

Szabó Péter Gábor

Egybevágó körök pakolásai négyzetben — korlátok,
ismétlődő minták és minimálpolinomok

Doktori értekezés tézisei
társszerzői nyilatkozatokkal

Témavezető: Dr. Csendes Tibor

Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2005.

1. Bevezetés

Az értekezés adott számú egybevágó körnek a négyzetben való legsűrűbb pakolásának a problémájával foglalkozik. Ez a diszkrét geometriából származó optimalizálási feladat az elmúlt évtizedek egyik sokat tanulmányozott problémájává vált [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12], közel ötven tudományos dolgozat tárgyalta eddig, amelyekről az értekezés is rövid áttekintést ad.

A disszertáció a problémát három fő szempont szerint vizsgálja:

- a) Hogyan adhatunk az optimális körpakolások numerikus paramétereire (pl. a sugárra, sűrűségre) elméleti és számítógépes módszerekkel korlátokat és hogyan lehet ezeket javítani?
- b) Milyen struktúrális sajátosságai vannak az optimális és a ma ismert legjobb körpakolásoknak és hogyan lehet ezek ismeretében az elméleti úton kapott alsó korlátokat tovább javítani?
- c) Hogyan határozhatók meg körpakolások minimálpolinomjai elméleti úton és számítógépes algebrai rendszerekkel és hogyan lehet azokat a körpakolások osztályozására használni?

Az értekezésben tárgyalt eredmények javarésze az irodalomjegyzékben megadott [1, 8, 9, 10, 11] publikációimban lettek közölve.

2. A probléma és annak ekvivalens modelljei

1. DEFINÍCIÓ. $P(r_n, S) \in P_{r_n}$ egy körpakolás az r_n sugárral a $[0, S]^2$ négyzetben, ahol $P_{r_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, S]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4r_n^2; x_i, y_i \in [r_n, S - r_n] (1 \leq i < j \leq n)\}$. $P(r_n, S) \in P_{r_n}$ optimális körpakolás, ha $\bar{r}_n = \max_{P_{r_n} \neq \emptyset} r_n$.

\mathfrak{P}_1^n probléma: Határozzuk meg az optimális körpakolásokat rögzített $n \geq 2$ egész számra.

2. DEFINÍCIÓ. $A(m_n, \Sigma) \in A_{m_n}$ egy pontelhelyezés az m_n minimális távolsággal a $[0, \Sigma]^2$ négyzetben, ahol $A_{m_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, \Sigma]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq m_n^2; (1 \leq i < j \leq n)\}$. $A(m_n, \Sigma) \in A_{m_n}$ optimális pontelhelyezés, ha $\bar{m}_n = \max_{A_{m_n} \neq \emptyset} m_n$.

\mathfrak{P}_2^n probléma: Határozzuk meg az optimális pontelhelyezéseket rögzített $n \geq 2$ egész számra.

3. DEFINÍCIÓ. $P'(R, s_n) \in P'_{s_n}$ egy társított körpakolás az R sugárral a $[0, s_n]$ négyzetben, ahol $P'_{s_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, s_n]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4R^2; x_i, y_i \in [R, s_n - R] (1 \leq i < j \leq n)\}$. $P'(R, s_n) \in P'_{s_n}$ optimális társított körpakolás, ha $\bar{s}_n = \min_{P'_{s_n} \neq \emptyset} s_n$.

\mathfrak{P}_3^n probléma: Határozzuk meg az optimális társított körpakolásokat, rögzített $n \geq 2$ egész számra.

4. DEFINÍCIÓ. $A'(M, \sigma_n) \in A'_{\sigma_n}$ egy társított pontelhelyezés az M minimális távolsággal a $[0, \sigma_n]$ négyzetben, ahol $A'_{\sigma_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, \sigma_n]^2 \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq M^2 \ (1 \leq i < j \leq n)\}$. $A'(M, \sigma_n) \in A'_{\sigma_n}$ optimális társított pontelhelyezés, ha $\bar{\sigma}_n = \min_{A'_{\sigma_n} \neq \emptyset} \sigma_n$.

