Kettős trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága, Riemann szummálhatósága és integrálok Lebesgue szummálhatósága

Doktori értekezés tézisei

Krizsán Lívia

Témavezető:

Dr. Móricz Ferenc
az MTA doktora
professzor emeritus

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2016

Bevezetés

Az értekezés első felében olyan egy- és kétváltozós trigonometrikus sorokkal foglalkozunk, amelyek abszolút (és ebből kifolyólag egyenletesen is) konvergensek. Ismert tény, hogy ilyen sorok összegfüggvénye minden pontban létezik és folytonos. Továbbá azt is tudjuk, hogy minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor egyben összegfüggvényének Fourier sora. Az első két fejezetben trigonometrikus sorok összegfüggvényének simaságát tárgyaljuk. Pontosabban, elegendő feltételeket adunk arra vonatkozóan, hogy az összegfüggvény egyváltozós esetben valamely $\mathrm{lip}(\alpha)$, $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz vagy $\mathrm{zyg}(\alpha)$, $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund osztályba tartozzék, a kétváltozós esetben pedig valamely multiplikatív $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$, $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ Lipschitz vagy $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ és $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ Zygmund osztály eleme legyen.

A disszertáció második felében két új összegezhetőségi fogalmat vezetünk be: kettős trigonometrikus sorok Riemann-, és kettős trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatóságát. Az egyváltozós esethez hasonlóan (lásd [21]-ben) egy kettős trigonometrikus sor Riemann összegezhetőségének definiálásakor a sor mindkét változója szerinti kétszeri formális integrálásával kapott függvény szimmetrikus második deriváltjának létezését követeljük meg. Belátjuk, hogy a Riemann szummálhatóság a reguláris konvergencia általánosítása, azaz ha egy kettős trigonometrikus sor regulárisan konvergens, akkor Riemann értelemben is összegezhető, és a két értelemben vett összeg megegyezik. A bizonyításokban kulcsfontosságú szerepet tölt be Robison tétele (lásd [16]-ban), amely a végtelen dimenziójú korlátos-reguláris mátrixok jellemzését adja meg.

A negyedik részben a Lebesgue szummálhatóság fogalmát visszük át kettős trigonometrikus integrálokra. A trigonometrikus sorok Lebesgue összegezhetőségének fogalmát Zygmund a sor egyszeri formális integrálásával kapott függvény szimmetrikus deriváltjának létezésével definiálta (lásd [21, 1. kötet, 321. old.]). Olyan feltételeket mutatunk, amelyek teljesülése garantálja hogy a kettős integrál Pringsheim értelemben vett összege megegyezzen a Lebesgue összegével.

A disszertáció a szerző alábbi cikkeiben publikált eredményeire épül:

L. Krizsán and F. Móricz, *Generalization of Zygmund's theorem on the smoothness of the sum of trigonometric series*, Acta Sci. Math. (Szeged), **78** (2012), 155–164.

L. Krizsán and F. Móricz, *A two-dimensional extension of Zygmund's theorem on the smoothness of the sum of trigonometric series*, Acta Sci. Math. (Szeged), **79** (2013), 49–62.

L. Krizsán and F. Móricz, *The Lebesgue summability of double trigonometric integrals*, Math. Inequal. Appl., **17** (2014), 1543–1550.

L. Krizsán, *On the Riemann summability of double trigonometric series*, Math. Pannonica, **25/1** (2014-2015), 135–145.

1. Egyváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága

Definíció. Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ olyan sorozat, amelyre

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty.$$

Ekkor a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

trigonometrikus sor abszolút és egyenletesen konvergens. Jelöljük az összegét $f(x)$-szel:

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{T} := [-\pi, \pi)\,. \tag{1.1}$$

Az egyenletes konvergencia következtében az $f(x)$ függvény folytonos.

Definíció. Tekintsük a periodikus $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ függvényt, ahol $\mathbb{T}$ továbbra is a $[-\pi, \pi)$ tóruszt jelöli. Azt mondjuk, hogy az f függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha létezik olyan csakis az f függvénytől függő C konstans, hogy

$$|\Delta f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \le Ch^\alpha$$

teljesül minden $x \in \mathbb{T}$ és $h > 0$ esetén.

