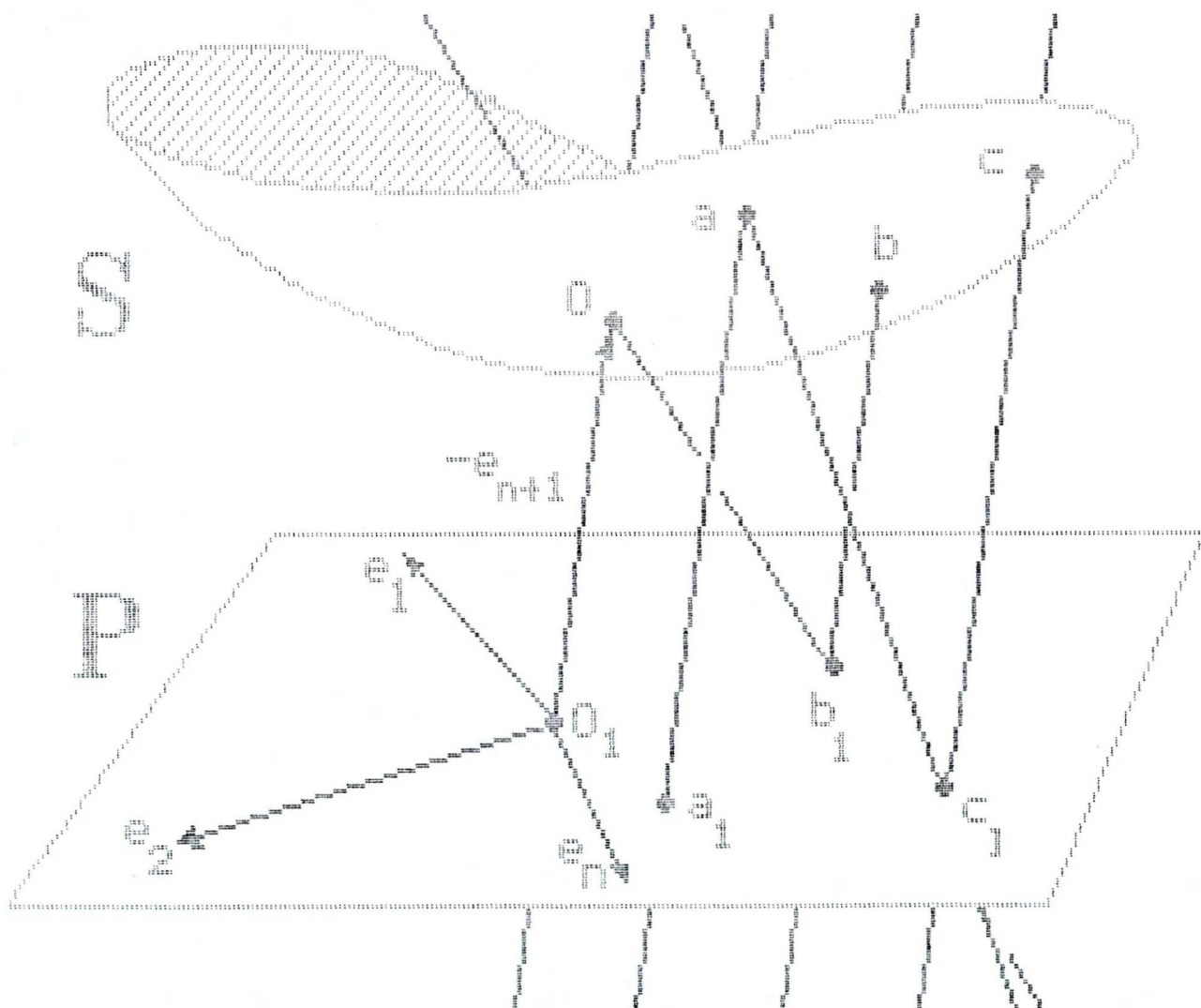
$$f : \mathcal{A}^{n+1} \times \mathcal{A}^{n+1} \longrightarrow \mathcal{A}^{n+1}; \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}; (A, B) \longmapsto C,$$

illetve

$$f_1: \mathcal{A}^{n+1} \times \mathcal{A}^{n+1} \rightarrow \mathcal{A}^{n+1}; \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}; (A_1, B_1) \mapsto C_1. \square$$

Azt az állítást, hogy így loopokat, mégpedig speciális $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopokkal izomorf loopokat kaptunk, az alábbi tétel fejezi ki.

