

Szabó Péter Gábor

**EGYBEVÁGÓ KÖRÖK PAKOLÁSAI
NÉGYZETBEN — KORLÁTOK,
ISMÉTLŐDŐ MINTÁK ÉS
MINIMÁLPOLINOMOK**

Doktori értekezés

Témavezető: Dr. Csendes Tibor

Szegedi Tudományegyetem

Szeged, 2005.

Köszönöm

mindazoknak akik segítették munkámat az értekezés elkészítése során. Mindenekelőtt *szüleimnek* vagyok hálás, hogy biztosították számomra, hogy elfeledkezhettem a mindennapok gondjairól és időmet teljesen kutatásaimnak szentelhettem.

Köszönöm témavezetőmnek *Csendes Tibornak*, hogy kezdettől fogva a legnagyobb odafigyeléssel és gondoskodással irányította a doktori tanulmányaimat.

Mindig jóleső érzéssel gondolok vissza a spanyolországi társszerzőimmal *Leocadio González Casadoval* és *Inmaculada García Fernández* professzor asszonnyal folytatott kutatásaimra, akiknek köszönöm az almeriai egyetemen való tartózkodásom alatt nyújtott segítségüket.

Hasznosak voltak *Eckard Specht* magdeburgi fizikussal folytatott eszmecserék is, akivel úgy írtunk közös cikket, hogy személyesen még soha nem találkoztunk egymással (manapság már gyakori).

Sok mindent tanultam *Markót Mihály Csabától* is, akivel Szegeden éveken keresztül foglalkoztunk a körpakolási problémával.

Köszönöm mindazoknak, akik egy-egy bátorító szóval és elküldött munkájukkal ösztönöztek a kutatásra, így *Hujter Mihálynak*, *Hans Melissennek*, *Michael Monagannek*, *Kari J. Nurmelnak*, *Oláh Annának*, *Ronald Peikertnek*, *Ruttkay Zsófiának*, *Jonathan Schaernek* és *Tárnai Tibornak*.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	5
1.1. A kutatási feladat és annak motivációja	5
1.2. A feladat története	6
1.2.1. Körpakolási feladatok	6
1.2.2. Egybevágó körök pakolásai négyzetben	12
1.3. A dolgozat felépítése	14
2. A probléma és annak ekvivalens modelljei	16
2.1. Geometriai modellek	16
2.2. Matematikai programozási modellek	20
3. Alsó és felső korlátok az optimumra, aszimptotika	23
3.1. Alsó korlát $\overline{m}_n$ -re	23
3.2. Felső korlát $\overline{r}_n$ -re	25
3.3. Aszimptotika és annak hibája	28
4. Számítógépes eljárások az alsó korlát javítására	29
4.1. Determinisztikus eljárások	29
4.1.1. Egy eliminációs eljárás	29
4.2. Sztochasztikus kereső módszerek	32
4.2.1. A TAMSASS-PECS sztochasztikus algoritmus	33
4.2.2. Biliárd-szimuláció	38
4.3. A numerikus eredmények ellenőrzése számítógéppel	38
4.3.1. A numerikus eredmények ellenőrzése intervallum aritmetikai számításokkal	39
4.4. A körpakolások struktúrájának egzisztenciája	40
4.4.1. A Gröbner bázisok elméletének alkalmazása	41
5. Ismétlődő minták a körpakolásokban	45
5.1. Véges mintaosztályok	45
5.1.1. A $\mathbf{PAT}(k^2 - l)$ ($l = 0, 1, 2$) mintaosztályok	45
5.1.2. Az $\mathbf{STR}(k^2 - l)$ ($l = 3, 4, 5$) struktúraosztályok	52
5.1.3. A $\mathbf{PAT}(k(k + 1))$ mintaosztály	55
5.1.4. A $\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$ mintaosztály	56
5.2. Egy végtelennek sejtett mintaosztály	58
5.2.1. Rácspakolások	59

5.2.2.	Optimálisnak sejtett rácspakolás sorozatok	60
5.3.	Javított alsó korlát mintaosztályok felhasználásával	64
5.4.	Éles alsó és felső korlátok a körpakolások sűrűségére	65
6.	Körpakolások minimálpolinomjai	68
6.1.	Egy körpakoláshoz tartozó minimálpolinom meghatározása	68
6.1.1.	Optimális részstruktúrák	69
6.1.2.	Az általános eset tárgyalása	73
6.1.3.	Minimálpolinomok megsejtése kísérleti úton	74
6.1.4.	A meghatározott minimálpolinomok	75
6.2.	A körpakolásokhoz és pontelhelyezésekhez tartozó egzakt értékek .	77
6.2.1.	A $P_{11}(m) = 0$ egyenlet algebrai megoldása	78
6.3.	Minimálpolinomokon alapuló osztályozás	79
6.3.1.	A lineáris osztály	79
6.3.2.	A kvadratus osztály	79
6.3.3.	A kvartikus osztály	80
6.3.4.	Néhány magasabb rendű osztály	82
	Összefoglalás	83
	Summary	85
	Irodalomjegyzék	87
	Függelék: Optimális és közelítő körpakolások ábrái	96

1. fejezet

Bevezetés

1.1. A kutatási feladat és annak motivációja

A természettudományokban, a mérnöki tervezésben és a mindennapi életben is számos feladat vezet olyan matematikai problémához, ahol egybevágó alakzatokkal kell egy adott tartományt a legsűrűbben kitölteni. Lássunk néhány ilyen jellegű problémát:

- *(Térkitöltés)* Helyezzünk el rádióállomásokat egy területen úgy, hogy minél nagyobb területet fedjenek le és az interferencia minimális legyen közöttük!
- *(Raktározás)* Helyezzünk el minél több azonos méretű hordót egy raktárban!
- *(Csomagolás)* Határozzuk meg azt a legkisebb oldalhosszúságú négyzet alapú dobozt, amelyben adott számú azonos méretű palackot elhelyezhetünk!
- *(Fakitermelés)* Ültessünk be egy területet fákkal úgy, hogy az a lehető legsűrűbb legyen, de a fák egymás életterét mégse vegyék el!
- *(Szabászat)* Vágjunk ki adott, esetleg szabálytalan alakú anyagból a lehető legtöbb adott méretű körlapot!

A fenti feladatok megoldásai lényegében a következő probléma megválaszolását jelentik:

Hogyan lehet $n \geq 2$ egybevágó, egymásba nem nyúló körrel a sík egy korlátos tartományát a legsűrűbben kitölteni?

Az értekezés tárgya ennek a nevezetes diszkrét geometriai problémának az a speciális esete, amikor a négyzetben való legsűrűbb körpakolás problémáját vizsgáljuk. Az erre a feladatra használt módszerek közvetve alkalmasak lehetnek más hasonló feladatok megoldására is. A probléma tehát a következő:

Tegyük le $n \geq 2$ azonos sugarú kört egy négyzetbe úgy, hogy azok ne legyenek átlapolók, a sugaruk viszont a lehető legnagyobb legyen!

Ennek az általános esetben régóta megoldatlan problémának egy-egy aspektusát tárgyalta már *Hujter Mihály* [39] (MTA, 1992) kandidátusi értekezése, illetve több doktori értekezés, így például *H. Melissen* [60] (1997, Utrecht), *K. J. Nurmela* [64] (1997, Espoo), *U. Raber* [74] (1999, Trier) és *Markót Mihály Csaba* [52] (2003, Szeged) disszertációi. Munkám elsősorban abban tér el az előbbiektől, hogy bár közül több javított körpakolást is, feladata azonban főleg a pakolások struktúrájának és minimálpolinomjainak a vizsgálata. Az így szerzett tudás közvetlenül használható pakolási algoritmusok eredményességének javítására.

1.2. A feladat története

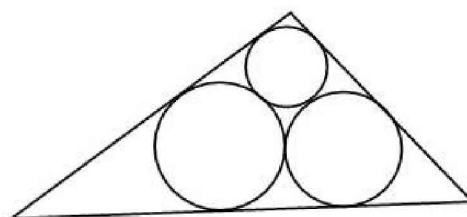
A körpakolási feladatokkal kapcsolatos vizsgálatok a matematikai irodalomban messzire nyúlnak vissza. A továbbiakban röviden bemutatok néhány, a témához kapcsolódó korai eredményt. Matematikatörténeti szempontból új *Bolyai Farkas*nak a négyzetben való pontelhelyezési vizsgálatainak tárgyalása. A disszertáció témáját képező négyzetben való körpakolás problémájának a történetét és a hozzá kapcsolódó bibliográfia összeállítását a teljességre való törekvés igényével állítottam össze.

1.2.1. Körpakolási feladatok

Malfatti problémája

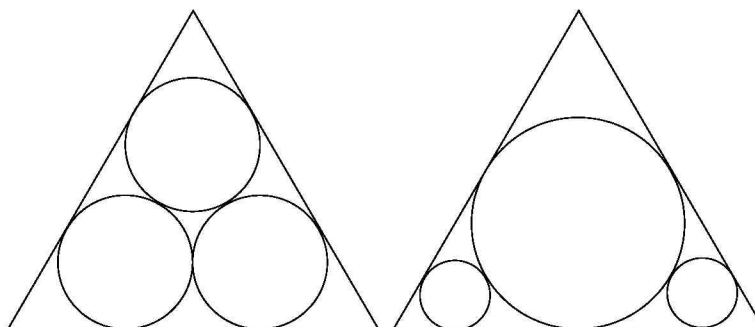
Az európai matematikai vizsgálatok egyik korai példája a híres Malfatti-probléma. 1803-ban *G. Malfatti* (1731-1807) itáliai matematikus vetette fel [49], hogy hogyan lehet három hengert (amelyek lehetnek különböző méretűek is) egy adott derékszögű háromszög alapú hasábjából úgy kivágni, hogy a lehető legnagyobb legyen a térfogatuk összege.

Malfatti úgy gondolta, hogy a megoldás itt nem más, mint megadni egy derékszögű háromszögben három olyan kört, amelyek páronként érintik egymást és minden kör a háromszög két oldalát is érinti. Az ilyen köröknek tetszőleges háromszögben való megszerkesztésének a feladata Malfatti-probléma néven vonult be a matematikai irodalomba (1. ábra). Ezt a problémát azonban korábban már *C. Ajima* (1732-1798) japán matematikus is felvetette és meg is oldotta [24].



1. ábra: A Malfatti-körök.

Érdekes, hogy több mint száz év múlva jöttek csak rá (legalább is az eddigi ismereteink szerint), hogy az előbbi Malfatti-körök nem feltétlenül a legsűrűbb körpakolását jelentik három esetleg nem azonos sugarú körnek a háromszögben. *H. Lob* és *H. W. Richmond* 1930-ban megmutatták [45], hogy szabályos háromszögben nem a Malfatti-körök adják a legsűrűbb körpakolást (2. ábra).

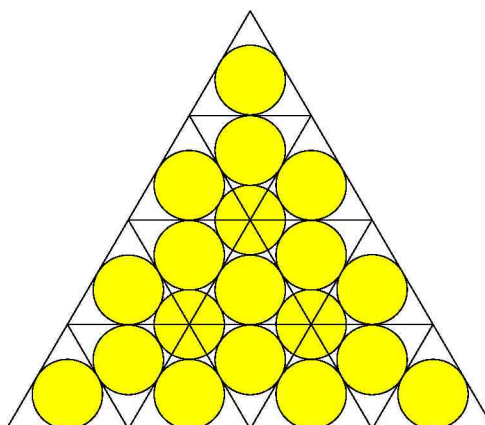


2. ábra: A Malfatti-körök és egy annál sűrűbb pakolás szabályos háromszögben.

A *Malfatti* által eredetileg kitűzött feladatot, vagyis hogy a körpakolás sűrűsége maximális legyen 1992-ben oldotta meg *V. A. Zalgaller* és *G. A. Los'* [111].

Bolyai Farkas körpakolási vizsgálatai

Minden bizonnyal *Bolyai Farkas* (1775-1856) magyar matematikus volt az első, aki egy körpakolási sorozat sűrűségét először vizsgálta korlátos tartományban (és az eredményeit publikálta). Az 1832–33-ban kiadott *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Elementaris Ac Sublimioris, Methodo Intuitiva, Evidentiaque Huic Propria Introducendi* című — röviden csak '*Tentamen*'-ként emlegetett — híres munkájában 19 körnek egy szabályos háromszögben való elhelyezésével találkozhatunk [6] (3. ábra).



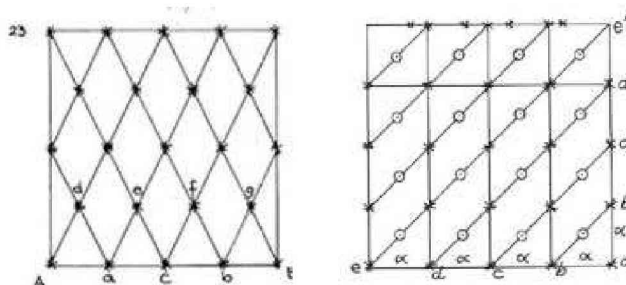
3. ábra: Bolyai Farkas példája egy szabályos háromszögben való körpakolásra.

Az általa adott körpakolást úgy kaphatjuk meg, hogy felosztjuk a háromszög oldalait 4 egyenlő részre és az osztópontokat a 3. ábrán látható módon az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel összekötjük. Ha a keletkezett kis háromszögekben tekintjük azok beírható körét, akkor még további három kört tehetünk azokra a helyekre, amelyeket hat másik kör vesz körül, ugyanakkora sugárral.

Bolyai Farkas az említett művében azt a kérdést vizsgálta, hogy ha az oldalak felosztását a végtelenhez tartatjuk, akkor hogyan fog a háromszög körökkel nem fedett területe, az ún. '*vacuitas*' változni. Könnyű utánaszámolni, hogy a pakolás sűrűsége a $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ értékhez konvergál.

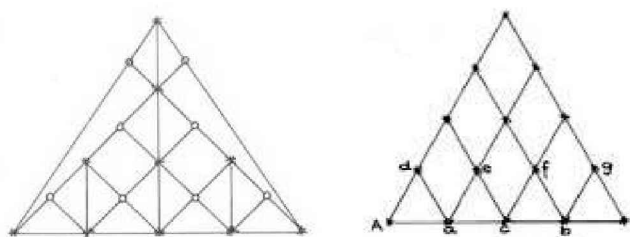
Természetesen merül fel a kérdés, hogy *Bolyai Farkas* miért foglalkozott ezzel a feladattal, hiszen a korabeli matematikai irodalomban nyomát sem találjuk ennek. *Szénássy Barna* (1913-1995) matematikátörténész úgy sejtette [83], hogy *Bolyai* valószínűleg az 1820-as erdészeti főfelügyelői állás megpályázása miatt kezdett el komolyabban kertészeti és erdészeti tanulmányokat folytatni, így feltehetőleg ennek eredményeként jutott el ahhoz a kérdéshez is, hogy hogyan ültessünk be egy területet úgy fákkal, hogy az a lehető legsűrűbb legyen de a fák egymás életterét még se vegyék el.

Szénássy fenti sejtéséhez az újabb kutatások tükrében további adatokkal járulhatunk hozzá. *Bolyai Farkas* már jóval 1820 előtt, Göttingából való hazajövele után is behatóan foglalkozott domáldi birtokán faültetéssel. *Kendeffy Károly* diákjegyzeteiből az is kiderül, hogy a Marosvásárhelyi Kollégiumban előadásokat is tartott arról a kérdésről, hogy hogyan ültessük a fákat, hogy '*világosságból és levegőből egyaránt abból osztozzanak*'. A 4. ábrán látható egy-egy négyzetben javasolt faelhelyezése. A témakör részletesebb vizsgálata, további ábrákkal és példákkal megtalálható a [87] dolgozatomban.



4. ábra: Bolyai Farkas két példája fáknak négyzet alakú területen való elhelyezéséről.

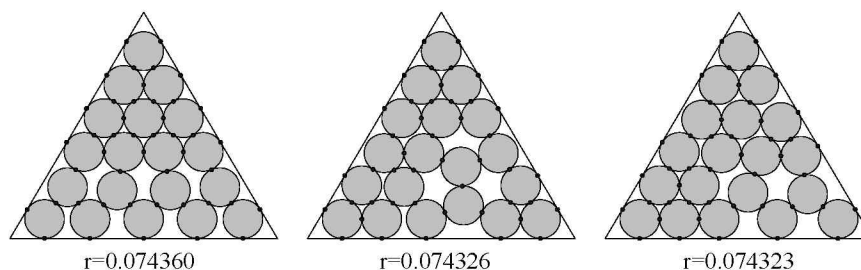
Azt, hogy *Bolyai* fatelepítése kapcsolódhat a körelhelyezési feladathoz, megerősíti az is, hogy háromszög alakú területen is mutatott be ilyen elhelyezéseket (5. ábra).



5. ábra: Bolyai Farkas két példája fának háromszög alakú területen való elhelyezéséről.

Fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy *Bolyai Farkas* körpakolásai nem feltétlenül lesznek optimális megoldásai a szabályos háromszögben való legsűrűbb körelhelyezés problémájának. Például 19 körnek is adható az előbbinél sűrűbb pakolása [85]. Ha a szabályos háromszög oldalait egységnyi hosszúságúnak választjuk, akkor a körök sugara (hat tizedesjegyre kerekítve) 0.072169 hosszúságú lesz az előbbi körpakolásban. Ismertek ennél nagyobb körsugárral szereplő pakolások is. *R. L. Graham* és *B. D. Lubachevsky* 1995-ben közölték [28] a 6. ábrán látható pakolásokat, rendre 0.074360, 0.074326 és 0.074323 sugárral.

Tegyük rögtön hozzá, hogy *Bolyai Farkas* nem mondja, hogy ő a legsűrűbb pakolást kereste, csak a pakolási sorozat sűrűségének konvergenciáját vizsgálta.



6. ábra: 19 körnek Bolyai példájánál sűrűbb pakolásai.

Szangaku problémák

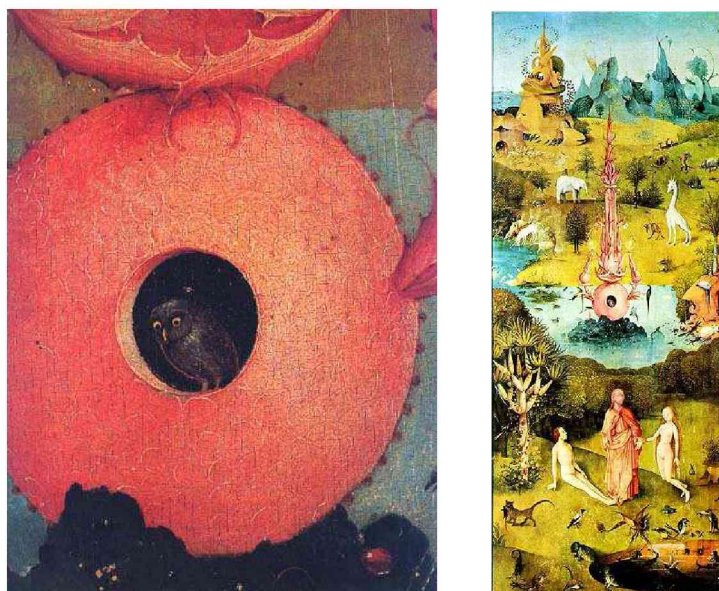
Körpakolással kapcsolatos matematikai feladatokkal nemcsak Európában foglalkoztak. Az Edo-korszakban (1603-1867) készült japán szangakuk szintén sok körpakolási feladatot tárgyalnak. A szangaku matematikai táblát jelent japánul. Olyan fatáblákról van szó, amelyeken elsősorban geometriai problémákat tárgyaltak, és sintoista szentélyekben vagy buddhista templomokban helyezték el azokat, valószínűleg meditációs célokból (7. ábra). A témakörrel további információk, feladatok találhatóak a [24] könyvben, illetve a [86, 88] dolgozataimban.



7. ábra: Egy japán szangaku.

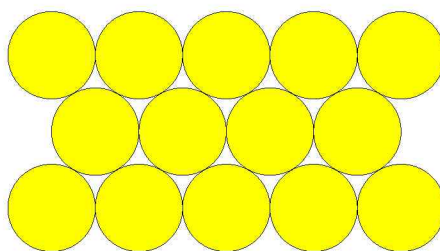
Hieronymus Bosch egy körpakolása

Természetesen számos példát lehetne hozni érdekes körpakolási feladatokra a matematikán kívülről is. *Hieronymus Bosch* (1450 k.-1516) németalföldi festő rendkívül részletgazdag munkái az egyik legrejtélyesebb életműként hatnak az utókor számára. Bosch híres képén, a *Gyönyörök kertje* (1500 k.) triptichonon, a Paradicsomot ábrázoló szárnyon is látható egy körpakolás gömbfelületen [99]. A dolog egyik érdekessége, hogy még jó minőségű albumban is nehezen fedezhető fel a körpakolás, inkább nagyításban látszik jól (8. ábra).

8. ábra: Egy gömbfelületen való körpakolás Bosch *Gyönyörök kertje* triptichonján.

A sík egybevágó körökkel való legsűrűbb kitöltése

A sík egybevágó körökkel való legsűrűbb kitöltésére megoldást először *A. Thue* (1863-1922) norvég matematikus közölt [102, 103]. Bizonyítható, hogy a sík egybevágó körökkel úgy tölthető ki a legsűrűbben, ahogy azt az ember intuíciója is sugallja, tehát ha minden kört hat másik vesz körül és a körök így hexagonális struktúrában helyezkednek el (9. ábra). Azt, hogy az ilyen struktúrájú körpakolás adja a legsűrűbb rácspakolást a síkon, már *J. L. Lagrange* (1736-1813) is igazolta 1773-ban [44].



9. ábra: A sík egybevágó körökkel való legsűrűbb kitöltése.

A hexagonális pakolás sűrűsége megegyezik a *Bolyai Farkas* által vizsgált körpakolási sorozat sűrűségének határértékével, $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -vel.

Thue bizonyítása nem volt egészen meggyőző; egzakt bizonyítást a tételre a hazai diszkrét geometria első nagy művelője, *Fejes Tóth László* (1913-2005) adott 1940-ben [17].

Korlátos tartományban való legsűrűbb körpakolások

Korlátos tartományban való körpakolásokat konkrét adott alakzatok esetében elsősorban négyzetben, körben [20, 21, 22, 30, 58, 73], szabályos [28, 57, 70] és egyenlő szárú derékszögű [35] háromszögben, valamint téglalapban [76] vizsgáltak.

Néhány további problémafelvetés

A körpakolási problémáknak lehet olyan felvetése, amely valamely nemeuklideszi geometriában (pl. a hiperbolikus geometriában) tárgyalja a kérdést, bár ott már a sűrűség fogalmának a definiálása sem olyan egyértelmű, mint az euklideszi esetben [7]. Lehet úgy is általánosítani a feladatot, hogy bár az euklideszi síkon tárgyaljuk a problémát, de az euklideszi távolság helyett más metrikát vezetünk be [4, 18, 19]. Természetesen adódik a feladat térbeli (pl. Kepler-probléma [34], illetve háromnál magasabb dimenzióban való felvetése is (pl. a 'Kissing number' probléma [69]). Ezek a kérdések matematikai szempontból érdekes feladatokat eredményeznek, de a gyakorlati alkalmazásokhoz közelebb áll a probléma eredeti formájának vizsgálata, ill. annak háromdimenziós gömbpakolási általánosítása.

A jelen értekezés a klasszikus esetnek megfelelő négyzetben való legsűrűbb körpakolás problémájával foglalkozik, tehát az euklideszi síkon az euklideszi távolság metrikával.

1.2.2. Egybevágó körök pakolásai négyzetben

A matematikai irodalom úgy tartja számon, hogy a feladattal *L. Moser* [63] foglalkozott először. Amint azt *Fejes Tóth László* [36, 83] visszaemlékezéséből tudjuk, a II. világháborúban fiatalon elhunyt magyar matematikus, *Lázár Dezső* (1913-1943?) is felvetette a problémát az 1930-as években. Tragikus sorsa azonban megakadályozta abban, hogy közleményeivel gazdagítsa a matematikát ezen a téren. A matematikatörténet [110] így *Moser* egy 1960-ban kitűzött sejtését tartja a probléma kiindulópontjának [63].

Moser 8 pontnak a négyzetben való optimális pontelhelyezését sejtette meg, amit *J. Schaer* és *A. Meir* igazoltak 1965-ben [79]. Dolgozatukban megemlítik, hogy $n = 6$ -ra *R. L. Graham* adott már bizonyítást és $n = 7$ -re nekik is van egy megoldásuk (5 körig a probléma megoldása triviális). Mindkét eredmény azonban publikálatlan maradt. *Schaer* levélben elküldte nekem akkori bizonyítását, de ő azt 'ugly proof'-nak tartotta és ezért nem publikálta. Elegáns, számítógépet nem használó matematikai megoldást eddig még nem közöltek erre az esetre. Az $n = 6$ -ra később egymástól függetlenül [59] *B. L. Schwartz* [81] 1970-ben és *H. Melissen* [59] 1994-ben adtak bizonyítást.

J. Schaer még ugyanabban az évben, 1965-ben az $n = 9$ esetet is megoldotta [77]. 1970-ben *M. Goldberg* az addigi eredményekről egy áttekintő dolgot írt [26], és optimálisnak sejtett pakolásokat adott meg az $n \leq 27$ és néhány $n > 27$ körszámra. Az $n = 10$ -es esettel több kutató is foglalkozott, fokozatosan javítgatva az eredményeket. Az 1. Táblázatban áttekintést kaphatunk erről az 1990-es évig bezáróan, amikor *C. de Groot*, *R. Peikert* és *D. Würtz* [32] megtalálták és bizonyították az optimális körpakolást. A táblázatban az r_{10} érték a körök sugarát jelöli (6 tizedesjegyre kerekítve) az egységnégyzetben.

1992-ben *R. Peikert*, *D. Würtz*, *M. Monagan* és *C. de Groot* számítógépes eljárásukkal az optimális körpakolásokat $n = 20$ -ig közölték [72]. Az $n = 10$ -es esetre azonban itt is hiányzik még egy tisztán matematikai eszközöket használó megoldás. Ebben az irányban *Hujter Mihály*nak [40] vannak szép eredményei, de a teljes megoldás még várat magára.

G. Wengerodt csak matematikai eszközöket használva 1983-ban az $n = 16$ -ra [107], majd 1987-ben az $n = 14$ [108], $n = 25$ [109] és *K. Kirchner*rel együtt az $n = 36$ esetre [42] publikálták az optimális elhelyezéseket. Újabb azonban kételyek merültek fel az $n = 25$ és 36 esetekre adott matematikai bizonyításokkal kapcsolatban (lásd *R. Blind* MR1453444 (Mathematical Reviews) lektori véleményét).

Év	Szerző(k)	r_{10}	Hivatkozás
1970	M. Goldberg	0.147060	[26]
1971	J. Schaer	0.147770	[78]
1979	K. Schlüter	0.148204	[80]
1987	R. Milano	0.147920	[61]
1989	G. Valette	0.148180	[105]
1990	B. Grünbaum	0.148197	[33]
1990	M. Grannell	0.148204	[31]
1990	M. Mollard és C. Payan	0.148204	[62]
1990	C. de Groot, R. Peikert és D. Würtz	0.148204	[32]

1. Táblázat. Körpakolási eredmények az $n = 10$ esetre.

1995-ben *C. D. Maranas, C. A. Floudas és P. Pardalos* [50] a MINOS használatával az első 30 esetre közöltek eredményeket az optimalitás igazolása nélkül. Itt meg kell jegyezni, hogy munkájukba az $n = 21$ -es esetben hiba csúszott, mivel itt olyan értéket adtak meg, amely nagyobb mint a később bizonyítottan optimális érték. Ez is mutatja, hogy nagyon körültekintően kell bánni a számítógépes numerikus számításokkal, mivel ha azok nem garantált megbízhatóságú technikákkal adódtak, matematikai szempontból vett értékük mindig bizonytalan.

1996-ban *Tarnai Tibor és Gáspár Zsolt* [100] a közölt dolgozatukban (amely anyagának jelentős része már egy 1993-as balatonföldvári konferenciára elkészült) *Peikert* és munkatársaitól függetlenül az $n = 19$ esetre javították *M. Goldberg* [26] korábbi pakolását, valamint felső korlátokat adtak meg a körpakolások sűrűségére.

1997-ben jelent meg *K. J. Nurmela és P. R. J. Östergård* [66] dolgozata, amelyben az első 50 esetre adtak az optimálishoz közeli pakolásokat. Munkájukban bevezettek néhány mintaosztályt, amelyeket *R. L. Graham és B. D. Lubachevsky* [29] bővítettek, új biliárd-szimulációs eljárásuk felhasználásával kapott körpakolási eredményeik segítségével.

1999-ben *K. J. Nurmela és P. R. J. Östergård* [67] optimális körpakolásokat adtak meg az első 27 esetre, *R. aus de Springgel* [68] új elméleti alsó korlátokat, illetve egy optimálisnak sejtett körpakolási sorozatot határoztak meg.

2000-ben *D. W. Boll, J. Donovan, R. L. Graham és B. D. Lubachevsky* [5] az $n = 32, 37, 48$ és 50 esetekre közöltek javított körpakolásokat. Ekkor jelent meg *P. Ament és G. Blind* [3] cikke is, benne egy javított pakolással az $n = 34$ esetre, bár eredményüknél akkor már ismert volt jobb pakolás [29].

2002-ben *M. Locatelli és U. Raber* [46] új elméleti eredményeken alapuló determinisztikus eljárást fejlesztettek ki, és az $n = 32$ és 37 esetekben a korábbi körpakolások javított értékeit adták.

2003-ban *Markót Mihály Csaba* a *Peikert* és munkatársai által felvetett, és *Nurmela* és *Östergård* által módosított eljárást továbbfejlesztette úgy, hogy egyrészt $n = 27$ körnél nagyobb körszámra is használható az eljárás, másrészt intervallum aritmetikai alapokra építkezve a numerikus megoldás így garantált megbízhatóságúvá vált. Az $n = 28$ -ra az [53] és *Csendes Tiborral* az $n = 29$ és 30-ra az [54] dolgozatokban adtak optimális megoldást.

2005-ben *B. Addis*, *M. Locatelli* és *F. Schoen* tovább javították a korábbi eredményeket az $n = 53, 59, 66, 68, 73, 77, 85$ és 86 esetekben [1].

Szerzőtársaimmal közös eredményeimet az előbbi felsorolásban itt nem tüntettem fel, mivel ez a jelen disszertáció tárgya. A dolgozatban felhasznált matematikai eszközök az elemi geometria, az elemi számelmélet (lánctörtek), a sztochasztikus globális optimalizálás, a polinomgyűrűk elmélete (Gröbner bázisok) és az intervallum matematika területeiről származnak. Az értekezésben szereplő minden sorszámozott tétel és állítás bizonyítása az én munkám, más szerzők tételeire hivatkozással utalok.

1.3. A dolgozat felépítése

Az 1. fejezet matematikatörténeti bevezetője után a 2. fejezetben a probléma matematikai megfogalmazását, annak ekvivalens geometriai és matematikai programozási modelljeit tárgyalom.

A 3. fejezetben a körpakolások numerikus értékeire a korábbi elméleti eredményeket megjavító alsó és felső korlátokat adok meg, majd vizsgálom a belőlük származtatható aszimptotika hibatagját.

Az alsó korlátokat tovább javítom a 4. fejezetben egy sztochasztikus optimalizáló eljárás felhasználásával. A kapott numerikus eredményeket intervallum aritmetikai eszközökkel garantált megbízhatóságúvá teszem. A numerikus eredményektől inspirálva megvizsgálom a körpakolások struktúrája egzisztenciájának kérdését a Gröbner bázisok elmélete alapján.

Az 5. fejezetben a megismert legjobb pakolások közül többet véges mintaosztályokba sorolok szerkezeti felépítésük és körszámuk számelméleti kapcsolata alapján. Bizonyos körpakolásokhoz közelítő struktúrákat határozok meg. Ezután a rácspakolások osztályát tárgyalom. A mintaosztályok segítségével az elméleti úton kapott alsó korlátokat tovább javítom és éles alsó és felső konstans korlátokat adok a körpakolások sűrűségére.

A 6. fejezetben a pakolásokhoz tartozó minimálpolinomok meghatározását tárgyalom. Itt kidolgoztam egy olyan módszert, amely bizonyos pakolások optimális

részstruktúrájának felhasználásával adja meg a pakolás minimálpolinomját rezultáns képzéssel. Tárgyalok egy a Gröbner bázisok elméletén alapuló minimálpolinom megadási eljárást is. A minimálpolinomok alapján bizonyos esetekben megadom a körpakolások sugarának (ill. a pontelhelyezésekben a minimális távolságoknak) egzakt értékeit is. Végül megmutatom, hogy a minimálpolinomok jól használhatók a körpakolások osztályozására.

A disszertáció magyar és angol nyelvű összefoglalással, irodalomjegyzékkel és függelékkel zárul. A függelékben az első 50 körre vonatkozó optimális és a ma ismert legjobb közelítő pakolások ábrái és a hozzájuk tartozó numerikus adatok találhatók.

2. fejezet

A probléma és annak ekvivalens modelljei

Ebben a fejezetben specifikáljuk a disszertációban vizsgált problémát, és megadjuk annak néhány ekvivalens modelljét. Mivel a dolgozatban a feladat geometriai tulajdonságainak tárgyalása mellett azt mint globális optimalizálási problémát is vizsgáljuk, így megadjuk a probléma különböző matematikai programozási modelljeit is.

2.1. Geometriai modellek

1. DEFINÍCIÓ. $P(r_n, S) \in P_{r_n}$ egy körpakolás az r_n sugárral a $[0, S]^2$ négyzetben, ahol $P_{r_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, S]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4r_n^2; x_i, y_i \in [r_n, S - r_n] \ (1 \leq i < j \leq n)\}$. $P(r_n, S) \in P_{r_n}$ optimális körpakolás, ha $\bar{r}_n = \max_{P_{r_n} \neq \emptyset} r_n$.

$\mathfrak{P}_1^n$ probléma: Határozzuk meg az optimális körpakolásokat rögzített $n \geq 2$ egész számra.