Az f függvény a $\mathrm{lip}(\alpha)$ kis Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha a

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\,|f(x+h) - f(x)| = 0$$

konvergencia egyenletes x-ben.

Az f függvény a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha folytonos és létezik olyan csakis az f függvénytől függő C konstans, amelyre

$$\left|\Delta^2 f(x,h)\right| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \leq Ch^\alpha$$

fennáll minden $x \in \mathbb{T}$ és $h > 0$ esetén.

Azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{zyg}(\alpha)$ kis Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha folytonos és

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha} \left|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right| = 0$$

egyenletesen teljesül x-ben.

Zygmund elegendő feltételeket adott arra vonatkozóan, hogy az (1.1)-ben definiált $f(x)$ összegfüggvény a $\mathrm{Zyg}(1)$, illetve a $\mathrm{zyg}(1)$ osztályba tartozzék (lásd [21, 1. kötet, 320. oldal]). Ezen tételek általánosítottuk tetszőleges $0 < \alpha \leq 2$ esetére. Új eredményeinket a következő tételekben foglaltuk össze.

1.1. Tétel. *Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Ha valamely $0 < \alpha \leq 2$ esetén létezik olyan C_α konstans, amelyre teljesül, hogy*

$$\frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n|\leq N} n^2 |c_n| \leq C_\alpha \qquad (N = 1,2,\dots), \tag{1.2}$$

akkor az (1.1) *sor abszolút és egyenletesen konvergens, és az $f(x)$ összegfüggvény a* $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ *osztályhoz tartozik.*

1.2. Tétel. *Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. Ha valamely $0 < \alpha < 2$ értékre teljesül, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n|\leq N} n^2 |c_n| = 0, \tag{1.3}$$

akkor $f(x) \in \mathrm{zyg}(\alpha)$.

Megjegyzés. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor

$$\mathrm{Lip}(\alpha) = \mathrm{Zyg}(\alpha) \quad \text{és} \quad \mathrm{lip}(\alpha) = \mathrm{zyg}(\alpha),$$

és ezáltal az is igaz, hogy az (1.2) feltétel mellett $f(x)$ a $\mathrm{Lip}(\alpha)$, az (1.3) feltétel mellett pedig a $\mathrm{lip}(\alpha)$ osztályba is beletartozik.

Az $\alpha = 1$ esetben azonban a $\mathrm{Lip}(1) \subset \mathrm{Zyg}(1)$ szigorú tartalmazási reláció áll fenn. Ezért a következő tételben az $f(x) \in \mathrm{Lip}(1)$ tartalmazásra adtunk elegendő feltételt.

1.3. Tétel. *Ha a $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ sorozat kielégíti a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| < \infty$$

feltételt, akkor $f(x) \in \mathrm{Lip}(1)$.

2. Kétváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága

Definíció. Legyen $\{c_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}\subset\mathbb{C}$ komplex számok olyan kettős sorozata, amelyre

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_{m,n}|<\infty. \tag{2.1}$$

Ekkor az

$$f(x,y):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{m,n}e^{i(mx+ny)},\qquad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{2.2}$$

trigonometrikus sor abszolút és egyenletesen konvergens, következésképpen az $f(x,y)$ összegfüggvény egyenletesen folytonos.

Definíció. A fenti f összegfüggvény simaságának vizsgálatához vezessük be a

$$\Delta f(x,y;h,k):=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)$$

operátort.

Definíció. Egy folytonos f függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ multiplikatív Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha,\beta>0$-ra (lásd [11]-ben), ha létezik olyan kizárólag az f függvénytől, valamint az α és β számoktól függő C konstans, melyre fennáll, hogy

$$|\Delta f(x,y;h,k)|\le Ch^{\alpha}k^{\beta}\quad\text{minden}\quad x,y\quad\text{és}\quad h,k>0\quad\text{esetén.} \tag{2.3}$$

Amennyiben

$$\lim_{h,k\to 0}h^{-\alpha}k^{-\beta}\Delta f(x,y;h,k)=0$$

is teljesül, méghozzá x-ben és y-ban egyenletesen, akkor azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ multiplikatív kis Lipschitz osztályhoz tartozik.

