Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Elméleti Fizikai Tanszék
Fizika Doktori Iskola

Összefonódás, koherens állapotok; kvantumos rotor áthaladása apertúrán

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Szerző:
Dömötör Piroska

Témavezető:
Dr. Benedict Mihály
egyetemi tanár

Szeged

2016

Bevezetés

Egy fizikai rendszer kvantummechanikai leírásában alapvető az állapotok szuperpozíciójának lehetősége, melynek következtében a klasszikus és kvantummechanikai leírás lényeges különbségeket mutat. A szuperpozíció lehetőségét a matematikai struktúrában az biztosítja, hogy az állapotok leírására egy lineáris vektorteret – egy alkalmas $\mathcal{H}$ komplex Hilbert-teret – használunk [1]. A Hilbert-tér vektorai az ún. *tiszta* állapotok, amelyek esetén a fizikai rendszer állapotáról a kvantummechanika által megengedett minden információ a rendelkezésünkre áll. Ha a fizikai rendszerünk több részrendszerből épül föl, akkor az azt leíró Hilbert-tér, mely az egyes részrendszereket leíró Hilbert-terek tenzorszorzat tere, már magában hordozza az összefonódás lehetőségét.

Tekintsük példának okáért az egyik legegyszerűbb lehetőséget, a két qubitből, azaz kétállapotú részrendszerből fölépülő kvantumrendszert. Jelölje $|0\rangle_A$ és $|1\rangle_A$ az A qubitnek megfelelő kétdimenziós $\mathcal{H}_2^{(A)}$ Hilbert-teret kifeszítő ortonormált bázisvektorokat, $|0\rangle_B$ és $|1\rangle_B$ pedig ugyanezt a B qubitre vonatkozóan. Ezzel a jelöléssel az összetett rendszer $\mathcal{H}_2^{(A)} \otimes \mathcal{H}_2^{(B)}$ tenzorszorzat terét a természetes módon adódó

$$\begin{aligned} |00\rangle &:= |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B\,, \qquad & |01\rangle &:= |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B\,, \\ |10\rangle &:= |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\,, \qquad & |11\rangle &:= |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B \end{aligned} \tag{1}$$

bázisvektorok feszítik ki. A szuperpozíció matematikai lehetősége miatt azonban lehetségesek például a

$$|\Psi_\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \pm |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right), \tag{2}$$

alakú lineáris kombinációk is, amelyeket már nem tudunk fölírni a $\mathcal{H}_2^{(A)}$ és $\mathcal{H}_2^{(B)}$ terekből vett vektorok elemi tenzorszorzataként. Az ilyen (2) típusú kombinációkat – elkülönítendő a szorzatként fölírható állapotoktól – *összefonódott állapotnak* nevezzünk.

A (2) típusú állapot, melyet spinekre vonatkozóan D. Bohm [2] vezetett be, olyan fundamentális kérdéseket vet föl, amelyek már röviddel a kvantummechanika elméletének megjelenése után foglalkoztatták a kutatókat. Az összefonódottságból származó különös szituációk lehetőségére Schrödinger mutatott rá 1935-ben [3], ahol egy makroszkopikus test (egy macska) és egy radioaktív atom összefonódott állapotainak paradox voltát hangsúlyozta. Ennek kapcsán azon kételyeinek is hangot adott, hogy vajon a kvantummechanikára mint befejezett fizikai elméletre tekinthetünk-e. Ugyanezt a kérdéskört jóval mélyebben járta körül az Einstein, Podolsky és Rosen (EPR)

által megfogalmazott paradoxon [4]. Az EPR cikk szerzői úgy vélték, hogy ha egy objektumnál valamely tulajdonság az objektum megmérése, tehát megzavarása nélkül jelen van, akkor azt egy teljes elméletnek pontosan meg kell tudnia mondani. A gondolatkísérlet részletes elemzése azt mutatta, hogy a kvantummechanika vagy a fönti természetesnek gondolt előföltevést vagy a lokalitási elvet sérti. Ennek a fundamentális kérdésnek a kísérleti vizsgálatát elvi szinten a J. S. Bell által megfogalmazott egyenlőtlenség [5], majd ennek későbbi variánsai, a CHSH-egyenlőtlenségek [6] tették lehetővé. A J. Clauser, A. Aspect majd később A. Zeilinger és még sokan mások által ténylegesen elvégzett – fotonok polarizációs állapotainak összefonódásán alapuló – kísérletek azt mutatták [7, 8, 9], hogy a valóság és az azt helyesen leíró kvantummechanika ellentmond az úgynevezett lokális realizmus elvének, s ez végső soron a két részecske összefonódott állapotának a következménye.