4.3.3. Tétel: A 4.3.2. Definícióval bevezetett szorzás-műveletek G^k osztályú ($k \geq 2$) lokális loopszorozások. Az $(\mathcal{P}; f)$ illetve $(\mathcal{P}; f_1)$ G^k osztályú lokális loopok izomorfak egy $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -looppal, ha $\alpha \equiv 0$. $\square$



4.2 ábra

IV.3. Az $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loopok geometriai jelentése

Bizonyítás: Először azt látjuk be, hogy loopokat kaptunk.

a) A fenti példa konstrukciójából világos, hogy az f és f_1 szorzásműveletek jól definiáltak, továbbá jobbról és balról egyértelműen megoldhatóak egy megfelelően választott V környezetben.

Az is könnyen látható, hogy

$$f(0, A) = f(A, 0) = A,$$

illetve hogy

$$f_1(0_1, A_1) = f_1(A_1, 0_1) = A_1,$$

vagyis 0 , illetve 0_1 a megfelelő egységelemek.

Mivel a fenti két feltétel teljesül, f és f_1 lokális loop-szorzások.

c) Vezessünk be lokális koordinátákat az $\mathcal{P}^{n+1}$ térben, és ezeken a koordinátákon keresztül vezessünk be lokális koordináta-térképeket az $\mathcal{P}$ és a $\mathcal{P}$ C^k osztályú n -dimenziós sokaságokon. Tekintsük a (rögzített) 0 pontot a bevezetendő affin koordináta-rendszer origójának, és vegyük az $(e_1, \dots, e_{n+1})$ vektorokból álló bázist a következőképpen: az $e_1, \dots, e_n$ lineárisan független vektorok legyenek párhuzamosak a $\mathcal{P}$ hipersíkkal, az $(n+1)$ -edik bázisvektor pedig $e_{n+1} = -\overrightarrow{00_1}$. Ha ebben a koordináta-rendszerben az X pont koordinátáit $x^1, \dots, x^{n+1}$ jelöli, akkor a $\mathcal{P}$ hipersík egyenlete:

$$x^{n+1} = -1,$$

az $\mathcal{P}$ felület egyenlete pedig (legalábbis lokálisan):

$$S(x^1, \dots, x^n) = x^{n+1}.$$

Ennek az affin koordináta-rendszernek a segítségével vezetünk be lokális koordinátákat először a $\mathcal{P}$ hipersíkon,

IV.3. Az $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loopok geometriai jelentése

azután az $\mathcal{P}$ felületen. Legyen ϕ_1 az a leképezés, amely a $\mathcal{P}$ sík pontjainak megfelelteti első n darab affin koordinátájukat:

$$\phi_1 : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad A_1 \longmapsto (a^1, \dots, a^n),$$

ahol

$$\overrightarrow{O_1 A_1} = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n - 1 \cdot e_{n+1} \in \mathcal{P}.$$

Ezzel lokális $(U \cap \mathcal{P}; \phi_1)$ térképet adtunk meg a $\mathcal{P}$ -n.

Az $\mathcal{P}$ felületen ezután úgy definiáljuk a koordinátákat, hogy pontjait kölcsönösen egyértelmű módon leképezzük a $\mathcal{P}$ sík pontjaira. Legyen ez az egy-egyértelmű τ megfeleltetés az $\mathcal{P}$ felület pontjainak az $\mathcal{P}$ sík pontjaira való OO_1 egyenessel párhuzamos vetítése:

$$\tau : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}, \quad A \longmapsto A_1$$

(4.2. ábra). A τ leképezés nyilvánvalóan C^k osztályú. Az $\mathcal{P}$ felület lokális koordináta-leképezése legyen ekkor:

$$\phi = \phi_1 \circ \tau : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^n; \quad A \longmapsto (a^1, \dots, a^n)$$

minden $A \in \mathcal{P} \cap V$ pont esetén. Világos, hogy $\phi(0) = (0, \dots, 0) = \Phi_n$, az $\mathbb{R}^n$ tér origója. A lokális koordináták bevezetésével egy-egy jól definiált lokális C^k osztályú loopot kaptunk az $\mathcal{P}$ és $\mathcal{P}$ sokaságokon egyidejűleg.