2. DEFINÍCIÓ. $A(m_n, \Sigma) \in A_{m_n}$ egy pontelhelyezés az m_n minimális távolsággal a $[0, \Sigma]^2$ négyzetben, ahol $A_{m_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, \Sigma]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq m_n^2; (1 \leq i < j \leq n)\}$. $A(m_n, \Sigma) \in A_{m_n}$ optimális pontelhelyezés, ha $\bar{m}_n = \max_{A_{m_n} \neq \emptyset} m_n$.

$\mathfrak{P}_2^n$ probléma: Határozzuk meg az optimális pontelhelyezéseket rögzített $n \geq 2$ egész számra.

Bevezetjük a társított körpakolás és a társított pontelhelyezés fogalmát a későbbi tárgyalás félreértései elkerülése céljából. Ezekre a fogalmakra azért lesz szükségünk, mert bizonyos állításokat egyszerűbb formalizmussal tudunk a segítségükkel megadni.

3. DEFINÍCIÓ. $P'(R, s_n) \in P'_{s_n}$ egy társított körpakolás az R sugárral a $[0, s_n]$ négyzetben, ahol $P'_{s_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, s_n]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4R^2; x_i, y_i \in [R, s_n - R] \ (1 \leq i < j \leq n)\}$. $P'(R, s_n) \in P'_{s_n}$ optimális társított

körpakolás, ha $\bar{s}_n = \min_{P'_{s_n} \neq \emptyset} s_n$.

$\mathfrak{P}_3^n$ probléma: Határozzuk meg az optimális társított körpakolásokat, rögzített $n \geq 2$ egész számra.

4. DEFINÍCIÓ. $A'(M, \sigma_n) \in A'_{\sigma_n}$ egy társított pontelhelyezés az M minimális távolsággal a $[0, \sigma_n]$ négyzetben, ahol $A'_{\sigma_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, \sigma_n]^2 \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq M^2 \ (1 \leq i < j \leq n)\}$. $A'(M, \sigma_n) \in A'_{\sigma_n}$ optimális társított pontelhelyezés, ha $\bar{\sigma}_n = \min_{A'_{\sigma_n} \neq \emptyset} \sigma_n$.

$\mathfrak{P}_4^n$ probléma: Határozzuk meg az optimális társított pontelhelyezéseket, rögzített $n \geq 2$ egész számra.

1. Tétel. A $\mathfrak{P}_1^n$, $\mathfrak{P}_2^n$, $\mathfrak{P}_3^n$ és $\mathfrak{P}_4^n$ problémák ekvivalensek egymással abban az értelemben, hogy ha valamelyiket meg tudjuk oldani egy rögzített $n \geq 2$ egész számra, akkor a többi problémát is meg tudjuk oldani arra az n -re, mivel a $\mathfrak{P}_i^n$ ($1 \leq i \leq 4$) problémák optimális megoldásai egymásból származtathatók.

A bizonyítást négy segédtelemmel keresztül vezetjük le. Először igazoljuk, hogy egy $P(r_n, S)$ optimális körpakolás köreinek középpontjai egy alkalmas $A(m_n, \Sigma)$ optimális pontelhelyezést adnak. Majd igazoljuk, hogy egy $A(m_n, \Sigma)$ optimális pontelhelyezés pontjai köré megfelelő sugárral rajzolt körök egy $P'(R, s_n)$ optimális társított körpakolást eredményeznek. Ezután igazoljuk, hogy egy optimális $P'(R, s_n)$ társított körpakolás köreinek középpontjai egy alkalmas $A'(M, \sigma_n)$ optimális társított pontelhelyezést adnak. Végül már csak azt kell igazolni, hogy egy $A'(M, \sigma_n)$ optimális társított pontelhelyezés pontjai köré megfelelő sugárral rajzolt körök optimális $P(r_n, S)$ körpakolást eredményeznek.

1. SEGÉDTÉTEL. A $P(r_n, S)$ optimális körpakolás köreinek középpontjai egy $A(m_n, \Sigma)$ optimális pontelhelyezést határoznak meg, ahol $\Sigma = S - 2r_n$, $m_n = 2r_n$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekt módon, hogy az $A(2r_n, S - 2r_n)$ pontelhelyezés nem optimális. Ekkor létezik olyan $A(m'_n, S - 2r_n)$ pontelhelyezés, hogy $m'_n > 2r_n$. Rendeljünk az $A(m'_n, S - 2r_n)$ -hez egy körpakolást, úgy, hogy rajzoljunk minden pontja köré egy $m'_n/2$ sugarú kört. Világos, hogy ekkor minden így kapott kör benne lesz egy $S - 2r_n + m'_n$ oldalú négyzetben. Középpontos kicsinyítéssel (ahol a középpont az előbbi négyzetünk középpontja) transzformáljuk a négyzetet egy S oldalú négyzetbe. A hasonlósági transzformáció a körök sugarát

$$\frac{m'_n S}{2(S - 2r_n + m'_n)}$$

hosszúvá változtatja. Mivel abból indultunk ki, hogy a $P(r_n, S)$ optimális körpakolás, így

$$r_n \geq \frac{m'_n S}{2(S - 2r_n + m'_n)}.$$

Ebből átrendezéssel $2r_n(S - 2r_n) \geq m'(S - 2r_n)$ adódik, ami azonban ellentmond az $m' > 2r_n$ feltételnek.

□

2. SEGÉDTÉTEL. Az $A(m_n, \Sigma)$ optimális pontelhelyezés pontjai köré rajzolt alkalmas sugarú körök egy optimális $P'(R, s_n)$ társított körpakolást adnak, ahol $R = m_n/2$, $s_n = \Sigma + m_n$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekt módon, hogy a $P'(m_n/2, \Sigma + m_n)$ társított körpakolás nem optimális. Ekkor létezik olyan $P'(m_n/2, s'_n)$ társított körpakolás, hogy $s'_n < \Sigma + m_n$. Tekintsük ezen körpakolás köreinek a középpontjait. Azok biztosan benne lesznek egy $s'_n - m_n$ oldalú négyzetben. Középpontosan nagyítsuk (a nagyítás középpontja a négyzet középpontja) a négyzetet úgy, hogy az Σ oldalhosszúságú legyen. Ekkor a pontok közötti minimális távolság

$$\frac{m_n \Sigma}{s'_n - m_n}$$

értékűvé változik. Mivel $A(m_n, \Sigma)$ optimális pontelhelyezés volt, így

$$m_n \geq \frac{m_n \Sigma}{s'_n - m_n}.$$

Az $m_n > 0$ értékkel egyszerűsítve és a nevezővel beszorozva így $s'_n - m_n \geq \Sigma$ adódik, azonban ez ellentmond az $s'_n < \Sigma + m_n$ feltételnek.

□

3. SEGÉDTÉTEL. A $P'(R, s_n)$ optimális társított körpakolás köreinek középpontjai egy alkalmas $A'(M, \sigma_n)$ optimális társított pontelhelyezést adnak, ahol $M = 2R$, $\sigma_n = s_n - 2R$.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel indirekt módon, hogy az $A'(2R, s_n - 2R)$ társított pontelhelyezés nem optimális. Ekkor létezik olyan $A'(2R, \sigma'_n)$ társított pontelhelyezés, hogy $\sigma'_n < s_n - 2R$. Rendeljünk ehhez a társított pontelhelyezéshez egy körpakolást úgy, hogy minden pont köré rajzoljunk egy R sugarú kört. Az így kapott körök benne lesznek egy $\sigma'_n + 2R$ oldalhosszúságú négyzetben. Mivel $P'(R, s_n)$ optimális társított körpakolás volt, így $s_n \leq \sigma'_n + 2R$. Ez azonban ellentmond az előbbi egyenlőtlenségnek.

□

4. SEGÉDTÉTEL. Az $A'(M, \sigma_n)$ optimális társított pontelhelyezés pontjai köré alkalmas sugárral rajzolt körök egy $P(r_n, S)$ optimális körpakolást adnak, ahol $r_n = M/2$, $S = \sigma_n + M$.

Tegyük fel indirekt módon, hogy a $P(M/2, \sigma_n + M)$ körpakolás nem optimális. Ekkor létezik olyan $P(r'_n, \sigma_n + M)$ körpakolás, hogy $r'_n > M/2$. Tekintsük ezen körpakolás köreinek a középpontjait. Ezek benne lesznek egy $\sigma_n + M - 2r'_n$ oldalú négyzetben. Középpontosan kicsinyítsük a négyzetet (a kicsinyítés középpontja

a négyzet középpontja) úgy, hogy benne a pontok közötti minimális távolság M legyen. Ekkor a négyzet oldala

$$\frac{M(\sigma_n + M - 2r'_n)}{2r'_n}$$

lesz. Mivel $A'(M, \sigma_n)$ optimális társított pontelhelyezés volt, így

$$\sigma_n \leq \frac{M(\sigma_n + M - 2r'_n)}{2r'_n}.$$

Ebből azt kapjuk átrendezéssel, hogy $0 \leq (\sigma_n + M)(M - 2r'_n)$. Az egyenlőtlenség jobb oldalán álló szorzat első tényezője pozitív, így ez azt jelenti, hogy $M - 2r'_n \geq 0$, ami azonban ellentmond az $r'_n > M/2$ feltételnek.

□

5. DEFINÍCIÓ. Egy $P(r_n, S)$ körpakolás *sűrűségét* a

$$d_n(r_n, S) = \frac{nr_n^2\pi}{S^2}$$

képlettel definiáljuk.

Mivel egy $P(r_n, S)$ körpakolás sűrűsége az r_n sugár kvadratikus függvénye, ezért az alábbi probléma szintén ekvivalens (az előbbi értelemben) a $\mathfrak{P}_i^n$ ($1 \leq i \leq 4$) feladatokkal.

$\mathfrak{P}_5^n$ probléma: Határozzuk meg a maximális sűrűségű $P(r_n, S)$ körpakolásokat, rögzített $n \geq 2$ egész számra.

Így használni fogjuk a legsűrűbb körpakolás fogalmát is.

1. KÖVETKEZMÉNY. Az egymásból származtatott körpakolások, pontelhelyezések, társított körpakolások és társított pontelhelyezések között a 2. Táblázatban szereplő összefüggések állnak fenn:

	$P(r_n, S)$	$A(m_n, \Sigma)$	$P'(R, s_n)$	$A'(M, \sigma_n)$
$P(r_n, S)$	1	$r_n = \frac{Sm_n}{2(m_n + \Sigma)}$	$r_n = \frac{RS}{s_n}$	$r_n = \frac{MS}{2(M + \sigma_n)}$
$A(m_n, \Sigma)$	$m_n = \frac{2\Sigma r_n}{S - 2r_n}$	1	$m_n = \frac{2R\Sigma}{s_n - 2R}$	$m_n = \frac{M\Sigma}{2R(M + \sigma_n)}$
$P'(R, s_n)$	$s_n = \frac{RS}{r_n}$	$s_n = \frac{2R(m_n + \Sigma)}{m_n}$	1	$s_n = \frac{2R(M + \sigma_n)}{M}$
$A'(M, \sigma_n)$	$\sigma_n = \frac{M(S - 2r_n)}{2r_n}$	$\sigma_n = \frac{M\Sigma}{m_n}$	$\sigma_n = \frac{M(s_n - 2R)}{2R}$	1

2. Táblázat. Kapcsolat a paraméterek között.

BIZONYÍTÁS. A 12 formula bizonyítása az 1. Tételben használt hasonlósági transzformáció alkalmazásával könnyen adódik.

□

A továbbiakban a $\mathfrak{P}_1^n$, $\mathfrak{P}_2^n$ és $\mathfrak{P}_5^n$ problémákat az egységnégyzetben fogjuk tárgyalni. Ez nem jelent megszorítást a feladatokat illetően, hiszen hasonlósági transzformációval a körpakolások és pontelhelyezések tetszőleges oldalhosszúságú négyzetbe transzformálhatók. A továbbiakban két körpakolást (illetve két pontelhelyezést) azonosnak tekintünk, ha van olyan szimmetria-transzformáció vagy indexpermutáció, amelyekkel azok egymásba vihetők.

2.2. Matematikai programozási modellek

A négyzetben való legsűrűbb körpakolás problémája egyrészt egy geometriai feladat, másrészt egy globális optimalizálási probléma. A $\mathfrak{P}_2^n$ probléma az alábbi módon formalizálható röviden:

$$\max_{p_k \in [0,1]^2, 1 \leq k \leq n} \min_{1 \leq i < j \leq n} \|p_i - p_j\|,$$

ahol a norma az euklideszi normát jelöli. A probléma matematikai programozási modelljét négy formában adjuk meg. A feladat lehet

a) *folytonos nemlineáris korlátos globális optimalizálási feladat:*

$$\max_{x_i, y_i} t$$

feltéve, hogy

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \geq t \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

$$0 \leq x_i, y_i \leq 1, \text{ és } 1 \leq i \leq n.$$

b) *max-min optimalizálási feladat:*

$$\max_{x_i, y_i} \min_{1 \leq i < j \leq n} d_{ij}$$

feltéve, hogy

$$\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = d_{ij} \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

$$0 \leq x_i, y_i \leq 1, \text{ és } 1 \leq i \leq n.$$

c) *DC programozási feladat:*

A DC (difference of convex functions) programozási feladat egy olyan matematikai programozási feladat, ahol a célfüggvényt két konvex függvény különbségeként lehet felírni. Az általunk vizsgált probléma ilyen. Itt a célfüggvény a következő $g: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ és $h: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^+$ konvex függvények különbségeként írható fel [38]:

$$g(z) = 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j^2,$$

$$h(z) = \max \left\{ \left(2 \sum_{j \in J \setminus J_{ik}} z_j^2 + (z_i + z_k)^2 + (z_{n+i} + z_{n+k})^2 \right) : 1 \leq i < k \leq n \right\},$$

ahol

$$\begin{aligned} J &= \{1, \dots, 2n\}, \\ z &= (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), \\ J_{ik} &= \{i, k, n+i, n+k\}. \end{aligned}$$

A felírás helyességét az alábbi átalakítások mutatják.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy továbbra is ekvivalens problémához jutunk, ha az euklideszi norma helyett annak négyzetét vesszük.

$$\begin{aligned} & \max_{z_j \in [0,1]^2, 1 \leq j \leq 2n} \min_{1 \leq i < k \leq n} \{ (z_i - z_k)^2 + (z_{n+i} - z_{n+k})^2 \} = \\ & \max_{z_j \in [0,1]^2, 1 \leq j \leq 2n} \min_{1 \leq i < k \leq n} \left\{ (z_i - z_k)^2 + (z_{n+i} - z_{n+k})^2 - 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j^2 \right\} = \\ & \max_{z_j \in [0,1]^2, 1 \leq j \leq 2n} \left\{ 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j^2 + \min_{1 \leq i < k \leq n} \left\{ -2 \sum_{j \in J \setminus J_{ik}} z_j^2 - (z_i + z_k)^2 - (z_{n+i} + z_{n+k})^2 \right\} \right\} = \\ & \max_{z_j \in [0,1]^2, 1 \leq j \leq 2n} \left\{ 2 \sum_{j=1}^{2n} z_j^2 - \max_{1 \leq i < k \leq n} \left\{ 2 \sum_{j \in J \setminus J_{ik}} z_j^2 + (z_i + z_k)^2 + (z_{n+i} + z_{n+k})^2 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

d) teljesen kvadratikusan optimalizálási feladat,

Egy ún. teljesen kvadratikusan optimalizálási feladat általános alakja [74]:

$$\min [x^T Q^0 x + (d^0)^T x]$$

feltéve, hogy

$$x^T Q^l x + (d^l)^T x + c^l \leq 0 \quad l = 1, \dots, p$$

$$x \in P,$$

ahol Q^l ($l = 0, \dots, p$) valós $(n+1) \times (n+1)$ -es mátrixok, d^l ($l = 0, \dots, p$) valós $(n+1)$ -dimenziós vektorok, c^l ($l = 1, \dots, p$) valós számok, p a feltételek száma és P egy poliéder. Az általános teljesen kvadratikusan optimalizálási probléma megoldása NP-nehéz feladat [37].

Az általunk vizsgált problémát egy speciális, teljesen kvadratikus optimalizálási feladatként az alábbi módon írtam fel, ahol a célfüggvény lineáris:

$$\begin{aligned}
 Q^0 &= \mathbf{0}, \quad x^T = (x_0, x_1, \dots, x_{2n}), \quad (d^0)^T = (-1, 0, \dots, 0), \\
 (d^l)^T &= \mathbf{0}, \quad c^l = 0, \quad p = \frac{n(n-1)}{2}, \quad P = [0, \sqrt{2}] \times [0, 1]^{2n}, \\
 [Q^l]_{ij} &= Q_{ij}^{l''} = \begin{cases} -1, & \text{ha } i = j = \begin{cases} 2l', \\ 2l'', \\ 2l' + 1, \\ 2l'' + 1, \end{cases} \\ 1, & \text{ha } i = j = \begin{cases} 1, \\ i = 2l'' + 1 \text{ és } j = 2l' + 1, \\ i = 2l'' \text{ és } j = 2l', \\ i = 2l' + 1 \text{ és } j = 2l'' + 1, \\ i = 2l' \text{ és } j = 2l'', \end{cases} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \\
 &1 \leq i, j \leq 2n + 1, \\
 &1 \leq l' < l'' \leq n.
 \end{aligned}$$

Ebben a modellben x_0 felel meg a pontok közötti minimális távolságnak. Az i . pont ($1 \leq i \leq n$) koordinátái (x_{2i-1}, x_{2i}) .

Az előbb felsorolt matematikai programozási feladatok nehéz tesztfeladatokat jelenthetnek valamely az előbb tárgyalt problémaosztály számára kidolgozott optimalizálási eljárásnak, vagy egyéb metaheurisztikáknak. Példaként megemlítjük, hogy az intervallum aritmetikát és egyéb kifinomult számítógépes technikákat használó GlobSol optimalizáló program már az 5 körre vonatkozó feladat esetén sem adott kielégítő megoldást [104].

Az eddigi kutatások azt mutatták, hogy azok a módszerek voltak hatékonyak a négyzetben való legsűrűbb körpakolási feladat egy-egy speciális esetének megoldására, vagy jó közelítő megoldás keresésére, amelyek nemcsak az optimalizálási modelljét alkalmazták a feladatnak, hanem erősen kihasználták a probléma geometriai jellegét és az azokból eredő matematikai következményeket. Így mielőtt tárgyalnám azt a sztochasztikus módszert, amellyel sikerült több esetben korábbi pakolásokat megjavítani, a következő fejezetben a probléma geometriai jellegéből adódó olyan tulajdonságait vizsgálom, amelyek az optimalizálási eljárások számára is hasznos információnak számítanak.

3. fejezet

Alsó és felső korlátok az optimumra, aszimptotika

Ebben a fejezetben alsó és felső korlátokat adok az optimális körpakolások köreinek $\bar{r}_n$ sugarára, ill. az optimális pontelhelyezések pontjai között szereplő távolságok minimumának $\bar{m}_n$ maximumára. A korlátok által indukált aszimptotika hibatagját is itt becsülöm.

3.1. Alsó korlát $\bar{m}_n$ -re

2. Tétel. Minden $n \geq 2$ egész számra és az $\bar{m}_n$ távolságértékre

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}} < \bar{m}_n.$$

BIZONYÍTÁS. Az **1. Tétel** és az 1. KÖVETKEZMÉNY alapján elég azt igazolni, hogy bármely $A'(1, \bar{\sigma}_n)$ társított pontelhelyezésre

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma}_n^2 < n.$$

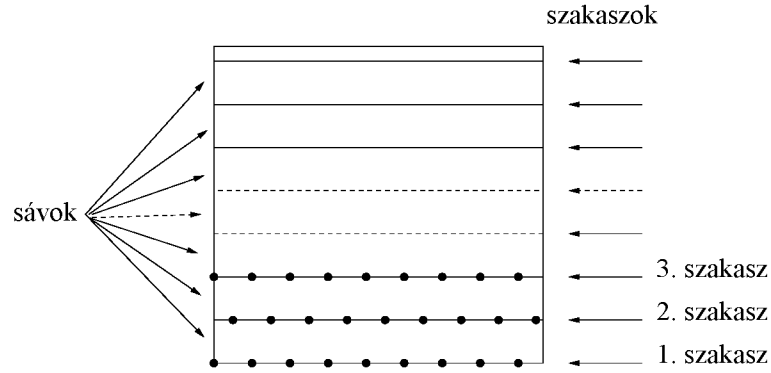
Ez azt jelenti, hogy ha igazolni tudjuk, hogy elhelyezhető legalább $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^2$ pont egy σ oldalú négyzetben, ahol a pontok közötti legkisebb távolság 1, akkor ebből következik a bizonyítandó állítás. Valóban, hiszen ekkor a megadott $A'(1, \sigma)$ társított pontelhelyezésből olyan $A(m, 1)$ pontelhelyezés származik, hogy mivel az 1. KÖVETKEZMÉNY alapján σ és m egymás reciprokai, így igaz az is, hogy

$$\frac{2}{\sqrt{3}m^2} = \frac{2}{\sqrt{3}\frac{1}{\sigma^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^2 < n.$$

Ebből viszont következik a bizonyítandó állítás, hiszen

$$\frac{2}{\sqrt{3}n} < m^2 \leq \bar{m}_n^2.$$

A kívánt társított pontelhelyezés létezését konstruktív módon igazoljuk.



10. ábra: A négyzet felosztása sávokra és szakaszokra.

Osszuk fel a négyzetet $\frac{\sqrt{3}}{2}$ szélességű sávokra a négyzet valamelyik rögzített oldalától kezdve (10. ábra). Ez a felosztás $\left\lfloor \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} \right\rfloor + 1$ darab egymással párhuzamos szakaszt határoz meg a négyzetben. Helyezzünk el az 1. szakaszon $\lfloor \sigma \rfloor + 1$ pontot úgy, hogy az első pontot tegyük a négyzet olyan sarkába, amelyik az 1. szakaszon van, majd 1 távolságközzel tegyünk le $\lfloor \sigma \rfloor$ pontot. A második szakaszon az első pontot nem a szakasz elejére, hanem $1/2$ egységgel beljebb tesszük, majd ennek megfelelően teszünk le $\lfloor \sigma - \frac{1}{2} \rfloor + 1$ pontot.

A fentiek analógiájára helyezzük el a többi szakaszokon is a pontokat; páratlan sorszámú szakaszra $\lfloor \sigma \rfloor + 1$ pontot, páros sorszámú szakaszra $\lfloor \sigma - \frac{1}{2} \rfloor + 1$ pontot teszünk. Ha $\left\lfloor \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} \right\rfloor + 1$ páros, akkor

$$\frac{\left\lfloor \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} \right\rfloor + 1}{2} \left(\lfloor \sigma \rfloor + \left\lfloor \sigma - \frac{1}{2} \right\rfloor + 2 \right)$$

darab pontot tudunk így letenni a négyzetbe. Ha páratlan, akkor

$$\frac{\left\lfloor \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} \right\rfloor}{2} \left(\left\lfloor \sigma - \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor \sigma \rfloor + 2 \right) + \lfloor \sigma \rfloor + 1$$

darab pontot.

Mindkét esetben könnyen adódik, hogy legalább $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^2$ pontot elhelyeztünk, hiszen $2\sigma < \left\lfloor \sigma - \frac{1}{2} \right\rfloor + \lfloor \sigma \rfloor + 2$, $\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma - 1 < \left\lfloor \frac{2\sigma}{\sqrt{3}} \right\rfloor$ és $\sigma - 1 < \lfloor \sigma \rfloor$, így

$$\frac{\frac{2\sigma}{\sqrt{3}} - 1 + 1}{2} 2\sigma < n \implies \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^2 < n \quad (\text{páros eset})$$

és

$$\frac{\frac{2\sigma}{\sqrt{3}} - 1}{2} 2\sigma + \sigma - 1 + 1 < n \implies \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^2 < n \quad (\text{páratlan eset}).$$

□

K. J. Nurmela és munkatársai a [68] dolgozatban 1999-ben közölték a

$$\sigma^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \sigma \leq \frac{\sqrt{3}}{2} n$$

egyenlőtlenséget, amely egy $A'(1, \sigma)$ társított pontelhelyezés pontjai számára adott alsó korlátot. Az egyenlőtlenséget $\frac{2}{\sqrt{3}}$ -mal szorozva

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sigma \leq n$$

adódik.

A **2. Tétel** bizonyításában szereplő ekvivalens alakban olyan egyenlőtlenséget igazoltam, amely az előbbi egyenlőtlenségből eltüntette az $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0$ negatív együtthatójú lineáris tagot, így jobb alsó korlátot eredményez a belőle nyerhető formula $\bar{m}_n$ -re is. Intuitívan is érezhető, hogy miért sikerült itt a javítás, hiszen a bizonyításban én hexagonális struktúrában helyeztem el a pontokat, míg K. J. Nurmela és munkatársai téglalaprácsra.

Ebben a szakaszban egy általános jellegű (minden $n \geq 2$ egész számra vonatkozó) alsó korlátot adtam meg $\bar{m}_n$ -re. Ezt az alsó korlátot bizonyos n értékekre tovább javítottam elméleti úton, speciális mintaosztályok felhasználásával. Ez utóbbi eredményeket az ismétlődő mintákkal foglalkozó 5. fejezetben tárgyalom.

3.2. Felső korlát $\bar{r}_n$ -re

Nehezebb feladat nem triviális általános felső korlátot megadni az $\bar{m}_n$ vagy $\bar{r}_n$ értékekre, mint jó alsó korlátot találni. A nehézség abból adódik, hogy amíg alsó korlátot lehet konstruktív módon meghatározni (t.i. megadok egy körpakolást), addig egy minden $n \geq 2$ -re vonatkozó felső korlát esetében ebben az értelemben nem tudunk semmit előre az optimális körpakolás struktúrájáról.

3. Tétel. Minden $n \geq 2$ egész számra és az $\bar{r}_n$ körsugárra

$$\bar{r}_n \leq \min \left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}n + (4\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 2)(2 - \sqrt{3})}}, \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n - 1)}}{2n + 2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n - 1)}} \right)$$

BIZONYÍTÁS. Igazolni fogjuk, hogy a 3. Tételbeli egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő azon formulák amelyeknek a minimumát vettük, egyenként felső korlátjai $\bar{r}_n$ -nek.

a) Tekintsük a $[0, 1]^2$ négyzetnek azt a partícionálását, amelyet egy rögzített $n \geq 2$ körszámra vonatkozó optimális körpakolás köreinek középpontjai által megadott Dirichlet cellák (Voronoi sokszögek) határoznak meg. Mivel minden cella belsejében a négyzet azon pontjai vannak, amelyek egy adott kör középpontjához közelebb vannak mint bármely más kör középpontjához, így minden kör középpontjához tartozó cellában benne van az adott kör is.

Az egységnyi oldalú négyzet területe 1. Az 1 nagyságú terület éppen az n darab cella területének az összege.

Osszuk a cellákat két csoportba aszerint, hogy van-e olyan oldaluk, amelynek van közös pontja a négyzet valamelyik oldalával vagy nincs.

1. eset: A cellának nincs közös pontja a négyzet semelyik oldalával.

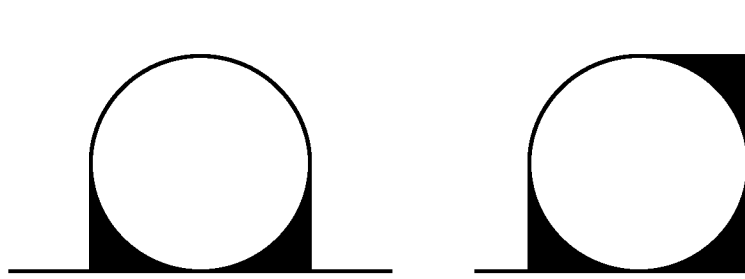
Ekkor a cella területére egy alsó korlátot jelent a cellabeli kör köré írt szabályos hatszög területe. Ehhez azt kell meggondolni, hogy egy kör köré írt k -oldalú konvex sokszögek területei között a szabályos k -oldalú sokszögnek lesz minimális a területe. Adott kör köré írt szabályos háromszög, négyzet, szabályos ötszög és hatszög közül a szabályos hatszögnek lesz minimális a területe. Van olyan eset amikor ezzel az alsó korláttal pontosan megegyezik a cella területe, méghozzá akkor, ha az adott kört pontosan hat kör érinti.

Egy $\bar{r}_n$ sugarú kör köré írt szabályos hatszög területe $2\sqrt{3}\bar{r}_n^2$.

2. eset: A cellának van közös pontja a négyzet valamelyik oldalával.

A cella területére ekkor is alsó korlátot jelent a köré írható szabályos hatszög területe, de ez az alsó korlát tovább javítható. Először azt kell meggondolnunk, hogy a körpakolás középpontjainak konvex burka benne lesz az $[\bar{r}_n, 1 - \bar{r}_n]^2$ négyzetben. A $[0, 1]^2$ -nek az $[\bar{r}_n, 1 - \bar{r}_n]^2$ négyzeten kívüli része akkor van a legsűrűbben kitöltve, ha pontosan $4\sqrt{n} - 4$ darab kört tudunk pakolni a négyzet oldalaihoz. Ekkor két kör és a négyzet oldala, valamint egy sarokban álló körnek és a négyzet két oldala közötti hézagok (11. ábra) területének összege alsó korlátja lesz egy optimális körpakolásnak a $[0, 1]^2$ -nek az $[\bar{r}_n, 1 - \bar{r}_n]^2$ kívüli részének nem a körök által fedett részére.

Egy hézag $(2 - \sqrt{3})\bar{r}_n^2$ további területtel növeli a szabályos hatszög által becsült alsó korlátot. A $4\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2$ darab hézagot összegezve a $(4\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)(2 - \sqrt{3})\bar{r}_n^2$ terület adódik.



11. ábra: Hézagok a négyzet oldalaival érintkező köröknél.

Az 1. és 2. esetnek megfelelő cellák területére adott alsó korlátok összege 1-nél nem lehet nagyobb, így:

$$\bar{r}_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}n + (4\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)(2 - \sqrt{3})}}.$$

b) Ismeretes *J. H. Folkman* és *R. L. Graham* [23] azon eredménye, hogy ha X a sík egy kompakt, konvex tartománya, akkor azon pontok száma, amelyek közötti minimális távolság legalább 1, legfeljebb

$$\frac{2}{\sqrt{3}}A(X) + \frac{1}{2}P(X) + 1,$$

ahol $A(X)$ az X területe, $P(X)$ pedig a kerülete. Ebből következőleg, ha tekintünk egy $A'(1, \bar{\sigma}_n)$ társított pontelhelyezést ($X = [0, \bar{\sigma}_n]^2$, $A(X) = \bar{\sigma}_n^2$, $P(X) = 4\bar{\sigma}_n$), akkor

$$n \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}_n^2 + 2\bar{\sigma}_n + 1.$$

Felhasználva az 1. KÖVETKEZMÉNYT ($\bar{\sigma}_n = \frac{1-2\bar{r}_n}{2\bar{r}_n}$), azt kapjuk, hogy

$$\bar{r}_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}}{2n + 2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}}.$$

□

Tarnai Tibor és *Gáspár Zsolt* bizonyos speciális esetekben a **3. Tétel**ben szereplő felső korlátot tovább javították [100].

A **3. Tétel**ben azért volt szükség a minimumképzésre, mert van olyan körszám, amire az egyik felső korlát adja a jobb eredményt, van olyan körszám amire a másik. Az első 224 esetet tekintve 133-szor ad az a) becslés jobb felső korlátot mint a b). A numerikus eredmények azt sejtetik, hogy ezt követően végig az a) becslés lesz a jobb.

3.3. Aszimptotika és annak hibája

Az 1. KÖVETKEZMÉNYBŐL $(\bar{m}_n = \frac{2\bar{r}_n}{1-2\bar{r}_n})$, továbbá a 2. és a 3. Tételből következik, hogy

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}} \leq \bar{m}_n \leq \frac{1}{n-1} + \sqrt{\frac{1}{(n-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}(n-1)}}.$$

Ezen egyenlőtlenségeket $\sqrt{n}$ -nel szorozva és n -et a végtelenbe tartatva

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \bar{m}_n = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

adódik, vagyis $\bar{m}_n$ aszimptotikusan $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}}$ -nel egyenlő [11].

1. ÁLLÍTÁS. Az $\bar{m}_n \approx \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}}$ aszimptotikus közelítés egy abszolút hibakorlátja

$$\frac{2}{n-1}.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítandó

$$\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}}{n-1} - \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}} < \frac{2}{n-1}$$

egyenlőtlenség ekvivalens a

$$\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)} - \sqrt{\frac{2(n-1)^2}{\sqrt{3}n}} < 1$$

egyenlőtlenséggel. A bal oldalon szereplő kivonandót mindkét oldalhoz hozzáadva és elvégezve a négyzetreemelést az alábbi egyenlőtlenség adódik:

$$1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1) < 1 + \frac{2(n-1)^2}{\sqrt{3}n} + 2\sqrt{\frac{2(n-1)^2}{\sqrt{3}n}}.$$

Mindkét oldalból 1-et kivonva és az egyenlőtlenséget $\frac{2}{\sqrt{3}(n-1)}$ -gyel osztva az

$$1 < \frac{n-1}{n} + \sqrt{\frac{6}{\sqrt{3}n}}$$

összefüggést kapjuk, amivel a nyilván teljesülő $\frac{\sqrt{3}}{6} < n$ egyenlőtlenség ekvivalens. $\square$

Az elméleti úton kapott alsó korlátok lényegesen javíthatók különböző számítógépes globális optimalizálási algoritmusok felhasználásával. A következő fejezetben ezekről a módszerekről lesz szó.

4. fejezet

Számítógépes eljárások az alsó korlát javítására

Természetesnek tűnik a gondolat, hogy javítsuk elméleti úton kapott eredményeinket számítógép segítségével. A probléma megoldására kidolgozott számítógépes algoritmusok arra ébresztik rá az embert, hogy a ma létező legjobb technikákkal is csak viszonylag kis körszámmra tudjuk a feladatot megoldani.

