

NÉMETH ZOLTÁN

A CESÀRO MÓDSZER ÁLTALÁNOSÍTÁSAI ÉS ALKALMAZÁSAI



egyetemi doktori (PhD) értekezés tézisei

JATE Bolyai Intézet
Szeged, 1999

Bevezetés

Mivel az értekezés három fő fejezete egyaránt Cesàro szummálhatósággal foglalkozik, célszerű néhány fontosabb definíciót és eredményt egy bevezető szakaszban összefoglalni.

Legyen $\mathbf{R}^\infty$ az összes sorozatok (lineáris) tere, és V ennek egy (lineáris) altere. Jelöljük továbbá c -vel a közönséges értelemben konvergens sorozatok alterét.

0.4. DEFINÍCIÓ.* *Szummációs eljárásnak* nevezzük az olyan lineáris $V \rightarrow \mathbf{R}$ funkcionálokat, amelyek c -n egybeesnek a szokásos határérték-képzéssel.

Sokféle szummációs eljárás létezik. A dolgozatban a Cesàro módszerrel foglalkozunk, amely a következőképpen értelmezhető:

Definiáljuk a Cesàro-számokat a következőképpen:

$$(0.6) \quad A_n^\alpha := \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}{n!}, \quad A_0^\alpha := 1, \quad \alpha > -1.$$

0.7. DEFINÍCIÓ. A $\sum a_k$ sort (C, α) -szummálhatónak nevezzük az s számhoz, ha az s_k részletösszegeiből képezett

$$(0.10) \quad \sigma_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} s_k = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^\alpha a_k$$

α -adrendű Cesàro-közepekre $\sigma_n \rightarrow s$.

A szummációs eljárások alkalmazási területe igen sokrétű. Kicsit pongyolán fogalmazva, azt mondhatjuk, hogy pl. az ortogonális sorok vagy Fourier sorok általában egyszerűbben, szabályosabban viselkednek valamely szummációs módszerrel vizsgálva, mint a közönséges konvergencia esetén (gondoljunk például a klasszikus Fejér-tételre).

Dolgozatunk másik fő kérdése a kettős sorok konvergenciája. A kézenfekvő definíció a következő lehetne:

0.13. DEFINÍCIÓ. (Pringsheim) Az $(s_{mn})_{m,n=0}^\infty$ kettős sorozat s -hez tart, ha bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan ν , hogy bármely $n, m > \nu$ esetén $|s_{mn} - s| < \varepsilon$.

Azonban ezt a definíciót használva, a legtöbb régi tételünk nem marad érvényben, hiszen például ha $s_{0n} = n$, és $s_{mn} = 0$ különben, akkor egyrészt s_{mn} konvergál (a 0-hoz), másrészt nem korlátos. A fenti definíció mellé persze

* A tétel- és egyenletszámok megegyeznek a dolgozat megfelelő sorszámaival.

megkövetelhetjük az $|s_{mn}| \leq K$ korlátosságot is, de ez már egy újabb, kevésbé természetes definíció.

Még több a lehetőség kettős sorok esetén. A

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$$

sort elképzelhetjük úgy, mintha egy „két irányban végtelen mátrix” összes elemeit össze kellene adni – de hogyan?

Összeadhatjuk a számokat előbb átlósan, mint a Cauchy-szorzatsor, majd ezeket a részletösszegeket egy közönséges sorként, vagy képezhetünk „negyedkör-részletösszegeket”; összeadhatjuk a számokat előbb soronként, majd oszloponként, vagy fordítva, így tulajdonképpen „ $\omega \cdot \omega$ rendtípusú” sorrá rendezve át a kettős sort. Azt is megtehetjük, hogy képezve az

$$s_{mn} := \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n a_{kl}$$

téglalap-részletösszegeket, feladatunkat visszavezetjük a kettős sorozatok problémájára.

Példákkal bizonyítható, hogy a fenti definíciók egymástól különböznek, sőt, általában nem is hasonlíthatók össze. (Bár pozitív tagú soroknál minden „rendtípus szerinti” átrendezés, így a fenti definíciók mindegyike egyenértékű.)