Két 0-tól különböző adott pont, $X, Y \in \mathcal{P}$ esetén írjuk fel az ℓ loop-szorzást az $(U \cap \mathcal{P}; \phi)$ lokális koordináta-rendszerben. A koordináták legyenek

$$\phi(X) = (x^1, \dots, x^n) \neq \Phi, \quad \phi(Y) = (y^1, \dots, y^n) \neq \Phi.$$

Ha a loop-szorzás alakját ezekben a koordinátákban F jelöli, akkor:

IV.3. Az $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loopok geometriai jelentése

$$F = \phi \circ f \circ (\phi^{-1} \times \phi^{-1}).$$

Az egyszerű számolás részleteit most elhagyjuk. Eredményül a következők adódnak. Egy $z = F(x, y)$ pontra, ahol az $(U \cap \mathcal{P}; \phi)$ koordináta-rendszerben (és a neki megfelelő z_1 pontra az $(U \cap \mathcal{P}; \phi_1)$ koordináta-rendszerben) a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} z = F(x, y) &= (x^1 + y^1 + S(x)y^1, \dots, x^n + y^n + S(x)y^n) = \\ &= x + y + S(x) \cdot y \end{aligned}$$

minden $x, y \in \tilde{V}$ esetén, ahol $x = \phi(X)$, $y = \phi(Y)$, $z = \phi(Z)$, valamint $\tilde{V} = \phi(V)$.

Összevetve ezt a (4.1) definiáló egyenlőséggel, azt láthatjuk, hogy a kettő ugyanaz, ha $\alpha \equiv 0$ továbbá $\beta \equiv S$. Ezért ha tekintünk egy ilyen geometriai úton definiált loopot, akkor azt kapjuk, hogy a fent bevezetett $(U \cap \mathcal{P}; \phi)$ lokális koordináta-rendszerben a loop $(\mathbb{R}^n; 0, S)$ -loop lesz, az izomorfizmus pedig éppen a ϕ leképezés. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Igaz azonban a fenti tétel második állításának megfordítása is.

4.3.4. Tétel: Minden $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loop izomorf egy a 4.3.2. Definícióval adott looppal. $\square$

Bizonyítás: Az adott β esetén az $\mathcal{A}^{n+1}$ affin térben rögzíthetünk egy $\mathcal{P}$ hipersíkot és egy olyan koordináta-rendszert, amelynek n számú bázisvektora a $\mathcal{P}$ -vel párhuzamos. A $\mathcal{P}$ hipersíkon rögzítsünk egy O_1 pontot. Az origó pedig legyen az a pont, amelyikbe az O_1 -ből felmért $(n+1)$ -ik bázisvektor mutat. Ebben a koordináta-rendszerben az β függvény egy $\mathcal{P}$ hiperfelületet ad meg. Az

IV.3. Az $(\mathbb{R}^n; 0, \beta)$ -loopok geometriai jelentése

előző bizonyítás értelmében az $\mathcal{P}$ és $\mathcal{P}$ által a 4.3.2. Definíciónak megfelelően megkonstruált loop a kiindulási looppal izomorf lesz. $\square$

4.3.5. Következmény: Ahhoz, hogy egy 4.3.2. Definícióval adott loop csoport legyen, szükséges, hogy az S függvény lineáris legyen, vagyis csoport esetén az $\mathcal{P}$ hiperfelületnek is hipersíknak kell lennie. $\square$

Bizonyítás: A 4.2.2. Megjegyzés második pontja szerint egy $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loop nem csoport, ha $\alpha - \beta$ nem lineáris. Mivel most α lineáris, ezért β -nak is annak kell lennie. $\square$

4.3.6. Megjegyzés: 1. Bár a fenti tételek bizonyítása során a loopokon igen természetes úton vezettünk be koordináta-rendszert, az mégsem K -koordináta-rendszer. Ez az állítás még akkor is igaz, ha a loop csoport, vagyis amikor két hipersík definiálja a loopot. Valóban, ebben az esetben az igaz, hogy

$$F(x, x) = 2x + S(x)x$$

minden $x \in \tilde{V}$ esetén. Tehát a ϕ K -koordináta-rendszert definiál akkor és csak akkor, ha $S \equiv 0$, vagyis amikor két párhuzamos hipersíkot tekintünk.