A probléma nehézségéből adódóan így az optimális megoldás meghatározása mellett egyre nagyobb szerepet kapnak azok az algoritmusok is, amelyekkel ugyan nem tudjuk igazolni egy körpakolás optimalitását, de lehetőséget adnak optimálisnak sejtett vagy optimálishoz közeli körpakolások megtalálására. Az alkalmazott módszerek között több olyan is van, amely valamilyen globális optimalizálási technikát használ fel. Ebben a fejezetben egy ilyen, a feladatra specializált algoritmusról lesz szó, amellyel több az irodalomban közölt eredményt sikerült megjavítanom.

4.1. Determinisztikus eljárások

A közelítő körpakolások eredményei nagy segítséget jelentenek azoknak a determinisztikus algoritmusoknak is, amelyekkel elvileg bármilyen körszámmra megbízhatóan meg lehetne oldani a problémát. A továbbiakban vázolom azt az eljárást, amellyel az első 30 körig tudtak eddig optimális pakolást megadni. A módszer rövid leírásával egyrészt demonstrálni kívánom a probléma megoldásának nehézségeit, másrészt rá szeretnék mutatni arra, hogy az elméleti vagy számítógépes úton a maximális sugárra kapott alsó korlátok fontos szerepet játszanak az eljárásban.

4.1.1. Egy eliminációs eljárás

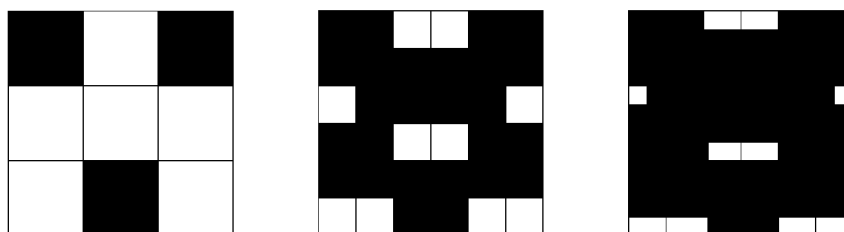
Az itt közölt eljárás alapgondolatát *R. Peikert* és munkatársai javasolták először, és 20 körig adták meg az optimális pakolásokat. *K. J. Nurmela* és *P. R. J. Östergård* módosítva a módszert, 27 körig oldották meg a feladatot. *Markót Mihály Csaba* tovább javítva az eljárást, 30 körig közölte ($n = 29, 30$ -ra *Csendes Tiborral*) az optimális körpakolásokat.

Az eljárás vázlata:

1. lépés: Találjunk egy minél jobb $m_n \leq \overline{m}_n$ alsó korlátot.
2. lépés: Csempézzük ki a négyzetet úgy, hogy az egyes zárt csempék átmérője kisebb legyen, mint m_n ; így biztosítani tudjuk, hogy egy csempében az optimális megoldásnak csak egy pontja lehet. Ha c számú csempénk van, az $\binom{c}{n}$ különböző csempekombinációt határoz meg n pont elhelyezésére. Minden csempekombináción elindítunk egy eliminációs eljárást, aminek segítségével kiszűrhetjük azokat a kombinációkat, amelyek biztosan nem optimális pontelhelyezésekhez tartoznak.

Az eliminációs eljárás

Rendre rögzítve a kombináció egy-egy csempéjét a többi csempéből hagyjuk el azokat a pontokat, amelyeknek a rögzített csempe pontjaitól való maximális távolsága kisebb, mint m_n . Ha egy csempe valamennyi pontját töröltük, akkor magát a kombinációt is elhagyhatjuk. Ellenkező esetben osszuk fel a csempéket kisebbekre és ismételjük meg az eliminációt. Így az egyes csempékben egyre kisebb lesz az ún. aktív pontok halmazának területe, vagyis azoké a pontoké amelyek még szóbajöhetnek, mint az optimális megoldás pontjai. A 12. ábrán példát láthatunk egy kombináció aktív pontjai halmazának csökkenésére az $n = 6$ esetben.



12. ábra: Példa az aktív pontok halmazának csökkenésére az $n = 6$ esetben.

3. lépés: A megmaradt aktív pontok ismeretében sejtjük meg az optimális pontelhelyezés struktúráját, és igazoljuk annak létezését, ha az valóban létezik.
4. lépés: Tekintsünk az optimálisnak sejtett pontelhelyezés pontjai körül egy adott oldalhosszúságú hibanégyzetet, amelynek középpontja legyen a pontelhelyezés egy pontja és a pont körüli aktív pontok legyenek benne a hibanégyzetben. Ha a pont a négyzet oldalán vagy a sarokban van, használjunk téglalapot, illetve fele olyan oldalhosszúságú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy az adott hibanégyzetekben az adott pontelhelyezés az egyetlen, amelyre a

pontok közötti minimális távolság nagyobb vagy egyenlő mint $\bar{m}_n$. A bizonyítást az eliminációs eljárás használatával tehetjük meg, ha minden hibahéyzet egyszerre redukálható olyan kisebb oldalhosszúságú héyzetre, hogy annak minden pontja aktív pont legyen.

Az eljárás hatékonysága

Annak az esélye, hogy a fenti eljárással valóban megtaláljuk az optimális pontelhelyezéseket és igazolni is tudjuk az optimalitást, sok mindentől függ. A 2. lépés csak akkor eredményes, ha az 1. lépésben valóban egy jó, az optimálishoz közeli m_n alsó korlátot adunk meg. A 3. lépésben akkor tudjuk igazolni a struktúra létezését, ha azt helyesen sejtjük meg a numerikus eredmények alapján. A 4. lépést akkor tudjuk hatékonyan végrehajtani, ha a 2. lépésben elég szűk intervallumokat sikerül megadnunk a pontok koordinátáira. Javítást jelentett az eljárás *K. J. Nurmela* és *P. R. J. Östergård*-nak [67] olyan finomítása, amely az aktív pontok halmazát sokszögek formájában tárolta.

A fő problémát azonban a csempekombinációk nagy száma jelenti. A szimmetrikus esetek miatt a kombinációk számát ugyan redukálni lehet, de már 23 körre is több mint 288 millió csempekombinációt kellene így átvizsgálni. A szimmetrikus esetek alapján kihagyott kombinációk számát a Burnside lemma segítségével határozhatjuk meg. A kezdő kombinációk k száma ugyan nem monoton módon, de alapjában, hosszú távon, a lényegét illetően exponenciális gyorsasággal növekszik (3. Táblázat). Ez mutatja a feladatnak ezzel a technikával való megoldásának az igazi nehézségét.

n	c	k	n	c	k
6	3×3	16	17	5×5	136 080
7	3×3	8	18	5×5	60 645
8	3×3	3	19	5×5	22 475
9	3×3	1	20	5×5	6 814
10	4×4	1 051	21	5×6	3 578 729
11	4×4	567	22	5×6	1 465 113
12	4×4	252	23	6×6	288 873 270
13	4×4	77	24	6×6	156 484 440
14	4×5	9 808	25	6×6	75 112 674
15	4×5	3 912	26	6×6	31 784 172
16	4×5	1 253	27	6×6	11 772 390

3. Táblázat. A szükséges csempekombinációk száma az $n = 6 - 27$ esetekben.

Az $n = 28, 29$ és 30 -as esetben, 6×7 csempe mellett, milliárdos nagyságrendű a redukált kombinációs szám is. A *Markót Mihály Csaba* [53] által megadott algoritmus azonban nem vizsgálja végig az összes kombinációt. Ha egy kombinációban

bizonyos részkombinációk úgy fordulnak elő, hogy olyan biztos nem lehet az optimális pontelhelyezésben, akkor azokat a kombinációkat elhagyja. Így tovább lehetett csökkenteni a részletesen átvizsgálandó kombinációk számát.

A továbbiakban az eljárás első lépéséhez szükséges jó alsó korlát számítógéppel való keresésével foglalkozunk.

4.2. Sztochasztikus kereső módszerek

Az optimális körpakolásokat megtalálni és optimalitásukat igazolni nehéz feladat. Természetesnek adódik tehát, hogy minél jobb alsó korlátot határozzunk meg az optimum értékére is, adjunk minél jobb körpakolásokat. Az ilyen jellegű eredmények elérése történhet sztochasztikus algoritmusok segítségével is.

Az energiafüggvény minimalizálása

A $\mathfrak{P}_2^n$ probléma matematikai programozási feladatként való felírásában, mivel

$$\min_{1 \leq i < j \leq n} \|p_i - p_j\| = \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \|p_i - p_j\|^k \right)^{\frac{1}{k}},$$

ezért a feladat célfüggvénye a következő alakra hozható:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{\|p_i - p_j\|^k}.$$

K. J. Nurmela és P. R. J. Östergård [66] lényegében ennek az ún. energiafüggvénynek rögzített nagy k -ra való minimalizálásával határoztak meg körpakolásokat az első 50 esetre a Goldstein-Armijo lineáris kereső és a Newton-módszer egy kombinációjának felhasználásával.

Perturbációs algoritmus

D. W. Boll és szerzőtársai [5] az alábbi sztochasztikus algoritmus segítségével adtak javított értékeket az $n = 32, 37, 48$ és 50 esetekre. Eljárásukat (megfelelő módosításokkal) általánosan is lehet használni az n dimenziós euklideszi tér egy korlátos tartományában való legsűrűbb (hiper)gömbpakolás problémájára.

1. lépés. Tekintsünk egy véletlen pontelhelyezést az egységnyezetben.
2. lépés. Defináljuk az s kezdő lépéshosszt, $s = 0.25$.
3. lépés. Minden pontra
 - a) perturbáljuk a pont helyét az s hosszal észak, dél, kelet és nyugat irányokban,
 - b) ha a mozgítás során a távolsága nőtt a pontnak a hozzá legközelebbi szomszédjától, akkor tartsuk meg az új helyet.

4. lépés. Ismételjük a 3. lépést mindaddig amíg van olyan pont amelyet lehet mozgatni.

5. lépés. Legyen $s := s/1.5$. Ha $s > 10^{-10}$ folytassuk az eljárást a 3. lépéssel.

A fenti egyszerű algoritmussal néhány millió iteráció után jó körpakolásokat lehet megadni.

4.2.1. A TAMSASS-PECS sztochasztikus algoritmus

A körpakolási probléma tekinthető úgy, mint egy $2n$ dimenziós folytonos globális optimalizálási feladat. Több különböző optimalizálási módszer (pl. nemlineáris szimplex módszer, genetikus algoritmus) alkalmazása után egy speciális sztochasztikus algoritmus kidolgozása volt célravezető.

A sztochasztikus globális optimalizáló algoritmusoknak egy széles osztályát alkotják az ún. kétfázisú direkt kereső eljárások. Ezek az algoritmusok egy lokális keresőből és egy olyan keretprogramból állnak, amelyek azt próbálják meg biztosítani, hogy az algoritmus ne akadjon el egy lokális optimumban, hanem legyen esélye arra, hogy a globálisat találja meg.

A kifejlesztett TAMSASS-PECS algoritmus egy ilyen kétfázisú sztochasztikus globális optimalizálási algoritmus, amely a körpakolási problémára lett specializálva. A módszerben a Threshold Accepting (TA) technikát — mint keretrendszert — a Single Agent Stochastics Search (SASS) lokális kereső egy alkalmasan módosított változatával kombináltuk.

A Threshold Accepting globális optimalizálási eljárás

A Threshold Accepting algoritmus [16] nagyon hasonló a Simulated Annealing (SA, szimulált hűtés) technikához. Az eljárás elfogad minden olyan új lehetséges megoldást is, amely nem sokkal rosszabb, mint a legjobb addig ismert.

```

1  Válasszunk egy kezdő  $s$  megoldást
2  while megállási feltétel nem teljesül do
3      while a belső ciklus feltétel nem teljesül do
4          Válasszunk egy  $s' \in N(s)$ 
5           $\Delta = f(s) - f(s')$ 
6          if  $\Delta \leq T_h$ 
7               $s = s'$ 
8      Csökkentsük a  $T_h$  küszöbértéket
9  return a legjobb talált megoldást
```

1. Algoritmus. A Threshold Accepting globális optimalizálási technika.

A módszer lényegét az adja, hogy nem feltétlenül monoton módon javítva jut el a végső megoldásig, hanem megenged nem túl rossz lépést is annak reményében, hogy onnan majd egy az optimalizálás szempontjából sokkal jobb helyre tud eljutni.

Az 1. Algoritmus alapján nyomon követhetjük az eljárást, ahol az $f:S \rightarrow \mathbb{R}$ célfüggvényt akarjuk minimalizálni az $S \subset \mathbb{R}^n$ halmazon. Egy s kezdő megoldást választva, indítunk egy ciklust, amelyben ha új helyet találunk, fokozatosan csökkentjük az elfogadást szabályozó $T_h > 0$ küszöbértéket (hasonlóan a szimulált hűtés hőmérséklet paraméteréhez), amíg az nem lesz kisebb egy előre megadott értéknél. A belső ciklusban az új s' pontot a korábbi s pont egy meghatározott $N(s)$ környezetéből választjuk ki. Az eljárás konvergenciáját I. Althöfer és K. U. Koschnick [2] vizsgálta.

Az SASS lokális kereső eljárás

Az SASS egy hagyományos lokális kereső algoritmus (2. Algoritmus) [41, 55, 56, 75, 82]. Az eljárás a keresési tartomány egy s_0 pontjából indul el és egy olyan $\{s_n\}$ pontsorozatot generál, amelyen az $\{f(s_n)\}$ sorozat monoton csökkenő lesz. Az eljárás addig tart, amíg az iterációk száma nem halad meg egy $NIter$ értéket.

A módszer minden iterációs lépésben generál egy ξ_k valószínűségi vektort $N(b_k, \sigma_k)$ normális eloszlással. Az aktuális s_k ponthoz hozzáadja ξ_k -t, így választ egy új s' pontot a keresési tartományból. Ha s' -ben kisebb a függvény értéke mint s_k -ban volt, akkor elfogadja javításnak ezt a pontot ($s_{k+1} = s'$), különben az s_k és s' által meghatározott egyenesen az s' -nek az s_k -ra vonatkozó tükörképét választja új s' -nek. Ha ebben az új s' pozícióban csökken a függvény értéke, akkor elfogadja javításnak ezt a pontot, különben marad az előbbi s_k pontban. Az egyes eseteknek megfelelően módosulnak a ξ_k generálási b_k, σ_k paraméterei.

```

1  proc SASS ( $s_0, ex, ct, Scnt, Fcnt, \sigma_{sup}, \sigma_{inf}, NIter$ )
2    var  $b_0 := 0; k := 1; scnt := 0; fcnt := 0; \sigma_0 := 1;$ 
3    while  $k < NIter$  do
4       $\sigma_k := \begin{cases} ex \cdot \sigma_{k-1} & \text{ha } scnt > Scnt \\ ct \cdot \sigma_{k-1} & \text{ha } fcnt > Fcnt \\ \sigma_{sup} & \text{ha } \sigma_{k-1} < \sigma_{inf} \\ \sigma_{k-1} & \text{különben} \end{cases}$ 
5      Generáljunk egy  $\xi_k$  valószínűségi vektort  $N(b_k, \sigma_k)$  eloszlással;
6      if  $f(s' = s_k + \xi_k) < f(s_k)$ 
7        then
8           $s_{k+1} := s';$ 
9           $b_{k+1} := 0.2b_k + 0.4\xi_k;$ 
10          $scnt := scnt + 1;$ 
11          $fcnt := 0;$ 
12       else
13         if  $f(s' = s_k - \xi_k) < f(s_k)$ 
```

```

14      then
15           $s_{k+1} := s'$ ;
16           $b_{k+1} := b_k - 0.4\xi_k$ ;
17           $scnt := scnt + 1$ ;
18           $fcnt := 0$ ;
19      else
20           $s_{k+1} := s_k$ ;
21           $b_{k+1} := 0.5b_k$ ;
22           $fcnt := fcnt + 1$ ;
23           $scnt := 0$ ;
24       $k := k + 1$ ;
25  od
26  end

```

2. Algoritmus. Az SASS lokális kereső eljárás.

Az eljárás során jegyezzük azt is, hogy hány esetben volt sikeres ($scnt = scnt + 1$) és hány esetben sikertelen a javítási kísérlet ($fcnt = fcnt + 1$). Ha a sikeres, illetve sikertelen esetek száma meghalad egy-egy ($Scnt$, $Fcnt$) kritikus értéket, annak megfelelően változtatjuk a szórás értékét (arányosan csökkentjük ex -szel, illetve növeljük ct -vel), befolyásolva ezzel a lokális keresési tartomány nagyságát.

Az MSASS szubrutin

A körpakolási feladat, mint maximalizálási feladat jó alsó korlátjának keresésére kidolgozott TAMSASS-PECS eljárás lokális keresőként a SASS eljárásnak egy módosított változatát, a Modified SASS (MSASS) szubrutint használja (3. Algoritmus).

```

1  proc  $MSASS(s, \sigma_0, T_h, i)$ 
2      var  $scnt := 0; fcnt := 0; Fcnt := 3; ct := 0.5; \sigma := \sigma_0$ ;
3      while  $fcnt < 4 \cdot Fcnt$  and  $scnt = 0$  do
4           $\sigma := \begin{cases} ct \cdot \sigma & \text{ha } fcnt > Fcnt \\ \sigma & \text{különben} \end{cases}$ 
5          Generáljunk egy  $\xi$  valószínűségi változót  $N(0, \sigma)$  eloszlással;
6           $s'(i) := s(i) + \xi$ ;
7          if  $f(s) - f(s') \leq f(s)T_h$ 
8              then
9                   $s(i) := s'(i)$ ;
10                  $scnt := scnt + 1$ ;
11             else
12                  $s'(i) := s(i) - \xi$ ;
13                 if  $f(s) - f(s') \leq f(s)T_h$ 
14                     then
15                          $s(i) := s'(i)$ ;
16                          $scnt := scnt + 1$ ;
17                 else

```

```

18                                      $fcnt := fcnt + 1;$ 
19      od
20  end

```

3. Algoritmus. Az MSASS szubrutin.

Az MSASS eljárás bemenő paraméterei: egy kezdő s lehetséges megoldás (ami egy pontelhelyezés pontjaiból álló vektor), σ_0 a szórás kezdőértéke, T_h kezdő küszöbérték és i a pontelhelyezés azon pontjának a sorszáma, amelynek a helyzetét próbálja az eljárás egy lépésen belül megváltoztatni.

Fontos módosítás, hogy a 7. illetve 13. sorokban nem egyszerűen az $f(s) < f(s')$ feltétel szerepel, hanem akkor is elfogadjuk a módosítást, ha $f(s) \leq f(s') + f(s)T_h$. Az MSASS szubrutinban szereplő ciklus addig hajtódik végre, amíg vagy sikerült javított pozíciót találni az i . pontra vagy a sikertelen próbálkozások száma 11-nél több lesz.

A TAMSASS-PECS eljárás

```

1  Válasszunk egy  $s$  kezdő megoldást
2  Válasszunk egy  $T_h$  kezdőértéket
3  Válasszunk egy  $\sigma$  kezdő szórás értéket
4  while  $\sigma > \sigma_{final}$  do
5      while minden pont nem lett látogatva do
6           $s = MSASS(s, \sigma, T_h, NextCenter(s))$ 
7      Csökkentsük a  $T_h$  értéket
8      Csökkentsük a  $\sigma$  standard szórás értéket
9  return a legjobb talált megoldás

```

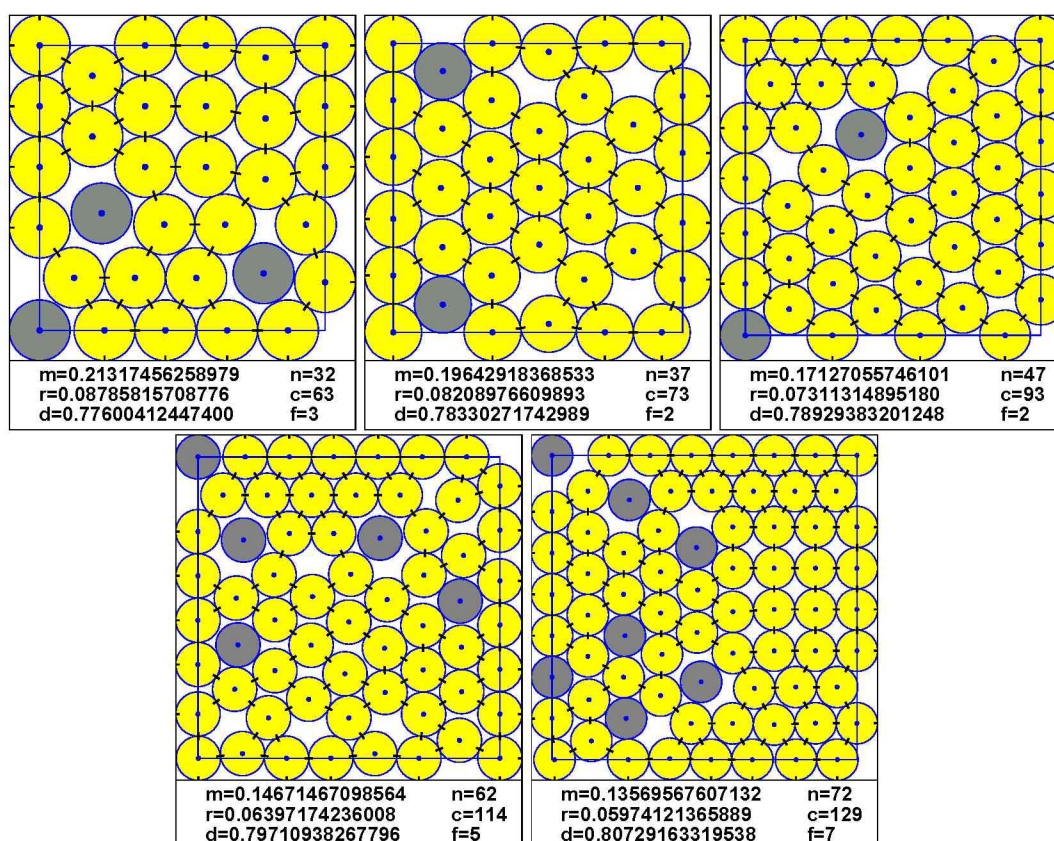
4. Algoritmus. A TAMSASS-PECS algoritmus.

A TAMSASS-PECS algoritmus (4. Algoritmus) egy pszeudovéletlen lehetséges megoldásból indul, amit a következő módon állítunk elő: osszuk fel a négyzetet $\lceil \sqrt{n} \rceil \times \lceil \sqrt{n} \rceil$ négyzet alakú csempére. Az első pontot véletlenszerűen helyezzük el az első vagy a második csempe közepébe. További pontokat helyezzünk el minden második csempe középpontjába, majd a maradék pontokat véletlenszerűen tesszük le a maradék szabad csempékbe (minden csempébe 1 pontot). A T_h kezdő küszöbérték 0.02, a σ kezdő szórás érték a csempék átmérőjével azonos.

A TAMSASS-PECS algoritmus a kezdő pontelhelyezést egy iterációs eljárás keretében próbálja meg javítani. Minden iterációs lépésben meghívásra kerül az MSASS szubrutin, minden pontra azonos σ szórás és T_h küszöbértékkel. Miután minden pontra lefutott az MSASS eljárás, a σ szórás és T_h küszöbérték egyaránt 1%-kal csökken. A TAMSASS-PECS eljárás addig tart, amíg egy σ_{final} érték alá nem kerül a σ szórás.

Eredmények

A TAMSASS-PECS algoritmussal az első 100 esetre közöltünk alsó korlátokat az optimális pakolások $\bar{m}_n$ értékére [9]. Az eredmények elérhetők az Interneten is a <http://www.inf.u-szeged.hu/~pszabo/Pack.html> címen. Az ezen az Internetes oldalon található eredményeinket hivatkozta többek között E. W. Weisstein (2003), *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* [106] munkája is a 431. oldalon.



13. ábra: A TAMSASS-PECS algoritmussal javított körpakolások ábrái az $n = 32, 37, 47, 62$ és 72 körszámokra.

Az $n = 32, 37, 47, 62$ és 72 körszámokra (13. ábra) sikerült megjavítanunk az irodalomban talált addigi legjobb értékeket (4. Táblázat). Az 1999-ig publikált 59 körpakolásból 20 esetben találtuk meg pontosan a közölt eredményeket. A numerikus számításokat 14 jegy pontossággal számoltuk, így gyakori volt, hogy csak néhány tizedes jegyben volt eltérésünk az irodalomban megadott adattól. 40 esetben közöltünk addig nem publikált új körpakolásokat.

n	m_n (TAMSASS-PECS)	m_n (korábbi)	hivatkozás
32	0.21317456258979	0.21308235294443	[29]
37	0.19642918368533	0.19623810145141	[29]
47	0.17127055746101	0.17126830721141	[29]
62	0.14671467098564	0.14569394327531	[29]
72	0.13569567607132	0.13549029317569	[29]

4. Táblázat. Javított alsó korlátok a TAMSASS-PECS algoritmussal.

Egyidőben spanyol szerzőtársaimmal, *L. G. Casadoval*, *I. Garcíával*, valamint *Csendes Tiborral* való kutatásainkkal egy olasz-német szerzőpáros, *M. Locatelli* és *U. Raber* is rábukkantak a 32 és 37 körökre vonatkozó javításokra. A sors egy érdekes momentumaként, éppen egymás után tartottunk eredményeinkről előadást egy firenzei konferencián [94]. Ugyanekkor *D. Boll*, *J. Donovan*, *R. L. Graham* és *B. D. Lubachevsky* is publikálták az $n = 32$ és 37 körre vonatkozó javításait [5].

4.2.2. Biliárd-szimuláció

A biliárd-szimuláció néven ismertté vált körpakolási stratégiát *R. L. Graham* és *B. D. Lubachevsky* használta először alsó korlát keresésére körpakolási feladatokban.

Hasonló elven alapuló eljárást dolgozott ki *E. Specht* magdeburgi fizikus is. Sok jó körpakolást sikerült módszerével találnia. Az eljárás forráskódját közzétette az Interneten is, a folyamatosan frissülő eredményekkel együtt az alábbi web-oldalon: <http://www.packomania.com>.

Egy közösen elindított munkakapcsolat eredményeként a [97] dolgozatunkban $n = 200$ körig közlünk alsó korlátokat. A cikkekre íjf. *Böröczky Károly* a *Cambridge University Press*nél 2004-ben megjelent *Finite packing and covering* című monográfiájában [8] a 130. oldalon, mint az aktuális rekordokat közlő dolgozatra hivatkozik.

A jelen disszertáció függelékében az első 50 körszámra találhatók meg a bizonyítottan optimális, illetve a ma ismert legjobb közelítő körpakolások ábrái és a hozzájuk tartozó numerikus adatok. Az eddigi tapasztalataim alapján nagyon meglepőnek tartanám, ha valaki javítani tudná ezek közül bármelyik eredményt is.

4.3. A numerikus eredmények ellenőrzése számítógéppel

Az előbbi módon számítógéppel meghatározott körpakolások, pontelhelyezések numerikus értékei matematikai szempontból csak akkor válnak valóban eredményekké, ha azok létezését igazoljuk. Jól ismert jelenség, hogy a számítógéppel való számítások során a kerekítésekből adódó hibák tetszőlegesen nagy eltérést okozhatnak a valódi és a kiszámolt érték között [13, 14].

Ahhoz, hogy a számítógéppel talált pontelhelyezések m_n értékeit matematikai szempontból tényleg alsó korlátnak fogadhassuk el, be kell bizonyítani, hogy azok valóban alsó korlátok vagy módosítani kell az eredményt úgy, hogy bizonyíthatóan alsó korláttá váljanak. Ezeket a vizsgálatokat azonban ismét számítógéppel végezhethetjük el, hiszen vannak olyan módszerek, amelyekkel garantált megbízhatóságú numerikus eredményeket produkálhatunk számítógéppel is. Egy ilyen módszert lehet az intervallum matematikára építeni.

4.3.1. A numerikus eredmények ellenőrzése intervallum aritmetikai számításokkal

Az intervallum matematikát szokás csak egyszerűen intervallum aritmetika néven is emlegetni, mivel az alapötlete a hagyományos valós aritmetikának az intervallumokra való kiterjesztése. Célszerűbb azonban az előbbi elnevezést használni, mivel az aritmetikai kiterjesztésen egy messze túlmutató módszertanról van itt szó [12, 15], még akkor is, ha ez a disszertáció csak a témakör alapjait használja fel.

Az intervallum matematikában egy x valós szám helyett olyan $X = [\underline{X}, \overline{X}]$ kompakt valós intervallummal számolunk, ahol $x \in X$. A szokásos négy alapműveletet a következő módon terjeszthetjük ki intervallumokra:

$$\begin{aligned} X + Y &= [\underline{X} + \underline{Y}, \overline{X} + \overline{Y}], \\ X - Y &= [\underline{X} - \overline{Y}, \overline{X} - \underline{Y}], \\ X \times Y &= [\min\{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}\}, \max\{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\overline{Y}, \overline{X}\underline{Y}, \overline{X}\overline{Y}\}], \\ X/Y &= [\underline{X}, \overline{X}] \times \left[\frac{1}{\overline{Y}}, \frac{1}{\underline{Y}} \right], \text{ ha } 0 \notin Y. \end{aligned}$$

Az intervallum aritmetika számítógépes implementációjának a leglényegesebb momentum a kifelé való kerekítés technikája. Ez azt jelenti, hogy gépi szinten az intervallumos műveletek elvégzésekor az eredmény intervallum alsó/felső határa az operandus intervallumok alsó/felső határaiból kiszámított értéknek garantáltan az alsó/felső korlátját tekintjük. Ennek konkrét számítógépes megvalósításával a programozóknak már nem kell foglalkozniuk, mivel számos intervallum aritmetikát támogató programozási nyelv létezik: pl. PASCAL-SC, PASCAL-XSC, C-XSC, FORTRAN-XSC, ACRITH, ARITHMOS, stb.

A pontelhelyezési feladatra adott alsó korlátokat a PROFIL/BIAS C++ osztály könyvtár [43] használatával tettem garantált megbízhatóságúvá az alábbi módon:

1. A pontelhelyezés minden (x_i, y_i) ($1 \leq i \leq n$) koordinátájú pontját befoglal-tam egy $([x_i - 10^{-20}, x_i + 10^{-20}], [y_i - 10^{-20}, y_i + 10^{-20}])$ intervallumnégyszetbe (más szóhasználatban intervallumos boxba). Ha valamelyik intervallumos négyszet az

eredeti egységnégyzeten kívülre került (pl. negatív lett az alsó határa az intervallumnak, vagy 1-nél nagyobb lett a felső határa), akkor úgy csonkoltam azokat, hogy az intervallum-négyzetnek ne legyen az egységnégyzeten kívül pontja.

2. Intervallum aritmetikai számításokkal újra kiszámoltam az összes két pont közötti távolságokat (immár megbízható módon) és vettem a kapott intervallumok alsó határának minimumát, és ez lett a pontelhelyezéshez tartozó új m_n alsó korlát.

A fenti számításokkal azt értük el, hogy matematikai szigorúsággal is igazoltuk a számítógépes numerikus számítási eredményeinket. Ezzel még a megoldásnak azonban nincs vége; hiszen geometriai szempontból nézve a kérdést egy körpakolás struktúráját az előbbi numerikus számításokkal még nem tudjuk megadni. Nem tudjuk megállapítani ilyen módon azt, hogy két kör érintkezik-e egymással vagy, hogy egy kör érintkezik-e a négyzet valamelyik oldalával vagy sem. A numerikus eredmények csak egy sejtést adhatnak erre vonatkozólag. Azt, hogy egy körpakolás matematikai értelemben valóban létezik, azt be kell bizonyítani!

4.4. A körpakolások struktúrájának egzisztenciája

Először is azt kell tisztázni, hogy mit értünk azon, hogy adott egy körpakolás az egységnégyzetben. A koordináták pontos értékeit csak ritkán ismerjük, így a koordinátákra adott (esetleg nagyon pontos) közelítések geometriai szempontból még nem feltétlenül teszik egyértelművé az adott körpakolás létezését. Szemléletesen fogalmazva azt is mondhatom, hogy egy körpakolás akkor adott, ha le tudom rajzolni azt, azzal együtt, hogy pontosan megmondom, hogy hol érintkezik az ábrán két kör, illetve, hogy hol érinti valamelyik kör az egységnégyzet egyik oldalát. Ekkor azonban abba a csapdába esnék, hogy rajzolhatnék olyan ábrát is, amelyet első látásra az ember elfogadna mint köröknek egy körpakolását a négyzetben, holott valójában a pakolás nem is létezne matematikai értelemben.

Egy körpakolás létezésének bizonyítása

Az egyszerűbb formalizmus kedvéért a továbbiakban a $\mathfrak{P}_2^n$ probléma fogalmain keresztül végzem a tárgyalást.

6. DEFINÍCIÓ. Egy $A(m_n, 1)$ pontelhelyezés *struktúráján* (vagy *gráffján*) egy olyan n -pontú gráfot értünk, ahol az i . és a j . pont között akkor van él, ha $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = m_n^2$ és minden pont címkézve van az 1, 2, 3, 4 és 5 számokkal az alábbi módon: Az i . pont címkéje (ill. ha a sarokban van, akkor a pont címkéi):

- 1, ha $x_i = 0$ és $0 \leq y_i \leq 1$,
- 2, ha $x_i = 1$ és $0 \leq y_i \leq 1$,
- 3, ha $y_i = 0$ és $0 \leq x_i \leq 1$,
- 4, ha $y_i = 1$ és $0 \leq x_i \leq 1$,
- 5, különben.

Minden $A(m_n, 1)$ pontelhelyezés struktúrája egyértelműen meghatároz egy egyenletrendszert, amelynek egyenletei a gráf élei által meghatározott $(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 = m_n^2$ alakú kvadratikus egyenletek, ill. az 5-től különböző címkéjű pontok 0 vagy 1 értékű koordinátáira felírt x_i v. $y_i = 0$ v. 1 alakú egyenletek. Ha egy ilyen egyenletrendszernek létezik valós megoldása a $[0, 1]^{2n} \times (0, \sqrt{2}]$ -ben, akkor létezik körpakolás az adott struktúrával.