Sok szempontból kényelmes az alábbi definíció:

0.14. DEFINÍCIÓ. A $\sum a_{kl}$ kettős sort *regulárisan konvergensnek* nevezzük az s számhoz, ha a (0.12) szerinti téglalap-részletösszegei Pringsheim értelemben s -hez konvergálnak, és a kettős sor valamennyi sora és oszlopa szintén konvergál, mint egyszeres sor.

Általánosított abszolút Cesàro szummálhatóság

A $\sum a_k$ egyszeres sor esetében az abszolút konvergenciát a

$$(1.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |s_n - s_{n-1}| < \infty$$

feltétellel definiáltuk.

Ennek mintájára, megalkothatjuk az abszolút Cesàro szummálhatóság fogalmát. A formulákat egyszerűsíti, ha bevezetjük az alábbi jelölést: legyen

$$\tau_n^\alpha := n(\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha) = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} k a_k.$$

1.1. DEFINÍCIÓ. A $\sum a_k$ egyszeres sort α rendben abszolút Cesàro szummálhatónak, azaz $|C, \alpha|$ szummálhatónak nevezzük, ha $\alpha > -1$ és

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^\alpha| < \infty.$$

A sort $|C, \alpha|_\lambda$ szummálhatónak nevezzük, ha $\alpha > -1$, $\lambda \geq 1$, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda-1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\tau_n^\alpha|^\lambda < \infty.$$

A sort $|C, \alpha, u|_\lambda$ szummálhatónak nevezzük, ha $\alpha > -1$, $\lambda \geq 1$, $u \geq 0$, és

$$(1.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda u + \lambda - 1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda u - 1} |\tau_n^\alpha|^\lambda < \infty.$$

A definíció második és harmadik része T. M. Flett-től származik. A definíciók egymásutánja szebben látszik a τ -s alakoknál.

Ha kettős sorokra is ki akarjuk terjeszteni az abszolút konvergencia fogalmát, természetesen kínálkozik a

$$(1.3) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |s_{mn} - s_{m-1,n} - s_{m,n-1} + s_{m-1,n-1}| < \infty$$

feltétel. Láttuk, hogy kettős sorok esetében a sorokra és oszlopokra is ki kell róni valamilyen feltételt. Követeljük meg tehát, hogy

$$(1.4) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |s_{m0} - s_{m-1,0}| < \infty,$$

és

$$(1.5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |s_{0n} - s_{0,n-1}| < \infty.$$

Az abszolút szummálhatóság hasonló formulákkal definiálható, az s_{mn} részletösszegek helyett a

$$\sigma_{mn}^{\alpha\beta} = \frac{1}{A_m^\alpha} \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^\alpha A_{n-k}^\beta a_{ik}, \quad m, n = -1, 0, 1, \dots,$$

Cesàro-közepek segítségével.

Kettős sorok abszolút Cesàro szummálhatóságával sokan foglalkoztak, többek között I. E. Zak és M. F. Timan, Móricz Ferenc, Szalay István. Az általunk használt definíció a következő:

1.2. DEFINÍCIÓ (Németh Z., 1992 [Ne1]). Legyen $\alpha, \beta > -1$, $u, v \geq 0$, $\lambda \geq 1$. A $\sum a_{ik}$ kettős sort $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda$ szummálhatónak nevezzük, ha

$$(1.6) \quad \sum_{i=1}^{\infty} i^{\lambda u-1} |z_{i0}^{\alpha\beta}|^\lambda < \infty,$$

$$(1.7) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{\lambda v-1} |t_{0k}^{\alpha\beta}|^\lambda < \infty$$

és

$$(1.8) \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} i^{\lambda u-1} k^{\lambda v-1} |\tau_{ik}^{\alpha\beta}|^\lambda < \infty,$$

ahol

$$z_{mn}^{\alpha\beta} = m(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha\beta}) = \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^{\alpha-1} A_{n-k}^\beta i a_{ik},$$

$$t_{mn}^{\alpha\beta} = n(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha\beta}) = \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^\alpha A_{n-k}^{\beta-1} k a_{ik}$$