A folytonos f függvény a $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ multiplikatív Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha,\beta>0$-ra (lásd [2]-ben), ha

$$\left|\Delta^2 f(x,y;h,k)\right|\le Ch^{\alpha}k^{\beta}\quad\text{minden}\quad x,y\quad\text{és}\quad h,k>0\quad\text{esetén,} \tag{2.4}$$

ahol C ismét csak az f függvénytől, α-tól és β-tól függ. Ha ráadásul

$$\lim_{h,k\to 0}h^{-\alpha}k^{-\beta}\Delta^2 f(x,y;h,k)=0$$

is fennáll x-ben és y-ban egyenletesen, akkor f a $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ multiplikatív kis Zygmund osztályhoz tartozik.

A következő tételekben fogalmaztuk meg a legfőbb eredményeinket.

2.1. Tétel. *Legyen* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *komplex számok olyan kettős sorozata, amelyre*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_{m,0}| < \infty \quad \text{és} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{0,n}| < \infty. \tag{2.5}$$

Ha valamely $0 < \alpha, \beta \leq 2$ *és* $C_{\alpha,\beta}$ *konstansokra*

$$\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} m^2 n^2 \, |c_{m,n}| \leq C_{\alpha,\beta} \qquad (M, N = 1,2,\ldots) \tag{2.6}$$

fennáll, akkor (2.1) *teljesül és a* (2.2)*-ben definiált* f *összegfüggvény a* $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

2.2. Tétel. *Ha a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat teljesíti a* (2.5) *és a* (2.6) *feltételeket valamely* $0 < \alpha, \beta < 2$ *esetén, és ráadásul*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} m^2 n^2 \, |c_{m,n}| = 0$$

is fennáll, akkor a (2.2)*-ben definiált* f *függvény a* $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

Az előző két tétel feltételeinek erősítésével hasonló elegendőségi tételeket mondtunk ki az f összegfüggvény $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ és $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ osztályokba való tartozására $0 < \alpha, \beta \leq 1$ esetén.

2.3. Tétel. *Legyen* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *olyan sorozat, amelyre* (2.5) *teljesül. Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra és* $C^{(3)}_{\alpha,\beta}$ *konstansra fennáll, hogy*

$$\frac{1}{M^{1-\alpha}N^{1-\beta}} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} |mnc_{m,n}| \leq C^{(3)}_{\alpha,\beta} \qquad (M, N = 1,2,\ldots), \tag{2.7}$$

akkor (2.1) *is teljesül és a* (2.2)*-ben megadott* f *összegfüggvény a* $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra a* (2.5) *és a* (2.7) *feltételek teljesül és ráadásul*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M^{1-\alpha}N^{1-\beta}} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} |mnc_{m,n}| = 0$$

is fennáll valamely $0 < \alpha, \beta < 1$ *esetén. Ekkor a* (2.2)*-ben definiált* f *összegfüggvény a* $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

3. Kettős trigonometrikus sorok Riemann szummálhatósága

Legyen $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ komplex számok kettős sorozata. Tekintsük az

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} e^{i(mx+ny)} \tag{3.1}$$

kettős trigonometrikus sort a téglalap alakú

$$s_{M,N}(x,y) := \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} c_{m,n} e^{i(mx+ny)} \qquad (M,N = 0,1,2,\ldots)$$

szimmetrikus részletösszegeivel.

Definíció. A (3.1) kettős trigonometrikus sor Pringsheim értelemben konvergál az s értékhez valamely (x,y) pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0 természetes szám, hogy

$$|s_{M,N}(x,y) - S| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad M,N > n_0.$$

A Pringsheim értelemben vett konvergencia azonban nem garantálja sem a sor tagjainak korlátosságát, sem pedig az ún.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx} \left(c_{m,-n} e^{-iny} + c_{m,n} e^{iny}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{3.2}$$

sorösszegek, illetve a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{inx} \left(c_{-m,n} e^{-imx} + c_{m,n} e^{imx}\right) \qquad (m \in \mathbb{Z}). \tag{3.3}$$

oszlopösszegek konvergenciáját. Ezen okok váltották ki egy erősebb konvergencia fogalom bevezetését, amelyet Hardy [4] cikkében ismertetett.

Definíció. A (3.1) kettős trigonometrikus sor regulárisan konvergens, ha Pringsheim értelemben konvergens, továbbá a (3.2)-beli sorösszegek és a (3.3)-beli oszlopösszegek is konvergensek.