\mathfrak{P}_4^n probléma: Határozzuk meg az optimális társított pontelhelyezéseket, rögzített $n \geq 2$ egész számra.

1. TÉTEL. [9] A \mathfrak{P}_1^n , \mathfrak{P}_2^n , \mathfrak{P}_3^n és \mathfrak{P}_4^n problémák ekvivalensek egymással abban az értelemben, hogy ha valamelyiket meg tudjuk oldani egy rögzített $n \geq 2$ egész számra, akkor a többi problémát is meg tudjuk oldani arra az n -re, mivel a \mathfrak{P}_i^n ($1 \leq i \leq 4$) problémák optimális megoldásai egymásból származtathatók.

Az 1. TÉTELnek az alábbi következményben megfogalmazott összefüggéseit a dolgozatban gyakran felhasználjuk.

1. KÖVETKEZMÉNY. [9] Az egymásból származtatott körpakolások, pontelhelyezések, társított körpakolások és társított pontelhelyezések között az alábbi táblázatban szereplő összefüggések állnak fenn:

	$P(r_n, S)$	$A(m_n, \Sigma)$	$P'(R, s_n)$	$A'(M, \sigma_n)$
$P(r_n, S)$	1	$r_n = \frac{Sm_n}{2(m_n + \Sigma)}$	$r_n = \frac{RS}{s_n}$	$r_n = \frac{MS}{2(M + \sigma_n)}$
$A(m_n, \Sigma)$	$m_n = \frac{2\Sigma r_n}{S - 2r_n}$	1	$m_n = \frac{2R\Sigma}{s_n - 2R}$	$m_n = \frac{M\Sigma}{\sigma_n}$
$P'(R, s_n)$	$s_n = \frac{RS}{r_n}$	$s_n = \frac{2R(m_n + \Sigma)}{m_n}$	1	$s_n = \frac{2R(M + \sigma_n)}{M}$
$A'(M, \sigma_n)$	$\sigma_n = \frac{M(S - 2r_n)}{2r_n}$	$\sigma_n = \frac{M\Sigma}{m_n}$	$\sigma_n = \frac{M(s_n - 2R)}{2R}$	1

Mivel a problémát mint optimalizálási feladatot is vizsgálom, így több matematikai programozási modelljét is megadtam a dolgozatban. Ezek alapján a körpakolási feladat tekinthető úgy, mint egy

- folytonos nemlineáris korlátos globális optimalizálási feladat,
- max-min feladat,
- DC programozási feladat, vagy úgy is, mint egy
- teljesen kvadratikus optimalizálási feladat [10].

3. Alsó és felső korlátok az optimumra

2. TÉTEL. Minden $n \geq 2$ egész számra és az \bar{m}_n távolságértékre

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}} < \bar{m}_n.$$

K. J. Nurmela és munkatársai az [6] dolgozatban 1999-ben közölték a

$$\sigma^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\sigma \leq \frac{\sqrt{3}}{2}n$$

egyenlőtlenséget, amely egy $A'(1, \sigma)$ társított pontelhelyezés pontjai számára adott alsó korlátot. Az egyenlőtlenséget $\frac{2}{\sqrt{3}}$ -mal szorozva

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sigma \leq n$$

adódik. A 2. TÉTEL bizonyításában szereplő ekvivalens alakban olyan egyenlőtlenséget igazoltam, amely az előbbi egyenlőtlenségből eltüntette az $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0$ negatív együtt-hatójú lineáris tagot, így jobb alsó korlátot eredményez a belőle nyerhető formula \bar{m}_n -re is.