Az összefonódottság kérdése azonban a természetben működő alapvető fizikai elvek megértésén túl is érdekes. A klasszikusan megengedett korrelációkon felüli kvantumos korrelációk az elmúlt évtizedekben az érdeklődés középpontjába kerültek, miután fölismerték, hogy erőforrásként szolgálhatnak kvantumos kommunikációs, illetve számítási algoritmusokban [10, 11].

A kvázi-klasszikus tulajdonságokat mutató koherens állapot fogalma elsősorban a harmonikus oszcillátor – vagy kvantumoptikában az oszcillátorral modellezhető mező módusok – leírásából ismert [12]. Hasonló tulajdonságú állapotokat azonban más kvantumrendszer esetén is lehetséges konstruálni, ahol a kvantumrendszer sajátosságait ebből a szempontból az határozza meg, hogy a vizsgált Hilbert-tér milyen algebrai struktúra hatását hordozza [13].

A feles spinek vagy kétállapotú atomok modellezésére alkalmas qubit rendszerek esetén is adottak a koherens állapot értelmes definíciójához szükséges matematikai föltételek [14]. A szokásos spin operátorok segítségével adott egy Lie-algebra és ezen keresztül egy Lie-csoport struktúra, amelyet a definiáló kétdimenziós Hilbert-téren és ezek tenzorhatványain is ábrázolhatunk. Egy N részecskés qubit rendszer esetén az $SU(2,\mathbb{C})$ Lie-csoporthoz kötődő, az impulzusnyomaték algebrai elméletéből ismert $\{J_z,\, J_+,\, J_-\}$ globális spin operátorok jelennek meg. A koherens állapotokat ezek segítségével definiáljuk az ábrázolási tér egy alkalmasan választott referencia állapotának folytonosan paraméterezett exponenciális transzformációival. Ezek az állapotok a kétállapotú atomi rendszerek kontextusában bukkantak föl először az irodalomban, ezért többször *atomi koherens* állapotokként hivatkozunk rájuk [15]. A sokrészecskés tenzorszorzat struktúra miatt értelmes kérdés megvizsgálni ezen állapotokat az összefonódottság szempontjából, erről szól a dolgozat első része.

A fönti qubites esetben több különböző részecske összefonódott állapo-

taira gondolhatunk, de összefonódás nem csak ilyen értelemben lehetséges. Szokás ugyanis egyazon részecske különböző szabadsági fokai közötti összefonódásról beszélni, mint ahogyan azt a jól ismert Stern-Gerlach-féle kísérlet mutatja, ahol az inhomogén mágneses mezővel való kölcsönhatás következtében az ezüstatom haladási iránya és spin szabadsági foka összefonódik. Az összefonódás lehetősége tehát a tenzorszorzat téren tekintett kvantumrendszerek általános tulajdonsága, amely megnyilvánulhat függetlenül mérhető objektumok pl. különböző részecskék összefonódásaként, vagy egyetlen objektum szabadsági fokainak összefonódásaként is.

Ez utóbbi eshetőség áll fönn a dolgozat második részében vizsgált probléma kapcsán. Ebben a második témában belső struktúrával rendelkező részecske vékony ernyőn lévő apertúrán való szóródásának egyszerű kvantummechanikai modelljét vizsgáltuk abban az esetben, amikor a rés nagysága összemérhető a részecske méretével. A technológiai fejlődés lehetővé tette, hogy a mérettartományok szempontjából hasonló kísérleti szituációt laboratóriumban is vizsgáljanak. Megfigyelték többek között atomok, molekulák és klaszterek résen és rácson való elhajlását és interferenciáját [16, 17, 18].

Ezen kísérletek kapcsán fölmerül az a kérdés, hogy a belső struktúra jelenléte milyen hatást gyakorol a részecske apertúrán való áthaladására, mennyire könnyíti vagy nehezíti azt. Egyszerű modellünkben belső struktúrának merev rúdként való forgást tételeztünk föl, és a tömegközéppont mozgását az apertúra szimmetriatengelye mentén megszorítottuk, így a mozgásnak két szabadsági foka van. A réstől távol – kölcsönhatás hiányában – a rendszer dinamikáját megadó Hamilton-operátor a két szabadsági foknak megfelelően szeparálható megoldásokat tesz lehetővé. A réssel való kölcsönhatást a modellben a hullámfüggvényre kirótt peremföltételek segítségével vesszük figyelembe, amelyek a transzlációs és a forgási szabadsági fokok összecsatolódásához vezetnek.