2. A jelen szakaszban megvizsgált looposztály egy olyan alosztálya a 4.0.2. Példában adott loopok osztályának, amelynél a három definiáló felület közül kettő speciálisan van megválasztva: ez egyik a W hipersík, a másik a V a végtelen távoli sík. E szakasz két tételére tekintettel megállapíthatjuk, hogy az $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok osztályának valóban van olyan alosztálya, amelybe tartozó loopok három hiperfelület által definiált looppal izomorfak. $\square$

IV.4. Egyparaméteres részloop nélküli loopok

A fejezet utolsó szakaszában olyan loop-osztályt vezetünk be, amely loopjai rendeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egyáltalán nincsenek egyparaméteres részloopjuk.

Ennek megmutatásában fő eszköz a loopok K -koordináta-rendszerbeli viselkedésére vonatkozó 3.2.3. Tétel, illetve annak 3.2.5. Következménye, amely szerint egy loopnak valamely irányban létezik egyparaméteres részloopja akkor és csak akkor, ha a loopra vonatkozóan kanonikus koordináta-rendszerben az adott irányú szakasz lokális részloop.

A keresett loopok osztályát két lépésben vezetjük be. Először a IV.1. szakaszban megvizsgált $(\mathbb{R}^n; \alpha, \beta)$ -loopok definíciójának módosításával olyan osztályt adunk meg, amely loopjainak pontosan egyetlen irányban van egyparaméteres részloopjuk. Ezután módosítjuk tovább a definíciót úgy, hogy egyparaméteres részloop nélküli loopot kapjunk.

4.4.1. Definíció: Egy lokális szorzást az $\mathbb{R}^n$ téren

$$F_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ; \mathbf{v} \times \mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{u}$$

(ahol $\mathbf{V}$ és $\mathbf{U}$ az $\mathbb{O}$ origó megfelelő környezetei) $(\alpha, -\alpha; \rho, \mathbf{a})$ -szorzásnak nevezzük, ha bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ esetén az

$$F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \alpha(\mathbf{y})\mathbf{x} - \alpha(\mathbf{x})\mathbf{y} + \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{a} \quad (4.12)$$

egyenlőséggel van definiálva. Az α olyan C^k osztályú valós függvény, amelyre $\alpha(\mathbb{O}) = 0$, $\mathbf{a}$ egy (az $\mathbb{O}$ -hoz kellően közeli) az origótól különböző tetszőleges pont $\mathbb{R}^n$ -ben, továbbá ρ a következő tulajdonsággal rendelkező valós függvény:

$$\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} ; \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{U}^* \subset \mathbb{R}$$

úgy, hogy a $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.
Vagyis $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \rho(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ re, és semmilyen további esetben nem tűnik el. $\square$

4.4.2. Állítás [10]: Egy a (4.12) formulával definiált $(\alpha, -\alpha ; \rho, a)$ -szorzás loop-szorzás az $\mathbb{R}^n$ tér origójának egy $\mathbf{V}$ környezetében. E loop-szorzás egységeleme az $\mathbf{0}$ origó. $\square$

4.4.3. Definíció: A lokális C^k osztályú $(\mathbb{R}^n ; F_2)$ -loopot az $(\alpha, -\alpha ; \rho, a)$ -szorzásművelettel $(\mathbb{R}^n ; \alpha, -\alpha ; \rho, a)$ -loopnak vagy rövidebben $(\mathbb{R}^n ; \alpha ; \rho, a)$ -loopnak nevezzük. $\square$

Látható, hogy az $(\mathbb{R}^n ; \alpha ; \rho, a)$ -loopok az $(\mathbb{R}^n ; \alpha, -\alpha)$ -loopokból jönnek létre egy megfelelően választott tag hozzáadásával.

Bizonyítás: Először is mutatnunk kell egy olyan ρ függvényt, amely amely eleget tesz a 4.4.1. Definícióban megadott feltételeknek. Egy ilyen függvény például a következő:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2. \quad (4.13)$$

Ezután belátjuk, hogy F_2 loop-szorzás.

a) Mivel α és ρ C^k osztályú függvények, F_2 jól definiált a $\mathbf{V}$ -ben. Az $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{z}$ egyértelműen megoldható jobbról és balról, mivel az F_2 első illetve második $(\mathbb{R}^n$ -beli) változója szerinti parciális deriváltja az identikus leképezés.