Az előbbi kvadratikus egyenletrendszer megoldásának létezését igazolhatjuk garantált megbízhatóságú numerikus (pl. intervallumos Newton-módszerrel) vagy esetleg szimbolikus algebrai számításokkal. Természetesen mindkét esetben a számításokat azok nagy műveletvégzése, illetve bonyolultsága miatt számítógéppel végezzük.

Mivel a későbbiekben az algebrai jellegű vizsgálatokat fogom további eredményekkel bővíteni, így itt a körpakolások struktúrájának egzisztencia problémáját is algebrai szempontból, a Gröbner bázisok elméletének felhasználásával tárgyalom.

4.4.1. A Gröbner bázisok elméletének alkalmazása

A továbbiakban egy rövid áttekintést adok a Gröbner bázisok elméletének azon alapfogalmairól, amelyeket a későbbiekben használok [10].

7. DEFINÍCIÓ. Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változóknak x^α egy *monomja*, ha felírható $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ alakban, ahol $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ és $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. A monom *fokszámán* az $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ értéket értjük. Ha $\alpha = (0, \dots, 0)$, akkor $x^\alpha = 1$.

8. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathbb{K}$ test feletti többváltozós p *polinom* az x^α monomoknak egy $\mathbb{K}$ -beli együtthatókkal képzett véges lineáris kombinációját értjük. A polinom *fokszáma* a maximális fokszámú nem 0 együtthatójú monom fokszáma.

9. DEFINÍCIÓ. Egy $\mathbb{K}$ feletti *polinomgyűrű*n (jelölésben $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$) az összes $x_1, x_2, \dots, x_n$ változós $\mathbb{K}$ feletti polinomok halmazát értjük a természetes módon bevezetett összeadás és szorzás műveleteivel.

A 9. DEFINÍCIÓban az elnevezés jogos, mivel igazolható, hogy $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ egy egységelemes, kommutatív gyűrű.

10. DEFINÍCIÓ. A $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ kommutatív gyűrű egy nemüres I részhalmazát *ideálnak* nevezzük, ha az szívó tulajdonságú részgyűrű, vagyis $\forall a, b \in I \Rightarrow a + (-b) \in I$ és $\forall r \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n], a \in I \Rightarrow r \cdot a \in I, a \cdot r \in I$.

11. DEFINÍCIÓ. Legyen $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ egy többváltozós polinomrendszer.

Ekkor a

$$(P) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i p_i : a_i \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n] \right\}$$

halmaz nyilván $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ egy ideálja lesz, amit P által generált ideálnak mondunk. A P halmazt ekkor az ideál bázisának nevezzük, s mivel véges, ezért az ideált *végesen generáltnak* mondjuk.

Hilbert bázistétele alapján tudjuk, hogy a $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomgyűrű minden ideálja végesen generált, és az a 11. DEFINÍCIÓBAN megadott módon előállítható.

Vegyük észre, hogy az x^α monomok és az $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ rendezett n -esek között bijektív megfeleltetés van. Ez azt jelenti, hogy ha tudunk definiálni egy $\preceq$ rendezést az $\mathbb{N}^n$ elemein, akkor az egy rendezést indukál a monomokon is:

$$\alpha \preceq \beta \Leftrightarrow x^\alpha \preceq x^\beta.$$

12. DEFINÍCIÓ. A monomokon definiált $\preceq$ rendezést *megengedettnak* mondjuk, ha az ekvivalens $\mathbb{N}^n$ -beli rendezés kielégíti az alábbi feltételeket:

- a) $\preceq$ lineáris rendezés,
- b) ha $\alpha \preceq \beta$ és $\gamma \in \mathbb{N}^n$, akkor $\alpha + \gamma \preceq \beta + \gamma$,
- c) $\preceq$ jól rendezés $\mathbb{N}^n$ -ben.

Egy polinomnak a $\preceq$ rendezésre vonatkozó *főtagján*, a polinom maximális fokszámú együttthatójával együtt vett monomját értjük.

Többféle megengedett rendezést lehet definiálni a monomokon, egyik gyakran használt közülük a $\preceq_L$ lexikografikus rendezés:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \preceq x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} = x^\beta$$

pontosan akkor, ha $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vagy létezik olyan i pozitív egész szám, hogy $\alpha_j = \beta_j$ ($1 \leq j \leq i-1$) és $\alpha_i < \beta_i$.

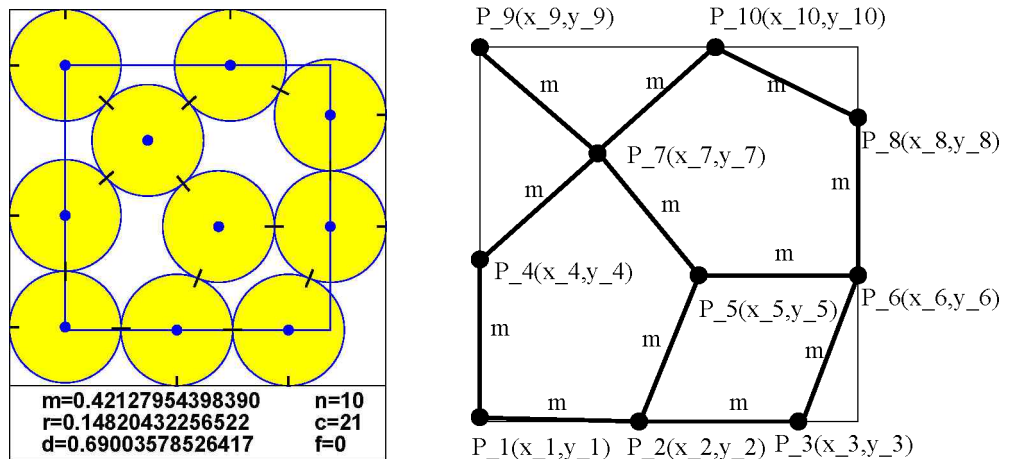
13. DEFINÍCIÓ. Legyen $\preceq$ egy megengedett rendezés az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók monomjainak halmazán. A $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinomgyűrű egy I ideáljának egy nemüres G véges részhalmazát, akkor mondjuk az I ideálnak a $\preceq$ rendezésre vonatkozó *Gröbner bázisának*, ha az ideál minden polinomjának az adott rendezésre vonatkozó főtagja osztható a G valamely polinomjának főtagjával.

A polinomrendszerek megoldhatósága szempontjából fontos szerepet játszik a Gröbner bázisok elmélete. Mivel egy P polinomrendszer által generált I ideál és annak G Gröbner bázisa is az I ideált generálja, így a $P = 0$ és $G = 0$ polinom egyenletrendszerek egyszerre megoldhatók (vagy sem), illetve megoldáshalmazuk

is azonos. 1965-ben *B. Buchberger* vezette be a Gröbner bázis fogalmát, az elnevezését PhD témavezetője *W. Gröbner* (1899-1980) tiszteletére adta. Egy ehhez a fogalomhoz nagyon hasonlót már *H. Hironaka* is bevezetett 1964-ben, de Buchberger algoritmust is adott a Gröbner bázisok meghatározására. Az algoritmus egyszerre általánosítja az euklideszi algoritmusnak és a Gauss eliminációnak is.

Számunkra a körpakolás struktúrájának létezése szempontjából elsősorban az a tétel játszik fontos szerepet ebben az elméletben, amely azt mondja ki, hogy egy P polinomrendszer pontosan akkor megoldható, ha az 1 nincs benne a P által generált ideál Gröbner bázisában. Emellett egy körpakolás nemlétezését úgy is igazolhatjuk, ha a struktúrájához tartozó polinomrendszer Gröbner bázisának (komplex együttthatós polinomokkal dolgozva) polinomjainak gyökei valamelyik változóra nem egy valós $[0,1]$ intervallumbeli értéket adnak.

A Gröbner bázisok elméletének használatát egy példán keresztül, demonstráljuk a Maple 9 szimbolikus algebrai programcsomag támogatásával.



14. ábra: 10 kör optimális pakolása az egységnyezetben.

1. PÉLDA. Igazolás egy körpakolás nemlétezésére.

A bevezetésben említett sokat vizsgált 10 körös probléma optimális megoldása látható a 14. ábrán. A körpakolás struktúrájának egyik érdekessége, hogy a bal alsó saroknál lévő kör nincs pontosan a sarokban. A kör a négyzet egyik oldalát érinti a másikat viszont nem. A Gröbner bázisok elméletén keresztül könnyen igazolhatjuk, hogy olyan struktúrával rendelkező körpakolás, amely csak annyiban tér el az előzőtől, hogy a bal alsó saroknál lévő kör pontosan a sarokban van, nem létezik. G. Valette körpakolási cikkében [105] a P_1 pont ugyan a sarokban van, de nála a P_3 és a P_6 pontok távolsága m -nél nagyobb. A téma egyik nagy monográfiájában a *Handbook of Discrete and Computational Geometry* kötetben [27] a 26. oldalon a 10 kör optimális pakolását bemutató ábra téves, mivel ott az említett kört pontosan a négyzet sarkába illeszti a szerző.

A módosított "körpakolás" struktúrája egyenletrendszerrel, a 14. Ábrán használt jelölésekkel az alábbi módon adható meg:

$$\begin{array}{ll}
(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = m^2 & (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 = m^2 \\
(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = m^2 & (x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 = m^2 \\
(x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 = m^2 & (x_3 - x_6)^2 + (y_3 - y_6)^2 = m^2 \\
(x_4 - x_7)^2 + (y_4 - y_7)^2 = m^2 & (x_5 - x_7)^2 + (y_5 - y_7)^2 = m^2 \\
(x_7 - x_9)^2 + (y_7 - y_9)^2 = m^2 & (x_7 - x_{10})^2 + (y_7 - y_{10})^2 = m^2 \\
(x_8 - x_{10})^2 + (y_8 - y_{10})^2 = m^2 & (x_6 - x_8)^2 + (y_6 - y_8)^2 = m^2 \\
x_1 = x_4 = x_9 = y_2 = y_3 = \mathbf{y}_1 = 0 & x_6 = x_8 = y_9 = y_{10} = 1.
\end{array}$$

A vastagon szedett $\mathbf{y}_1$ változónak nullává tétele az, amely itt a módosítást jelenti, vagyis, hogy a kör pontosan a sarokban van.

Használjuk ki a "körpakolás" néhány olyan geometriai sajátosságát, amellyel redukálhatjuk az egyenletrendszert. Könnyű észrevenni, hogy $x_2 = m$, $y_4 = y_1 + m$, $x_3 = x_2 + m$ és $y_8 = y_6 + m$. A $P_2P_3P_5P_6$ négyszög rombusz, így $x_5 = 1 - m$ és $y_5 = y_6$. A $P_4P_7P_9$ és $P_9P_7P_{10}$ egyenlő szárú háromszögek, így a P_4 , P_7 és P_{10} pontok egy egyenesen vannak, ami azt jelenti, hogy $y_7 = (1 + y_1 + m)/2$ és $x_7 = x_{10}/2$.

Felhasználva az előbbi megfigyeléseket, az x_2, x_{10}, y_5 és m kivételével minden változót eliminálhatunk az egyenletrendszerből, így az az alábbira redukálódik:

$$\begin{aligned}
(1 - 2m)^2 + y_5^2 &= m^2, \\
x_{10}^2 + (1 - m)^2 &= (2m)^2, \\
(1 - x_{10})^2 + (1 - y_5 - m)^2 &= m^2, \\
(2 - 2m - x_{10})^2 + (2y_5 - 1 - m)^2 &= (2m)^2.
\end{aligned}$$

A $P = \{(1 - 2m)^2 + y_5^2 - m^2, x_{10}^2 + (1 - m)^2 - (2m)^2, (1 - x_{10})^2 + (1 - y_5 - m)^2 - m^2, (2 - 2m - x_{10})^2 + (2y_5 - 1 - m)^2 - (2m)^2\}$ polinomrendszer Gröbner bázisa $G = \{m, y_5^2 + 1, x_{10} + y_5\}$ lesz, ami azt mutatja, hogy a kiinduló struktúra nem egy négyzetben való körpakolási struktúra, hiszen akkor $y_5^2 + 1$ nem lehetne 0.

Másrészt ha egy körpakoláshoz tartozó polinomrendszernek van olyan megoldása, amely kielégíti a változókra adott azon feltételeket is, hogy az (x_i, y_i) változók csak a $[0, 1]$ intervallumból, az m csak a $(0, \sqrt{2}]$ intervallumból veheti fel értékét, akkor a megoldás létezése a pakolásnak a megadott struktúrával való létezését jelenti egyben.

5. fejezet

Ismétlődő minták a körpakolásokban

Az optimális és az eddig ismert legjobb körpakolások struktúráinak összehasonlítása alapján kiderült, hogy bizonyos esetekben ismétlődő minták fedezhetők fel. Az ismétlődő minták és a körök darabszáma között gyakran kapcsolat van. Ezen kapcsolat alapján bizonyos körpakolásokat mintaosztályokba sorolhatunk.

5.1. Véges mintaosztályok

A mintaosztályokra és a hozzájuk tartozó mintákra használni fogjuk a $\mathbf{PAT}(f(k))$ jelölést, ahol $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy adott függvényt és $f(k)$ a körök számát jelenti ($n = f(k)$).

5.1.1. A $\mathbf{PAT}(k^2 - l)$ ($l = 0, 1, 2$) mintaosztályok

$\mathbf{PAT}(k^2)$ Talán a legszembetűnőbb mintát az $n = 4, 9, 16, 25$ és 36 négyzetszámokhoz tartozó, a köröket $k \times k$ -s ($n = k^2$) négyzetes struktúrában elhelyező körpakolások adják (15. ábra). Az ezeknek a körpakolásoknak megfelelő pontelhelyezésekben a pontok koordinátái (i_l, j_l) lesznek, ahol $0 \leq i, j \leq k - 1$ egészek, és $l_k = \frac{1}{k-1}$.

2. ÁLLÍTÁS. A $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 2$ esetén

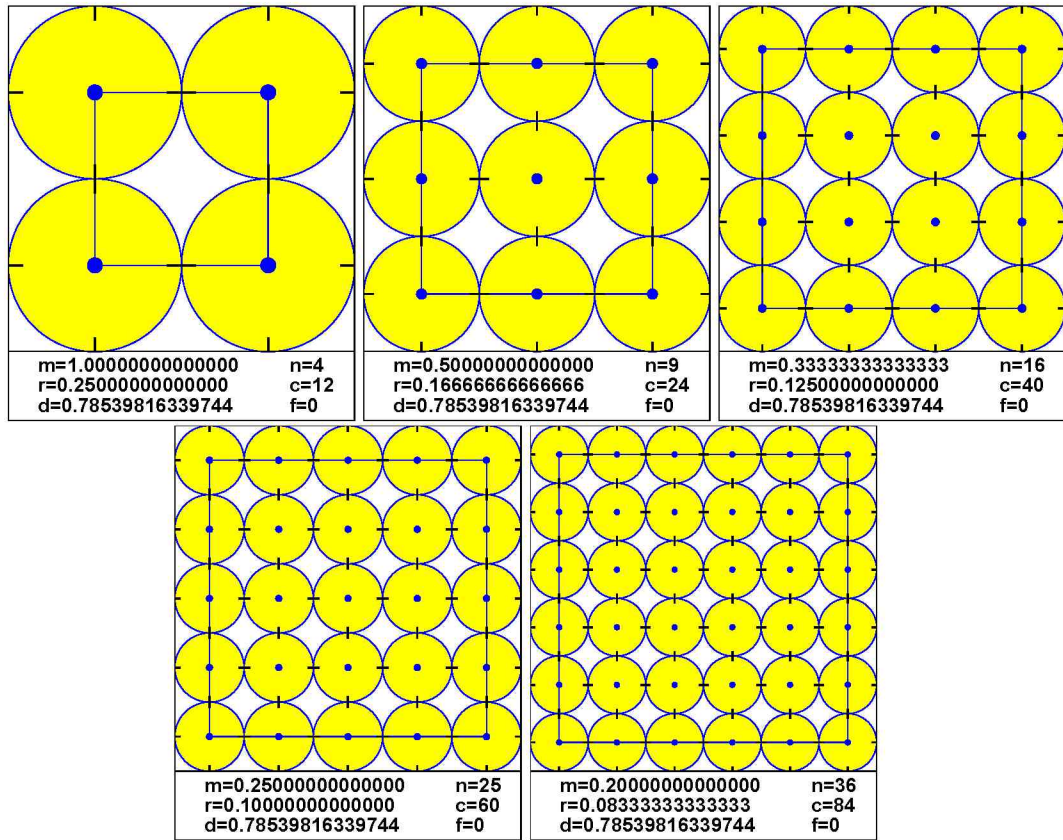
$$m_n = l_k = \frac{1}{k-1}.$$

BIZONYÍTÁS. Az $(i_1 l_k, j_1 l_k)$ és $(i_2 l_k, j_2 l_k)$ koordinátájú pontok távolsága

$$\frac{\sqrt{(i_1 - i_2)^2 + (j_1 - j_2)^2}}{k-1} \geq l_k,$$

hiszen a számlálóban lévő különbségek négyzetei közül legalább az egyik nem 0. Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az $|i_1 - i_2| = 1$ és a $|j_1 - j_2| = 1$ egyenlőségek közül pontosan az egyik teljesül.

□

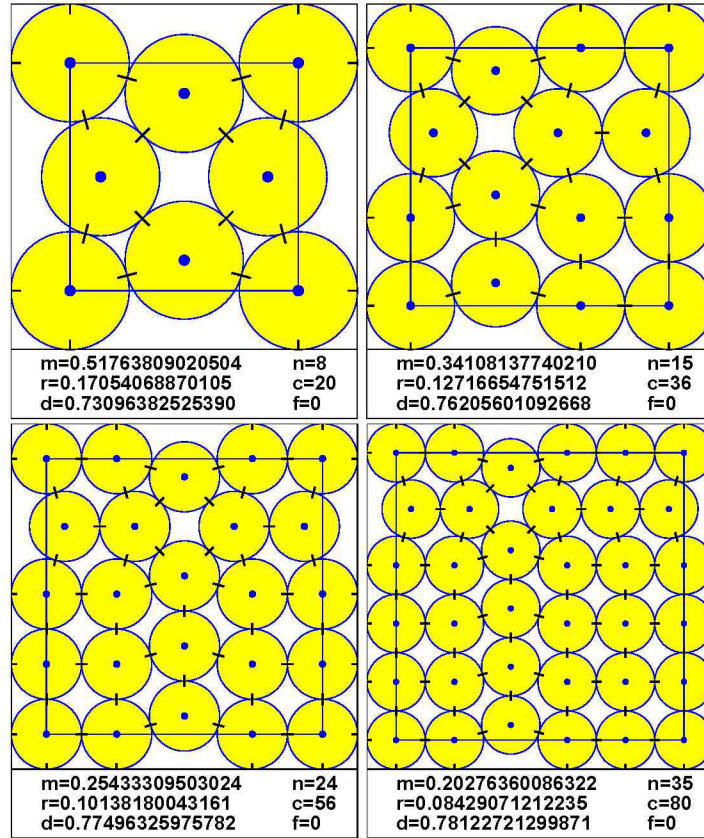
15. ábra: $\text{PAT}(k^2)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 2, 3, 4, 5$ és 6 .

A $k = 2, 3, 4$ és 5 esetekben bizonyítottan (és a $k = 6$ -ra sejtetően) az optimális körpakolást ez a minta adja. A $k = 7$ esetre viszont biztosan nem. A függelékben található körpakolásban m_{49} nagyobb mint 0.1673 , míg a $\text{PAT}(k^2)$ elrendezésben $k = 7$ -re a pontok közötti minimális távolság $\frac{1}{6} \approx 0.1667$. Érdeemes megfigyelni, hogy az ebbe az osztályba tartozó körpakolások sűrűsége állandó. Valóban, hiszen

$$d_n(r_n, [0, 1]^2) = k^2 \left(\frac{1}{2k} \right)^2 \pi = \frac{\pi}{4}.$$

PAT($k^2 - 1$) Helyezzünk el a négyzetben $n = k^2$ darab kört ($k \geq 3$) a $\text{PAT}(k^2)$ mintának megfelelően, majd vegyünk ki egy olyan kört a pakolásból amely nem érintkezik a négyzet egyetlen oldalával sem. Az így megmaradt $k^2 - 1$ darab kör már elhelyezhető egy kisebb oldalhosszúságú négyzetben is, ha a kiválasztott kör oszlopában (illetve sorában) lévő köröket az egységnégyzet $(0,0)$ - $(0,1)$ (illetve $(0,0)$ - $(1,0)$) oldalaival párhuzamosan beljebb toljuk és az egész körpakolást összenyomjuk úgy, hogy a kivett kört érintő körök középpontjai egy rombuszt alkossanak.

Az ekvivalens pontelhelyezésben ha a $\left(\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-2}{k-1} \right)$ koordinátájú ponthoz tartozó kört vettük ki, akkor a pontok koordinátái: $\bigcup_{i=1}^6 C_i$, ahol $l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ és

16. ábra: $\text{PAT}(k^2 - 1)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 3, 4, 5$ és 6 .

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(il_k, jl_k) \mid 0 \leq i, j \leq k-3\}, \\
C_2 &= \{(1, il_k) \mid 0 \leq i \leq k-3\}, \\
C_3 &= \{(il_k, 1) \mid 0 \leq i \leq k-3\}, \\
C_4 &= \{((i + \sin 15^\circ)l_k, (k-2 + \cos 15^\circ)l_k) \mid 0 \leq i \leq k-3\}, \\
C_5 &= \{((k-2 + \cos 15^\circ)l_k, (i + \sin 15^\circ)l_k) \mid 0 \leq i \leq k-3\}, \\
C_6 &= \{(1, 1), (1 - l_k \sin 15^\circ, (k-2 + \cos 15^\circ)l_k), ((k-2 + \cos 15^\circ)l_k, 1 - l_k \sin 15^\circ)\}.
\end{aligned}$$

3. ÁLLÍTÁS. A $\text{PAT}(k^2 - 1)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 3$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k-3 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

BIZONYÍTÁS. A $\frac{(k^2-1)(k^2-2)}{2}$ darab pontpár távolságának végigvizsgálását összevon-tan is elvégezhetjük, ha rendre megmutatjuk, hogy egy C_i ($1 \leq i \leq 6$) halmazon belül bármely két pont távolsága nem kisebb mint l_k , illetve, ha két különböző C_i és C_j ($1 \leq i, j \leq 6$) halmazból választunk két pontot és azok távolságára mutatjuk meg, hogy az nagyobb vagy egyenlő mint l_k . Ez 33 eset tárgyalását jelenti, amelyből kettőt példaként igazolok, a többi analóg módon elvégezhető.

a) Tekintsük az $(i_1 l_k, j_1 l_k)$ és $(i_2 l_k, j_2 l_k)$ C_1 -beli pontokat. Ezek távolsága

$$\sqrt{(i_1 - i_2)^2 l_k^2 + (j_1 - j_2)^2 l_k^2} \geq \sqrt{l_k^2} = l_k,$$

hiszen az $(i_1 - i_2)^2$ és $(j_1 - j_2)^2$ közül legalább az egyik pozitív négyzetszám.

b) Tekintsük az $(i_1 l_k, j_1 l_k)$ C_1 -beli és $((i_2 + \sin 15^\circ) l_k, (k - 2 + \cos 15^\circ) l_k)$ C_4 -beli pontok távolságát:

$$l_k \sqrt{(i_2 + \sin 15^\circ - i_1)^2 + (k - 2 + \cos 15^\circ - j_1)^2}.$$

Itt azt kell megmutatni, hogy a négyzetgyök alatti összeg 1-nél nem lehet kisebb. Könnyen látható, hogy már az összeg második tagja is 1-nél mindig nagyobb, hacsak $j_1 \neq k - 2$, illetve az első tagja is nagyobb mint 1, ha $i_2 > i_1$.

Legyen $j_1 = k - 2$ és $i_2 = i_1$. Ekkor a gyökjel alatti érték pontosan 1. Tegyük fel, hogy $j_1 = k - 2$ és $i_2 < i_1$. A gyökjel alatti összeg ekkor

$$1 + (i_1 - i_2)(i_1 - i_2 - 2 \sin 15^\circ),$$

ami nyilván nagyobb mint 1, hiszen $0 < 2 \sin 15^\circ < 1$.

□

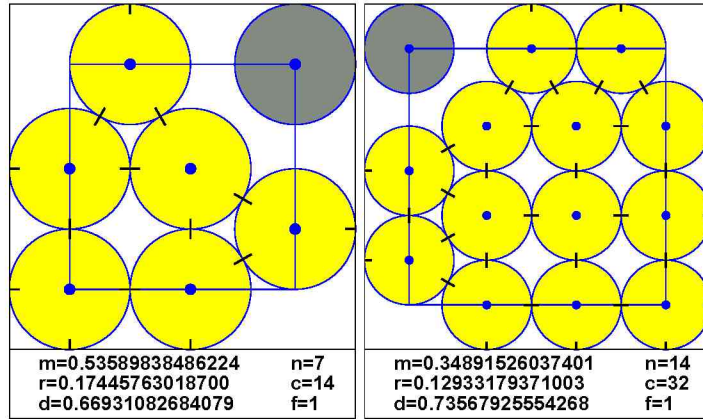
Igazolható, hogy a $k = 3, 4$ és 5 esetekben az így kapott körpakolások optimálisak lesznek (16. ábra). Ez a minta sejtetően ad egy optimális körpakolást a $k = 6$ ($n = 35$) esetben is, az $n = 48$ -ra azonban biztosan nem. Van olyan pontelhelyezés, ahol m_{48} nagyobb mint 0.1694 (lásd a függelék), míg az előbbi mintában a pontok közötti minimális távolság ekkor csak $\frac{1}{4 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \approx 0.1685$.

Az $n = 16$ körszámra a szimmetrikus esetek miatt csak egy olyan kört választhatunk, amelyet kivehetünk a négyzetből. Az $n = 25$ esetben azonban két olyan kör adódik amelynek egyenkénti kivétele különböző optimális pakolásokat eredményez. Az $n = 36$ esetben három ilyen körünk van.

PAT($k^2 - 2$) Az előbbi mintaképzés analógiájára a **PAT(k^2)** körpakolásból eltávolíthatunk egyszerre 2 kört is. Itt két további alosztályt különböztetünk meg.

a) **PAT₁($k^2 - 2$)** Tekintsünk a **PAT(k^2)** mintának megfelelő körpakolásban egy olyan kört amely a négyzet valamelyik sarkában van. Vegyük ki azt a két kört a pakolásból amelyek érintik a kiválasztott kört. A sarokban lévő kör sorában és oszlopában így egyaránt $k - 1$, $k - 1$ kör marad, a sarokban lévő kört pedig semmilyen kör nem érinti, így az ún. szabad körré válik.

14. DEFINÍCIÓ. Egy körpakolásban egy kört *szabad körnek* mondunk, ha a kör középpontjának van olyan környezete, amelyen belül a középpontot mozgatva a kör a négyzet belsejében marad és nem lesz közös pontja más körrel.

17. ábra: $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 3$ és 4 .

A kiválasztott kör sorában és oszlopában álló $2 \times (k - 1)$ kört a megmaradt $(k - 1) \times (k - 1)$ -es négyzetes körpakolás rendre megfelelő szélein álló köréhez úgy tudjuk hozzátenni, hogy minden két egymásutáni szélén álló körhöz illesztünk egy-egy kört. Az így kapott körpakolást (a szabad körrel együtt) egy a korábbinál kisebb oldalhosszúságú négyzetben is elhelyezhetjük. Az ennek a körpakolásnak megfelelő pontelhelyezés koordinátái, ha a $(\frac{k-2}{k-1}, 1)$ és $(1, \frac{k-2}{k-1})$ pontoknak megfelelő köröket vesszük ki: $\bigcup_{i=1}^4 C_i$, ahol $l_k = \frac{1}{k-2+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, és

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(il_k, jl_k) \mid 0 \leq i, j, \leq k-2\}, \\ C_2 &= \{(\frac{l_k}{2} + il_k, 1) \mid 0 \leq i \leq k-3\}, \\ C_3 &= \{(1, \frac{l_k}{2} + il_k) \mid 0 \leq i \leq k-3\}, \\ C_4 &= \{(1, 1)\} \text{ (szabad kör)}. \end{aligned}$$

4. ÁLLÍTÁS. A $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$ mintájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 3$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k-2+\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

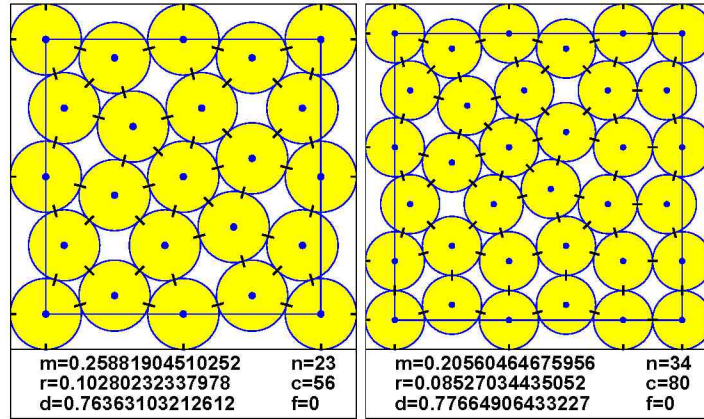
BIZONYÍTÁS. Most is csak egy-egy esetet vizsgálunk meg alaposabban, mivel a többi 7 hasonlóan elvégezhető.

a) Legyenek $(\frac{l_k}{2} + i_1 l_k, 1)$ és $(\frac{l_k}{2} + i_2 l_k, 1)$ C_2 -beli elemek. Mivel $i_1 \neq i_2$, így távolságuk $\sqrt{(i_1 - i_2)^2 l_k^2}$ nyilván nem kisebb mint l_k .

b) Tekintsük az $(i_1 l_k, j_1 l_k)$ C_1 -beli és az $(\frac{l_k}{2} + i_2 l_k, 1)$ C_2 -beli pontok távolságát:

$$\sqrt{\left(\frac{l_k}{2} + i_2 l_k - i_1 l_k\right)^2 + (1 - j_1 l_k)^2}.$$

Ha $j_1 \neq k-2$, akkor már a négyzetgyök alatti összeg második tagja nagyobb mint l_k^2 , így elég azzal az esettel foglalkozni, ha $j_1 = k-2$. Hasonló módon, ha

18. ábra: $\text{PAT}_2(k^2 - 2)$ alakú körpakolások, ahol $k = 5$ és 6 .

$i_1 \neq i_2$ és $i_1 - i_2 \neq 1$, akkor az összeg első tagja lesz nagyobb mint l_k^2 . Ha $i_1 = i_2$ vagy $i_1 - i_2 = 1$ és $j_1 = k - 2$, akkor a két pont közötti távolság pontosan l_k . $\square$

A $k = 3$ és 4 esetekben a $\text{PAT}_1(k^2 - 2)$ minta adja az optimális pakolásokat (17. ábra). A $k = 5$ és 6 értékekre az optimális és a legjobb ismert (18. ábra) pakolások struktúrái az előbbihez nagyon hasonló szabály szerint megkaphatók. A különbség csak az, hogy a $\text{PAT}(k^2)$ körpakolásból a két kivett kört nem a pakolás széléről, hanem annak belsejéből választjuk.

b) $\text{PAT}_2(k^2 - 2)$ Tekintsük a $\text{PAT}(k^2)$ mintának megfelelő körpakolást, ahol $k \geq 5$. Vegyük ki a $\left(\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-2}{k-1}\right)$ és $\left(\frac{k-4}{k-1}, \frac{k-4}{k-1}\right)$ pontoknak megfelelő köröket a pakolásból és a kivett körök sorában és oszlopában álló köröket toljuk beljebb a kivett körök irányába. Ha a körpakolást most a négyzet oldalai mentén összenyomjuk, akkor körök elférnek egy a korábbinál kisebb oldalú négyzetben. A kivett két kört egyenként érintő négy kör középpontjai egy-egy négyzetet fognak alkotni. A körpakolásnak megfelelő pontelhelyezés koordinátái: $\bigcup_{i=1}^6 C_i$, ahol $l_k = \frac{1}{k-5+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ és

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(il_k, jl_k) \mid 0 \leq i, j \leq k-5\}, \\
C_2 &= \{(l_k(k-5) + 2il_k \cos 15^\circ, jl_k) \mid 1 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq k-5\}, \\
C_3 &= \{(jl_k, l_k(k-5) + 2il_k \cos 15^\circ) \mid 1 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq k-5\}, \\
C_4 &= \{(l_k(k-5) + il_k \cos 15^\circ, l_k \sin 15^\circ + jl_k) \mid 1 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq k-5\}, \\
C_5 &= \{(l_k \sin 15^\circ + jl_k, l_k(k-5) + il_k \cos 15^\circ) \mid 1 \leq i \leq 2; 0 \leq j \leq k-5\}, \\
C_6 &= \{(1 - il_k \cos 15^\circ, 1 - (i \bmod 2)l_k \sin 15^\circ) \mid 1 \leq i \leq 3\}, \\
C_7 &= \{(1 - (i \bmod 2)l_k \sin 15^\circ, 1 - il_k \cos 15^\circ) \mid 1 \leq i \leq 3\}, \\
C_8 &= \{(l_k(k-5) + 2l_k \cos 15^\circ, l_k(k-5) \cos 15^\circ + 2l_k \sin 15^\circ), \\
&\quad (l_k(k-5) + l_k \cos 15^\circ, l_k \sin 15^\circ + (k-5)l_k + \sqrt{2}l_k), \\
&\quad (1 - l_k \sin 75^\circ, 1 - l_k \sin 15^\circ - \sqrt{2}l_k), (1 - l_k \sin 15^\circ - \sqrt{2}l_k, 1 - l_k \sin 75^\circ), \\
&\quad (l_k \sin 15^\circ + (k-5)l_k + \sqrt{2}l_k, l_k(k-5) + l_k \sin 75^\circ), \\
&\quad \left(l_k(k-5) + \frac{\sqrt{6}}{2}l_k, 1 - \frac{\sqrt{6}}{2}l_k\right), \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}l_k, l_k(k-5) + \frac{\sqrt{6}}{2}l_k\right), (1, 1)\}.
\end{aligned}$$

5. ÁLLÍTÁS. A $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$ mintájú pontelhelyezésekben, minden $k \geq 5$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k - 5 + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

BIZONYÍTÁS. A végigvizsgálandó 98 eset közül most is csak kettővel foglalkozunk, a maradék esetek hasonlóan bizonyíthatók.

a) Legyenek $(l_k(k - 5) + 2i_1l_k \cos 15^\circ, j_1l_k)$ és $(l_k(k - 5) + 2i_2l_k \cos 15^\circ, j_2l_k)$ C_2 -beliek. A két pont távolsága így

$$\sqrt{4l_k^2 \cos^2 15^\circ (i_1 - i_2)^2 + l_k^2 (j_1 - j_2)^2}.$$

Ha $i_1 \neq i_2$, akkor a négyzetgyök alatti összeg első tagja nagyobb mint l_k^2 , mivel $\cos 15^\circ > 0.9$. Hasonlóan könnyen látható, hogy az összeg második tagja mindenképpen nagyobb, mint l_k^2 , ha $j_1 \neq j_2$. Mivel két különböző pontot tekintettünk C_2 -ből, így a két tag közül legalább az egyik nem 0.

b) Tekintsük a (i_1l_k, j_1l_k) C_1 -beli és a $(l_k(k - 5) + i_2l_k \cos 15^\circ, l_k \sin 15^\circ + j_2l_k)$ C_4 -beli pontok távolságát:

$$\sqrt{(l_k(k - 5) + i_2l_k \cos 15^\circ - i_1l_k)^2 + (l_k \sin 15^\circ + j_2l_k - j_1l_k)^2}.$$

Mivel $0 \leq i_1 \leq k - 5$ és $1 \leq i_2 \leq 2$, így a négyzetgyök alatti összeg első tagja sosem lesz kisebb mint $l_k^2 \cos^2 15^\circ$. Világos, hogy a második tag sem lehet kisebb mint $l_k^2 \sin^2 15^\circ$, ha $j_2 \geq j_1$. Ugyanez a helyzet akkor is, ha $j_2 < j_1$, mivel ekkor bevezetve az $u = j_1 - j_2$ jelölést, a második tag $l_k^2 (\sin 15^\circ - u)^2$ alakú lesz, ahol a második tényező

$$\sin^2 15^\circ + u^2 - 2u \sin 15^\circ > \sin^2 15^\circ,$$

mivel $u \geq 1 > 2 \sin 15^\circ$.