3. TÉTEL. Minden $n \geq 2$ egész számra és az \bar{r}_n körsugárra

$$\bar{r}_n \leq \min \left(\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}n + (4\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)(2 - \sqrt{3})}}, \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}}{2n + 2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}} \right).$$

A 2. TÉTEL és a felső korlátot adó 3. TÉTEL alapján az \bar{m}_n -re adódó aszimptotikus becslésnek egy abszolút hibakorlátját határoztam meg az 1. ÁLLÍTÁSBAN.

1. ÁLLÍTÁS. Az $\bar{m}_n \approx \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}}$ aszimptotikus közelítés egy abszolút hibakorlátja

$$\frac{2}{n-1}.$$

4. Számítógépes eljárások az alsó korlát javítására

Az elméleti úton kapott alsó korlátokat egy kétfázisú sztochasztikus globális optimalizálási eljárással nemcsak tovább javítottuk, hanem sikerült a szakirodalom több korábbi eredményénél jobbat adnunk. A kifejlesztett TAMSASS-PECS algoritmus a TA (Threshold Accepting) technikát ötvözi a SASS (Single Agent Stochastics Search) lokális keresőnek a feladatra specializált változatával [1].

A TAMSASS-PECS eljárás

- 1 Válasszunk egy s kezdő megoldást
- 2 Válasszunk egy T_h kezdőértéket
- 3 Válasszunk egy σ kezdő szórás értéket
- 4 **while** $\sigma > \sigma_{final}$ **do**
- 5 **while** minden pont nem lett látogatva **do**
- 6 $s = MSASS(s, \sigma, T_h, NextCenter(s))$
- 7 Csökkentsük a T_h értéket
- 8 Csökkentsük a σ standard szórás értéket
- 9 **return** a legjobb talált megoldás

A TAMSASS-PECS algoritmus egy pszeudovéletlen lehetséges megoldásból indul, amit a következő módon állítunk elő: osszuk fel a négyzetet $\lceil \sqrt{n} \rceil \times \lceil \sqrt{n} \rceil$ négyzet alakú csempére. Az első pontot véletlenszerűen helyezzük el az első vagy a második csempe közepébe. További pontokat helyezünk el minden második csempe középpontjába, majd a maradék pontokat véletlenszerűen tesszük le a maradék szabad csempékbe (minden csempébe 1 pontot). A T_h kezdő küszöbérték 0.02, a σ kezdő szórás érték a csempék átmérőjével azonos.

A TAMSASS-PECS algoritmus a kezdő pontelhelyezést egy iterációs eljárás keretében próbálja meg javítani. Minden iterációs lépésben meghívásra kerül az MSASS szubrutin, minden pontra azonos σ szórás és T_h küszöbértékkel. Miután minden pontra lefutott az MSASS eljárás, a σ szórás és T_h küszöbérték egyaránt 1%-kal csökken. A TAMSASS-PECS eljárás addig tart, amíg egy σ_{final} érték alá nem kerül a σ szórás.

Az MSASS szubrutin

```

1  proc MSASS( $s, \sigma_0, T_h, i$ )
2    var  $scnt := 0; fcnt := 0; Fcnt := 3; ct := 0.5; \sigma := \sigma_0;$ 
3    while  $fcnt < 4 \cdot Fcnt$  and  $scnt = 0$  do
4       $\sigma := \begin{cases} ct \cdot \sigma & \text{ha } fcnt > Fcnt \\ \sigma & \text{különben} \end{cases}$ 
5      Generáljunk egy  $\xi$  valószínűségi változót  $N(0, \sigma)$  eloszlással;
6       $s'(i) := s(i) + \xi;$ 
7      if  $f(s) - f(s') \leq f(s)T_h$ 
8        then
9           $s(i) := s'(i);$ 
10          $scnt := scnt + 1;$ 
11       else
12          $s'(i) := s(i) - \xi;$ 
13         if  $f(s) - f(s') \leq f(s)T_h$ 
14           then
15              $s(i) := s'(i);$ 
16              $scnt := scnt + 1;$ 
17         else
18            $fcnt := fcnt + 1;$ 
19     od
20 end