IV.4. Egyparaméteres részloop nélküli loopok

b) Az $\mathbb{R}^n$ tér $\mathbb{O}$ origója az egységelem, mivel

$$F_2(x, \mathbb{O}) = x + \mathbb{O} + \alpha(\mathbb{O})x - \alpha(x)\mathbb{O} + \rho(x, \mathbb{O})a = x$$

és hasonlóan $F_2(\mathbb{O}, y) = y$ is teljesül minden $x, y \in V$ esetén.

c) α és ρ C^k osztályú függvények, ezért F_2 szintén C^k osztályú, s ezzel a loop-szorzás tulajdonságait igazoltuk. $\square$

4.4.4. Tétel [10]: Egy $(\mathbb{R}^n; \alpha; \rho, a)$ -loop rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy pontosan egy egyparaméteres részloopja van, mégpedig az a pont irányában. $\square$

Bizonyítás: Első fontos észrevételünk, hogy az a koordináta-rendszer, amelyben az $(\mathbb{R}^n; \alpha; \rho, a)$ -loopokat definiáltuk, K -koordináta-rendszer. Valóban, a 2.1.3. Definíció feltétele teljesül, hiszen

$$F_2(x, x) = x + x + \alpha(x)x - \alpha(x)x + \rho(x, x)a = 2x$$

teljesül minden $x \in V$ -re.

Igy, a 3.2.3. Tétel szerint amennyiben létezik egyparaméteres részloop, akkor lokálisan egy egyenes darabja. Az nyilvánvaló, hogy ennek a loopnak az a irányában létezik részloopja, mivel a irányú elemek szorzata is ilyen, és a szorzást jobbról illetve balról megoldva adott a irányú elemek esetén, az eredmény ismét a irányba eső pont lesz.

Tegyük fel most, hogy valamely d irányában létezik egyparaméteres részloop. Ekkor ennek a lokális részloopnak az elemei $t \cdot d$ alakúak, $t \in (-T_0, T_0)$, legalábbis lokálisan. Legyen $x = s_1 \cdot d \neq \mathbb{O}$ és $y = s_2 \cdot d \neq \mathbb{O}$ ($s_1 \neq s_2$) ennek a részloopnak két különböző eleme. A (4.12)-nek megfelelően igaz, hogy

$$F_2(x,y) = F_2(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) =$$

$$= \left[s_1 + s_2 + s_1 \alpha(s_2 \cdot d) - s_2 \alpha(s_1 \cdot d) \right] \cdot d + \rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) a = r \cdot d$$

valamely $r \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel ezekre az s_1 és s_2 paraméterekre: $\rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) \neq 0$, d nem lehet a -tól különböző irányú, és pontosan ezt kellett bizonyítanunk. $\square$

Az egyparaméteres részloop nélküli loopok osztályát az előző loopok további módosításával adjuk meg.

4.4.5. Definíció: Egy lokális szorzást az $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) téren

$$F_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n ; V \times V \longrightarrow U$$

(ahol V és U az 0 origó megfelelő környezetei) $(\alpha, -\alpha ; \rho, a ; \sigma, b)$ -szorzásnak nevezzük, ha bármely $x, y \in V$ esetén a szorzásművelet az

$$F_2(x,y) = x+y+\alpha(y)x-\alpha(x)y+\rho(x,y)a+\sigma(x,y)b, \quad (4.14)$$

egyenlőséggel van definiálva. Az α és a ρ olyan $\mathbb{C}^k$ osztályú valós függvények, mint amilyenek a 4.4.1. Definícióban szerepelnek, az a és b olyan (az 0 -hoz kellően közeli) az origótól különböző tetszőleges rögzített pontok (irányok), amelyekre $a \neq \lambda \cdot b$ semmilyen $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén; σ rendelkezik a ρ minden tulajdonságával, és a σ és a ρ értéke csak a nullahelyeken egyezik meg, vagyis a $\rho(x_0, y_0) = \sigma(x_0, y_0)$ egyenlőségből következik, hogy $\rho(x_0, y_0) = \sigma(x_0, y_0) = 0$. $\square$

4.4.6. Állítás [10]: Egy a fenti (4.14) egyenlőséggel adott $(\alpha, -\alpha; \rho, a; \sigma, b)$ -szorzás loop-szorzás az $\mathbb{R}^n$ tér origójának egy V környezetében. A loop-szorzás egységeleme az $\mathbb{O}$ origó. $\square$