A geometriai indíttatású modell tehát bonyolult peremföltételű akadályon való kétdimenziós stacionárius szórási problémára vezet. A szabad részeken a forgás szempontjából periodikus peremföltételek következtében a forgásra vonatkozó megoldásfüggvények spektruma diszkrét. A vizsgált szórási problémánk így *kvázi-egydimenziós*, a szabad részeknek „*drótok*” felelnek meg, amelyek el- illetve odavezetik a valószínűségi áramokat a kölcsönhatási régióhoz. A kölcsönhatás következtében azután az ezen drótok különböző módusaiban lévő síkhullámok szóródnak egymásba.

Ebben a konstrukcióban elvben már a beérkező szabad részecske forgása összefonódhat a haladó mozgással, hiszen adott energián több szorzat alakú energia-sajátfüggvény is lehetséges, így azok tetszőleges lineáris kombinációja is megengedett. De még ha a beérkező rotor hullámfüggvénye szorzat alakú

is volt – mint az általunk vizsgált példákban – a kimeneten az azonos energiát képviselő síkhullám és forgási módus szorzatok akkor is szükségképpen összefonódnak, éppen a szórási probléma S-mátrixa által megszabott módon. Ebben az esetben tehát a bejövő részecske energiájának függvényében más és más lineáris kombinációt, azaz más és más összefonódott állapotot kapunk eredményül. A fizikailag érdekes információkat pedig éppen a kombinációban szereplő együtthatók által meghatározott transzmisszió vagy reflexió tartalmazza a beérkező részecskék energiájának a függvényében.

Kutatási célok és módszerek, fölépítés

I. rész: Koherens állapotok és összefonódottság

Az összefonódás és a koherens állapotok fogalma külön-külön is lényeges szerepet játszik számos kvantummechanikai probléma esetében, azonban ezek szoros kapcsolatáról az irodalomban szinte alig történik említés. Saját munkánkat megelőzően erre vonatkozóan egyetlen közleményről van tudomásunk Brif és társszerzői részéről [19]. Ők azonban egy összetett rendszer *két részre* bonthatósága szempontjából tettek megállapítást, míg mi egy sokrészű rendszer *teljes* szorzatállapotként való fölírhatóságát vizsgáljuk.

Munkánk első részében célul tűztük ki az N qubites sokrészecske rendszer ún. atomi koherens állapotainak vizsgálatát – a sokrészecskés tenzorszorzat struktúra miatt lehetséges – összefonódottság szempontjából. Bizonyításaink és számításaink során a feladathoz tartozó Hilbert-tér tulajdonságai felől közelítünk, és a fizikusok számára az impulzusnyomaték elméletéből ismert vagy ahhoz hasonló fogalmakat és érveket használunk.

A dolgozat első fejezetében röviden fölidézzük a qubitek fogalmát, a rajtuk ható operátorokat és a fölcserélési relációkban kódolt algebrai struktúrát, amely megszabja a kétállapotú modellben lehetséges dinamikát. Majd az irodalom alapján ismertetjük az atomi koherens állapotok konstrukcióját [15] mint a qubit sokrészecske rendszer szimmetrikus alterének speciális állapotait. Az N részecskés szimmetrikus alteret az ún. Dicke-féle állapotok [20] közül azok feszítik ki, melyek az impulzusmomentum algebrai elméletéből ismert j és m kvantumszámokkal $j = N/2$ és $m \in \{-N/2, \dots N/2\}$ módon indexelhetőek.

Saját eredményeinket és a tézispontokban ismertetett állításokat a második és harmadik fejezetben mutatjuk be. Ehhez elsőnek Meyer és Wallach globális összefonódási mértékétől inspirálva [21] egy formális kritériumot adunk az N qubites tiszta sokrészecske rendszer teljes szeparálhatóságára vonatkozóan.