és

$$\begin{aligned} \tau_{mn}^{\alpha\beta} &= mn(\sigma_{mn}^{\alpha\beta} - \sigma_{m-1,n}^{\alpha\beta} - \sigma_{m,n-1}^{\alpha\beta} + \sigma_{m-1,n-1}^{\alpha\beta}) = \\ &= \frac{1}{A_m^\alpha A_n^\beta} \sum_{i=0}^m \sum_{k=0}^n A_{m-i}^{\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} i k a_{ik}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Természetesen vetődik föl a kérdés, hogy a paraméterek változtatásakor milyen kapcsolat van a $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda$ eljárások között. Ezeket a kapcsolatokat vizsgáljuk az 1.2. fejezetben. Eredményeink Flett, Kogbetlianz, Szalay, Zak és Timan eredményeinek általánosításai.

A fejezet legfontosabb eredményei a következők:

1.3. TÉTEL. (Németh Z., 1992 [Ne1]). Legyenek $\lambda \geq 1$, $u, v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$, és $\beta > \lambda v - 1$. Ekkor $\gamma, \delta \geq 0$ esetén $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda \implies |C, (\alpha + \gamma, \beta + \delta), (u, v)|_\lambda$.

1.4. TÉTEL. (Németh Z., 1992 [Ne1]). Legyenek $u, v \geq 0$, $\alpha > \lambda u - 1$, és $\beta > \lambda v - 1$. Ekkor

(i) $\mu > \lambda > 1$ és $\delta = 1/\lambda - 1/\mu$, vagy

(ii) $\mu > \lambda = 1$ és $\delta > 1/\lambda - 1/\mu$ esetén $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda \implies |C, (\alpha + \gamma, \beta + \delta), (u, v)|_\mu$.

1.5. TÉTEL. (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek $\lambda \geq 1, u, v \geq 0, \alpha > \lambda u - 1, \beta > \lambda v - 1, \xi \leq u, \eta \leq v, \gamma \geq \xi - u, \delta \geq \eta - v$, és $\alpha + \gamma, \beta + \delta > -1$. Ekkor $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda \implies |C, (\alpha + \gamma, \beta + \delta), (\xi, \eta)|_\lambda$.*

1.7. TÉTEL. (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek $\lambda > \mu \geq 1, u, v \geq 0, \alpha > \mu u - 1, \beta > \mu v - 1, \xi \leq u, \eta \leq v, \gamma > \xi - u, \delta > \eta - v$. Ekkor $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda \implies |C, (\alpha + \gamma, \beta + \delta), (\xi, \eta)|_\mu$.*

1.8. TÉTEL. (Németh Z., 1992 [Ne1]). *Legyenek $\lambda > 1, u, v > 0, \alpha > u - 1, \beta > v - 1, \gamma > \alpha - u - 1/\lambda > 0$, és $\delta > \beta - v - 1/\lambda > 0$. Ekkor $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda \implies (C, (\gamma, \delta))$.*

Példákkal megmutatható, hogy fenti tételeink a „lehető legjobbak”.

Természetesen a $|C, (\alpha, \beta), (u, v)|_\lambda$ szummálhatóságra vonatkozó általános eredményeink segítségével új eredményeket nyerhetünk a kevésbé általános, de ismertebb $|C, (\alpha, \beta)|_\lambda$ módszerre is.