4.4.7. Definíció: Az $(\alpha, -\alpha; \rho, a; \sigma, b)$ -szorzásművelettel az $\mathbb{R}^n$ téren adott lokális $\mathbb{C}^k$ osztályú $(\mathbb{R}^n; F_3)$ -loopot $(\mathbb{R}^n; \alpha, -\alpha; \rho, a; \sigma, b)$ -loopnak vagy rövidebben $(\mathbb{R}^n; \alpha; \rho, a; \sigma, b)$ -loopnak nevezzük. $\square$

Bizonyítás: Annak belátása, hogy az F_3 szorzásművelettel loopot definiálunk, hasonlóan történik, mint az $(\mathbb{R}^n; \alpha; \rho, a)$ -loopok esetén. A definíció jogosságának igazolásához meg kell mutatnunk egy a feltételeknek eleget tevő σ függvény létezését. Tekintsük például a következő függvényt:

$$\sigma(x, y) = h(x) \|y\|^2 \|x-y\|^2 \quad (4.15)$$

ahol $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, és $h(x)$ akkor és csak akkor tűnik el, ha $x = \mathbb{O}$, továbbá h $\mathbb{C}^k$ osztályú függvény. $\square$

4.4.9. Tétel [10]: Egy $(\mathbb{R}^n; \alpha; \rho, a; \sigma, b)$ -loopnak nem létezik egyparaméteres részloopja. $\square$

Bizonyítás: Ennek a loopnak az esetében is azt állíthatjuk, hogy eleve K -koordináta-rendszerben van definiálva. Ehhez csak az F_3 definíciójában kell az $x = y$ helyettesítést elvégezni:

$$\begin{aligned} F_3(x, x) &= x + x + \alpha(x)x - \alpha(x)x + \rho(x, x)a + \sigma(x, x)b = \\ &= 2x + 0a + 0b = 2x. \end{aligned}$$

Ezért amennyiben létezik ennek a lokális loopnak egyparaméteres részloopja a d pont irányában, akkor minden

IV.4. Egyparaméteres részloop nélküli loopok

eleme d irányába esik. Így két különböző $x = s_1 \cdot d$, és $y = s_2 \cdot d$ ($0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0$) elemére a részloopnak egy d -vel egyirányú elemet kapunk, vagyis érvényes az alábbi összefüggés:

$$F_3(x, y) = F_3(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) = \left[s_1 + s_2 + s_1 \alpha(s_2 \cdot d) - s_2 \alpha(s_1 \cdot d) \right] \cdot d + \\ + \rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d)a + \sigma(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d)b = r \cdot d.$$

valamely olyan $r \in \mathbb{R}$ számra, amelyre $r \cdot d$ a részloophoz tartozik. Ebből az következik, hogy

$$\rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d)a + \sigma(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d)b = t \cdot d$$

valamely $t = t(s_1, s_2) \in (-T_0, T_0)$ számra. Mivel a d -t egyértelműen állíthatjuk elő

$$d = \kappa_1 a + \kappa_2 b$$

formában, azt nyerjük, hogy

$$t \cdot d = (t\kappa_1)a + (t\kappa_2)b = \rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d)a + \sigma(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d)b$$

a két egymástól különböző s_1 és s_2 számra. Ezért a fenti sorból az következik, hogy a megfelelő együtthatók megegyeznek:

$$\rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) = (t\kappa_1) \text{ és } \sigma(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) = (t\kappa_2). \quad (4.16)$$

Tegyük fel először, hogy $d = a$. Vagyis létezik egyparaméteres részcsoport az a irányában. Ekkor az alábbi adódik:

$$\rho(s_1 \cdot a, s_2 \cdot a)a + \sigma(s_1 \cdot a, s_2 \cdot a)b = t \cdot a.$$

IV.4. Egyparaméteres részloop nélküli loopok

Mivel $\rho(s_1 \cdot a, s_2 \cdot a) \neq 0$, $\sigma(s_1 \cdot a, s_2 \cdot a) \neq 0$ és $t \neq 0$, ezért $b = a$, ami ellentmondásban van azzal a feltétellel, hogy $b \neq a$. Vagyis az a irányában nem létezik egyparaméteres részloop. A $d = b$ feltételezés mellett ugyanehhez az eredményhez jutunk, tehát b irányában sem létezik egyparaméteres részloop.