□

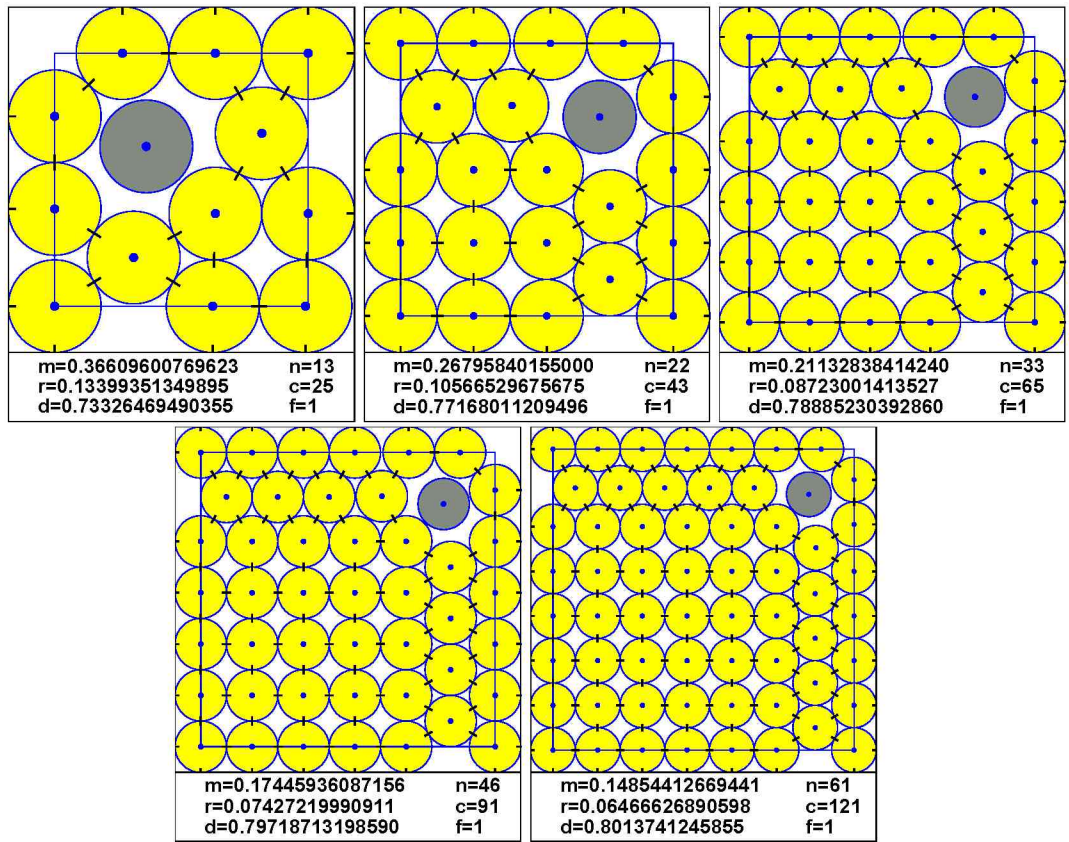
A $k = 5$ esetben ez a $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$ minta adja az optimális körpakolást és $k = 6$ -ra a ma ismert legjobb közelítést. A $k = 7$ esetben, vagyis az $n = 47$ körszámra a 4.2.1. fejezettrészben tárgyalt TAMSASS-PECS algoritmussal sikerült jobb pakolást találni mint amit a $\mathbf{PAT}_2(k^2 - 2)$ minta szolgáltat (lásd a függelékben m_{47} nagyobb mint 0.1712, míg $\frac{1}{2+2\sqrt{2+\sqrt{3}}} \approx 0.1705$).

Természetesen merül fel a kérdés, hogy lehet-e felfedezni az előbbiekhöz hasonló ismétlődő mintákat a körpakolásokban az $n = k^2 - l$ alakú körszámokra ha $l \geq 3$. A válasz az, hogy látszólag találhatunk hasonló struktúrákat, de valójában azok itt már olyan bonyolultak, hogy a körök pontos elhelyezésének az előbbiekhöz hasonló algoritmikus megadása nagyon nehéz feladat. Nem is adott meg eddig még senki ilyet. A továbbiakban ha nem is írom le pontosan, de legalább közelítem ezeket a mintákat alkalmasan bevezetett struktúraosztályokkal [84].

5.1.2. Az $\text{STR}(k^2 - l)$ ($l = 3, 4, 5$) struktúraosztályok

Az $\text{STR}(f(k))$ jelölést a $\text{PAT}(f(k))$ jelöléshez hasonlóan fogjuk használni, tehát $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy adott függvényt és $f(k)$ a körök számát jelöli ($n = f(k)$). Az elnevezés megváltoztatását (mintaosztály-struktúraosztály) az indokolja, hogy itt az optimális és a legjobb pakolások koordinátáinak megadását (a pakolás mintáját) nem adom meg, helyette csak egy azt jól közelítő struktúrát definiálok.

Ha megnézzük az $n = k^2 - 3$ ($k = 4, 5, 6, 7, 8$) alakú körpakolások optimális és a ma ismert legjobb elrendezéseit, azt találjuk, hogy azok struktúrális szempontból hasonlítanak egymásra (19. ábra).



19. ábra: $\text{STR}(k^2 - 3)$ struktúrájú körpakolások, ahol $k = 4, 5, 6, 7$ és 8 .

A fenti pakolások közel állnak egy olyan esethez, amikor a $\text{PAT}(k^2)$ mintából kivesszük az $(1, 0)$, $(\frac{k-2}{k-1}, \frac{2}{k-1})$ és $(\frac{k-3}{k-1}, \frac{1}{k-1})$ pontoknak megfelelő köröket és a pakolást összenyomjuk. Ezzel a korábban már alkalmazott ötlettel kapott pakolások struktúrája ugyan nem azonos, de jól közelíti azt.

$\text{STR}(k^2 - 3)$ Tekintsük az alábbi koordinátákkal megadott pontelhelyezésnek megfelelő $\bigcup_{i=1}^6 C_i$ körpakolást, ahol $l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{3}}$ és

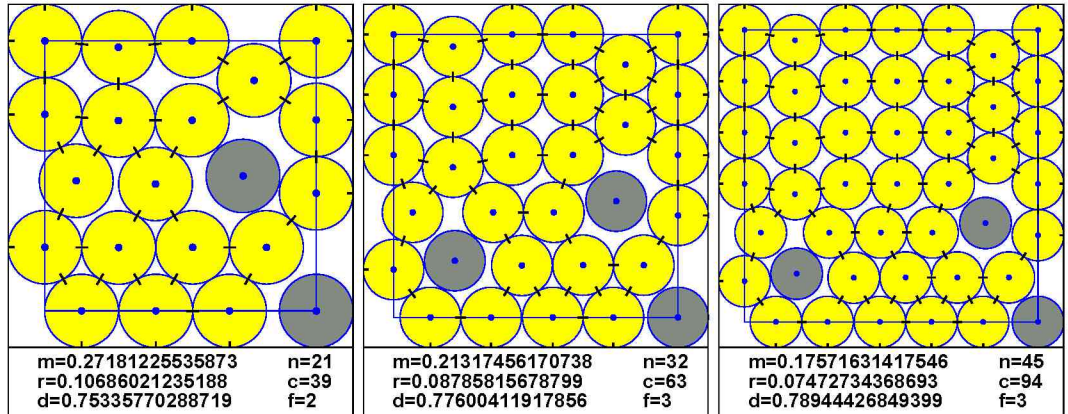
$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(il_k, jl_k) \mid 0 \leq i, j \leq k-3\}, \\
C_2 &= \{(1, il_k) \mid 0 \leq i \leq k-2\}, \\
C_3 &= \{(il_k, 1) \mid 0 \leq i \leq k-2\}, \\
C_4 &= \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{3}l_k}{2}, \frac{l_k}{2} + il_k\right) \mid 0 \leq i \leq k-4 \right\}, \\
C_5 &= \left\{ \left(\frac{l_k}{2} + il_k, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}l_k\right) \mid 0 \leq i \leq k-4 \right\}, \\
C_6 &= \{(1 - l_k \sin 75^\circ, 1 - l_k \sin 75^\circ)\} \text{ (szabad kör)}.
\end{aligned}$$

6. ÁLLÍTÁS. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 3)$ struktúrájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 4$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{3}} \quad (\leq \bar{m}_n).$$

BIZONYÍTÁS. A 20 lehetséges eset megvizsgálása a korábbiakhoz hasonlóan történik. □

$\mathbf{STR}(k^2 - 4)$ Az $n = k^2 - 4$ ($k = 5, 6, 7$) körszámú optimális és a ma ismert legjobb pakolások struktúráis hasonlósága szintén szembetűnő (20. ábra).



20. ábra: $\mathbf{STR}(k^2 - 4)$ struktúrájú körpakolások, ahol $k = 5, 6$ és 7 .

A fenti pakolások egy közelítését úgy kapjuk meg, ha a köröket a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintának megfelelően tesszük le és a hozzátartozó pontelhelyezés $(\frac{k-2}{k-1}, 0)$, $(1, \frac{1}{k-1})$, $(\frac{k-2}{k-1}, \frac{3}{k-1})$ és a $(\frac{k-3}{k-1}, \frac{2}{k-1})$ pontoknak megfelelő köreit kivesszük és a pakolást össze-nyomjuk. Ekkor a pontelhelyezés koordinátái $\bigcup_{i=1}^7 C_i$ lesznek, ahol $l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{3}}$.

$$\begin{aligned}
C_1 &= \{(il_k, 1 - jl_k) \mid 0 \leq i \leq k-3, 0 \leq j \leq k-4\}, \\
C_2 &= \{(1, 1 - jl_k) \mid 0 \leq j \leq k-3\}, \\
C_3 &= \left\{ \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}l_k, 1 - \frac{2j+1}{2}l_k\right) \mid 0 \leq j \leq k-5 \right\}, \\
C_4 &= \left\{ \left(\frac{2i+1}{2}l_k, 1 - (k-4 - \frac{\sqrt{3}}{2})l_k\right) \mid 0 \leq i \leq k-4 \right\}, \\
C_5 &= \left\{ (il_k, \frac{\sqrt{3}}{2}l_k) \mid 0 \leq i \leq k-2 \right\},
\end{aligned}$$

$$C_6 = \left\{ \left(\frac{1+2i}{2} l_k, 0 \right) \mid 0 \leq i \leq k-3 \right\},$$

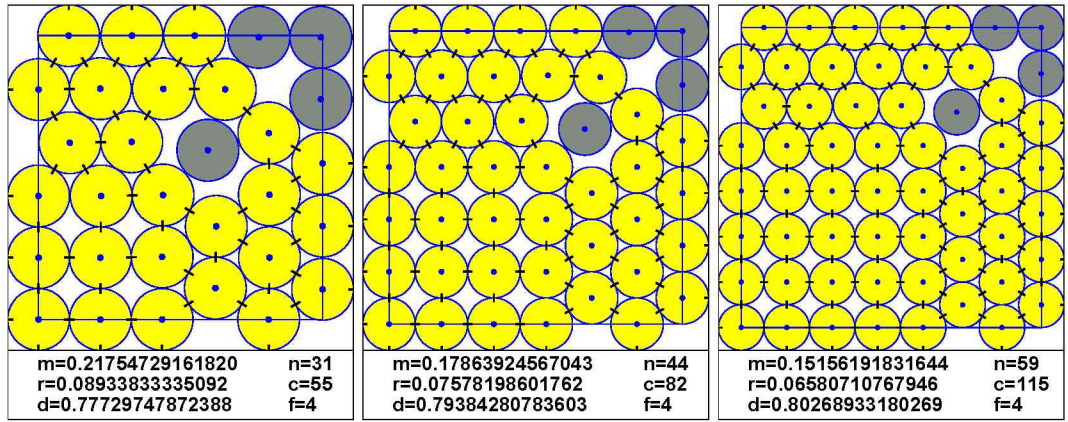
$$C_7 = \left\{ (1, 0), \left((k-3)l_k + \frac{\sqrt{2}}{2} l_k, 1 - (k-4)l_k + \frac{\sqrt{2}}{2} l_k \right) \right\} \text{ (szabad körök).}$$

7. ÁLLÍTÁS. Az $\mathbf{STR}(k^2 - 4)$ struktúrájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 5$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k-3+\sqrt{3}} (\leq \bar{m}_n).$$

BIZONYÍTÁS. A 34 lehetséges eset megvizsgálása a korábbiakhoz hasonlóan történik. $\square$

$\mathbf{STR}(k^2 - 5)$ Hasonló struktúrái vannak az $n = k^2 - 5$ alakú pakolásoknak is a $k = 6, 7, 8$ esetekben (21. ábra).



21. ábra: $\mathbf{STR}(k^2 - 5)$ struktúrájú körpakolások, ahol $k = 6, 7$ és 8 .

Itt is közelíthetjük ezeket a pakolásokat azzal a struktúrával amit úgy kapunk, hogy a $\mathbf{PAT}(k^2)$ mintájú körpakolásnak megfelelő pontelhelyezésből elhagyjuk a $\left(\frac{k-3}{k-1}, 1\right), \left(\frac{k-2}{k-1}, \frac{k-2}{k-1}\right), \left(1, \frac{k-3}{k-1}\right), \left(\frac{k-4}{k-1}, \frac{k-3}{k-1}\right), \left(\frac{k-3}{k-1}, \frac{k-4}{k-1}\right)$ koordinátájú pontokat és a pakolást összenyomjuk. Ezek a pakolások négy szabad kört tartalmaznak és a pakolás szimmetrikus a négyzet $(0,0)$ - $(1,1)$ átlójára. Ekkor a pontelhelyezés koordinátái $\bigcup_{i=1}^7 C_i$ lesznek, ahol $l_k = \frac{1}{k-4+\frac{3}{2}\sqrt{3}}$, és

$$C_1 = \{(il_k, jl_k) \mid 0 \leq i, j \leq k-4\},$$

$$C_2 = \left\{ \left(\frac{2i+1}{2} l_k, \left(k-4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) l_k \right) \mid 0 \leq i \leq k-5 \right\},$$

$$C_3 = \left\{ \left(\left(k-4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) l_k, \frac{2j+1}{2} l_k \right) \mid 0 \leq j \leq k-5 \right\},$$

$$C_4 = \{(il_k, (k-4 + \sqrt{3})l_k) \mid 0 \leq i \leq k-3\},$$

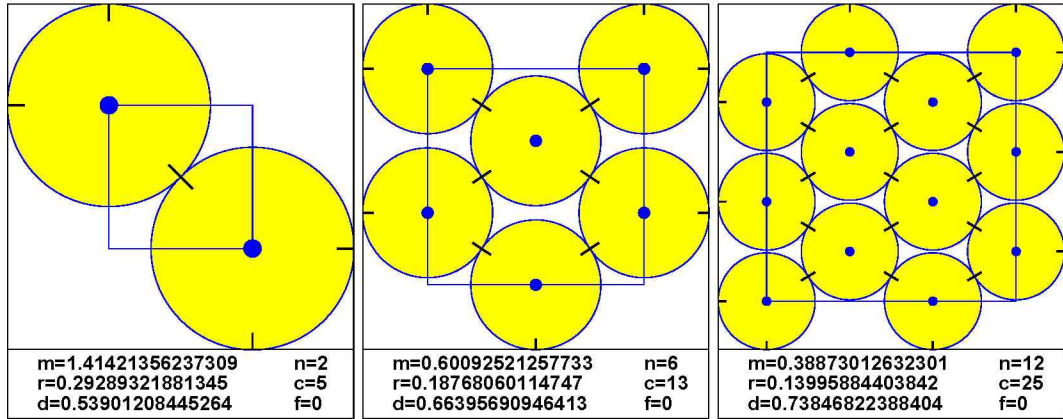
$$C_5 = \{((k-4 + \sqrt{3})l_k, jl_k) \mid 0 \leq j \leq k-3\},$$

$$C_6 = \left\{ \left(\frac{2i+1}{2} l_k, 1 \right), 0 \leq i \leq k-4 \right\},$$

$$C_7 = \left\{ \left(1, \frac{2i+1}{2} l_k \right), 0 \leq i \leq k-4 \right\},$$

$$C_8 = \left\{ (1, 1), (1 - l_k, 1), (1, 1 - l_k), \left(\left(k-4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) l_k, \left(k-4 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) l_k \right) \right\}$$

(szabad körök).

22. ábra: $\text{PAT}_1(k(k+1))$ mintájú körpakolások, ahol $k = 1, 2$ és 3 .

8. ÁLLÍTÁS. Az $\text{STR}(k^2 - 5)$ struktúrájú pontelhelyezésekben minden $k \geq 6$ esetén

$$m_n = l_k = \frac{1}{k - 4 + \frac{3}{2}\sqrt{3}} (\leq \overline{m}_n).$$

BIZONYÍTÁS. A 62 lehetséges eset megvizsgálása a korábbiakhoz hasonlóan történik.

□

Ismétlődő minták azonban nem feltétlenül csak a $\text{PAT}(k^2)$ négyzetes struktúrából származnak. Vannak egyéb rácspakolások is az optimális és a legjobbnak ismert pakolások között.

5.1.3. A $\text{PAT}(k(k+1))$ mintaosztály

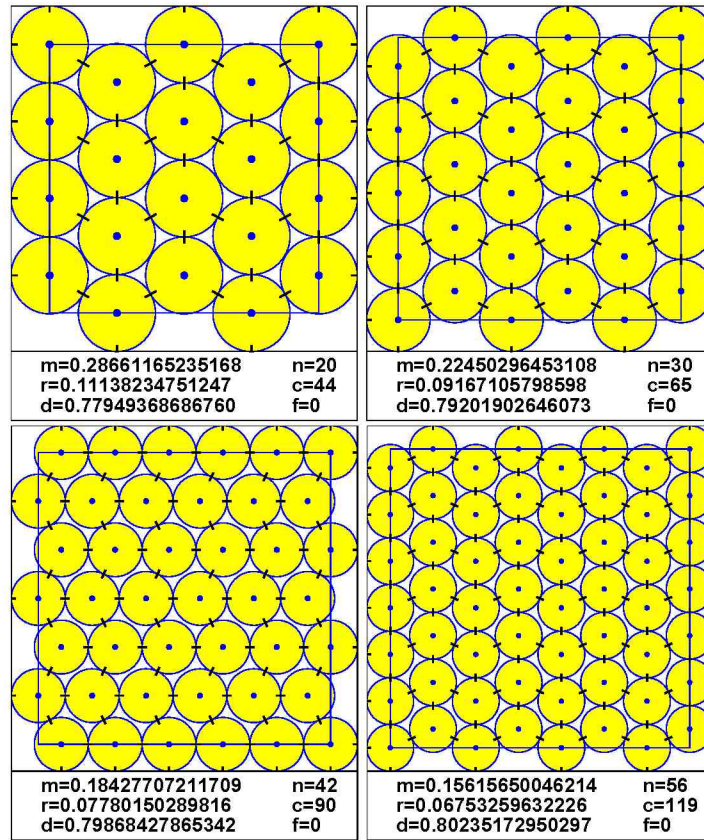
Ezen a mintaosztályon belül két további alosztályt különböztetünk meg:

$\text{PAT}_1(k(k+1))$ Helyezzük el a pontokat egy téglalaprácsra az alábbiak szerint: Osszuk fel a négyzet egyik oldalát k egy az előbbire merőleges másik oldalát $2k-1$ egyenlő részekre. Az osztópontokon keresztül húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal. A kapott téglalaprácsnak tegyük minden második rácspontjába egy pontot úgy, hogy az első pontot a négyzet $(0,0)$ koordinátájú sarkába tesszük (22. ábra). Az így lerakott $k(k+1)$ pont koordinátái az alábbiak lesznek:

$$\left(\frac{i}{k}, \frac{i \bmod 2}{2k-1} + \frac{2j}{2k-1}\right), \text{ ahol } 0 \leq i \leq k \text{ és } 0 \leq j \leq k-1.$$

Könnyű látni, hogy a pontok közötti minimális m_n távolság csak akkor lesz

$$\sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}},$$

23. ábra: $\text{PAT}_2(k(k+1))$ mintájú körpakolások, ahol $k = 4, 5, 6$ és 7 .

vagyis pontosan egy téglalap átlóhossza, ha $1 \leq k \leq 3$. Viszont ezekben az esetekben ez a minta adja az optimális pakolásokat, míg k növekedtével azonban már egy másik mintaosztályba tartoznak az optimális és az ismert legjobb elhelyezések.

$\text{PAT}_2(k(k+1))$ Tekintsük most az alábbi koordinátákkal adott pontelhelyezést:

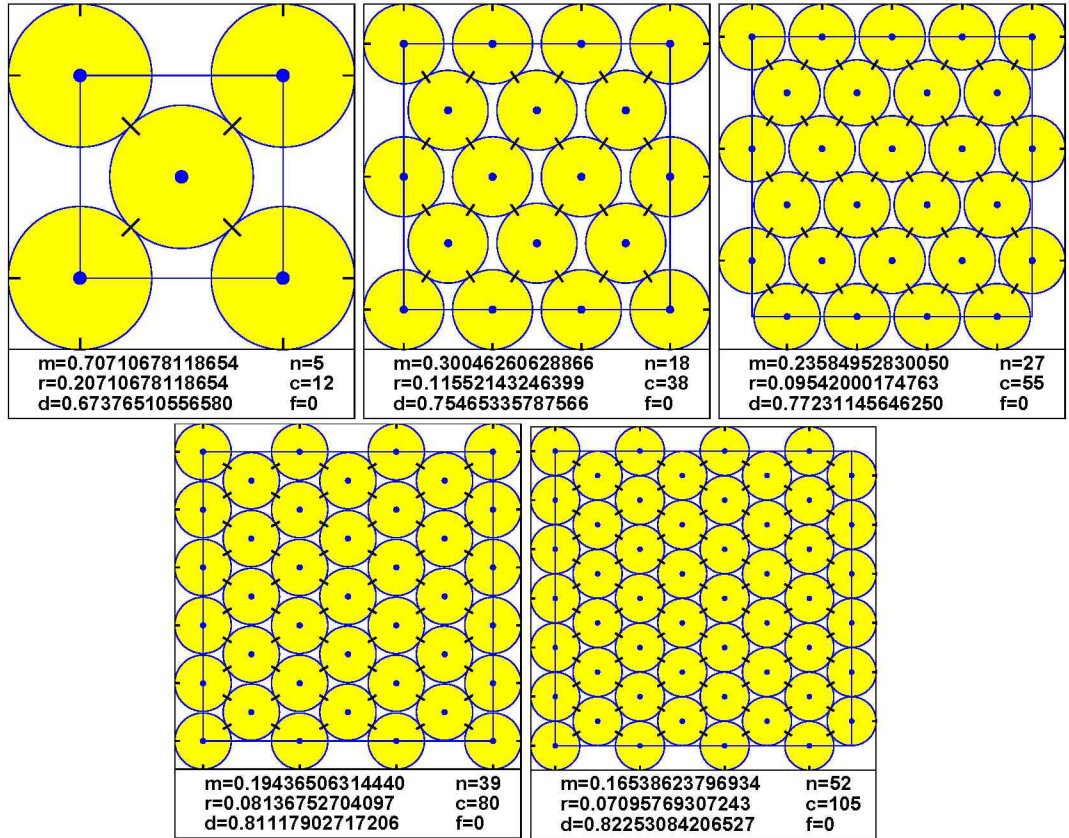
$$\left(i\sqrt{l_k^2 - (1 - kl_k + l_k)^2}, i \bmod 2 + (-1)^i j l_k\right), \text{ ahol } 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k-1, k \geq 4,$$

$$l_k = \frac{k^2 - k - \sqrt{2k}}{k^3 - 2k^2}.$$

A pontok közötti minimális távolságra itt $m_n = l_k$ adódik. A $k = 4$ és 5 esetekben az optimális, a $k = 6$ és 7 esetekben a ma ismert legjobb körpakolást a fenti minta adja (23. ábra).

5.1.4. A $\text{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$ mintaosztály

A $\text{PAT}_1(k(k+1))$ mintaképzéshez hasonlóan tekintsük most azt a pontelhelyezést, amikor nem k és $2k-1$ részre osztjuk a négyzet oldalait, hanem k és $2k-2$ egyenlő



24. ábra: $\text{PAT}(k^2 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ mintájú körpakolások, ahol $k = 2, 4, 5, 6$ és 7 .

részre. Ekkor a pontelhelyezést az alábbi koordinátákkal adhatjuk meg:

$$\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{2k-2}\right), \text{ ahol } 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq 2k-2 \text{ és } k \leq 7.$$

Ekkor

$$m_n = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(2k-2)^2}}.$$

A pontok közötti távolság minimuma azonban csak akkor lesz egyenlő a téglalapok átlóival, ha $k^2 - 8k + 4 \leq 0$. Amint az könnyen ellenőrizhető, ekkor $k \leq 7$, ahol k pozitív egész szám. A $k = 2, 4$ és 5 esetekben az optimális, a $k = 6$ és 7 esetekben a ma ismert legjobb pakolásokat ez a minta adja (24. ábra).

A bemutatott minták nyilván nem fedik le az optimális körpakolásoknál előforduló összes lehetséges struktúrát. Az optimalizáló algoritmusok és a számítógépes hardver fejlődésével várhatóan egyre több optimális körpakolást fogunk megismerni, így nagyon valószínű, hogy a jövőben számos további mintaosztályt fognak még feltárni a kutatók.

5.2. Egy végtelennek sejtett mintaosztály

Az eddig tárgyalt mintaosztályoknak egy közös sajátossága, hogy mindegyikük csak véges sok esetben adja az optimális körpakolást, vagy a ma ismert legjobb elhelyezést. Az ember intuíciója azt sejteti, hogy ez így is van rendjén, hiszen azt várjuk, hogy a körök számának növekedésével az optimális körpakolások struktúrája egyre nagyobb hexagonális részstruktúrákat fog majd tartalmazni. Ez pedig azt jelenti, hogy az előbbi minták mindig csak egy bizonyos körszámig adhatják a legjobb elhelyezéseket, utána azokat más váltja fel. Egy ilyen struktúraváltást figyelhetünk meg akkor, ha tekintjük az $n = k(k+1)$ körszámú pakolásokat. A $k = 1, 2$ és 3 esetekben a $\text{PAT}_1(k(k+1))$ minta adja az optimális pakolásokat, majd ahogy k növekszik $k = 4, 5, 6$ és 7 -re már a $\text{PAT}_2(k(k+1))$ mintaosztályból kerülnek ki a legjobb elhelyezések.

Az előbbiek ellenére azonban vannak, akik úgy gondolják, hogy talán mégis létezik végtelen mintaosztály is. *K. J. Nurmela* és munkatársai az alábbi sejtést közzétették 1999-ben [68]: Tekintsük a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ egyszerű lánc törtbe fejtésekor előálló approximáló törtsorozat azon részsorozatát, amely minden második törtet tartalmazza a sorozatból. Tehát a

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = [0; 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$$

periodikus lánc tört

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{11}{19}, \frac{15}{26}, \frac{41}{71}, \dots$$

approximáló törtsorozatának vegyük az

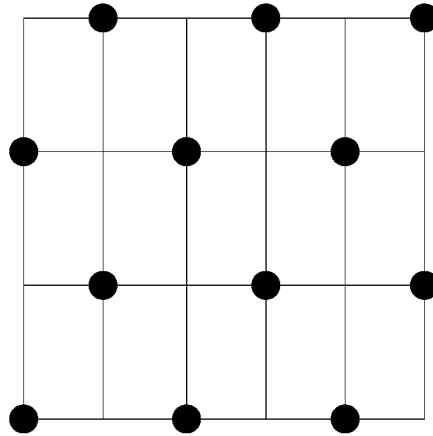
$$\frac{1}{1}, \frac{3}{5}, \frac{11}{19}, \frac{41}{71}, \dots$$

részsorozatát. Rendeljünk ezen részsorozat minden egyes $\frac{p}{q}$ törtjéhez egy pontelhelyezést a következő módon: Osszuk fel a négyzet két egymásra merőleges oldalát rendre p és q darab egyenlő részre és húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal az osztópontokon keresztül (25. ábra), így kapunk $p \times q$ darab téglalapot. Tegyük le egy pontot a négyzet bal alsó sarkába (a $(0,0)$ pontba), majd tegyük minden második téglalapráncspontba egy-egy újabb pontot. Nem nehéz látni, hogy így

$$\left\lceil \frac{(p+1)(q+1)}{2} \right\rceil$$

darab pontot tudtunk lerakni. A sejtés az, hogy az előbbi törtsorozat minden egyes törtjéhez tartozó pontelhelyezés optimális lesz.

Az előbbi sejtés arra ösztönöz bennünket, hogy vizsgáljuk meg alaposabban az ilyen típusú pakolásokat, amelyeket a továbbiakban röviden csak rácspakolásoknak fogunk hívni.

25. ábra: A $\frac{3}{5}$ törthöz tartozó rácspakolás.

5.2.1. Rácspakolások

Mindenekelőtt felhívjuk a figyelmet a rácspakolások egy sajátosságára: a pontok közötti minimális távolság minden esetben rácstéglalap átlójaként adódik. Ha p és q tetszőleges természetes számok lennének, akkor az előbbi tulajdonság nem feltétlenül lenne garantálva. Amint az könnyen látható, ez pontosan akkor teljesül, ha

$$\frac{p}{q} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3} \right).$$

(Elég mindkét oldalról nyílt intervallumot tekintenünk, mivel az intervallum végpontjai irracionális számok.) A továbbiakban $[[p, q]]$ -val fogom jelölni az olyan rácspakolást, amelyre p és q olyan természetes számok, hogy $\frac{p}{q}$ benne van az előbbi intervallumban, valamint GP-vel fogom jelölni az ilyen $[[p, q]]$ elemekből álló halmazt (GP= 'Grid Packing').

9. ÁLLÍTÁS. GP-ben az alábbi műveletek jól definiáltak:

$$[[p_1, q_1]] + [[p_2, q_2]] := [[p_1 + p_2, q_1 + q_2]],$$

$$\lambda[[p, q]] := [[\lambda p, \lambda q]],$$

ahol λ pozitív egész szám, továbbá, ha $p_2 < p_1$ és $q_2 < q_1$ akkor

$$[[p_1, q_1]] - [[p_2, q_2]] := [[p_1 - p_2, q_1 - q_2]],$$

és ha λ osztója p -nek és q -nak, akkor

$$\frac{1}{\lambda}[[p, q]] := \left[\left[\frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda} \right] \right].$$

BIZONYÍTÁS. A jól definiáltság értelmében azt kell igazolnunk, hogy végrehajtva az operandusokon a műveleteket az eredmény is GP-beli lesz. Egy esetben a bizonyítást részletesen leírjuk, a többi analóg módon elvégezhető.

Tegyük fel, hogy $\frac{p_1}{q_1} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ és $\frac{p_2}{q_2} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$. Igazolandó, hogy

$$\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right).$$

A feltételek értelmében egyrészt

$$p_1^2 < 3q_1^2, \quad p_2^2 < 3q_2^2,$$

tehát $p_1^2 + p_2^2 < 3(q_1^2 + q_2^2)$ és $p_1 p_2 < 3q_1 q_2$, amiből következőleg

$$(p_1 + p_2)^2 < 3(q_1 + q_2)^2,$$

másrészt

$$q_1^2 < 3p_1^2, \quad q_2^2 < 3p_2^2$$

tehát $q_1^2 + q_2^2 < 3(p_1^2 + p_2^2)$ és $q_1 q_2 < 3p_1 p_2$, amiből az adódik, hogy

$$(q_1 + q_2)^2 < 3(p_1 + p_2)^2.$$

□

5.2.2. Optimálisnak sejtett rácspakolás sorozatok

Az előbb tárgyalt optimálisnak sejtett rácspakolás sorozat megadható egy rekurzió segítségével is.