Eredményeinket alkalmazhatjuk a

$$(1.17) \quad \sum_{i,k=0}^{\infty} a_{ik} \varphi_{ik}(x)$$

ortogonális sorokra, ahol φ_{ik} egy (kettősen indexezett) ortonormált rendszer valamely $(X, \mathcal{A}, \mu)$ pozitív mértéktéren. Az 1.4. fejezet fő eredménye az ortogonális sorok $|C, (\alpha, \beta)|_\lambda$ szummálhatóságára vonatkozó együttható-feltételek megadása. Az első ilyen jellegű eredmény Tandori Károlytól származik:

1.20. TÉTEL (Tandori K., 1960). *Ha*

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{2^{m-1}}^{2^m-1} a_i^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

akkor az (1.17) sor majdnem mindenütt $|C, 1|$ szummálható.

Ezt az eredményt később Leindler László általánosította a $|C, \alpha \geq 0|$ esetre olyan módon, hogy a nagy zárójelen belül szerepel még egy α -tól függő multiplikátor, majd megint Leindler László és H. Schwinn úgy, hogy ilyen multiplikátor nem szerepel, helyette a nagy zárójelen belüli összegzés nem 2-hatványok, hanem más, α -tól függő határok között történik. Az utóbbi „tisza blokkos” feltétel az általános esetben gyöngébb. Az $1 \leq \lambda < 2$ esetet Szalay István vizsgálta.

Hasonló feltételeket sikerült bizonyítanunk a kettős ortogonális sorokra. Egyik ilyen eredményünk a következő:

1.21. TÉTEL (Németh Z., 1990, [Ne2]). Legyen φ_{ik} tetszőleges ortogonális rendszer, $1 \leq \lambda < 2$, és $\alpha, \beta > 1 - 1/\lambda$. Ekkor, ha

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=\mu_m}^{\mu_{m+1}-1} \sum_{k=\mu_n}^{\mu_{n+1}-1} a_{ik}^2 \right)^{\lambda/2} < \infty,$$

az (1.17) sor majdnem mindenütt $|C, (\alpha, \beta)|_{\lambda}$ szummálható, ahol

$$\mu_m \equiv \mu_m^{\alpha\lambda} := \begin{cases} 2^{m-1}, & \text{ha } \alpha > 1/2, \\ 2^{(m-1)(2-\lambda)/2}, & \text{ha } \alpha = 1/2, \\ m^{(2-\lambda)/(\lambda(1-2\alpha))}, & \text{ha } 1 - 1/\lambda < \alpha < 1/2. \end{cases}$$

A Fourier-együtthatók nagyságrendjéről

Tekintsünk egy 2π szerint periodikus, integrálható $f \in L(\mathbf{T})$ függvényt! ($\mathbf{T} := (-\pi, \pi)$ -vel jelöljük az ún. egydimenziós tóruszt.) Az f Fourier-sorát az

$$a_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \cos kt \, dt, \quad b_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbf{T}} f(t) \sin kt \, dt,$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

formulák definiálják.

A Fourier-sorok elméletéből jól ismert a Riemann–Lebesgue lemma, amely szerint bármely $f \in L$ esetén

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(f) = 0.$$

Jól ismert az is, hogy ez a konvergencia „tetszőlegesen lassú” lehet, még akkor is, ha az L helyett szűkebb függvényosztályokat tekintünk. Pontosabban, akár-hogyan is választunk egy $\lambda_k \rightarrow \infty$ sorozatot, található olyan $f \in C(\mathbf{T})$ folytonos függvény, amelynek Fourier együtthatóira $\lambda_k a_k(f)$ és $\lambda_k b_k(f)$ nem korlátosak.

J. B. Reade vette észre, hogy közönséges konvergencia helyett Cesàro értelemben vett határértéket tekintve, a Fourier együtthatók nullához tartásának nagyságrendje becsülhető.

2.1. TÉTEL (Reade, 1986). Ha $f \in L^2(\mathbf{T})$, akkor

$$k^{1/2} a_k(f) \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad k^{1/2} b_k(f) \rightarrow 0 \quad (C, 1) \text{ értelemben.}$$

Ezt az eredményt később Yu. E. Kuprikov általánosította, $f \in L^p$ ($p > 1$) függvények és (C, α) ($\alpha > 0$) értelemben vett határérték esetén meghatározta a lehető legjobb λ_k multiplikátorokat, amelyekre még

$$\lambda_k a_k(f) \rightarrow 0 \quad \text{és} \quad \lambda_k b_k(f) \rightarrow 0$$

teljesül.