A dolgozat első részének harmadik fejezetében a qubit rendszerre kapott eredményeket terjesztjük ki arra az esetre, ahol az egyes alrendszerek egy-egy d (véges) dimenziós Hilbert-tér vektoraival írhatók le. A d darab ortogonális állapot által alkotott ún. *qudit* rendszer esetén – a d dimenzió által megszabott módon – megszaporodnak a különböző állapotok közt kapcsolatot teremtő léptető operátorok és az állapotokat rendező nulla nyomú diagonális operátorok. A léptető operátorok segítségével a qubiteknél látottakkal analóg módon definiáljuk az $SU(d, \mathbb{C})$ szimmetria esetére általánosított koherens állapotokat. Majd a qubiteknél alkalmazott logikai lépések mentén haladva bizonyítjuk az egyes állítások quditekre vonatkozó általánosításait.

II. rész: Apertúrán áthaladó forgó kétatomos molekula problémája

A második részt kezdő negyedik fejezetben az apertúrán áthaladó forgó molekula kvantummechanikai feladatát átfogalmazzuk egy kvázi-egydimenziós stacionárius szórási problémává. A kölcsönhatási régióban a merev forgásként föltételezett belső struktúra és az apertúra kölcsönhatását a hullámfüggvényre kirótt – a klasszikus kényszerekből eredeztetett – peremföltételekkel vesszük figyelembe. Célunk tehát a vázolt szórási probléma megoldása, és a belső struktúra hatásának vizsgálata a beérkező részecskék transzmissziójának energiafüggésében.

Az ötödik fejezetben analitikus közelítéseket teszünk a kvantummechanikai állapot kölcsönhatási régióbeli alakjára, majd elvégezzük a hullámfüggvények illesztését a teljes kétdimenziós problémára a kölcsönhatási régió és a szabad tartományok (ún. drótok) határán. Az alkalmazott elhanyagolások sora azonban csak alacsony energián (nem forgó bejövő molekulák esetén) lehet érvényes, és első látásra még ott is túlegyszerűsítettnek tűnik. Ezért az analitikus eljárás elvégzése után kívánatos volt a megoldás ellenőrzése egy numerikus módszerrel, amely lehetőséget biztosít a közelítések ellenőrzésére és a teljes szórási feladat – tetszőleges bejövő állapot esetén érvényes – megoldására.

A numerikus megoldáshoz, amelyet a hatodik fejezetben ismertetünk, diszkrét rács reprezentációt használunk, amelynél a bonyolult peremföltételek a megfelelő rácspontok elhagyásával természetes módon figyelembe vehetőek. A nehézséget ezen a ponton a mátrixokká alakuló operátoraink végtelen mérete jelenti. Hasonló feladattal nanoméretű szilárdtest rendszerek kvantumos vezetési tulajdonságainak leírása során találkozhatunk, ahol a szórási problémát az érdekes véges tartomány Green-függvényének megkeresésével oldják meg [22, 23, 24]. Az analógiát kihasználva a periodikus határföltétel miatt szükséges komplex módusfüggvények esetére is részletesen kibontjuk

a Green-függvény és az S-mátrix Fisher-Lee relációként ismert kapcsolatát [25].

A probléma megfelelő particionálásával elérhető hogy a Green-függvény ismerete csak a kölcsönhatás szempontjából releváns véges tartományon szükséges, és annak kiszámítása a tartomány eredeti Hamilton-operátorához hozzávett ún. sajátenergiás korrekciók segítségével lehetséges is. A korrekciók – ebben a diszkrét rács reprezentációban – egzaktul figyelembe veszik a leválasztott szabad részekkel való kölcsönhatást [22].

A folytonos energiaspektrum jellemzőit, például a hosszú élettartamú rezonáns állapotokat, a spektrális függvény és az abból kinyerhető állapotsűrűség (DOS), illetve helyi állapotsűrűség (LDOS) segítségével tanulmányozzuk, amelyek szintén a véges tartományra megszorított Green-függvényből számolhatóak.

Új tudományos eredmények

I. rész: Koherens állapotok és összefonódottság

1. Új általános formális szeparálhatósági kritériumot adtunk meg az N qudites tiszta sokrészecske rendszerre. Eszerint egy tetszőleges N qudites tiszta állapot esetén az n-edik quditet kiszemelve a $|\psi\rangle$ állapotot

$$|\psi\rangle = |1\rangle_n \otimes \left|u_n^1\right\rangle + |2\rangle_n \otimes \left|u_n^2\right\rangle + \cdots + |d\rangle_n \otimes \left|u_n^d\right\rangle \tag{3}$$

módon fölbonthatjuk, ahol a $|k\rangle_n$ vektorok a n-edik d-dimenziós Hilbert-tér standard bázisvektorai, míg az $\left|u_n^k\right\rangle$ vektorok értelemszerűen $N-1$ qudites, általában nem normált állapotokat jelentenek. Ezt a (3) fölbontást fölhasználva megmutattuk, *hogy $|\psi\rangle$ akkor és csak akkor szorzatállapot, ha az $\left|u_n^k\right\rangle$ vektorok adott n esetén minden k-ra párhuzamosak, és ez minden lehetséges n-re érvényes* [A2, A3].