10. ÁLLÍTÁS. Tekintsük a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ periodikus egyszerű lánc törtbe fejtésével előálló approximáló törtsorozat azon részsorozatát, amely a második törttől kezdve, minden második törtet tartalmazza a sorozatból. Az ezen törtékhez hozzárendelt rácspakolások azonosak lesznek az alábbi rekurzív módon generált rácspakolás sorozattal:

$$S_1 = [[1, 1]], \quad S_2 = [[3, 5]],$$

$$S_n = 4S_{n-1} - S_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

BIZONYÍTÁS. A lánc törtjegyek és az approximáló törtsorozat számlálói és nevezői közötti összefüggés a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ közelítő $\frac{p_k}{q_k}$ sorozatában

$$p_0 = 0, \quad q_0 = 1,$$

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 1,$$

$$p_{2k} = p_{2k-1} + p_{2k-2}, \quad p_{2k+1} = 2p_{2k} + p_{2k-1},$$

$$q_{2k} = q_{2k-1} + q_{2k-2}, \quad q_{2k+1} = 2q_{2k} + q_{2k-1}.$$

Vegyük észre, hogy az előbbi törtsorozatban a páratlan indexekhez tartozó sorozat első eleme $1/1$, második eleme $3/5$. Így ha azt igazoljuk, hogy

$$p_{2k+1} = 4p_{2k-1} - p_{2k-3},$$

akkor készen vagyunk. Ez viszont valóban igaz, hiszen

$$p_{2k+1} = 2p_{2k} + p_{2k-1} = 2(p_{2k-1} + p_{2k-2}) + p_{2k-1} = 3p_{2k-1} + 2p_{2k-2} =$$

$$3p_{2k-1} + (p_{2k-1} - p_{2k-3}) = 4p_{2k-1} - p_{2k-3}.$$

□

A kombinatorikából jólismert generátorfüggvény módszerrel könnyen meghatározhatunk zárt formulát is az $S_n = [[p_n, q_n]]$ értékekre.

11. ÁLLÍTÁS. A 10. ÁLLÍTÁSBAN megadott $S_n = [[p_n, q_n]]$ sorozat elemeire teljesül, hogy

$$p_n = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} U_n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} V_n,$$

$$q_n = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} U_n - \frac{\sqrt{3} + 1}{2} V_n,$$

ahol $U_n = (2 + \sqrt{3})^n$, $V_n = (2 - \sqrt{3})^n$, és $n \geq 0$.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük a $\{p_n\}_{k=1}^{\infty}$ sorozathoz tartozó

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = 1 + 3x + 11x^2 + 41x^3 + \dots$$

hatványsort. Ekkor az

$$xF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = x + 3x^2 + 11x^3 + \dots$$

$$x^2 F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i = x^2 + 3x^3 + \dots$$

hatványsorokból, könnyen adódik, hogy $F(x) = 4xF(x) - x^2 F(x) - x + 1$. Így

$$F(x) = \frac{1-x}{x^2-4x+1} = \frac{1-x}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x-2-\sqrt{3}} - \frac{1}{x-2+\sqrt{3}} \right),$$

amiből következőleg ($|x| < \frac{1}{4}$) a formula p_n -re már könnyen levezethető. Hasonló gondolatmenettel kaphatjuk meg a q_n -re vonatkozó formulát is a $G(x) = \frac{x+1}{x^2-4x+1}$ generátorfüggvény felhasználásával.

□

Az említett végtelen rácspakolás sorozat optimalitásának sejtése abból a felismerésből származik, hogy a pakolás sorozat elemei rendkívül sűrű körpakolások. A sorozat körpakolásainak sűrűsége $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -höz konvergál. A bizonyítottan optimális pakolások struktúrájának ismeretére, valamint az eddigi legjobb pakolásokra támaszkodva, további négy olyan körpakolás sorozatot adhatunk meg, amelyekről szintén azt sejttem, hogy optimális pakolások minden elemükben.

12. ÁLLÍTÁS. Tekintsük a következő $\{A_i\}, \{B_i\}, \{C_i\}, \{D_i\}$ rácspakolás sorozatokat, ahol $(i \in \mathbb{Z}^+)$

$$\begin{aligned} A_i &:= 2S_i, & C_i &:= B_i/2, \\ B_i &:= S_i + S_{i+1}, & D_i &:= C_i + [3, 5]. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{X_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol $X \in \{S, A, B, C, D\}$ és d_{X_i} jelöli a körpakolások sűrűségét.

BIZONYÍTÁS. Használni fogjuk az $n(X_i)$ és $m(X_i)$ jelöléseket, amelyek rendre az az X_i körpakolás köreinek a számát, illetve a körpakolásnak megfelelő pontelhelyezésben a pontok közötti minimális távolságot jelöli.

a) $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{S_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$

Mivel $S_i = [s_{1i}, s_{2i}]$, $n(S_i) = \frac{(s_{1i}+1)(s_{2i}+1)}{2}$, $m(S_i) = \frac{\sqrt{s_{1i}^2 + s_{2i}^2}}{s_{1i}s_{2i}}$,
ezért $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{S_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} n(S_i) \pi \frac{m(S_i)^2}{4(m(S_i)+1)^2} = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi \frac{\left(\frac{1}{s_{2i}}+1\right)\left(\frac{1}{s_{1i}}+1\right)}{4} \frac{\frac{s_{1i}}{s_{2i}} + \frac{s_{2i}}{s_{1i}}}{(1+m(S_i))^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$

b) $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{A_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$

Mivel $A_i = [2s_{1i}, 2s_{2i}]$, $n(A_i) = 2s_{1i}s_{2i} + s_{1i} + s_{2i} + 1$, $m(A_i) = \frac{\sqrt{s_{1i}^2 + s_{2i}^2}}{2s_{1i}s_{2i}}$,
ezért $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{A_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} (2s_{1i}s_{2i} + s_{1i} + s_{2i} + 1) \pi \frac{s_{1i}^2 + s_{2i}^2}{4(\sqrt{s_{1i}^2 + s_{2i}^2} + 2s_{1i}s_{2i})^2} =$
 $\lim_{i \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{s_{2i}} + \frac{1}{s_{1i}} + \frac{1}{s_{1i}s_{2i}}\right) \pi \frac{\frac{s_{1i}}{s_{2i}} + \frac{s_{2i}}{s_{1i}}}{4(2+m(S_i))^2} = 2\pi \frac{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4(2)^2}}{4(2)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$

c) $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{B_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$

Mivel $B_i = [b_{1i}, b_{2i}]$, $n(B_i) = \frac{(b_{1i}+1)(b_{2i}+1)+1}{2}$, $m(B_i) = \sqrt{\frac{1}{b_{1i}^2} + \frac{1}{b_{2i}^2}}$,
ezért $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{B_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \pi \frac{(b_{1i}+1)(b_{2i}+1)+1}{4} \frac{b_{1i}^2 + b_{2i}^2}{(\sqrt{b_{1i}^2 + b_{2i}^2} + b_{1i}b_{2i})^2} =$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \frac{\left(1 + \frac{1}{b_{1i}}\right) \left(1 + \frac{1}{b_{2i}}\right) + \frac{1}{b_{1i}b_{2i}} \frac{b_{1i} + b_{2i}}{b_{2i} + b_{1i}}}{(1+m(B_i))^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

$$d) \lim_{i \rightarrow \infty} d_{C_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

$$\text{Mivel } C_i = \frac{1}{2} [b_{1i}, b_{2i}], \quad n(C_i) = \frac{\left(\frac{b_{1i}}{2} + 1\right) \left(\frac{b_{2i}}{2} + 1\right)}{2}, \quad m(C_i) = 2m(B_i),$$

$$\text{ezért } \lim_{i \rightarrow \infty} d_{C_i} = \frac{\pi}{4} \frac{(b_{1i}+2)(b_{2i}+2)}{2} \frac{b_{1i}^2 + b_{2i}^2}{\left(2\sqrt{b_{1i}^2 + b_{2i}^2} + b_{1i}b_{2i}\right)^2} =$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \frac{\left(1 + \frac{2}{b_{1i}}\right) \left(1 + \frac{2}{b_{2i}}\right) \frac{b_{1i} + b_{2i}}{b_{2i} + b_{1i}}}{(1+m(C_i))^2} = \frac{\pi}{8} \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)}{1} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

$$e) \lim_{i \rightarrow \infty} d_{D_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

$$\text{Mivel } D_i = [c_{1i} + 3, c_{2i} + 5], \quad n(D_i) = \frac{(c_{1i}+4)(c_{2i}+6)}{2}, \quad m(D_i) = \sqrt{\frac{1}{(c_{1i}+3)^2} + \frac{1}{(c_{2i}+5)^2}},$$

$$\text{ezért } \lim_{i \rightarrow \infty} d_{D_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \frac{(c_{1i}+4)(c_{2i}+6)}{2} \frac{(c_{1i}+3)^2 + (c_{2i}+5)^2}{\left(\sqrt{(c_{1i}+3)^2 + (c_{2i}+5)^2} + (c_{1i}+3)(c_{2i}+5)\right)^2} =$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \frac{\frac{(c_{1i}+4)(c_{2i}+6)}{(c_{1i}+3)(c_{2i}+5)} \frac{c_{1i}+3}{c_{2i}+5} + \frac{c_{2i}+5}{c_{1i}+3}}{(1+m(D_i))^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

□

Az 5. Táblázatban olyan rácspakolásokat foglaltam össze, amelyek bizonyítottan optimálisak. Feltüntettük azt is, hogy az egyes pakolások a 12. ÁLLÍTÁSBAN tárgyalt sorozatok közül melyiknek elemeként szerepelnek.

p	q	n	Sorozat
1	1	2	S_1
2	2	5	A_1
2	3	6	C_1
3	5	12	S_2
4	6	18	B_1
5	8	27	D_1

5. Táblázat. Optimális rácspakolások.

Az 5. Táblázatban látható, hogy az $[[1, 1]]$ és $[[2, 2]]$ rácspakolások optimálisak. A következő állításban igazoljuk, hogy rajtuk kívül más $[[p, p]]$ alakú optimális rácspakolás nincs.

13. ÁLLÍTÁS. Ha $p > 2$, akkor $[[p, p]]$ nem lehet optimális.

BIZONYÍTÁS. Jelölje a $[[p, p]]$ pontjainak számát $n([[p, p]])$, a pontok közötti minimális távolságot $m([[p, p]])$. Ekkor

$$n([[p, p]]) = \left\lceil \frac{(p+1)^2}{2} \right\rceil, \quad m([[p, p]]) = \frac{\sqrt{2}}{p}.$$

a) Ha p páros szám, akkor $p = \sqrt{2n-1} - 1$. Ha $p \geq 14$ (vagyis $n([p, p]) \geq 112$), akkor rövid számolással a **2. Tételt** felhasználva kapható, hogy

$$m([p, p]) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n-1}-1} < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}} < m_n.$$

Ha $p = 4, 6, 8, 10$ vagy 12 , akkor a 6. Táblázatból látható, hogy $[p, p]$ nem lehet optimális, mert a $p = 4, 6$ esetekben $m([p, p]) < \bar{m}_n$ és a $p = 8, 10, 12$ esetekben $m([p, p]) < m_n$ [9].

p	$n([p, p])$	$m([p, p])$	m_n
4	13	0.35355	0.36609
6	25	0.23570	0.25000
8	41	0.17677	0.18609
10	61	0.14142	0.14854
12	85	0.11785	0.12511

6. Táblázat. A $[p, p]$ rácspakolások adatai, ha $2 < p < 14$ páros szám.

b) Ha p páratlan szám, akkor $p = \sqrt{2n} - 1$. Ekkor ha $p \geq 15$ (vagyis $n \geq 104$), akkor a **2. Tételt** felhasználva

$$m([p, p]) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}-1} < \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}} < m_n.$$

Ha $p = 3, 5, 7, 11$ és 13 akkor a 7. Táblázat alapján $[p, p]$ nem lehet optimális, mert a $p = 3, 5$ esetekre $m([p, p]) < \bar{m}_n$ és a legjobb ismert $p = 7, 11$ és 13 $m([p, p]) < m_n$ [9].

p	$n([p, p])$	$m([p, p])$	m_n
3	8	0.47140	0.51763
5	18	0.28284	0.30046
7	32	0.20203	0.21313
11	72	0.12856	0.13569
13	98	0.10878	0.11610

7. Táblázat. A $[p, p]$ rácspakolások adatai, ha $2 < p < 15$ páratlan szám.

□

5.3. Javított alsó korlát mintaosztályok felhasználásával

A mintaosztályok jól használhatók arra is, hogy az elméleti úton kapott alsó korlátokat tovább javítsuk.

4. Tétel. Az m_n érték nem kisebb mint

$$\max (L_1(n), L_2(n), L_{3a}(n), L_{3b}(n), L_4(n), L_5(n), L_6(n), L_7(n), L_8(n), L_9(n)),$$

ahol

$$\begin{aligned} L_1(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n} \rceil - 1}, \\ L_2(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+1} \rceil - 3 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\ L_{3a}(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+2} \rceil - 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}, \\ L_{3b}(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+2} \rceil - 5 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\ L_4(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+3} \rceil - 3 + \sqrt{3}}, \\ L_5(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+4} \rceil - 3 + \sqrt{3}}, \\ L_6(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+5} \rceil - 4 + 3\sqrt{3}/2}, \\ L_7(n) &= \frac{k^2 - k - \sqrt{2k}}{k^3 - 2k^2}, \text{ ha } n = k(k+1), \text{ különben } 0, \\ L_8(n) &= \max_i \left\{ \sqrt{\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{q_i^2}} \right\}, \text{ ha } n = \left\lceil \frac{(p_i+1)(q_i+1)}{2} \right\rceil, p_i^2 \leq 3q_i^2 \text{ és } q_i^2 \leq 3p_i^2, i \in \mathbb{N}, \text{ különben } 0, \\ L_9(n) &= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}}. \end{aligned}$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás konstruktív. Tekintsük a korábban tárgyalt valamennyi mintaosztály, struktúraosztály, GP-beli rácspakolás által és a **2. Tétel**ben megadott alsó korlátok maximumát. Rendre kifejezve az $n = f(k)$ formulákból k -t n függvényében az egyes mintaosztályoknál és struktúraosztályoknál, és azokat behelyettesítve az adott l_k formulába rendre a tételben felírt függvényeket kapjuk. (Az L_8 definíciójában azért van szükség a maximumképzésre, mivel egy n pozitív egész számnak lehet több $n = \left\lceil \frac{(p_i+1)(q_i+1)}{2} \right\rceil, p_i^2 \leq 3q_i^2$ és $q_i^2 \leq 3p_i^2$ alakú felírása is.)

□

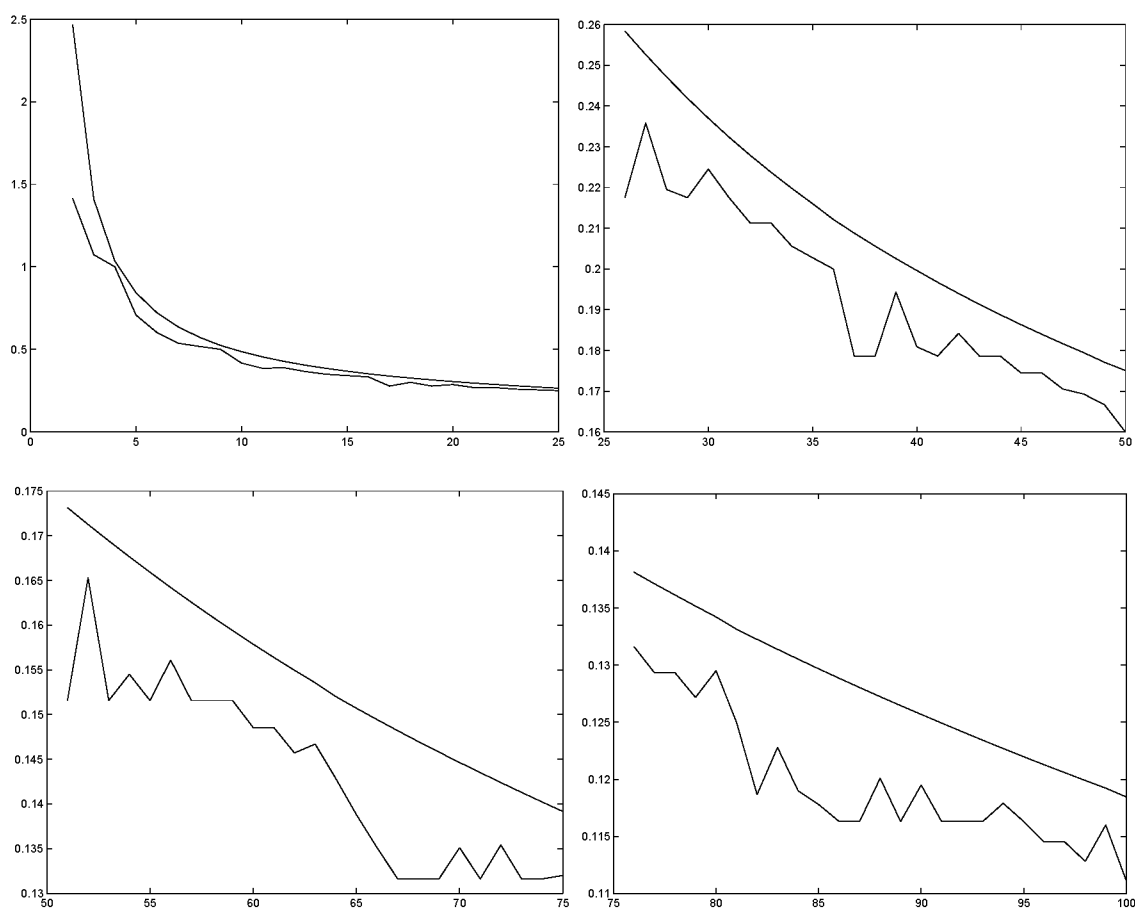
A **4. Tétel**ben kapott alsó korlátnak és a **2. Tétel**ben szereplő felső korlátnak ($\overline{m}_n$ -re felírt) egymáshoz való viszonyát láthatjuk a pontok számának függvényében a 26. ábrán. A függvény gráfja természetesen diszkrét pontokból áll, az áttekinthetőbb megjelenítés kedvéért ábrázoltam azt törtlineáris függvényként.

5.4. Éles alsó és felső korlátok a körpakolások sűrűségére

A meghatározott alsó és felső korlátok segítségével éles konstans (a körök számától független) alsó és felső korlátok adhatók a körpakolások sűrűségére. Az élességet itt úgy értem, hogy az alsó korlátnál nem lehet nagyobb, a felső korlátnál nem lehet kisebb olyan értéket megadni, hogy minden $n \geq 2$ -re azok alsó és felső korlátok legyenek.

5. Tétel. Minden $n \geq 2$ egész számra

$$(3 - 2\sqrt{2})\pi \leq d_n(\overline{r}_n, [0, 1]^2) < \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$



26. ábra: Az $\overline{m}_n$ -re adott alsó és felső korlátok megjelenítése az $n = 2 - 100$ körre.

és ezek a korlátok élesek.

BIZONYÍTÁS. A **2. Tétel**ben igazoltuk, hogy $\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}} < \overline{m}_n$. Ez az alsó korlát a sűrűségre az

$$\frac{n\pi}{(2 + \sqrt[4]{12n^2})^2} < \overline{d}_n(\overline{r}_n, [0, 1]^2)$$

alsó korlátot adja.

Az optimális körpakolások sűrűsége az $n = 30$ körig ismert, így könnyen ellenőrizhető, hogy $n = 13$ körig az optimális pakolások sűrűsége nagyobb vagy egyenlő mint

$$\overline{d}_n(\overline{r}_2, [0, 1]^2) = (3 - 2\sqrt{2})\pi \approx 0.539$$

(lásd a 8. Táblázatot).

n	$\approx d_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2)$	n	$\approx d_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2)$
2	0.5390120845	8	0.7309638253
3	0.6096448087	9	0.7853981634
4	0.7853981634	10	0.6900357853
5	0.6737651056	11	0.7007415778
6	0.6639569095	12	0.7384682239
7	0.6693108268	13	0.7332646949

8. Táblázat. Az optimális pakolások sűrűsége az $n = 2 - 13$ körszámra.

Ha $n > 13$, akkor viszont igazolható, hogy

$$(3 - 2\sqrt{2})\pi < \frac{n\pi}{(2 + \sqrt[4]{12n^2})^2} < \bar{d}_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2),$$

és az alsó korlát éles, mivel $\bar{d}_n(\bar{r}_2, [0, 1]^2) = (3 - 2\sqrt{2})\pi$.

A sűrűsége adott felső korlát ekvivalens az

$$\bar{m}_n < f_1(n) = \frac{2 + \sqrt{2\sqrt{3}n}}{\sqrt{3}n - 2}$$

egyenlőtlenséggel. Másrészt tudjuk a **3. Tétel** alapján, hogy

$$\bar{m}_n \leq f_2(n) = \frac{1 + \sqrt{1 + (n-1)\frac{2}{\sqrt{3}}}}{n-1}.$$

Rövid számolással igazolható, hogy $f_2(n) < f_1(n)$, minden $n \geq 2$ esetén.

A korlát élessége itt azt jelenti, hogy akárhogy is adunk meg $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -nél kisebb konstanst, mindig lehet találni olyan körpakolást, amelynek sűrűsége nagyobb a megadott értéknél. Az élesség megmutatásához így elég megadni egy olyan körpakolás sorozatot, amelynek sűrűsége $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -hez konvergál. A 12. ÁLLÍTÁSBAN több ilyen sorozatot is megadtam.

□

6. fejezet

Körpakolások minimálpolinomjai

Adott struktúrájú körpakolások egzisztenciájának vizsgálatánál láthattuk, hogy a körpakolásokhoz – pontelhelyezésekhez – hozzárendelhető egy kvadratikus egyenletrendszer. Ha az egyenletrendszernek van algebrai megoldása a $[0, 1]^{2n} \times (0, \sqrt{2}]$ -ben, akkor az egyenletek alapján meghatározott polinomok által generált ideál Gröbner bázisai változóiban felső trianguláris alakúak lesznek. Ha a polinomokban szereplő változókat úgy rendezzük, hogy ebben a rendezésben a legkisebb az m változó legyen, akkor a Gröbner bázis tartalmazni fog egy olyan csak m -től függő polinomot, aminek legkisebb pozitív gyöke a pontelhelyezésben adódó minimális távolság. Az előbbi tulajdonsággal rendelkező minimális fokszámú polinomot a körpakoláshoz tartozó *minimálpolinom*nak nevezzük [71, 72].

6.1. Egy körpakoláshoz tartozó minimálpolinom meghatározása

Előfordulhat, hogy egy pontelhelyezéshez tartozó minimálpolinom meghatározása nagyon egyszerű feladat. Az alábbiakban felsorolunk néhány ilyen esetet:

a) a $\text{PAT}(k^2)$ mintaosztályba tartozó pakolások minimálpolinomja

$$(k - 1)m - 1,$$

b) a $\text{PAT}_1(k^2 - 2)$ mintaosztályba tartozó pakolások minimálpolinomja

$$(4k^2 - 16k + 13)m^2 - (8k - 16)m + 4,$$

c) a $\text{PAT}_2(k(k + 1))$ mintaosztályban tartozó pakolások minimálpolinomja

$$k^3(k - 2)m^2 - 2k^2(k - 1)m + k^2 + 1.$$

A minimálpolinomok felírásának nehézsége a körpakolás struktúrájának bonyolultságán alapul.

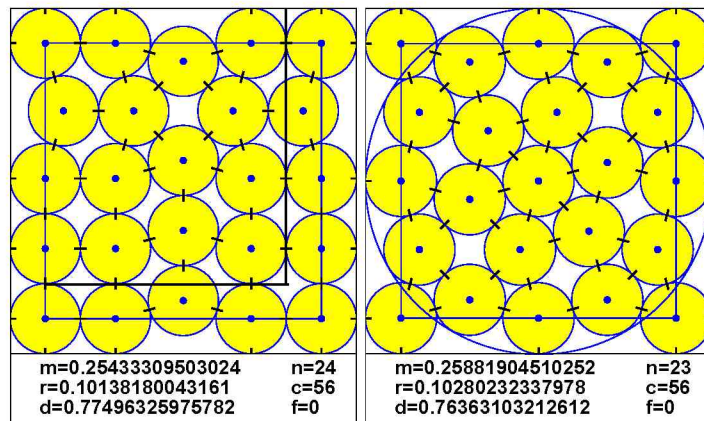
A továbbiakban azt az egyszerűbb esetek közé tartozó szituációt fogjuk alaposabban megvizsgálni, amikor egy körpakolás tartalmaz optimális részstruktúrákat. Ilyenkor a pakolás minimálpolinomja meghatározható a részstruktúrák minimálpolinomjaiból rezultánsképzéssel [91].

6.1.1. Optimális részstruktúrák

Mindenek előtt tisztázzuk az optimális részstruktúrák és az általánosított minimálpolinomok fogalmát.

15. DEFINÍCIÓ. Egy körpakolást/pontelhelyezést *optimális részstruktúrának* mondunk az $X \subset [0, 1]$ kompakt halmazban, ha a $d_{n'}(r_{n'}, [0, 1]^2)$ sűrűség maximális X -ben, ahol n' jelöli az X -beli körök számát,

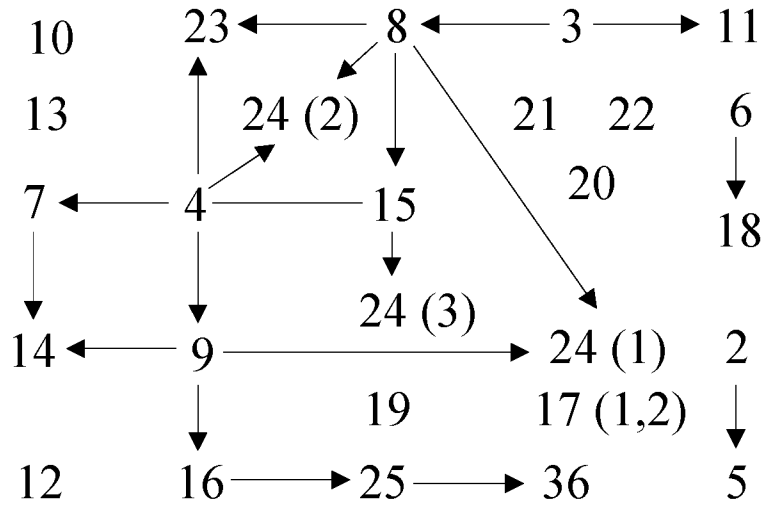
A 27. ábrán láthatunk egy példát arra, amikor X egy a négyzet oldalaival párhuzamos oldalakkal rendelkező (ún. igazított) négyzet, illetve egy olyan példát, amikor az X halmaz kör. A 24 körös pakolás bal felső sarkában található egy optimális részstruktúra 15 körrel, míg ha a 23 körös pakolásnál tekintjük a négyzetbe írható maximális $(1/2)$ sugarú kört, az tartalmazni fog egy optimális részstruktúrát, mivel ismert, hogy 19 körnek az előbbi konfigurációja adja körben a legsűrűbb elrendezést [20].



27. ábra: Két példa optimális részstruktúrákra (optimális pakolásokban).

Érdekes megfigyelni, hogy az optimális részstruktúrák előfordulása optimális körpakolásokban nem ritka esemény. A 28. ábrán látható irányított gráf azt mutatja, hogy az $n = 2 - 27$ körpakolásokra milyen optimális részstruktúra tartalmazások teljesülnek. A gráf pontjai számok, amelyek az adott értékhez tartozó optimális körpakolást szimbolizálják. Ha az a -ból nyíl mutat b -be, akkor az azt jelenti, hogy a b pontú optimális körpakolás optimális részstruktúráként tartalmazza az a körszámú optimális pakolást, ahol X egy négyzet.

16. DEFINÍCIÓ. A $p_n^I(x)$ polinomot *általánosított minimálpolinomnak* mondjuk, ha rendre $x \in \{r, m, s, \sigma\}$ és $I \in \{S, \Sigma, R, M\}$, $\bar{x}_n$ a legkisebb pozitív gyöke a $p_n^I(x)$ polinomnak, és a polinom fokszáma minimális. Legyen $P_n(x) = p_n^1(x)$.

28. ábra: Az $n = 2 - 27$ es az $n = 36$ körpakolások tartalmazási gráfja.

13. ÁLLÍTÁS. Az általánosított minimálpolinomok közötti kapcsolatok a 9. Táblázatban megadott formulákkal írhatók le:

$\mathbf{p}_n^S(r) =$	$p_n^{\Sigma:=S-2r}(m := 2r)$	$\mathbf{p}_n^\Sigma(m) =$	$p_n^{R:=\Sigma+m}(s := \frac{m}{2})$
	$p_n^{R:=S}(s := r)$		$p_n^{M:=\Sigma}(\sigma := m)$
	$p_n^{M:=S-2r}(\sigma := 2r)$		$p_n^{S:=\Sigma+m}(r := \frac{m}{2})$
$\mathbf{p}_n^R(s) =$	$p_n^{M:=R-2s}(\sigma := 2r)$	$\mathbf{p}_n^M(\sigma) =$	$p_n^{S:=M+\sigma}(r := \frac{\sigma}{2})$
	$p_n^{S:=R}(r := s)$		$p_n^{\Sigma:=M}(m := \sigma)$
	$p_n^{\Sigma:=R-2s}(m := 2s)$		$p_n^{R:=M+m}(s := \frac{\sigma}{2})$

9. Táblázat. Kapcsolat az általánosított minimálpolinomok között.

BIZONYÍTÁS. A megadott összefüggések könnyen meghatározhatók az 1. KÖVETKEZMÉNY felhasználásával.

□

A 13. ÁLLÍTÁS formuláinak használatára tekintsünk egy példát.

2. PÉLDA. Határozzuk meg a $p_{11}^S(r)$ általánosított minimálpolinomot, ha tudjuk, hogy

$$P_{11}(m) = m^8 + 8m^7 - 22m^6 + 20m^5 + 18m^4 - 24m^3 - 24m^2 + 32m - 8.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $p_n^\Sigma(m) = P_n(m/\Sigma)\Sigma^{\deg P_n}$, így $p_{11}^\Sigma(m) = m^8 + 8m^7\Sigma - 22m^6\Sigma^2 + 20m^5\Sigma^3 + 18m^4\Sigma^4 - 24m^3\Sigma^5 - 24m^2\Sigma^6 + 32m\Sigma^7 - 8\Sigma^8$.

Felhasználva a $p_n^S(r) = p_n^{\Sigma:=S-2r}(m := 2r)$ összefüggést,

$$\begin{aligned} p_{11}^S(r) &= p_{11}^{\Sigma:=S-2r}(m := 2r) = \\ &= (2r)^8 + 8(2r)^7(S-2r) - 22(2r)^6(S-2r)^2 + 20(2r)^5(S-2r)^3 + 18(2r)^4(S-2r)^4 - \\ &- 24(2r)^3(S-2r)^5 - 24(2r)^2(S-2r)^6 + 32(2r)(S-2r)^7 - 8(S-2r)^8 = -18176r^8 + \\ &+ 45056r^7S - 63360r^6S^2 + 56192r^5S^3 - 30432r^4S^4 + 9920r^3S^5 - 1888r^2S^6 + 192rS^7 - 8S^8. \end{aligned}$$

A kapott polinomot -8-cal osztva a keresett minimálpolinom így

$$p_{11}^S(r) = 2272r^8 - 5632r^7S + 7920r^6S^2 - 7024r^5S^3 + 3804r^4S^4 - 1240r^3S^5 + 236r^2S^6 - 24rS^7 + S^8.$$

6. Tétel. Tekintsünk egy pontelhelyezést az egységnégyzetben. Tegyük fel, hogy a pontelhelyezésnek van $N \geq 2$ darab optimális részstruktúrája, rendre $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N$ oldalú igazított négyzetekben. Ha f egy olyan polinom, hogy vannak olyan $1 \leq i, j \leq N$ indexek, hogy $\Sigma_i = f(\Sigma_j)$, akkor a $p_n^\Sigma(m)$ minimálpolinom kiszámolható az i . és j . optimális részstruktúra minimálpolinomjaiból az alábbi módon:

$$\begin{aligned} p_n^\Sigma(m) &= \text{Res}(p_{n_1}^{\Sigma_j}(m), p_{n_2}^{f(\Sigma_j)}(m), \Sigma_j) = \\ &= \det(\text{Syl}(p_{n_1}^{\Sigma_j}(m), p_{n_2}^{f(\Sigma_j)}(m), \Sigma_j)). \end{aligned}$$

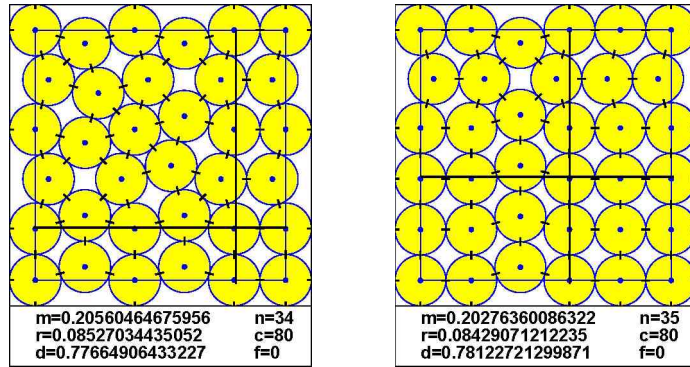
BIZONYÍTÁS. A bizonyítás közvetlenül adódik a rezultáns fogalmából. Ha az f polinommal meg tudjuk adni két olyan igazított négyzet oldalhosszúsága között a kapcsolatot, amelyben optimális részstruktúra van, akkor a $[0, 1]^2$ -ben megadott körpakolás minimálpolinomját megkaphatjuk a részstruktúrák minimálpolinomai-ból (amelyeknek két közös gyöke m és Σ_j) úgy, hogy felírjuk a rezultánsukat, eliminálva ezzel Σ_j -t. □

3. PÉLDA. Határozzuk meg a $P_{34}(m)$ minimálpolinomot, a $p_{23}^{\Sigma_1}(m)$ és $p_4^{\Sigma_2}(m)$ minimálpolinomok felhasználásával (29. ábra).