Tételezzük fel ezek után, hogy $a \neq d \neq b$. Akkor a (4.16) összefüggésből arra következtethetünk, hogy $\kappa_1 \neq 0$, illetve $\kappa_2 \neq 0$, következésképpen minden $0 \neq s_1 \neq s_2 \neq 0$ paraméter párra érvényes az alábbi egyenlőség:

$$\rho(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d) = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sigma(s_1 \cdot d, s_2 \cdot d).$$

Az egyparaméteres részcsoport létezésének feltételezésével jutunk ellentmondásra akkor, ha megadunk olyan ρ és σ függvényeket, amelyek ennek az összefüggésnek nem tesznek eleget. Ilyenek például azok a függvények, amelyeket a (4.13) illetve (4.15) összefüggésekben adtunk meg. Ezekre a függvényekre

$$\begin{aligned} & \|s_1 \cdot d\|^2 \|s_2 \cdot d\|^2 \|(s_1 - s_2) \cdot d\|^2 = \\ &= \frac{\kappa_1}{\kappa_2} h(s_1 \cdot d) \|s_2 \cdot d\|^2 \|(s_1 - s_2) \cdot d\|^2 \end{aligned}$$

és ezért az

$$\|s_1 \cdot d\|^2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_2} h(s_1 \cdot d)$$

egyenlőségnek teljesülnie kell minden elegendően kicsiny $s_1 \neq 0$ paraméterértékre. Azonban a

$$h(x) = c \cdot e^{\|x\|^2} \|x\|^2$$

függvény nyilvánvalóan nem elégíti ki azonosan az előző egyenlőséget. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

IRODALOMJEGYZÉK

- [1] J. ACZÉL : Quasigroups, nets and nomograms, *Advences in mathematics*, 1(1965), 383-450
- [2] М. А. АКИБИС : О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы. ДАН СССР, 1969, 188, №5, с. 965-970.
- [3] М. А. АКИБИС : О локальной дифференцируемой квазигруппе и три-ткани, которые определяются тройкой гиперповерхностей, Сибирский математический журнал, XIV, №3, (1973), 467-474.
- [4] М. А. АКИБИС - А. М. ШЕЛЕХОВ : О канонических координатах в локальной аналитической лупе. Ткани и квазигруппы. Калинин. 1986, 120-124
- [5] M.A. AKIVIS - A.M. SELEHOV : On subwebs of 3-webs and subalgebras of local W_k -algebras, *Acta Mathematica Hungarica* (megjelenés alatt)
- [6] J.P. DUFOUR - P. JEAN : Rigidity of Webs and Family of Hypersurfaces, *Singularities & Dynamical Systems*, S.N.Pnevmatikos (editor), Elsevier Science Publisher B.V., North-Holland, 1985).
- [7] V.V. GOLDBERG : Local differentiable quasigroups and webs, in: *The Theory of Quasigroups and Loops, Chapter X*, (1987) (to appear)
- [8] J. KOZMA : On the differentiability of loop-multiplication in canonical coordinate-system, *Publ. Math. Debrecen* (megjelenés alatt)
- [9] J. KOZMA : Behaviour of loop-multiplication in canonical coordinate-system, *Acta Sci. Math.* (megjelenés alatt)

- [10] J. KOZMA : Loops with and without subloops
- [11] Е. Н. КУЗМИН : О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими луками Муфанг. Алгебра и логика, 1971, **10**, №1, 3-22
- [12] Л. С. ПОНТРЯГИН : Непрерывные группы (издание третье, исправленное), Издательство НАУКА, Москва (1973)
- [13] М. М. ПОСТНИКОВ : Группы Ли и алгебры Ли. Лекции по геометрии, семестр V. Издательство НАУКА, Москва (1982)
- [14] A.A. SAGLE - R.E. WALDE : Introduction to Lie groups and Lie algebras. Academic Press, New York and London, 1978.
- [15] S. STERNBERG : Local Contractions and a Theorem of Poincare, *Am. J. Math.*, **79**, 809-824.
- [16] Л. В. САБИНИН - М. О. МИХЕЕВ : О локальных аналитических луках и соответствующих им гипералгебрах. В сб. "Матер. 9 Конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов, Москва, 15-19 апр. 1986. Ч. 1.". М: Ун-т дружбы народов. Москва 1986, 34-54.