```

Az MSASS eljárás bemenő paraméterei: egy kezdő s lehetséges megoldás (ami egy pontelhelyezés pontjaiból álló vektor), σ_0 a szórás kezdőértéke, T_h kezdő küszöbérték és i a pontelhelyezés azon pontjának a sorszáma, amelynek a helyzetét próbálja az eljárás egy lépésen belül megváltoztatni. Fontos módosítás, hogy a 7. illetve 13. sorokban nem egyszerűen az $f(s) < f(s')$ feltétel szerepel, hanem akkor is elfogadjuk a módosítást, ha $f(s) \leq f(s') + f(s)T_h$. Az MSASS szubrutinban szereplő ciklus addig hajtódik végre, amíg vagy sikerült javított pozíciót találni az i . pontra vagy a sikertelen próbálkozások száma 11-nél több lesz.

Eredmények

A numerikus eredményeket a PROFIL/BIAS C++ program könyvtár intervallum aritmetikai eljárásainak segítségével garantált megbízhatóságúvá tettem, így a kapott numerikus értékek bizonyítottan alsó korlátjai lesznek az optimumnak.

A TAMSASS-PECS eljárással 100 körig publikáltunk [1] közelítő pakolásokat és 5 esetben megjavítottuk az irodalomban addig ismert legjobb eredményt, nevezetesen az $n = 32, 37, 47, 62$ és 72 körszámokra vonatkozóan.

5. Ismétlődő minták a körpakolásokban

Az optimális és az eddig ismert legjobb körpakolások struktúráinak összehasonlítása alapján kiderült, hogy azokban bizonyos esetekben ismétlődő minták fedezhetők fel. Az ismétlődő minták és a körök darabszáma között gyakran kapcsolat van. Ezen kapcsolat alapján bizonyos körpakolásokat mintaosztályokba sorolhatunk [8,11].

Véges mintaosztályok

A mintaosztályokra és a hozzájuk tartozó mintákra használni fogjuk a $\mathbf{PAT}(f(k))$ jelölést, ahol $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ egy adott függvényt és $f(k)$ a körök számát jelenti ($n = f(k)$).

Az értekezésben az alábbi mintaosztályokat tárgyalom részletesen [8,11]:

- a) a $\mathbf{PAT}(k^2 - l)$ ($l = 0, 1, 2$) mintaosztályok,
- b) a $\mathbf{PAT}(k(k + 1))$ mintaosztály,
- c) a $\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$ mintaosztály.

A $k^2 - l$ ($l = 3, 4, 5$) körszámú pakolások struktúrájának közelítéséhez bevezettem és tanulmányoztam az

- d) $\mathbf{STR}(k^2 - l)$ ($l = 3, 4, 5$) struktúraosztályokat is [8].

Az értekezésben a legrészletesebben a rácspakolásokat tartalmazó mintaosztállyal foglalkoztam, melyek sejtetően végtelen optimális körpakolás sorozatokat is tartalmaznak.

Egy végtelennek sejtett mintaosztály

K. J. Nurmela és munkatársai az alábbi sejtést közölték 1999-ben [6]: Tekintsük a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ egyszerű lánc törtbe fejtésekor előálló approximáló törtsorozat azon részsorozatát, amely minden második törtet tartalmazza a sorozatból. Rendeljünk ezen részsorozat minden egyes $\frac{p}{q}$ törtjéhez egy pontelhelyezést a következő módon: Osszuk fel a négyzet két egymásra merőleges oldalát rendre p és q darab egyenlő részre és húzzunk

párhuzamosokat az oldalakkal az osztópontokon keresztül, így kapunk $p \times q$ darab téglalapot. Tegyük le egy pontot a négyzet bal alsó sarkába (a (0,0) pontba), majd tegyük minden második téglalapprácsspontba egy-egy újabb pontot. Nem nehéz látni, hogy így

$$\left\lceil \frac{(p+1)(q+1)}{2} \right\rceil$$

darab pontot tudunk lerakni. A sejtés az, hogy az előbbi törtsorozat minden egyes törtjéhez tartozó pontelhelyezés optimális lesz. Az ilyen módon előálló pakolásokat rácspakolásoknak hívom.