Ebben a példában

$$f(x) = 1 - x,$$

$$p_{23}^{\Sigma_1}(m) = 16m^4 - 16m^2\Sigma_1^2 + \Sigma_1^4, \quad p_4^{\Sigma_2}(m) = m - \Sigma_2 = m - 1 + \Sigma_1,$$

29. ábra: Körpakolások $n = 34$ és $n = 35$ körszámra.

$$P_{34}(m) = \text{Res}(p_{23}^{\Sigma_1}(m), p_4^{1-\Sigma_1}(m), \Sigma_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ m-1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m-1 & 1 & 0 & -16m^2 \\ 0 & 0 & m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m-1 & 16m^4 \end{vmatrix} = m^4 + 28m^3 - 10m^2 - 4m + 1.$$

A következő állításban szereplő összefüggést szintén felhasználhatjuk minimálpolinomok előállításához.

14. ÁLLÍTÁS. Tekintsük a $P_n(m)$ minimálpolinomot és tegyük fel, hogy

$$m_n = \frac{am_{n'} + b}{cm_{n'} + d} \quad \text{vagyis} \quad m_{n'} = \frac{b - dm_n}{cm_n - a},$$

ahol a, b, c , és d valós számok. Ekkor a $P_{n'}(m)$ minimálpolinom meghatározható az alábbi módon:

$$P_{n'}(m) = P_n\left(\frac{am + b}{cm + d}\right) (cm + d)^{\deg P_n}.$$

BIZONYÍTÁS. Könnyű látni, hogy $P_n\left(\frac{am+b}{cm+d}\right) (cm+d)^{\deg P_n}$ valóban polinom, és $m_{n'}$ gyöke lesz ennek. De ez egy minimálpolinom is, mert ha nem az volna, akkor lenne egy másik olyan R polinom, hogy $R(m_{n'}) = 0$ és

$$\deg R < \deg P_n\left(\frac{am + b}{cm + d}\right) (cm + d)^{\deg P_n}.$$

De ez nem lehetséges, mivel ekkor

$$(\deg R =) \deg R\left(\frac{b - dm}{cm - a}\right) (cm - a)^{\deg R} < \deg P_n$$

teljesülne, ami ellentmond annak, hogy $P_n(m)$ minimálpolinom.

□

4. PÉLDA Határozzuk meg a $P_{35}(m)$ minimálpolinomot (29. ábra).

Két különböző módon is megadjuk $P_{35}(m)$ -t, előbb a **6. Tételen** alapulva, majd a 14. ÁLLÍTÁS segítségével.

a) A **6. Tételen** alapulva, felhasználva a $p_{15}^{\Sigma_1}(m)$ és $p_9^{\Sigma_2}(m)$ minimálpolinomokat,

$$f(x) = 1 - x,$$

$$p_{15}^{\Sigma_1}(m) = 2m^4 - 4m^3\Sigma_1 - 2m^2\Sigma_1^2 + 4m\Sigma_1^3 - \Sigma_1^4,$$

$$p_9^{\Sigma_2}(m) = 2m - \Sigma_2 = 2m - 1 + \Sigma_1,$$

$$P_{35}(m) = \text{Res}(p_{15}^{\Sigma_1}(m), p_9^{1-\Sigma_1}(m), \Sigma_1) =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2m-1 & 1 & 0 & 0 & 4m \\ 0 & 2m-1 & 1 & 0 & -2m^2 \\ 0 & 0 & 2m-1 & 1 & -4m^3 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-1 & 2m^4 \end{vmatrix} = 46m^4 - 84m^3 + 50m^2 - 12m + 1.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk természetesen akkor is, ha a 13. ÁLLÍTÁST használjuk fel.

b) Mivel

$$P_{24}(m) = m^4 - 16m^3 + 20m^2 - 8m + 1$$

és $m_{35} = 2r_{24}$, ezért

$$m_{35} = 2r_{24} = \frac{m_{24}}{m_{24} + 1}, \text{ vagyis } m_{24} = \frac{m_{35}}{1 - m_{35}},$$

ami alapján

$$P_{35}(m) = P_{24}\left(\frac{m}{1-m}\right)(1-m)^4 = 46m^4 - 84m^3 + 50m^2 - 12m + 1.$$

6.1.2. Az általános eset tárgyalása

Az általános esetben, vagyis akkor, ha a körpakolás nem tartalmaz olyan a jellegzetességeket, mint például szimmetria vagy optimális részstruktúrák, akkor elvileg további módszer lehet még a minimálpolinom meghatározására a polinomrendszer Gröbner bázisából kiválasztani a csak m -től függő polinomot (olyan rendezés mellett, amelyben m a legkisebb). Ekkor a teljes Gröbner bázis meghatározása nem szükséges (és felesleges is), mivel bizonyos szimbolikus algebrai programcsomagok (pl. Maple, Mathematica) támogatják is azt, hogy csak a minimálpolinomot határozzák meg a Gröbner bázisból. Bizonyos esetekben használható ez a módszer is a minimálpolinom megadására.

5. PÉLDA. Határozzuk meg $P_{10}(m)$ minimálpolinomot.

Az $n = 10$ körpakolásnak megfelelő kvadratikus egyenletrendszer (lásd a korábbi 14. ábrát):

$$\begin{array}{ll} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = m^2 & (x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 = m^2 \\ (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 = m^2 & (x_2 - x_5)^2 + (y_2 - y_5)^2 = m^2 \\ (x_5 - x_6)^2 + (y_5 - y_6)^2 = m^2 & (x_3 - x_6)^2 + (y_3 - y_6)^2 = m^2 \\ (x_4 - x_7)^2 + (y_4 - y_7)^2 = m^2 & (x_5 - x_7)^2 + (y_5 - y_7)^2 = m^2 \\ (x_7 - x_9)^2 + (y_7 - y_9)^2 = m^2 & (x_7 - x_{10})^2 + (y_7 - y_{10})^2 = m^2 \\ (x_8 - x_{10})^2 + (y_8 - y_{10})^2 = m^2 & (x_6 - x_8)^2 + (y_6 - y_8)^2 = m^2. \end{array}$$

Felhasználva a 44. oldalon leírt egyszerűsítési lehetőségeket, az előbbi kvadratikus egyenletrendszer redukálható az alábbira:

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_1^2 &= m^2, \\ x_{10}^2 + (1 - y_1 - m)^2 &= (2m)^2, \\ (1 - x_{10})^2 + (1 - y_5 - m)^2 &= m^2, \\ (1 - x_2 - m)^2 + y_5^2 &= m^2, \\ (2 - 2m - x_{10})^2 + (2y_5 - 1 - y_1 - m)^2 &= (2m)^2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer egyenleteinek tagjait baloldalra rendezve nullára redukáljuk a jobboldalakat. A baloldalon előálló polinomok által generált ideál Gröbner bázisában szereplő minimálpolinomot a Maple 9 Gröbner bázist meghatározó csomagjával az alábbi módon kaphatjuk meg:

```
>with(Groebner):univpoly(m, [polinomok], {x2, y1, x10, y5, m});
```

ahol természetesen a `polinomok` helyére az előbb meghatározott polinomokat kell vesszővel elválasztva felsorolni. A megoldást lásd a 6.1.4. részben.

6.1.3. Minimálpolinomok megsejtése kísérleti úton

A Maple 9 programcsomag segítségével egy pontelhelyezéshez tartozó minimálpolinom meg is sejtethető, ha kellő számú értékes tizedesjegyet ismerjük az m_n numerikus értéknek. Felhasználva a Maple

```
>Digits:=a;
>with(PolynomialTools):MinimalPolynomial(m,b);
```

eljárását, ahol a az m_n értékes tizedesjegyeinek a száma és b a fokszáma annak a minimálpolinomnak, amellyel interpolálunk. A 10. Táblázatban található az m_n érték meghatározásához szükséges azon pontosság, amellyel a Maple már megadja a keresett $P_n(m)$ minimálpolinomot. Ennek a módszernek a használatához viszont garantált megbízhatósággal kell ismerni az m_n tizedesjegyeit, így az

n	fokszám	pontosság	n	fokszám	pontosság
2	2	3	18	2	10
3	4	10	19	10	58
4	1	3	20	2	10
5	2	4	23	4	10
6	2	9	24	4	10
7	2	6	25	1	4
8	4	5	27	2	15
9	1	3	30	2	13
10	18	193	34	4	10
11	8	20	35	4	13
12	2	11	36	1	4
13	40	1217	39	2	13
14	2	7	42	2	13
15	4	7	52	2	14
16	1	4	56	2	14
17	8	19	99	2	17

10. Táblázat. A szükséges pontosság a minimálpolinomok meghatározásához.

intervallumos számolásokkal nyert, vagy azzal ellenőrzött eredményeknek itt fontos szerep jut.

6.1.4. A meghatározott minimálpolinomok

Az eddig meghatározott minimálpolinomok listája:

$$\begin{aligned}
n = 2 & \quad m^2 - 2 \\
n = 3 & \quad m^4 - 16m^2 + 16 \\
n = 4 & \quad m - 1 \\
n = 5 & \quad 2m^2 - 1 \\
n = 6 & \quad 36m^2 - 13 \\
n = 7 & \quad m^2 - 8m + 4 \\
n = 8 & \quad m^4 - 4m^2 + 1 \\
n = 9 & \quad 2m - 1 \\
n = 10 & \quad 1180129m^{18} - 11436428m^{17} + 98015844m^{16} - 462103584m^{15} \\
& \quad + 1145811528m^{14} - 1398966480m^{13} + 227573920m^{12} + 1526909568m^{11} \\
& \quad - 1038261808m^{10} - 2960321792m^9 + 7803109440m^8 - 9722063488m^7 \\
& \quad + 7918461504m^6 - 4564076288m^5 + 1899131648m^4 - 563649536m^3 \\
& \quad + 114038784m^2 - 14172160m + 819200 \\
n = 11 & \quad m^8 + 8m^7 - 22m^6 + 20m^5 + 18m^4 - 24m^3 - 24m^2 + 32m - 8 \\
n = 12 & \quad 225m^2 - 34 \\
n = 13 & \quad 5322808420171924937409m^{40} + 586773959338049886173232m^{39} \\
& \quad + 13024448845332271203266928m^{38} - 12988409567056909990170432m^{37} \\
& \quad - 66972175395892949739372512m^{36} - 271451157211281654252175360m^{35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +1438322342979585076139742976m^{34} - 335429895467663916497996800m^{33} \\
& -6543699259726848821592216832m^{32} + 9441371361011345362166468608m^{31} \\
& +10182180602633501397232254976m^{30} - 42246019864541071922661621760m^{29} \\
& +37620100408876038921186476032m^{28} + 28699095956807539331396009984m^{27} \\
& -102587608293645346411004952576m^{26} + 103509313296807875445571190784m^{25} \\
& -23909360523055293307841740800m^{24} - 62735581440162634955836358656m^{23} \\
& +88454871551963142041952583680m^{22} - 53012494559549527012040245248m^{21} \\
& +2135173605242212884072628224m^{20} + 26378985900767549703436894208m^{19} \\
& -26497225761631816480192462848m^{18} + 12731474183761933022491836416m^{17} \\
& -398432339928038268662185984m^{16} - 4422001291286852186186711040m^{15} \\
& +3658751900977247115934695424m^{14} - 1429726216634427968279543808m^{13} \\
& +57770773621828718826618880m^{12} + 275582370688699861317976064m^{11} \\
& -171632310725283375512289280m^{10} + 46974915155899860050247680m^9 \\
& +1760067432596599241441280m^8 - 7491112055212411797372928m^7 \\
& +3652998504696614282592256m^6 - 1072642406499215430647808m^5 \\
& +217086289997205686190080m^4 - 30811405631471617048576m^3 \\
& +2960075719794736758784m^2 - 174103532094609162240m \\
& +4756927106410086400 \\
n = 14 & \quad 13m^2 - 16m + 4 \\
n = 15 & \quad 2m^4 - 4m^3 - 2m^2 + 4m - 1 \\
n = 16 & \quad 3m - 1 \\
n = 17 & \quad m^8 - 4m^7 + 6m^6 - 14m^5 + 22m^4 - 20m^3 + 36m^2 - 26m + 5 \\
n = 18 & \quad 144m^2 - 13 \\
n = 19 & \quad 242m^{10} - 1430m^9 - 8109m^8 + 58704m^7 - 78452m^6 \\
& \quad -2918m^5 + 43315m^4 + 39812m^3 - 53516m^2 + 20592m \\
& \quad -2704 \\
n = 20 & \quad 128m^2 - 96m + 17 \\
n = 23 & \quad 16m^4 - 16m^2 + 1 \\
n = 24 & \quad m^4 - 16m^3 + 20m^2 - 8m + 1 \\
n = 25 & \quad 4m - 1 \\
n = 27 & \quad 1600m^2 - 89 \\
n = 30 & \quad 1202m^2 - 252m + 13 \\
n = 34 & \quad m^4 + 28m^3 - 10m^2 - 4m + 1 \\
n = 35 & \quad 46m^4 - 84m^3 + 50m^2 - 12m + 1 \\
n = 36 & \quad 5m - 1 \\
n = 39 & \quad 1732m^2 - 68m - 17 \\
n = 42 & \quad 864m^2 - 360m + 37 \\
n = 52 & \quad 7056m^2 - 193 \\
n = 56 & \quad 1715m^2 - 588m + 50 \\
n = 99 & \quad 28900m^2 - 389
\end{aligned}$$

Az $n = 19$ -es esetre a [110] dolgozatban 14-ed fokú minimálpolinommal találkozhatunk. A szerzők eredménye nem téves, de talán nem vették észre, hogy az a polinom maradék nélkül osztható az $m^2(2m^2 + 2m - 1)$ polinommal. Ha ezt tesszük, megkapjuk a tényleges minimálpolinomot, ami itt valójában 10-ed fokú.

6.2. A körpakolásokhoz és pontelhelyezésekhez tartozó egzakt értékek

A minimálpolinomok birtokában a körpakolások paraméterei tetszőleges pontossággal numerikus úton meghatározhatók. A minimálpolinomok segítségével sok esetben megadható a pakoláshoz vagy pontelhelyezéshez tartozó egzakt érték is

n	r_n	m_n
2	$\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$
3	$\frac{1}{2}(8 - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6})$	$\sqrt{6} - \sqrt{2}$
4	$\frac{1}{4}$	1
5	$\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
6	$\frac{1}{46}(-13 + 6\sqrt{13})$	$\frac{1}{6}\sqrt{13}$
7	$\frac{1}{13}(4 - \sqrt{3})$	$4 - 2\sqrt{3}$
8	$\frac{1}{4}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$	$\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
11	(lásd alul)	(lásd alul)
12	$\frac{1}{382}(-34 + 15\sqrt{34})$	$\frac{1}{15}\sqrt{34}$
14	$\frac{1}{33}(6 - \sqrt{3})$	$\frac{2}{13}(4 - \sqrt{3})$
15	$\frac{1}{4}(8 - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6})$	$\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$
16	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
18	$\frac{1}{262}(-13 + 12\sqrt{13})$	$\frac{1}{12}\sqrt{13}$
20	$\frac{1}{482}(65 - 8\sqrt{2})$	$\frac{1}{16}(6 - \sqrt{2})$
23	$\frac{1}{2}(-7 - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$
24	$\frac{1}{92}(21 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{6})$	$\frac{1}{2}(8 - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{6})$
25	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$
27	$\frac{1}{3022}(-89 + 40\sqrt{89})$	$\frac{1}{40}\sqrt{89}$
30	$\frac{1}{1202}(126 - 5\sqrt{10})$	$\frac{1}{75}(20 - \sqrt{10})$
34	$\frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$	$-7 - 5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{6}$
35	(lásd alul)	$\frac{1}{46}(21 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{6})$
36	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{5}$
39	$\frac{1}{866}(-17 + 15\sqrt{34})$	$\frac{1}{764}(-34 + 15\sqrt{34})$
42	$\frac{1}{2522}(217 - 12\sqrt{3})$	$\frac{1}{72}(15 - \sqrt{3})$
52	$\frac{1}{13726}(-193 + 84\sqrt{193})$	$\frac{1}{84}\sqrt{193}$
56	$\frac{1}{4706}(344 - 7\sqrt{14})$	$\frac{1}{245}(42 - \sqrt{14})$
99	$\frac{1}{57022}(170\sqrt{389} - 389)$	$\frac{\sqrt{389}}{170}$

$$r_{11} = \frac{1}{568} \left(176 - 9\sqrt{2} - 14\sqrt{3} - 13\sqrt{6} - 2\sqrt{-16523 + 12545\sqrt{2} - 9919\sqrt{3} + 6587\sqrt{6}} \right)$$

$$m_{11} = \frac{1}{4} \left(-4 - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + \left(4 + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \right) \sqrt{1 + 2\sqrt{2}} \right)$$

$$r_{35} = \frac{1}{772}(112 - 17\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 15\sqrt{6})$$

11. Táblázat. Körpakolások egzakt értékei.

gyökjelekkel felírva. Ez természetesen nem meglepő, hiszen ha 4-nél nem magasabbfokú a polinom, akkor jól ismertek a megoldóképletek annak gyökeinek algebrai úton való meghatározására. Érdekes viszont, hogy előfordulhat, hogy 4-nél magasabbfokú minimálpolinomnak is meghatározhatjuk a gyökeit algebrai úton és a segítséget ehhez éppen a minimálpolinomhoz tartozó körpakolás struktúrája adja. A 11. Táblázatban megadtam az eddig kiszámolt egzakt értékeket 100 körig.

Az $\overline{m}_{11}$ egzakt érték meghatározására most külön kitérünk, hiszen a $P_{11}(m) = 0$ egyenlet szimbolikus megoldását számítógépes algebrai programmal is csak úgy tudtuk meghatározni, hogy hozzá erősen kihasználtuk azt, hogy az adott egyenletben szereplő függvény egy pontelhelyezésnek a minimálpolinomja.

6.2.1. A $P_{11}(m) = 0$ egyenlet algebrai megoldása

Az $m^8 + 8m^7 - 22m^6 + 20m^5 + 18m^4 - 24m^3 - 24m^2 + 32m - 8 = 0$ egyenlet azok közé a 4-nél magasabb fokszámú algebrai egyenletek közé tartozik, amelyek gyökjelekkel megoldhatók. A megoldás megtalálása azonban még szimbolikus algebrai programcsomag segítségével sem egyszerű. Ha közvetlenül pl. a Maple `roots` megoldóját meghívjuk erre az egyenletre a program semmilyen szimbolikus megoldást nem fog adni. Ennek ellenére az egyenlet mégis megoldható, és a Maple segítségével meg is lehet találni a megoldást, de ehhez az kell, hogy előre meg tudjuk mondani a rendszernek, hogy milyen kvadratikus testben keresse az egyenlet gyökeit. Az előbbi egyenlet esetén ez a kvadratikus test a

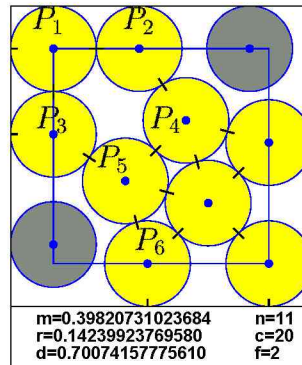
$$\mathbb{Q} \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{1 + 2\sqrt{2}} \right].$$

Ha előre megsejtjük, hogy ebben a testben kell a megoldást keresni, a Maple megadja a keresett egzakt értéket.

Természetesen adódik a kérdés, hogy honnan tudjuk a megoldás ismerete nélkül azt megmondani, hogy melyik az az alkalmas kvadratikus test, amelyikben a gyököket keressük. A $P_{11}(m) = 0$ egyenlet szimbolikus megoldása esetén ehhez a segédeszközt éppen a $P_{11}(m)$ minimálpolinomhoz tartozó körpakolás struktúrája fogja szolgáltatni. Az ötlet az, hogy vizsgáljuk meg, milyen radikálok jelennek meg akkor, ha a pontelhelyezés pontjai közötti távolságokat $\overline{m}_{11}$ segítségével próbáljuk meg felírni, majd az így előálló radikálokkal bővítsük a racionális számok testét.

Az előbbi testbővítésnél használt gyököket így találhatjuk meg a pontelhelyezésben (a 30. ábra jelöléseit használva):

- a) $\overline{P_2 P_3} = \sqrt{2\overline{m}_{11}},$
- b) $\overline{P_4 P_6} = \sqrt{3\overline{m}_{11}},$
- c) A $P_2 P_3 P_4 P_5$ trapéz magassága pedig $\frac{1}{2} \sqrt{1 + 2\sqrt{2\overline{m}_{11}}}.$



30. ábra: 11 kör optimális körpakolása négyzetben.

6.3. Minimálpolinomokon alapuló osztályozás

Az 5. fejezetben tárgyalt mintaosztályokat az alapján határoztuk meg, hogy az egy osztályba tartozó pakolások struktúrái hasonlítottak egymáshoz, így egységes módon, algoritmikusan leírhatóak voltak ezek a pakolások. Az egy osztályon belüli pakolások köreinek száma között számelméleti kapcsolat volt, amelyet jól használhattunk az osztály azonosítására.

Természetesen adódik a kérdés, hogy milyen módon osztályozzuk a többi olyan körpakolást, amelynek struktúrái algoritmikusan nehezen felfedhetők. A minimálpolinomok itt is segítségünkre lehetnek. Az alapötlet az, hogy kerüljenek egy osztályba az azonos típusú minimálpolinommal rendelkező pakolások. Ha ezt megtesszük, több korábban definiált mintaosztállyal fogunk ismét találkozni. Az itt következő felsorolás az első 100 körpakolásra terjed ki, és természetesen csak a ma ismert, a 6.1.4. részben leírt eseteket tárgyalja.

6.3.1. A lineáris osztály

Bizonyítottan lineáris ($P_n(m) = am + b$) minimálpolinommal az $n = 4, 9, 16, 25$ és sejthetően a 36 körszámokhoz tartozó pakolások rendelkeznek. Ezek éppen a $\text{PAT}(k^2)$ mintaosztály elemei lesznek, a minimálpolinomjuk általános alakja így

$$P_n(m) = (k - 1)m - 1.$$

6.3.2. A kvadratikus osztály

A kvadratikus osztályba azok a pakolások tartoznak, amelyek kvadratikus minimálpolinommal rendelkeznek. Itt azonban megkülönböztetünk két alosztályt aszerint, hogy a kvadratikus polinom tartalmaz-e lineáris tagot vagy sem.

1. alosztály

Az 1. alosztályba azok a kvadratikus minimálpolinommal rendelkező pakolások tartoznak, amelyek $P_n(m) = am^2 + b$ alakúak, vagyis polinomjukban a lineáris tag együtthatója 0.

Egyrészt ilyen pakolások lesznek bizonyítottnan az $n = 5, 18, 27$ és sejtetően a 39 és az 52 körszámúak, vagyis éppen a $\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ mintaosztály elemei. A hozzájuk tartozó minimálpolinom általános alakja

$$P_n(m) = 4k^2(k-1)m^2 - 5k^2 + 8k - 4.$$

Másrészt ilyen pakolások lesznek bizonyítottnan az $n = 2, 6, 12$ körszámúak, vagyis éppen a $\mathbf{PAT}_1(k(k+1))$ mintaosztály elemei. A hozzájuk tartozó minimálpolinom általános alakja

$$P_n(m) = k^2(2k-1)^2m^2 - 5k^2 + 4k - 1.$$

Továbbá sejtetően ebbe az alosztályba tartozik még az $n = 99$ eset is.

2. alosztály

A 2. alosztályba azon kvadratikus minimálpolinommal rendelkező pakolások tartoznak, amelyek $P_n(m) = am^2 + bm + c$ alakúak, ahol a, b és c nem 0.

Egyrészt bizonyítottnan ilyen pakolások lesznek az $n = 7, 14$ körszámúak, vagyis éppen a $\mathbf{PAT}_1(k^2 - 2)$ mintaosztály elemei. A hozzájuk tartozó minimálpolinom általános alakja

$$P_n(m) = (4k^2 - 16k + 13)m^2 - (8k - 16)m + 4.$$

Másrészt bizonyítottnan ilyen pakolások lesznek az $n = 20, 30$ és sejtetően még a 42 és az 56 körszámúak, vagyis éppen a $\mathbf{PAT}_2(k(k+1))$ mintaosztály elemei. A hozzájuk tartozó minimálpolinom általános alakja

$$P_n(m) = k^3(k-2)m^2 - 2k^2(k-1)m + k^2 + 1.$$

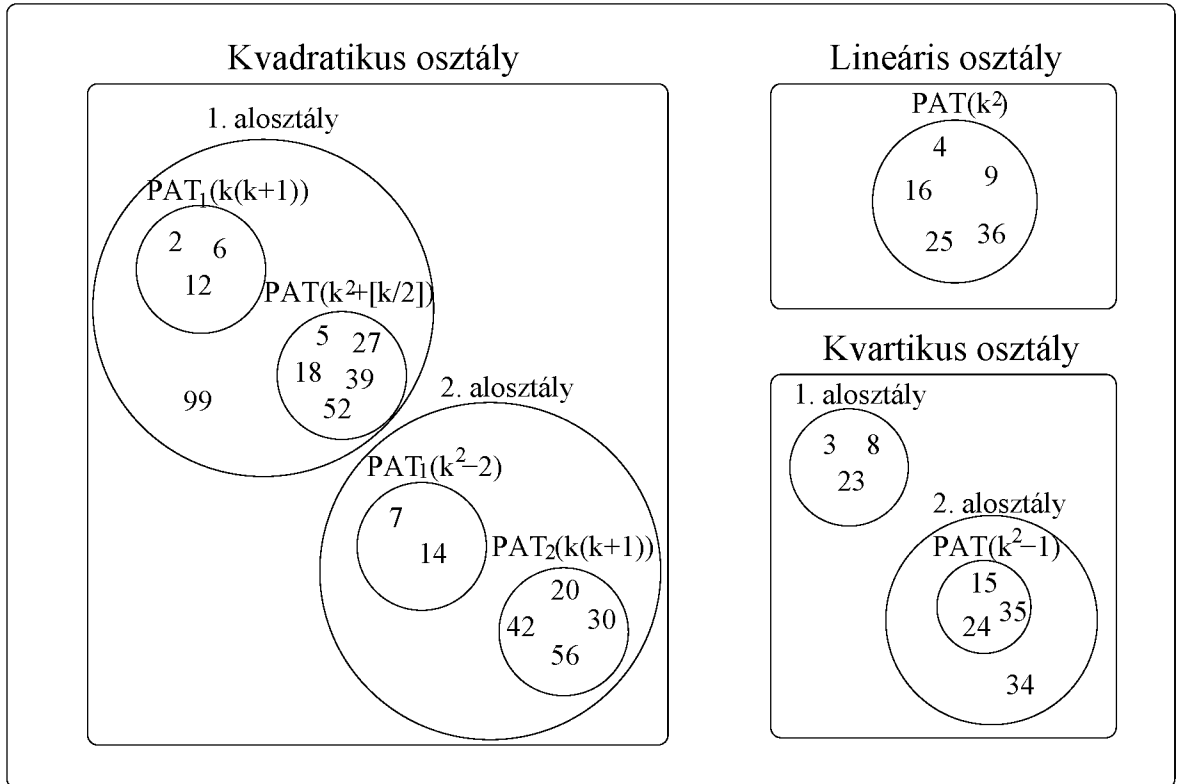
6.3.3. A kvartikus osztály

A kvartikus osztályba azok a pakolások tartoznak, amelyeknek minimálpolinomja negyedfokú. A kvadratikus esethez hasonlóan itt is megkülönböztetünk két alosztályt aszerint, hogy a minimálpolinom tartalmaz-e köbös és lineáris tagot vagy sem.

1. alosztály

Ebbe az alosztályba azokat a pakolásokat soroltam, amelyek minimálpolinomja $am^4 + cm^2 + e$ alakú. Ilyenek lesznek az $n = 3, 8$ és 23 körszámokhoz tartozó esetek.

KÖRPAKOLÁSOK



31. ábra: Körpakolások osztályozása.

2. alosztály

Itt a minimálpolinomok $am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e$ alakúak, ahol $(a, b, c, d$ és e nem 0). Egyrészt ilyen minimálpolinommal rendelkeznek bizonyítottan az $n = 15, 24$ és sejtetően az $n = 35$ körszámokhoz tartozó pakolások, vagyis a $PAT(k^2 - 1)$ mintaosztály $k = 4, 5, 6$ értékekhez tartozó esetei. Ekkor a minimálpolinom általános alakja így adható meg:

$$P_n(m) = (k^4 - 12k^3 + 50k^2 - 84k + 46)m^4 + 4(-k^3 + 9k^2 - 25k + 21)m^3 + \\ + 2(3k^2 - 18k + 25)m^2 - 4(k - 3)m + 1.$$

Sejtetően idetartozik még az $n = 34$ eset is.

A 31. ábrán az előbb meghatározott osztályokat és a hozzájuk tartozó pakolásokat tekinthetjük meg.

6.3.4. Néhány magasabb rendű osztály

Az eddig ismert minimálpolinomok között találhatunk két 8-adfokú polinomot ($n = 11$ és 17), valamint egy-egy 10-ed fokú ($n = 19$), 18-ad fokú ($n = 10$) és egy 40-ed fokú ($n = 13$) minimálpolinomot is. Arra, hogy milyen más körpakolások, osztályok és milyen egyéb minták írhatók még itt le, további kutatások deríthetnek majd fényt.

Befejezésül megemlítem, hogy a disszertáció benyújtásával párhuzamosan készül P. G. Szabó, M. Cs. Markót, T. Csendes, E. Specht, L. G. Casado and I. García, *New Approaches to Circle Packing into the Square (With Program Codes)* című kötetünk is [98], amelynek alapját Markót Mihály Csaba doktori értekezése [52] és a jelen disszertáció adja.

Összefoglalás

Ez az értekezés a négyzetben való legsűrűbb körpakolás problémájában a doktori tanulmányaim és az azt követő néhány év alatt elért legfontosabb kutatási eredményeimet tartalmazza. Igyekeztem a teljességre való törekvés igényével összeállítani és naprakészen tartani a témakör bibliográfiáját és ennek alapján feldolgozni a korábbi eredményeket. A történeti háttér bemutatása közben sikerült néhány, a matematikatörténet számára addig nem ismert megállapítást is tennem.

A vizsgált körpakolási feladatnak az **1. Tétel**ben több különböző geometriai alakját is megadtam és igazoltam azok ekvivalenciáját. Mivel a problémával, mint globális optimalizálási feladattal is foglalkoztam, így a feladat matematikai modelljeit besoroltam a matematikai programozás megfelelő problémaosztályaiba is. Kutatásaimnak egyik fontos tapasztalata volt, hogy a probléma optimalizálási feladatként való megközelítései közül csak olyan eljárások hatékonyak, amelyek erősen kihasználják a feladat geometriai sajátosságait is.

Először azzal foglalkoztam, hogy elméleti úton, számítógép felhasználása nélkül milyen korlátokat tudok megadni az optimum értékére. A **2.** és a **3. Tétel**ben bizonyított korlátok segítségével így kevesebb, mint $2/(n - 1)$ abszolút hibával közelítettem meg az optimális értéket.

Természetesnek tűnt a gondolat, hogy javítsuk alsó korlátainkat valamilyen globális optimalizálási módszernek számítógépes alkalmazásával. Több próbálkozás után végül a TA (Threshold Accepting) eljárásnak az SASS (Single Agent Stochastic Search) lokális keresővel a feladatra való specializálása tűnt jól használhatónak, amit bizonyít az is, hogy a szakirodalom több korábbi eredményét sikerült megjavítanom vele.

A numerikus eredményeket a PROFIL/BIAS C++ könyvtár intervallum matematikai eljárásainak felhasználásával garantált megbízhatóvá tettem, így azok matematikai szigorúsággal, számítógéppel bizonyítottak. Megvizsgáltam a körpakolások struktúrája egzisztencia problémáját is a Gröbner-bázisok elméletének felhasználásával, vagyis, hogy számítógéppel hogyan lehet igazolni egy körpakolásnak adott struktúrával való létezését. Egy a témakör neves monográfiájába tévesen bekerült körpakolás példáján keresztül azt is megmutattam, hogy hogyan lehet cáfolni egy pakolás nemlétezését.

A bizonyítottan optimális, és a ma ismert legjobb körpakolások segítségével tanulmányoztam azok struktúráját. Több minta- és struktúraosztályt határoztam meg és soroltam be azokba a konkrét eseteket. Az osztályozást itt az azonos módon algoritmikusan leírható struktúra, és az ezen leírásoknak eleget tevő pakolások körszámainak számelméleti kapcsolata adta. Külön kitértem a szakirodalom egy végtelen körpakolás-sorozatára vonatkozó sejtésére, amelynek alapján vizsgáltam a rácspakolások osztályát és a bizonyított rácspakolásokra támaszkodva további négy olyan körpakolás-sorozatot adtam meg, amelynek elemei sűrűsége $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -höz konvergál. A mintaosztályok felhasználásával a **4. Tétel**ben tovább javítottam az elméleti úton meghatározott alsó korlátokat. Az **5. Tétel**ben éles konstans alsó és felső határt is adtam a sűrűségre.

Az értekezés utolsó fejezetében a körpakolásokhoz rendelhető minimálpolinomokkal foglalkoztam. Itt arra a kérdésre kerestem a választ, hogy amennyiben egy körpakolás tartalmaz optimális részstruktúrákat, akkor a részstruktúrák általánosított minimálpolinomjaiból hogyan határozható meg a pakolás minimálpolinomja. A problémát egy rezultánsképzést használó technikával oldottam meg a **6. Tétel**ben. Az eljárás használatát több példán keresztül is demonstráltam. A dolgozatban az első száz esetre vonatkozólag közöltem az eddig meghatározott minimálpolinomokat és a körpakolásokhoz tartozó egzakt értékeket. Itt külön kitértem a $P_{11}(m) = 0$ egyenlet algebrai megoldására, amely számítógépes algebrai programcsomag segítségével is úgy volt lehetséges, hogy a körpakolás struktúrája alapján megsejtettem, hogy melyik az az alkalmas kvadratikus test, ahol a gyököt keresni kell. A disszertációt a körpakolásoknak egy a minimálpolinimokon alapuló osztályozása zárja, amelynek során lineáris, kvadratikus és kvartikus osztályainak és a korábban tárgyalt mintaosztályok kapcsolatára hívtam fel a figyelmet.