2. Kétállapotú (qubit) sokrészecske rendszer ún. atomi koherens állapotait vizsgálva igazoltuk, *hogy az $\mathbb{S}$ szimmetrikus altérbeli állapot akkor és csak akkor nem összefonódott, ha koherens állapot* [A1]. Ezt az állítást kiterjesztettük és igazoltuk a d-dimenziós (qudit) sokrészecske rendszerek általánosított koherens állapotaira is [A3].

3. Az $\mathbb{S}$ szimmetrikus altéren kívüli, annak $\mathbb{S}_\perp$ ortogonális komplementerébe tartozó állapotokról pedig – mind a qubitek, mind a quditek esetén – megmutattuk, hogy *tetszőeges $\mathbb{S}_\perp$ altérbeli vektor összefonódott* [A1, A3].

II. rész: Apertúrán áthaladó forgó kétatomos molekula problémája

4. Az apertúrán áthaladó forgó-haladó rotor problémához tartozó energiasajátérték egyenletből kiindulva, a forgási és a transzlációs szabadsági fokokat összecsatoló tagok közül a diagonálisakat meghagyva, a transzlációt leíró kifejtési együtthatókra vonatkozóan független egyenleteket vezettünk le, amelyekben a peremföltételek hatása egy effektív potenciálként jelentkezik. A transzmisszióra vonatkozó effektív potenciálokhoz illesztett fiktív oszcillátor potenciál segítségével a kölcsönhatási régióban közelítő analitikus megoldást adtunk a stacionárius állapotokra, majd a kapott hullámfüggvény illesztéséből kiszámítottuk a keresett transzmissziót az energia függvényében [A4].

5. Nem forgó kezdeti állapotú rotor esetén a transzmisszióban rezonanciákat mutattunk ki, amelyek a kvantumos terjedés hullámtulajdonságainak a következményei. A rezonanciák a rotor késleltetett áthaladását jelentik, azaz egy csapdázódási jelenséget írnak le. Ezen rezonanciák energiájára a fiktív oszcillátor potenciál energiasajátértékei segítségével egy a geometriai paraméterektől függő közelítő formulát is adtunk [A4].

6. Az analitikus eredmények alátámasztására és a vizsgálható energiatartomány bővítésére a szórási problémát numerikusan egzakt módon is megoldottuk. Ehhez a feladatot diszkrét rácson vizsgáltuk, egy a kölcsönhatási régiót tartalmazó alkalmasan választott véges tartományon. A sajátenergiás korrekciók figyelembe vételével kiszámítottuk a véges tartományra megszorított Green-függvényt, majd annak segítségével az S-mátrixot és a hullámfüggvényt. A numerikus számításból nyert adatok segítségével jellemeztük a folytonos spektrumot: megadtuk az állapotsűrűséget (DOS) és a helyi állapotsűrűséget (LDOS) az energia függvényében. Az állapotsűrűség energiafüggésében szintén olyan csúcsok mutatkoznak, amelyek nagy élettartamú rezonáns állapotokra, azaz az áthaladó részecskék csapdázódására utalnak [A5].

7. A nagy élettartamú rezonáns állapotok közül a legalacsonyabb energiájú a paraméterek alapján azonosnak bizonyult az előzőleg analitikus módszerrel a transzmisszió energiafüggése alapján meghatározott csúccsal. Az állapotsűrűség energiafüggését elemezve megállapítottuk, hogy a rezonanciák osztályozhatóak a bejövő hullám forgásszimmetriájának szempontjából. Az elvégzett numerikus számítások eredményeivel igazoltuk az alacsony energiás analitikus közelítés helyességét, és rámutattunk az analitikus módszer korlátaira is [A5].

Az értekezéshez fölhasznált publikációk

[A1] P. Dömötör and M. G. Benedict, „Coherent states and global entanglement in an N qubit system," *Physics Letters A*, vol. 372, no. 21, pp. 3792–3795, 2008.