Rácspakolások

Tegyük fel, hogy p és q olyan pozitív egész számok, hogy $\frac{p}{q} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$. A továbbiakban $[[p, q]]$ -val fogom jelölni az olyan rácspakolást, amelyre p és q olyan természetes számok, hogy $\frac{p}{q}$ benne van az előbbi intervallumban, valamint GP-vel fogom jelölni az ilyen $[[p, q]]$ elemekből álló halmazt (GP= 'Grid Packing').

9. ÁLLÍTÁS. [9] *GP-ben az alábbi műveletek jól definiáltak:*

$$\begin{aligned} [[p_1, q_1]] + [[p_2, q_2]] &:= [[p_1 + p_2, q_1 + q_2]], \\ \lambda [[p, q]] &:= [[\lambda p, \lambda q]], \end{aligned}$$

ahol λ pozitív egész szám, továbbá, ha $p_2 < p_1$ és $q_2 < q_1$ akkor

$$[[p_1, q_1]] - [[p_2, q_2]] := [[p_1 - p_2, q_1 - q_2]],$$

és ha λ osztója p -nek és q -nak, akkor

$$\frac{1}{\lambda} [[p, q]] := \left[\left[\frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda} \right] \right].$$

Optimálisnak sejtett rácspakolás sorozatok

Az előbb tárgyalt optimálisnak sejtett rácspakolás sorozat megadható egy rekurzió segítségével is.

10. ÁLLÍTÁS. [8] *Tekintsük a $\frac{\sqrt{3}}{3}$ periodikus egyszerű lánctörtbe fejtésével előálló approximáló törtsorozat azon részsorozatát, amely a második törttől kezdve, minden második törtet tartalmazza a sorozatból. Az ezen törtekhez hozzárendelt rácspakolások azonosak lesznek az alábbi rekurzív módon generált rácspakolás sorozattal:*

$$\begin{aligned} S_1 &= [[1, 1]], \quad S_2 = [[3, 5]], \\ S_n &= 4S_{n-1} - S_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Az említett végtelen rácspakolás sorozat optimalitásának sejtése abból a felismerésből is származik, hogy a pakolás sorozat elemei rendkívül sűrű körpakolások. A sorozat körpakolásainak sűrűsége $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -höz konvergál (ami pedig egybevágó köröknek

a síkon vett legsűrűbb kitöltésének a sűrűsége). A bizonyítottan optimális pakolások struktúrájának ismeretére, valamint az eddigi legjobb pakolások alapján, további négy olyan körpakolás sorozatot adtam meg, amelyekről szintén azt sejttem, hogy optimális pakolások minden elemükben.

12. ÁLLÍTÁS. *Tekintsük a következő $\{A_i\}, \{B_i\}, \{C_i\}, \{D_i\}$ rácspakolás sorozatokat, ahol $(i \in \mathbb{Z}^+) : A_i := 2S_i, B_i := S_i + S_{i+1}, C_i := B_i/2, D_i := C_i + [3, 5]$ Ekkor $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{X_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$, ahol $X \in \{S, A, B, C, D\}$ és d_{X_i} jelöli a körpakolás sűrűségét.*

Javított alsó korlát mintaosztályok felhasználásával

A mintaosztályok jól használhatók arra is, hogy az elméleti úton kapott alsó korlátokat tovább javítsuk.