Jegyezzük meg, hogy Kuprikov bizonyítása meglehetősen hosszú, és nagyon erősen kihasználja a trigonometrikus rendszer speciális tulajdonságait. Sikertől észrevennünk, hogy hasonló eredmények nyerhetők egyszerű(bb) szummáció-elméleti megfontolásokkal is. Ez tette lehetővé, hogy ezeket az eredményeket tovább általánosítsuk: általános ortogonális sorokra, kettős ortogonális sorokra, illetve bizonyos „Fourier-típusú” integráltranszformáltakra is.

Mindezekben az általánosításokban, a (C, α) értelemben vett határérték kicserélhető közönséges határértékre, amennyiben megkövetelünk még valamilyen „Tauber-típusú” feltételt, például az együttható-sorozat monotonitását.

A diszkrét esetre vonatkozó eredményeink:

Tekintsünk egy $\{\varphi_k(x) : k \geq 0\}$ egyenletesen korlátos ortonormált rendszert az $(X, \mathcal{F}, \mu)$ véges pozitív mértéktéren. Tetszőleges $f \in L(X)$ integrálható függvény esetén a

$$c_k(f) := \int_X f(t) \varphi_k(t) d\mu(t), \quad k \geq 0,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x),$$

formulákkal értelmezhető a (φ) rendszer szerinti Fourier sor.

Ezekre az együtthatókra igaz a következő állítás:

2.5. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., 1996 [MN1]). *Legyen $1 \leq p \leq 2$, $\alpha > 0$, és $1/p + 1/q = 1$. Ha $f \in L^p(X)$, akkor*

$$(2.1) \quad \lambda_k^\alpha |c_k(f)| \rightarrow 0 \quad (C, \alpha) \text{ értelemben,}$$

ahol

$$(2.2) \quad \lambda_k^\alpha = \begin{cases} (k+1)^{1/q} & \text{ha } \alpha > 1/q, \\ (k+1)^{1/q} (\ln(k+2))^{(1/q)-1} & \text{ha } \alpha = 1/q, \\ (k+1)^\alpha & \text{ha } 0 < \alpha < 1/q, \end{cases}$$

2.6. MEGJEGYZÉS. Kuprikov eredményei (a trigonometrikus rendszerre) ezzel az $\alpha \neq 1/q$ esetben megegyeznek. Az $\alpha = 1/q$ esetben Kuprikov multiplikátora jobb, $(k+1)^{1/q} (\ln(k+2))^{-(1/q)}$.

A 2.5. tétel kettős megfelelője a következő:

2.9. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., 1996 [MN1]). Legyen $1 \leq p \leq 2$, $\alpha, > 0$, $\beta > 0$, és $1/p + 1/q = 1$. Ha $f \in L^p(X)$, akkor

$$\lambda_j^\alpha \lambda_k^\beta |c_{jk}(f)| \rightarrow 0 \quad (C, (\alpha, \beta)) \text{ értelemben,}$$

ahol λ_j^α ugyanaz, mint (2.2)-ben.

A folytonos esetben, először is definiálnunk kell az integrálok Cesàro szummálhatóságát.

2.16. DEFINÍCIÓ. (i) Az $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ függvénynek az ℓ szám (C, α) értelemben vett határértéke $(x \rightarrow \infty)$, ha

$$(2.12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{x} \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} f(u) du = \ell.$$

(ii) Az $\int_0^\infty f(x) dx$ integrál (C, α) értelemben szummálható az s számhoz, ha

$$(2.13) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \left(1 - \frac{u}{x}\right)^\alpha f(u) du = s.$$

A 2.1. tétel folytonos trigonometrikus Fourier transzformáltra vonatkozó általánosítását Bagota Mónika, Dang Vu Giang és Móricz Ferenc vizsgálták.