[A2] P. Dömötör and M. G. Benedict, „Entanglement and coherent states," *Physica Scripta*, vol. 2009, no. T135, p. 014030, 2009.

[A3] P. Dömötör and M. G. Benedict, „Global entanglement and coherent states in an N-partite system," *European Physical Journal D*, vol. 53, no. 2, pp. 237–242, 2009.

[A4] B. W. Shore, P. Dömötör, G. Süssmann, E. Sadurní, and W. P. Schleich, „Scattering of a particle with internal structure from a single slit," *New Journal of Physics*, vol. 17, no. 1, p. 013046, 2015.

[A5] P. Dömötör, P. Földi, M. G. Benedict, B. W. Shore, and W. P. Schleich, „Scattering of a particle with internal structure from a single slit: Exact numerical solutions," *New Journal of Physics*, vol. 17, no. 2, p. 023044, 2015.

Egyéb publikációk

[E1] Dömötör Piroska és Benedict Mihály, „Összefonódottság és koherens állapotok", *Ádám P., Kiss T., Varró S. (szerk.) Kvantumelektronika 2008: VI. szimpózium a hazai kvantumelektronikai kutatások eredményeiről.*, 2008.

[E2] P. Dömötör, P. Földi, M. G. Benedict, B. W. Shore, és W. P. Schleich, „Forgó molekulák áthaladása apertúrán: egy egyszerű kvantummechanikai modell", *Ádám P., Almási G. (szerk.) Kvantumelektronika 2014: VII. szimpózium a hazai kvantumelektronikai kutatások eredményeiről.*, 2014.

[E3] P. Dömötör, E. Sadurní, and W. P. Schleich, „Trapping cold molecules in an aperture: Effect of internal structure on particle transmission through an opening", *Book of Abstracts DPG Frühjahrstagung der Sektion AMOP Hannover*, 2010.

[E4] P. Dömötör, O. Kálmán, K. Papp and M. G. Benedict, „A multimedia course for teachers of physics and science”, *Proc. 12th International Conference on Multimedia in Physics Teaching and Learning*, 2007.

Irodalomjegyzék

[1] Neumann, J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, 1932.

[2] Bohm, D., *Quantum Theory*, Prentice-Hall, 1951.

[3] Schrödinger, E., Naturwissenschaften **23** (1935) 807.

[4] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N., Phys. Rev. **47** (1935) 777.

[5] Bell, J. S., Physics **1** (1964) 195.

[6] Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony, A., and Holt, R. A., Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 880.

[7] Freedman, S. J. and Clauser, J. F., Phys. Rev. Lett. **28** (1972) 938.

[8] Aspect, A., Grangier, P., and Roger, G., Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 91.

[9] Weihs, G., Jennewein, T., Simon, C., Weinfurter, H., and Zeilinger, A., Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 5039.

[10] Nielsen, M. A. and Chuang, I. L., *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[11] Feynman, R. P., International Journal of Theoretical Physics **21** (1982) 467.

[12] Glauber, R. J., Phys. Rev. **131** (1963) 2766.

[13] Zhang, W.-M., Feng, D. H., and Gilmore, R., Rev. Mod. Phys. **62** (1990) 867.

[14] Gilmore, R., Annals of Physics **74** (1972) 391 .

[15] Arecchi, F. T., Courtens, E., Gilmore, R., and Thomas, H., Phys. Rev. A **6** (1972) 2211.

[16] Fabre, C., Gross, M., Raimond, J.-M., and Haroche, S., J Phys B **16** (1983) L671.

[17] Kalinin, A., Kornilov, O., Rusin, L., Toennies, J. P., and Vladimirov, G., Phys Rev Lett **93** (2004) 163402.

[18] Hackermüller, L. et al., Phys Rev Lett **91** (2003) 090408.

[19] Brif, C., Mann, A., and Revzen, M., Phys. Rev. A **57** (1998) 742.

[20] Dicke, R. H., Phys. Rev. **93** (1954) 99.

[21] Meyer, D. A. and Wallach, N. R., Journal of Mathematical Physics **43** (2002) 4273.

[22] Datta, S., *Electronic Transport in Mesoscopic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[23] Di Ventra, M., *Electrical Transport in Nanoscale Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.

[24] Ferry, D., Goodnick, S., and Bird, J., *Transport in Nanostructures*, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2009.

[25] Fisher, D. and Lee, P., Phys. Rev. B **23** (1981) 6851.