4. TÉTEL. [11] *Az m_n érték nem kisebb mint*

$$\max (L_1(n), L_2(n), L_{3a}(n), L_{3b}(n), L_4(n), L_5(n), L_6(n), L_7(n), L_8(n), L_9(n)),$$

ahol

$$\begin{aligned} L_1(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n} \rceil - 1}, \\ L_2(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+1} \rceil - 3 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\ L_{3a}(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+2} \rceil - 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}, \\ L_{3b}(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+2} \rceil - 5 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\ L_4(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+3} \rceil - 3 + \sqrt{3}}, \\ L_5(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+4} \rceil - 3 + \sqrt{3}}, \\ L_6(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+5} \rceil - 4 + 3\sqrt{3}/2}, \\ L_7(n) &= \frac{k^2 - k - \sqrt{2k}}{k^3 - 2k^2}, \text{ ha } n = k(k+1), \text{ különben } 0, \\ L_8(n) &= \max_i \left\{ \sqrt{\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{q_i^2}} \right\}, \text{ ha } n = \left\lfloor \frac{(p_i+1)(q_i+1)}{2} \right\rfloor, \text{ } p_i^2 \leq 3q_i^2 \text{ és } \\ &\quad q_i^2 \leq 3p_i^2, i \in \mathbb{N}, \text{ különben } 0, \\ L_9(n) &= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}}. \end{aligned}$$

A rácspakolás sorozatokat felhasználtam az alábbi tétel bizonyításában is.

5. TÉTEL. [9] *Minden $n \geq 2$ egész számra*

$$(3 - 2\sqrt{2})\pi \leq d_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2) < \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol $d_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2)$ jelöli a körpakolás sűrűségét és ezek a korlátok élesek.

6. Körpakolások minimálpolinomjai

A dolgozatban a pontelhelyezésekhez rendelhető minimálpolinomok (vagyis olyan minimális fokszámú polinomok, amelyeknek legkisebb pozitív gyöke m_n) fogalmát

kiterjesztettem a feladat többi ekvivalens geometriai megfelelőjére és segítségükkel, több esetben sikerült egy körpakolás optimális részstruktúráinak általánosított minimálpolinomjai felhasználásával a pakolás minimálpolinomját meghatározni rezultánsképzéssel.

15. DEFINÍCIÓ. [9] Egy körpakolást/pontelhelyezést *optimális részstruktúrának* mondunk az $X \subset [0, 1]$ kompakt halmazban, ha a $d_{n'}(r_{n'}, [0, 1]^2)$ sűrűség maximális X -ben, ahol n' jelöli az X -beli körök számát,

16. DEFINÍCIÓ. [9] A $p_n^I(x)$ polinomot *általánosított minimálpolinomnak* mondjuk, ha rendre $x \in \{r, m, s, \sigma\}$ és $I \in \{S, \Sigma, R, M\}$, \bar{x}_n a legkisebb pozitív gyöke a $p_n^I(x)$ polinomnak, és a polinom fokszáma minimális. Legyen $P_n(x) = p_n^1(x)$.

13. ÁLLÍTÁS. [9] *Az általánosított minimálpolinomok közötti kapcsolatok az alábbi formulákkal írhatók le:*

$$\begin{array}{c|c}
 \mathbf{p}_n^S(r) = p_n^{\Sigma:=S-2r}(m := 2r) & \mathbf{p}_n^\Sigma(m) = p_n^{R:=\Sigma+m}(s := \frac{m}{2}) \\
 p_n^{R:=S}(s := r) & p_n^{M:=\Sigma}(\sigma := m) \\
 p_n^{M:=S-2r}(\sigma := 2r) & p_n^{S:=\Sigma+m}(r := \frac{m}{2}) \\
 \hline
 \mathbf{p}_n^R(s) = p_n^{M:=R-2s}(\sigma := 2r) & \mathbf{p}_n^M(\sigma) = p_n^{S:=M+\sigma}(r := \frac{\sigma}{2}) \\
 p_n^{S:=R}(r := s) & p_n^{\Sigma:=M}(m := \sigma) \\
 p_n^{\Sigma:=R-2s}(m := 2s) & p_n^{R:=M+m}(s := \frac{\sigma}{2})
 \end{array}$$