Sikerült megmutatnunk, hogy ebben az esetben is, az általánosíthatóság nem a trigonometrikus rendszeren, hanem a transzformáció alapvetőbb tulajdonságain múlik.

Vezessük be az alábbi definíciót:

2.18. DEFINÍCIÓ (Németh Z. [Ne4]). Legyenek p és q olyanok, hogy $1 < p \leq 2$ és $1/p + 1/q = 1$. Legyen továbbá Φ egy $L^p(\mathbf{R}_+) \rightarrow L^q(\mathbf{R}_+)$ lineáris operátor, $\Phi(f) =: \widehat{f}$. A Φ operátort Hausdorff–Young típusúnak nevezzük, ha teljesíti az alábbi két feltételt:

(i) Bármely $f \in L^p(\mathbf{R}_+)$ függvényre érvényes, hogy

$$(2.15) \quad \left(\int_0^\infty |\widehat{f}(u)|^q du \right)^{1/q} \leq K(p) \left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

(Hausdorff–Young egyenlőtlenség).

(ii) Bármely $f \in L^1(\mathbf{R}_+)$ függvényre

$$(2.16) \quad \widehat{f}(u) \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad u \rightarrow \infty \quad (\text{közönséges értelemben})$$

(Riemann–Lebesgue lemma).

Az ilyen operátorok szerinti transzformáltakra is kimondható a 2.9. tétel megfelelője.

2.19. TÉTEL. (Németh Z. [Ne4]). Legyen $f \in L^1 \cap L^p(\mathbf{R}_+)$ valamely $1 < p \leq 2$ értékre, $1/p + 1/q = 1$, és $\alpha > 0$. Ha $\widehat{f}$ jelöli f egy Hausdorff-Young típusú transzformáltját, akkor

$$(2.17) \quad \lambda_\alpha(x) |\widehat{f}(x)| \rightarrow 0, \quad \text{ha} \quad x \rightarrow \infty \quad (C, \alpha) \text{értelemben,}$$

ahol

$$(2.18) \quad \lambda_\alpha(x) := \begin{cases} x^{1/q}, & \text{ha } \alpha > 1/q, \\ x^\alpha, & \text{ha } 0 < \alpha < 1/q, \\ x^{1/q} (\log(x+2))^{1/q-1}, & \text{ha } \alpha = 1/q. \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy a jól ismert cosinus, sinus, Fourier és Fourier-Walsh transzformációk Hausdorff-Young típusúak. Egy általánosabb konstrukció a következő:

Tekintsünk egy

$$\widehat{f}_F(u) := \int_a^\infty k(ux) f(x) dx$$

alakú transzformációt. Mindenesetre fölteszük, hogy a $k \in L^1_{\text{loc}}$ függvény korlátos, továbbá, hogy

$$(2.19) \quad \int_0^\infty k_1(xu) k_1(yu) \frac{du}{u^2} = \min(x, y), \quad \text{ahol} \quad k_1(u) = \int_0^u k(x) dx.$$

Amennyiben a k és k_1 függvények korlátosak, ez a transzformáció szintén Hausdorff-Young típusú.

Tauber típusú tételek

Általában Tauber típusúnak nevezzük azokat az eredményeket, amelyek egy sor szummálhatóságából és valamely további feltétel teljesüléséből a sor konvergenciájára (vagy „gyengébb” szummálhatóságára) következtetnek.

A Tauber típusú eredmények igen fontosak a szummációelméletben. Illusztrációképpen megemlítjük, hogy a már hivatkozott, Fourier sorokra vonatkozó Fejér féle tételből, a klasszikus „Hardy-Landau-féle féloldalas” Tauber-típusú tétel segítségével nagyon egyszerűen adódik az ún. Dirichlet-Jordan-féle kritérium.

Hardy bizonyította az alábbi tételt:

3.1. TÉTEL (Hardy [H2]). Az (1.1) sor akkor és csak akkor $(C, 1)$ szummálható az L (véges) számhoz, ha a

$$(3.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

sor konvergál ugyanahhoz az L számhoz.