Definíció. Ha a (3.1) sort formálisan integráljuk mindkét változója szerint kétszer, akkor az

$$\begin{aligned} R(x,y) := c_{0,0}\frac{x^2y^2}{4} - \frac{y^2}{2}\sum_{|m|\ge 1} c_{m,0}\frac{e^{imx}}{m^2} - \frac{x^2}{2}\sum_{|n|\ge 1} c_{0,n}\frac{e^{inx}}{n^2} + \\ + \sum_{|m|\ge 1}\sum_{|n|\ge 1} c_{m,n}\frac{e^{i(mx+ny)}}{m^2n^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{T}^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

függvényhez jutunk. Ha a $\{c_{m,n}\}$ sorozat korlátos, akkor az imént kapott (3.4)-ben szereplő sorok abszolút és egyenletesen is konvergensek. Tehát az R függvény minden $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ pontban jól definiált, és az egyenletes konvergencia következtében folytonos is.

Vezessük be a

$$\begin{aligned}\Delta^2 R(x,y;2u,2v) :=& R(x+2u,y+2v)+R(x-2u,y+2v)+R(x+2u,y-2v)+\\ &+R(x-2u,y-2v)-2R(x+2u,y)-2R(x,y+2v)-\\ &-2R(x-2u,y)-2R(x,y-2v)+4R(x,y) \qquad (u,v>0)\end{aligned}$$

jelölést. Ha a

$$\lim_{u,v\to 0} \frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u,2v)}{16u^2v^2} = s$$

határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) sor az (x,y) pontban Riemann módszere szerint összegezhető (röviden: Riemann összegezhető), és Riemann összege s.

Az alábbi két állítás Riemann [15]-ben publikált tételeinek kétváltozós megfelelője.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ sorozatra*

$$\lim_{|m|+|n|\to\infty} c_{m,n} = 0 \tag{3.5}$$

teljesül. Ha valamely (x,y) pontban a (3.1) kettős sor regulárisan konvergens, akkor Riemann módszere szerint is összegezhető, és a két értelemben vett összeg megegyezik.

3.2. Tétel. *Ha (3.5) teljesül, akkor*

$$\frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u,2v)}{16uv} \to 0 \qquad (u,v\to 0)$$

is fennáll, ráadásul (x,y)-ban egyenletesen.

4. Kettős trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatósága

A trigonometrikus sorok Lebesgue összegezhetőségének fogalmát Zygmund a sor egyszeri formális integrálásával kapott függvény szimmetrikus deriváltjának létezésével definiálta (lásd [21, 1. kötet, 321. old.]). Megjegyezzük, hogy a Lebesgue szummálhatóság kettős sorokra való kiterjesztését Bagota Mónika és Móricz Ferenc közös [1] cikkükben publikálták. A terület legfrissebb eredményeit Móricz [13] cikkében olvashatjuk, amely trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatóságát tárgyalja.

Definíció. Legyen az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ függvény Lebesgue értelemben integrálható $\mathbb{R}^2$ minden korlátos $[a,b]\times[c,d]$ téglalap alakú részhalmazán, jelölésben: $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Tekintsük az

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt, \quad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{4.1}$$

kettős trigonometrikus integrált a

$$I_{S,T}(x,y):=\int_{|s|<S}\int_{|t|<T} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt \qquad (S,T>0)$$

szimmetrikus részintegráljaival. Azt mondjuk, hogy a (4.1) kettős integrál az $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ pontban Pringsheim értelemben konvergál az l számhoz, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\rho=\rho(\varepsilon)>0$ küszöbszám, amelyre

$$|I_{S,T}(x,y)-l|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad S,T>\rho.$$

Definíció. Tekintsük a (4.1)-ben szereplő integrandus x és y változója szerinti formális integrálásával kapott

$$L(x,y):=\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\frac{e^{i(sx+ty)}}{i^2st}dsdt, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

függvényt. A (4.1) integrált Lebesgue értelemben összegezhetőnek nevezzük egy $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ pontban, ha a

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} :=& \frac{1}{4hk}\left(L(x+h,y+k)-L(x-h,y+k)\right.\\ &\left.-L(x+h,y-k)+L(x-h,y-k)\right)\to l \qquad (0<h,k\to 0)\end{aligned}$$

véges határérték létezik. Ekkor az l számot a (4.1) integrál Lebesgue összegének nevezzük.