6. TÉTEL. [9] *Tekintsünk egy pontelhelyezést az egységnyezetben. Tegyük fel, hogy a pontelhelyezésnek van $N \geq 2$ darab optimális részstruktúrája, rendre $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N$ oldalú igazított négyzetekben. Ha f egy olyan polinom, hogy vannak olyan $1 \leq i, j \leq N$ indexek, hogy $\Sigma_i = f(\Sigma_j)$, akkor a $p_n^\Sigma(m)$ minimálpolinom kiszámolható az i . és j . optimális részstruktúra minimálpolinomjaiból az alábbi módon:*

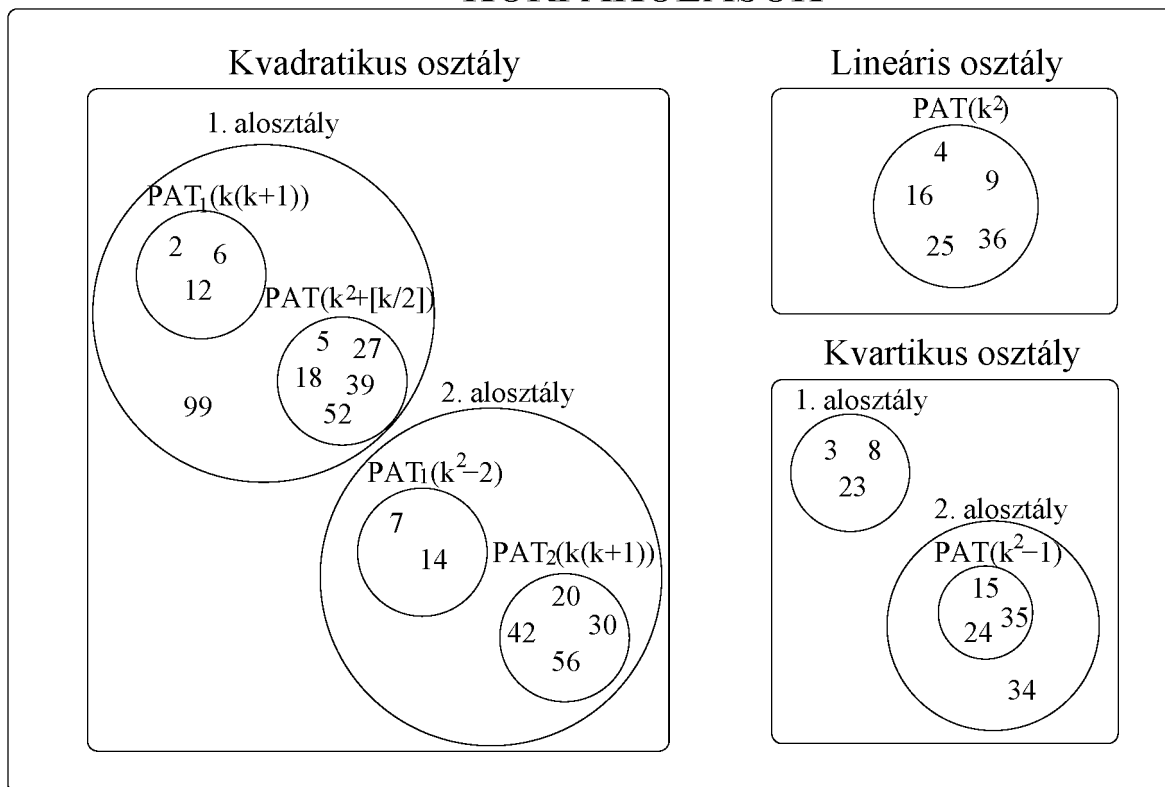
$$\begin{aligned}
 p_n^\Sigma(m) &= \text{Res}(p_{n_1}^{\Sigma_j}(m), p_{n_2}^{f(\Sigma_j)}(m), \Sigma_j) = \\
 &\det(\text{Syl}(p_{n_1}^{\Sigma_j}(m), p_{n_2}^{f(\Sigma_j)}(m), \Sigma_j)).
 \end{aligned}$$