Ezt az eredményt terjesztjük ki regulárisan szummálható kettős sorokra. Vezessük be az alábbi jelölést:

$$(3.12) \quad b_{mn} := \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_{jk}}{(j+1)(k+1)}, \quad m, n = 0, 1, \dots$$

3.7. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., 1997 [MN2]). A (3.5) kettős sor akkor és csak akkor regulárisan $(C, 1, 1)$ szummálható egy véges L számhoz, ha a

$$(3.13) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} b_{mn}$$

kettős sor regulárisan konvergál ugyanahhoz az L számhoz.

Érdemes megjegyezni, hogy a kettős sorokra a regularitás feltételezése nélkül a 3.1. tétel nem terjeszthető ki.

A 3.3. fejezetben ezen tétel alkalmazásaként Hardy, illetve Landau Tauber típusú eredményeit terjesztjük ki kettős sorokra.

A 3.4. fejezetben ismét integrálokkal foglalkozunk. A fejezet fő eredménye:

3.18. TÉTEL (Móricz F., Németh Z., [MN3]). Legyen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}_+)$ valós értékű függvény, és tegyük fel, hogy a (3.47) integrál $(C, 1)$ szummálható a véges A számhoz. Ekkor (3.48) pontosan akkor áll fent, ha

$$(3.50) \quad \sup_{\lambda > 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx \geq 0$$

és

$$(3.51) \quad \sup_{0 < \lambda < 1} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx \geq 0;$$

e feltételek teljesülésekor szükségképpen

$$(3.52) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda t - t} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dx = 0$$

minden $\lambda > 1$ értékre, valamint

$$(3.53) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \lambda t} \int_{\lambda t}^t [s(t) - s(x)] dx = 0$$

minden $0 < \lambda < 1$ értékre.

E tétel alkalmazásaként több Tauber típusú feltételt igazolunk a $(C, 1)$ szummálható integrálokra. A diszkrét esetben a kérdéskör „szokásos” tárgyalása (a lassú csökkenés, a félodalas és kétoldalas $O(1/n)$ feltételek) Landau, Schmidt, Hardy nevéhez fűzhetők.

A mi bizonyítási módszerünk lényegében szó szerint vihető át arra az esetre, amikor az $\mathbf{R}_+$ halmazon valamely véges pozitív Borel mérték szerint integrálunk. Ekkor a diszkrét (soros), és a folytonos (integrálos) eset együtt tárgyalható, a mérték megfelelő választásával (Lebesgue-, illetve számláló mérték).

Irodalomjegyzék

A dolgozat új eredményei (a 3.3. fejezetet leszámítva) az alábbi cikkekben találhatók:

- [MN1] F. Móricz, Z. Németh, On the order of magnitude of Fourier coefficients with respect to uniformly bounded orthonormal systems, *Analysis Math.*, **21**(1996), 187–198.
- [MN2] F. Móricz, Z. Németh, A new characterization of regular summability $(C, 1, 1)$ of double series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **63**(1997), 471–485.
- [MN3] F. Móricz, Z. Németh, Tauberian conditions under which convergence of integrals follows from summability $(C, 1)$ over $\mathbf{R}_+$, *Analysis Math.*, megjelenés alatt.
- [Ne1] Z. Németh, On the generalized absolute summability of double series, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **56**(1992), 97–114.
- [Ne2] Z. Németh, On the generalized Cesàro summability, Proc. Conf. of Approx. Theory (Kecskemét, 1990), *Coll. Math. Soc. János Bolyai*, **58**(1991), North Holland (Amsterdam, 1992); 549–569.
- [Ne3] Németh Z., Kettős sorok $|C, (\alpha, \beta), (\mu, \nu)|_\kappa$ szummálhatóságáról, *Szakközlgozat* (kézirat), Szeged, 1985.
- [Ne4] Z. Németh, On the order of magnitude of Hausdorff–Young transforms, *Acta Math. Hungar.*, megjelenés alatt.