Az alábbi tétel a Móricz [13] cikkében található tétel kettős integrálokra vett megfelelője.

4.1. Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *függvényre a*

$$s \int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, ds)$$

és a

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{S} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |sf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.2}$$

feltétel teljesül, továbbá a

$$t \int_{\mathbb{R}} f(s,t)ds \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$$

és a

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |tf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.3}$$

feltétel is fennáll, akkor a (4.1)*-ben definiált kettős integrál Lebesgue értelemben létezik és a*

$$\lim_{h,k\to 0} \left(\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} - I_{1/h,1/k}(x,y) \right) = 0 \qquad (h,k>0)$$

konvergencia egyenletes (x,y)*-ban.*

Más szóval, a (4.2) *és a* (4.3) *feltételek mellett a* (4.1) *kettős integrál akkor és csakis akkor összegezhető Lebesgue értelemben egy adott* (x,y) *pontban, ha Pringsheim értelemben is konvergens* (x,y)*-ban, és a két értelemben vett összeg megegyezik.*

Megjegyzés. Külön kiemeljük, hogy az előző tétel az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvények

$$\hat{f}(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{-i(sx+ty)}dsdt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

módon definiált kettős Fourier transzfoltmáltjaira is alkalmazható, amennyiben a (4.2) és a (4.3) feltételek teljesülnek.

Irodalomjegyzék

[1] M. Bagota and F. Móricz, *On the Lebesgue summability of double trigonometric series*, J. Math. Anal. Appl., **348** (2008), 555–561.

[2] V. Fülöp and F. Móricz, *Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Zygmund classes of functions*, Analysis, **28** (2008), 345–354.

[3] H. J. Hamilton, *Transformations of multiple sequences*, Duke Math. J., **2** (1936), 29–60.

[4] G. H. Hardy, *On the convergence of certain multiple series*, Proc. Cambridge Philosoph. Soc., **19** (1916–1919), 86–95.

[5] L. Krizsán and F. Móricz, *Generalization of Zygmund's theorem on the smoothness of the sum of trigonometric series*, Acta Sci. Math. (Szeged), **78** (2012), 155–164.

[6] L. Krizsán and F. Móricz, *A two-dimensional extension of Zygmund's theorem on the smoothness of the sum of trigonometric series*, Acta Sci. Math. (Szeged), **79** (2013), 49–62.

[7] L. Krizsán and F. Móricz, *The Lebesgue summability of double trigonometric integrals*, Math. Inequal. Appl., **17** (2014), 1543–1550.

[8] L. Krizsán, *On the Riemann summability of double trigonometric series*, Math. Pannonica, **25/1** (2014-2015), 135–145.

[9] F. Móricz, *On the convergence in a restricted sense of multiple series*, Anal. Math., **5** (1979), 135–147.

[10] F. Móricz, *The Kronecker lemmas for multiple series and some applications*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **37** (1981), 39–50.

[11] F. Móricz, *Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions*, Acta Math. Hungar., **121** (2008), 1–19.

[12] F. Móricz, *On the uniform convergence of double sine integrals over* $\mathbb{R}_+^2$, Analysis, **31** (2011), 191–204.

[13] F. Móricz, *The Lebesgue summability of trigonometric integrals*, J. Math. Anal. Appl., **390** (2012), 188–196.

[14] A. Pringsheim, *Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen*, Math. Ann., **53** (1900), 289–321.

[15] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Aus dem Nachlass des Verfassers mitgeteilt durch Dedekind. Gött. Abh. 1868 (From the nachlass of the author, communicated by Dedekind.)

[16] G. M. Robison, *Divergent double sequences and series*, Trans. Am. Math. Soc., **28** (1926), 50–73.

[17] O. Szász, *On Lebesgue summability and its generalizations to integrals*, Amer. J. Math., **67** (1945), 389–396.

[18] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace Mat.-Fiz., **22** (1911), 113–119.

[19] F. Weisz, *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[20] A. Zygmund, *Smooth functions*, Duke Math. J., **12** (1945), 47–76.

[21] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, 1959.