A dolgozatban 100 körig bezárólag adtam meg több általam meghatározott minimálpolinomot és számos esetben a körpakolásokhoz és pontelhelyezésekhez a segítségükkel meghatározott egzakt értékeket is \bar{m}_n -re és \bar{r}_n -re. Külön kitértem az $n = 11$ körszámú esetre, amikor is egy 8-ad fokú polinom gyökeit úgy határoztam meg algebrailag, hogy a körpakolás alapján sejtettem meg azt az alkalmas kvadratikus testet, amelyben a gyököket keresni kellett.

Minimálpolinomokon alapuló osztályozás

A pontelhelyezésekhez rendelt minimálpolinomok jól használhatók a pakolások osztályozására is. Az alapján, hogy egy körpakolás minimálpolinomja, lineáris, kvadratikuss vagy kvartikus különböző osztályokat és részosztályokat határoztam meg, amelyeknek a korábbi mintaosztályokhoz való viszonyát szemlélteti az alábbi ábra.

KÖRPAKOLÁSOK



Irodalomjegyzék

- [1] L. G. Casado, I. García, P. G. Szabó, and T. Csendes (2001), *Packing Equal Circles in a Square II. – New Results for up to 100 Circles Using the TAMSASS-PECS Algorithm*, Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 207–224.
- [2] R. L. Graham and B. D. Lubachevsky (1996), *Repeated Patterns Dense Packings of Equal Circles in a Square*, The Electronic Journal of Combinatorics 3:#16.
- [3] M. Cs. Markót (2004), *Optimal Packing of 28 Equal Circles in a Unit Square - the First Reliable Solution*, Numerical Algorithms 1-4:253-261.
- [4] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1997), *Packing up to 50 Equal Circles in a Square*, Discrete & Computational Geometry 18:111–120.
- [5] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1999), *More Optimal Packings of Equal Circles in a Square*, Discrete & Computational Geometry 22:439–457.

- [6] K. J. Nurmela, P. R. J. Östergård, and R. aus de Spring (1999), *Asymptotic behaviour of optimal circle packings in a square*, Canadian Mathematical Bulletin 42:380–385.
- [7] R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan, and C. de Groot (1992), *Packing Circles in a Square: A Review and New Results*, Proceedings of the 15th IFIP Conference on System Modelling and Optimization (Zürich, Switzerland, September 2-6, 1991), Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences 180:45–54.
- [8] P. G. Szabó (2000), *Some New Structures for the "Equal Circles Packing in a Square" Problem*, Central European Journal of Operations Research 8:79–91.
- [9] P. G. Szabó (2005), *Optimal substructures in optimal and approximate circle packings*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Vol 46, No.1, pp. 103-118.
- [10] P. G. Szabó, M. Cs. Markót and T. Csendes (2005), *Global Optimization in Geometry — Circle Packing into the Square*, Essays and Surveys in Global Optimization (Ed. by C. Audet, P. Hansen, and G. Savard), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 233–266.
- [11] P. G. Szabó, T. Csendes, L. G. Casado, and I. García (2001), *Packing Equal Circles in a Square I. – Problem Setting and Bounds for Optimal Solutions*, Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 191–206.
- [12] D. Würtz, M. Monagan and R. Peikert (1994), *The History of Packing Circles in a Square*, Maple Technical Newsletter (Maple in Mathematics and Sciences — A Special issue) 0:35–42.