Summary

The dissertation contains the results of my research on the densest packing of equal circles in a square problem, during my PhD studies and the next few years. I tried to compile and update the complete bibliography of this topic, and to evaluate the earlier results based on the literature. In the presentation of the historical background, I have highlighted some previously unknown facts too.

In **Theorem 1** I gave some geometrical forms of the problem and I proved their equivalence. Since I worked on the problem as a global optimization problem so I classified its mathematical models into the suitable problem classes of the mathematical programming. An important experience of my research was to realize that those methods were efficient which strongly used the geometrical properties of the problem.

First of all, I investigated how theoretical bounds can be determine for the optimum value. I have approximated the optimum with less than $2/(n - 1)$ absolute error based on the bounds of **Theorem 2** and **3**.

It was a natural idea to improve the lower bounds by applying a computer using global optimization technology. After some trials, the TA (Threshold Accepting) method with the modified SASS (Single Agent Stochastic Search) local search appeared to be useful, and I could improve some previously known results with this method.

I checked the numerical results by interval arithmetic computations using the procedures of PROFIL/BIAS C++ library, so their reliability is now proved by computer. I have investigated the problem of the existency of the structure of the circle packings based on the theory of Groebner bases, namely how the existency of a circle packing can be proved with a given structure. I showed the refutation of a circle packing based on the mistake of an example of a famous monograph.

Using the proven and the best known circle packings, I have investigated the structures of the packings, determined some pattern- and structure classes and included the special cases into them. The classification was based on a common algorithmical description of the structures and a the number theoretical relationship of the number of the circles. I studied separately a conjecture on an infinite circle packing sequence of the literature and I investigated the grid packing class.

I have determined four new circle packing sequences, the densities of which tend to $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$. Based on the pattern classes in **Theorem 4**, I have improved the theoretical bounds too. I gave sharp constant lower and upper bounds of the density in **Theorem 5**.

In the last part of the dissertation I worked on the minimal polynomials of the packings. I have investigated the question whether a circle packing contains optimal substructures, how the minimal polynomial of the packing can be determined based on the general minimal polynomials of the substructures. I solved this problem by using the resultants in the **Theorem 6**. I demonstrated some examples, how the method can be used. I published here the minimal polynomials and the exact values for some cases until 100 circles. I studied separately the algebraic solution of the $P_{11}(m) = 0$ equation, where I guessed the suitable quadratical field based on the structure of the packing and I have found the exact value by a CAS (Computer Algebra System). The is dissertation finished by a classification of the linear, quadratical and quartical classes and the connection is explained with the previous studied pattern classes.

Irodalomjegyzék

- [1] B. Addis, M. Locatelli, and F. Schoen (2005), *Packing circles in a square: new putative optima obtained via global optimization*, Optimization Online. Elérhető a http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2005/03/1088.html címen.
- [2] I. Althöfer and K. U. Koschnick (1991), *On the convergence of threshold accepting*, Applied Mathematics and Optimization 24:183–195.
- [3] P. Ament and G. Blind (2000), *Packing equal circles in a square*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 36:313–316.
- [4] D. Baer and W. Mögling (1987), *Über Punktverteilungen im Quadrat mit speziellem Abstand*, Wissenschaftliche Zeitschrift Pädagogische Hochschule Erfurt Mühlhausen 23:116–120.
- [5] D. W. Boll, J. Donovan, R. L. Graham, and B. D. Lubachevsky (2000), *Improving Dense Packings of Equal Disks in a Square*, Electronic Journal of Combinatorics 7, #R46. Elérhető a http://www.combinatorics.org/Volume_7/PDF/v7ilr46.pdf címen.
- [6] [Wolfgangi Bolyai de Bolya] (1832–33), *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Elementaris Ac Sublimioris, Methodo Intuitiva, Evidentiaque Huic Propria Introducendi, Cum Appendice Triplici*, Marosvásárhelyini. A hivatkozás a 2. kiadás 1904-ben megjelent 2. kötetére (119–122) és annak ábrakötetére (132. Ábra) vonatkozik. Elérhető a <http://www.hti.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ACA7836> címen is.
- [7] Böröczky Károly (1974), *Gömbkitöltés állandó görbületű terekben*, Matematikai Lapok 25:265–306.
- [8] K. Böröczky Jr. (2004), *Finite packing and covering*, Cambridge University Press, Cambridge. Elérhető a <http://www.renyi.hu/~carlos/book.ps.gz> címen is.
- [9] L. G. Casado, I. García, P. G. Szabó, and T. Csendes (2001), *Packing Equal Circles in a Square II. – New Results for up to 100 Circles Using the TAMSASS-PECS Algorithm*, Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 207–224. Elérhető a <http://www.inf.u-szeged.hu/~pszabo/Pub/pack2.ps.gz> címen is.

- [10] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea (1997), *Ideals, varieties, and algorithms*, 2nd edition, Springer, New York.
- [11] H. T. Croft, K. J. Falconer, and R. K. Guy (1991), *Unsolved Problems in Geometry*, Springer-Verlag, New York.
- [12] Csallner András Erik (1999), *Intervallum-felosztási eljárások a globális optimalizálásban* (Doktori értekezés), József Attila Tudományegyetem, Szeged, 1999. Elérhető a <http://www.jgytf.u-szeged.hu/%7Ecsallner/PhDps.zip> címen is.
- [13] Csendes Tibor (2001), *Számítás garantált pontossággal I.*, Természet Világa 132. évf. 3. szám, 132–134. Elérhető a <http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/spw1.rtf> címen is.
- [14] Csendes Tibor (2001), *Számítás garantált pontossággal II.*, Természet Világa 132. évf. 4. szám 180–183. Elérhető a <http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/spw2.rtf> címen is.
- [15] T. Csendes and D. Ratz (1997), *Subdivision direction selection in interval methods for global optimization*, SIAM J. Num. Anal. 34:922–938. Elérhető a <http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/article/28152> címen is.
- [16] G. Dueck and T. Scheuer (1990), *Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm appearing superior to simulated annealing*, Journal of Computational Physics 90:161–175.
- [17] L. Fejes Tóth (1940), *Über einen geometrischen Satz*, Mathematische Zeitschrift 46:78–83.
- [18] L. Fejes Tóth (1971), *Punktverteilungen in einem Quadrat*, Studia Sci. Math. Hungar. 6:439–442.
- [19] A. Florian (1989), *Verteilung von Punkten in einem Quadrat*, Österreich. Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. Sitzungsber. II 198:27–44.
- [20] F. Fodor (1999), *The densest packing of 19 congruent circles in a circle*, Geom. Dedicata 74:139–145.
- [21] F. Fodor (2000), *The densest packing of 12 congruent circles in a circle*, Beitr. Alg. Geom. 41:401–409. Elérhető a <http://www.emis.de/journals/BAG/vol.41/no.2/9.html> címen is.
- [22] F. Fodor (2003), *The densest packing of 13 congruent circles in a circle*, Beitr. Alg. Geom. 44:431–440.
- [23] J. H. Folkman and R. L. Graham (1969), *A packing inequality for compact convex subsets of the plane*, Canadian Mathematical Bulletin 12:745–752.

- [24] H. Fukagawa and D. Pedoe (1989), *Japanese temple geometry problems = Sangaku*, Charles Babbage Research Center, Winnipeg, Canada.
- [25] Zs. Gáspár and T. Tarnai (2000), *Upper bound of density for packing of equal circles in special domains in the plane*, Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng. 44(1):13–32. Elérhető a http://www.pp.bme.hu/ci/2000_1/pdf/ci2000_1_02.pdf címen is.
- [26] M. Goldberg (1970), *The packing of equal circles in a square*, Mathematics Magazine 43:24–30.
- [27] J. E. Goodman and J. O'Rourke (ed.) (1997), *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, New York.
- [28] R. L. Graham and B. D. Lubachevsky (1995), *Dense packings of equal disks in an equilateral triangle from 22 to 34 and beyond*, The Electronic Journal of Combinatorics 2:#1. Elérhető a <http://www.combinatorics.org/Volume2/PDFFiles/v2i1a1.pdf> címen.
- [29] R. L. Graham and B. D. Lubachevsky (1996), *Repeated Patterns Dense Packings of Equal Circles in a Square*, The Electronic Journal of Combinatorics 3:#16. Elérhető a <http://www.matem.unam.mx/EMIS/journals/EJC/Volume3/PDFFiles/v3i1r16.pdf> címen is.
- [30] R. L. Graham, B. D. Lubachevsky, K. J. Nurmela, and P. R. J. Östergård (1998), *Dense packings of congruent circles in a circle*, Discrete Mathematics 181:139–154.
- [31] M. Grannel (1990), *An even better packing of ten equal circles in a square*. Kézirat.
- [32] C. de Groot, R. Peikert, and D. Würtz (1990), *The Optimal Packing of Ten Equal Circles in a Square*, IPS Research Report, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, No. 90-12, August.
- [33] B. Grünbaum (1990), *An improved packing of ten equal circles in a square*. Kézirat.
- [34] T. C. Hales (2000), *Cannonballs and Honeycombs*, Notices Amer. Math. Soc. 47:440–449. Elérhető a <http://www.ams.org/notices/200004/fea-hales.pdf> címen.
- [35] T. Harayama (2000), *Optimal Packings of 8, 9, and 10 Equal Circles in an Isosceles Right Triangle*, Master's thesis, School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Japan.
- [36] Hargittai István beszélgetése Fejes Tóth Lászlóval (2005), Magyar Tudomány 3:318–324. Elérhető a <http://www.matud.iif.hu/05mar/08.html> címen is.
- [37] R. Horst, P. M. Pardalos, and N. V. Thoai (1995), *Introduction to Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [38] R. Horst and N. V. Thoai (1999), *DC programming: Overview*, Journal of Optimization Theory and Applications 103:1–43.

- [39] M. Hujter (1992), *Combinatorial Optimization Problems Related to Geometrical Packings and Coverings*, Kandidátusi értekezés, Magyar Tudományos Akadémia.
- [40] M. Hujter (1999), *Some Numerical Problems in Discrete Geometry*, Computers and Mathematics with Applications 38:175–178.
- [41] D. C. Karnop (1963), *Random search techniques for optimization problems*, Automatica 1:111–121.
- [42] K. Kirchner and G. Wengerodt (1987), *Die dichteste Packung von 36 Kreisen in einem Quadrat*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 25:147–159.
- [43] O. Knüppel (1994), *Programmer's Runtime Optimized Fast Interval Library, Basic Interval Arithmetic Subroutines*, PROFIL/BIAS Documentation. Elérhető a <http://www.ti3.tu-harburg.de/Software/PROFIL/Profil.texinfo.toc.html> címen.
- [44] J. L. Lagrange (1773), *Recherches d'arithmétique*, Nouv. Mem. Acad. Roy. Sc. Belle Lettres, Berlin, in Oeuvres III:693–758.
- [45] H. Lob and H. W. Richmond (1930), *On the solutions of Malfatti's problem for a triangle*, Proc. London Math. Soc. 30:287–304.
- [46] M. Locatelli and U. Raber (2002), *Packing equal circles in a square: a deterministic global optimization approach*, Discrete Applied Mathematics 122(1-3):139–166.
- [47] B. D. Lubachevsky (1998), *Why Hard Disk Pack Easier*, Proceedings of the Workshop on Randomized Algorithms, Brno, Czech Republic August 27–28.
- [48] B. D. Lubachevsky, R. L. Graham, and F. H. Stillinger (1997), *Patterns and Structures in disk packings*, Periodica Mathematica Hungarica 34:123–142.
- [49] G. Malfatti (1803), *Memoria sopra un problema sterotomico*, Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze 10:235–244.
- [50] C. D. Maranas, C. A. Floudas, and P. M. Pardalos (1995), *New results in the packing of equal circles in a square*, Discrete Mathematics 128:187–193.
- [51] M. Cs. Markót (2000), *An interval method to validate optimal solutions of the "Packing Circles in a Unit Square" Problems*, Central European Journal of Operational Research 8:63–78.
- [52] M. Cs. Markót (2003), *Garantált megbízhatóságú globális optimalizálási módszerek továbbfejlesztése korlátozásos feladatokra és alkalmazásuk körpakolási feladatok megoldása esetén*, PhD értekezés, Szeged.
- [53] M. Cs. Markót (2004), *Optimal Packing of 28 Equal Circles in a Unit Square — the First Reliable Solution*, Numerical Algorithms 37:253–261.

- [54] M. Cs. Markót and T. Csendes, *A new verified optimization technique for the "Packing Circles in a Unit Square" problems*. Közlésre elfogadva a SIAM J. Optimization lapba.
- [55] J. Mátyás (1965), *Random optimization*, Automatization and Remote Control 26:244–251.
- [56] J. R. McDonnell and D. Waagen (1994), *Evolving recurrent perceptrons for time-series modeling*, IEEE Trans. on Neural Networks 5(1):24–38.
- [57] J. B. M. Melissen (1993), *Densest packing of eleven congruent circles in an equilateral triangle*, Amer. Math. Monthly 100:916–925.
- [58] J. B. M. Melissen (1994), *Densest packing of eleven congruent circles in a circle*, Geom. Dedicata 50:15–25.
- [59] H. Melissen (1994), *Densest packing of six equal circles in a square*, Elem. Math. 49:27–31.
- [60] H. Melissen (1997), *Packing and Covering with Circles*, PhD thesis, University of Utrecht, The Netherlands.
- [61] R. Milano (1987), *Configurations optimales de disques dans un polygone régulier*, Mémoire de Licence Université Libre de Bruxelles.
- [62] M. Mollard and C. Payan (1990), *Some progress in the packing of equal circles in a square*, Discrete Mathematics 84:303–307.
- [63] L. Moser (1960), *Problem 24 (corrected)*, Canadian Mathematical Bulletin 3:78.
- [64] K. J. Nurmela (1997), *Stochastic Optimization Methods in Sphere Packing and Covering Problems in Discrete Geometry and Coding Theory*, Doctoral dissertation, Helsinki University of Technology, Espoo, Finland.
- [65] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1991), *Optimal packings of equal circles in a square*. In Y. Alavi, D.R. Lick, and A. Schwenk (editors), Combinatorics, Graph Theory and Algorithms (Proceedings of the Eighth Quadrennial International Conference on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications), 671–680.
- [66] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1997), *Packing up to 50 Equal Circles in a Square*, Discrete & Computational Geometry 18:111–120.
- [67] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1999), *More Optimal Packings of Equal Circles in a Square*, Discrete & Computational Geometry 22:439–457.
- [68] K. J. Nurmela, P. R. J. Östergård, and R. aus de Spring (1999), *Asymptotic behaviour of optimal circle packings in a square*, Canadian Mathematical Bulletin 42:380–385.

- [69] A. M. Odlyzko and N. J. A. Sloane (1979), *New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions*, J. Combin. Theory Ser. A 26:210–214.
- [70] Ch. Payan (1997), *Empilement de cercles égaux dans un triangle équilatéral. À propos d’une conjecture d’Erdős-Oler*, Discrete Math 165/166:555–565.
- [71] R. Peikert (1994), *Dichteste Packungen von gleichen Kreisen in einem Quadrat*, Elemente der Mathematik 49:19–26.
- [72] R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan, and C. de Groot (1992), *Packing Circles in a Square: A Review and New Results*, Proceedings of the 15th IFIP Conference on System Modelling and Optimization (Zürich, Switzerland, September 2-6, 1991), Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences 180:45–54.
- [73] U. Pirl (1969), *Der Mindestabstand von n in der Einheitskreisscheibe gelegenen Punkten*, Math. Nachr. 40:111–124.
- [74] U. Raber (1999), *Nonconvex all-quadratic global optimization problems: solution methods, application and related topics*, PhD Thesis, University of Trier, Germany.
- [75] S. S. Rao (1978), *Optimization Theory and Applications*, John Willey and Sons, New York.
- [76] Ruda Mihály (1969), *Körelhelyezések téglalapokon*, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 19:73–87.
- [77] J. Schaer (1965), *The densest packing of 9 circles in a square*, Canadian Mathematical Bulletin 8:273–277.
- [78] J. Schaer (1971), *On the packing of the ten equal circles in a square*, Math. Mag. 44:139–140.
- [79] J. Schaer and A. Meir (1965), *On a geometric extremum problem*, Canadian Mathematical Bulletin 8:21–27.
- [80] K. Schlüter (1979), *Kreispackung in Quadraten*, Elem. Math. 34:12–14.
- [81] B. L. Schwartz (1970), *Separating points in a square*, J. Recr. Math. 3:195–204.
- [82] F. J. Solis and J. B. Wets (1981), *Minimization by random search techniques*, Math. of Operations Research 6(1):19–50.
- [83] Staar Gyula (1990), *A megélt matematika*, Gondolat, Budapest.
- [84] P. G. Szabó (2000), *Some New Structures for the "Equal Circles Packing in a Square" Problem*, Central European Journal of Operations Research 8:79–91.
- [85] Szabó Péter Gábor (2000), *Optimális körelhelyezések a négyzetben*, Polygon X/2:48–64.

- [86] Szabó Péter Gábor (2001), *Sangaku, matematikai fatáblák japán templomokban*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok 7:386–388.
- [87] Szabó Péter Gábor (2002), *Megjegyzések Bolyai Farkas egy körpakolási feladatához*, Egy halhatatlan erdélyi tudós, Bolyai Farkas (összeállította Gazda István), Akadémiai Kiadó, Budapest, pp. 384–388.
- [88] Szabó Péter Gábor (2003), *Szangaku, a japán matematika kincsei*, Szaku 9:8–9.
- [89] Szabó Péter Gábor (2003), *A Bolyai-négyzetek*, Természet Világa, Bolyai-émlékszám, p. 61.
- [90] P. G. Szabó (2004), *Packing Equal Circles in a Square — Bounds, Repetead Patterns and Minimal Polynomials*, Proceedings of the SCAN 2004, 11th GAMM-IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics, October 4–8, 2004, Fukuoka, Japan.
- [91] P. G. Szabó (2005), *Optimal substructures in optimal and approximate circle packings*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Vol 46, No.1, pp. 103–118.
- [92] Szabó Péter Gábor és Csendes Tibor (2001), *Lázár Dezső és a kongruens körök négyzetben való legsűrűbb pakolásának problémája (Kiegészítés Filep László tanulmányához)*, Magyar Tudomány 8:984–985.
- [93] P. G. Szabó, M. Cs. Markót and T. Csendes (2005), *Global Optimization in Geometry — Circle Packing into the Square*, Essays and Surveys in Global Optimization (Ed. by C. Audet, P. Hansen, and G. Savard), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 233–266. Elérhető a <http://www.inf.u-szeged.hu/~pszabo/Pub/cp0.ps.gz> címen is.
- [94] P. G. Szabó, T. Csendes, L. G. Casado, and I. García (1999), *Lower Bounds for Equal Circles Packing in a Square Problem Using TAMSASS-PECS Stochastic Algorithm*, Proceedings of the International Workshop on Global Optimization, Sept. 28–Oct. 2, Firenze, Italy.
- [95] P. G. Szabó, B. Tóth, T. Vinkó, and M. Cs. Markót (2000), *Minimal Polynomials and Similar Structures for the Densest Packing of Equal Circles in a Square Problem*, Proceedings of the 17th European Conference on Operational Research, July 16–19, Budapest, Hungary.
- [96] P. G. Szabó, T. Csendes, L. G. Casado, and I. García (2001), *Packing Equal Circles in a Square I. – Problem Setting and Bounds for Optimal Solutions*, Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 191–206.
- [97] P. G. Szabó and E. Specht, *Packing up to 200 Equal Circles in a Square*, Közlésre benyújtva.

- [98] P. G. Szabó, M. Cs. Markót, T. Csendes, E. Specht, L. G. Casado, and I. García, *New Approaches to Circle Packing into the Square (With Program Codes)*. Közlésre előkészítve. Elérhető a <http://www.inf.u-szeged.hu/~csendes/cp.ps.gz> címen.
- [99] T. Tarnai (1997), *Packing of equal circles in a circle*, Structural Morphology: Toward the New Millenium, The University of Nottingham, Nottingham, UK, 217–224.
- [100] T. Tarnai and Zs. Gáspár (1995-96), *Packing of equal circles in a square*, Acta Technica Acad. Sci. Hung. 107(1-2):123–135.
- [101] V. E. Theodoracatos and J. L. Grimsley (1995), *The optimal packing of arbitrarily-shaped polygons using simulated annealing and polynomial-time cooling schedules*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 125:53–70.
- [102] A. Thue (1892), *Om nogle geometrisk-taltheoretiske theoremer*, Forhdl. Skand. Naturforskeres 14:352–355.
- [103] A. Thue (1910), *Über die dichteste Zusammenstellung von kongruenten Kreisen in einer Ebene*, Norske Vidensk. Selsk. Skr. 1:3–9.
- [104] Tóth Boglárka és Vinkó Tamás, *Egy hatékony számítógépes eszköz matematikai problémák megoldására* (2002), Polygon XI/1:19–42. Elérhető a <http://www.inf.u-szeged.hu/~boglarka/gspoly.ps.gz> címen is.
- [105] G. Valette (1989), *A better packing of ten circles in a square*, Discrete Mathematics 76:57–59.
- [106] E. W. Weisstein (2003), *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics* (Second edition), Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2003. Elérhető a <http://mathworld.wolfram.com/> címen is.
- [107] G. Wengerodt (1983), *Die dichteste Packung von 16 Kreisen in einem Quadrat*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 16:173–190.
- [108] G. Wengerodt (1987), *Die dichteste Packung von 14 Kreisen in einem Quadrat*, Beiträge zur Algebra und Geometrie 25:25–46.
- [109] G. Wengerodt (1987), *Die dechteste Packung von 25 Kreisen in einem Quadrat*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. 30:3–15.
- [110] D. Würtz, M. Monagan and R. Peikert (1994), *The History of Packing Circles in a Square*, Maple Technical Newsletter (Maple in Mathematics and Sciences — A Special issue) 0:35–42.
- [111] V. A. Zalgaller és G. A. Los' (1992), *A Malfatti-probléma megoldása (orosz nyelven)*, Ukr. Geom. Sb. 35, 14-33.

- [112] C. Zong, J. J. Dudziak, and C. Zong (1996), *Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry*, Springer-Verlag, New York.

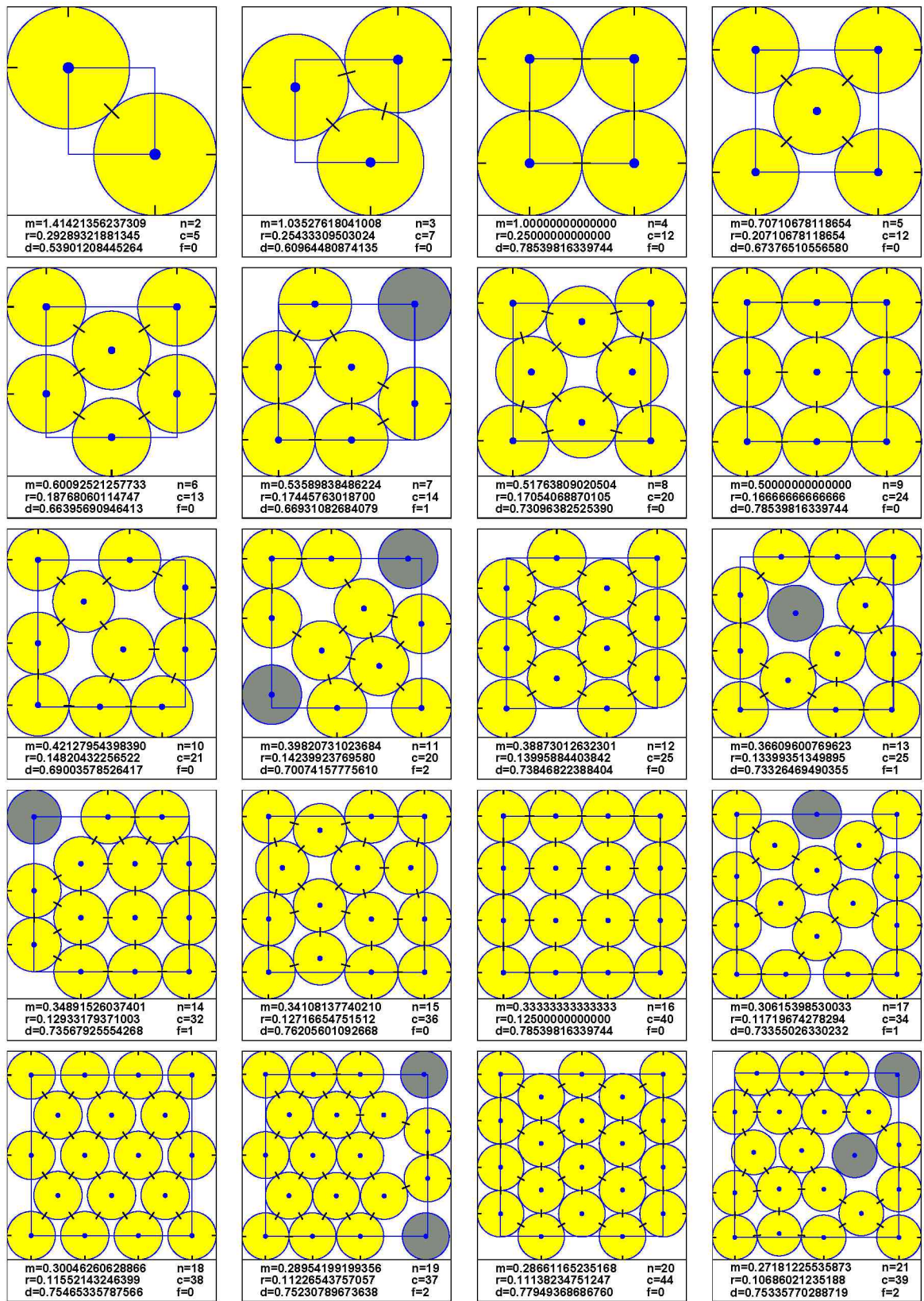
Függelék

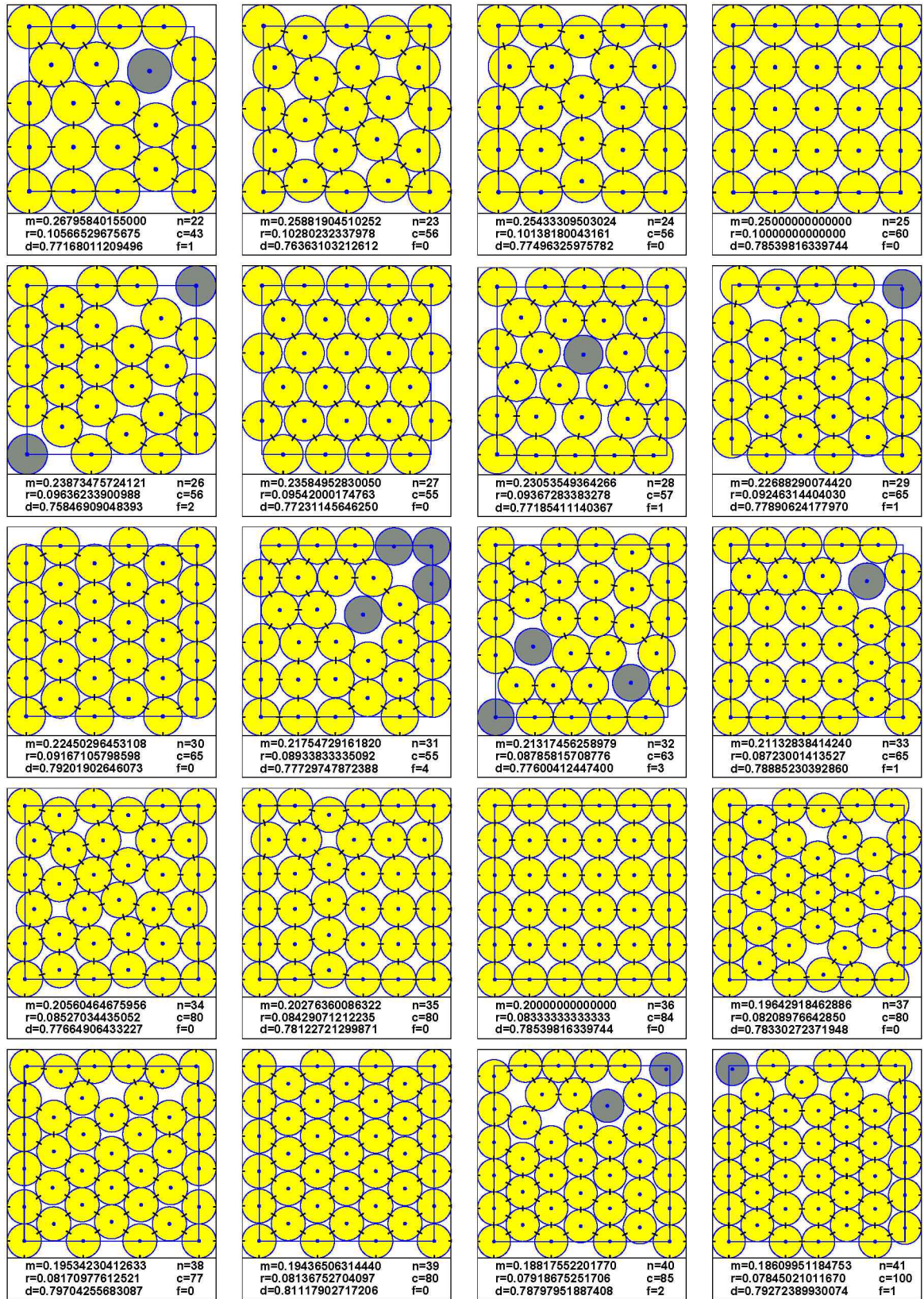
Optimális és közelítő körpakolások ábrái

Az ábrákon használt jelölések:

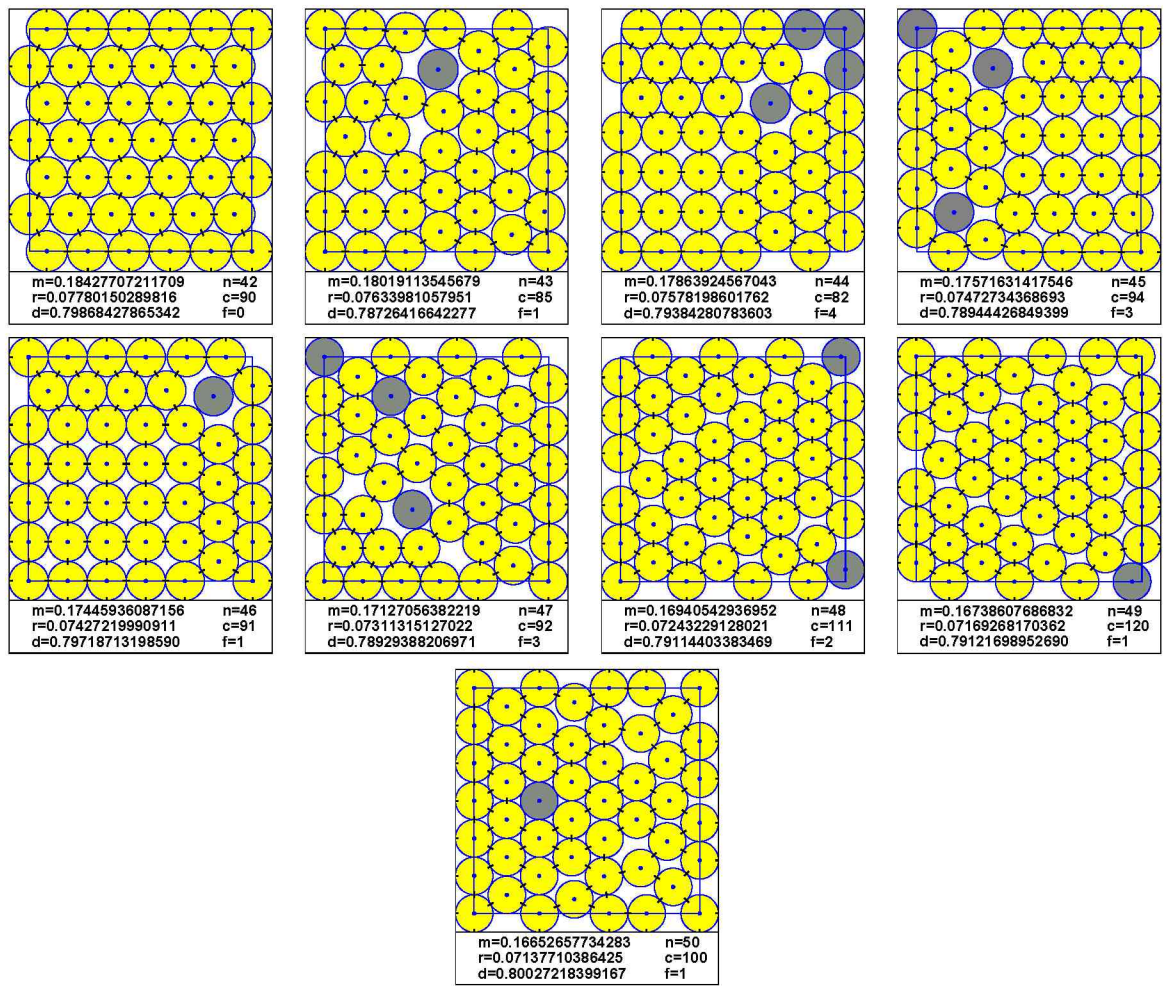
- n : a pontok/körök száma,
- m : a pontok közötti minimális távolság maximuma,
- r : a kongruens körök sugara,
- c : az érintkezési helyek száma,
- d : a pakolás sűrűsége,
- f : a szabad körök száma.

A szabad köröket sötét szürke jelöli.

32. ábra: Optimális körpakolások ábrái az $n = 2 - 21$ darab körre.



33. ábra: Optimális és közelítő körpakolások ábrái az $n = 22 - 41$ darab körre.



34. ábra: Közelítő körpakolások ábrái az $n = 42 - 50$ darab körre.