Húrrezgések megfigyelési problémáinak vizsgálata

Doktori értekezés

Szijártó András Lajos

Témavezető:
Dr. Móricz Ferenc
Konzulens:
Dr. Hegedűs Jenő

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2016

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Előzmények, publikációk

A megfigyelési (avagy megfigyelhetőségi) problémák eredete az irányításelmélet témakörébe nyúlik vissza, ami kiterjedt irodalommal rendelkezik, lásd [1]-[11]. Az egyik leggyakoribb (és sikeresen megoldott) kontroll-probléma a következő: adott egy T időpont ($0 < T < \infty$), és elő van írva egy rendszer teljes állapota ebben a T időpontban:

$$u|_{t=T} = f_1, \quad u_t|_{t=T} = f_2$$

ahol $\underline{u}$ egy másodrendű, hiperbolikus parciális differenciálegyenlet ismeretlen megoldása, f_1 és f_2 ismert függvények, és keresendők az $u|_{t=0},\ u_t|_{t=0}$ kezdeti adatok, ahonnan indulva a rendszer eléri az előírt (f_1, f_2) állapotot a $t = T$ időpillanatban.

Egy, a másodrendű, hiperbolikus típusú egyenletekre (a jelen értekezésben húrrezgés egyenletekre) kitűzött legegyszerűbb megfigyelhetőségi probléma a következő: megtalálni azon $u|_{t=0},\ u_t|_{t=0}$ kezdeti adatokat, ahonnan indulva valamely $t_1,\ t_2$ időpontokban előírt (avagy megfigyelt)

$$u|_{t=t_1} = f_1, \quad u|_{t=t_2} = f_2$$

részleges állapotok előállnak.

Tehát a fentebb említett irányításelméletbeli kérdéshez képest a fő különbség, hogy nem egy később időpontbeli teljes állapotra, hanem több időpontbeli, de csak részleges állapotra van feltételünk. A megfigyelt részleges állapotokat megfigyelési feltételeknek, a hozzájuk kapcsolódó időpontokat megfigyelési időpontoknak fogjuk nevezni.

Elképzelhető egy problémához kapcsolódóan számos megfigyelési időpont is, de a jelen disszertáció során előkerülő problémákban mindig két megfigyelt részleges állapotról lesz szó, és az ehhez tartozó időpontokat konzisztensen t_1-gyel és t_2-vel fogjuk jelölni. A szokásos feltételeket általánosítva tetszőleges előjelű $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ megfigyelési időpontokat fogunk használni, és a tárgyalt húrrezgésegyenleteket is tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ és tetszőleges $t_0 \in \mathbb{R}$ kezdeti időpont esetén fogjuk vizsgálni.

Az értekezésben szereplő függvényeket gyakran argumentumukkal együtt adjuk meg. Pl. a kétváltozós

$$u \ : \ \begin{cases} (x,t) \to u(x,t) \\ [0,l] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases} \in C^2([0,l] \times \mathbb{R})$$

függvényre – amennyiben az félreértést nem okoz – $u(x,t) \in C^2([0,l] \times \mathbb{R})$ formában is hivatkozunk ennek rövidsége és érthetősége miatt.

A disszertáció dr. Hegedűs Jenővel közösen végzett kutatáson alapul ([14], [15], [17], [18]), melynek kezdete egészen e disszertáció szerzője [13] diplomamunkájáig nyúlik vissza.

A megfigyelési problémáknak nem túl széles a szakirodalma, az általunk vizsgált megfigyelési feladatokhoz talán a [12] munka áll legközelebb, melyben L. N. Znamenskaya a rezgő $[0,l]$ húrral kapcsolatosan négy alapvető megfigyelhetőségi problémát vizsgált. Nevezetesen az

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in [0,l] \times [0,T]$$

egyenlet azon megoldásait kereste homogén peremfeltételek mellett, melyek kielégítik a következő megfigyelési feltételek (azonos sorbeli feltételpárok) valamelyikét:

$$\begin{aligned} u|_{t=t_1} &= f_1, & u|_{t=t_2} &= f_2, \\ u|_{t=t_1} &= f_1, & u_t|_{t=t_2} &= f_2, \\ u_t|_{t=t_1} &= f_1, & u|_{t=t_2} &= f_2, \\ u_t|_{t=t_1} &= f_1, & u_t|_{t=t_2} &= f_2. \end{aligned}$$

A problémát sikerült megoldania, feltéve, hogy a megfigyelési időpontok elég kicsik ($0 < t_1 < t_2 < 2l/a$), illetve ha az $u|_{t=0} = \varphi$, $u_t|_{t=0} = \psi$ kezdeti adatok ismertek egy $[h_1, h_2] \subset [0,l]$ részintervallumon.

Ezenkívül megemlítünk még néhány, az értekezés témájához hasonló munkát, amelyek rezgő rudakkal, lemezekkel és membránokkal kapcsolatos megfigyelési problémákat tárgyalnak. Ezek kronológiai sorrendben a következők: [19], [20] és részben [16]. Kiemeljük itt Ambroise Vest [16] dolgozatát, s annak fő eredményét, ami szerint (simaságvesztés mellett) azon $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ párok halmazának a Lebesgue mértéke nulla, amelyekre nem áll fenn a $[0,l]$ húr standard rezgéseinek megfigyelhetősége.

1.2. A dolgozat felépítése és tartalma

A bevezetés után, a 2. Fejezetben általánosított függvények körében kitűzött megfigyelhetőségi problémákkal foglalkozunk. Előbb áttekintünk egy [14]-ben szereplő, az

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - cu(x,t), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < a, c \in \mathbb{R}$$

Klein-Gordon egyenlettel kapcsolatos egyszerűbb problémát, majd rátérünk a [15]-ben megtalálható általános probléma tárgyalására. Ekkor a vizsgált egyenlet

$$u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u \equiv Lu, \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < p, q \in C^\infty([0,l])$$

alakú, a peremfeltételek pedig az ismeretlen u függvénynek, és annak u_x deriváltjának az $x = 0$ és $x = l$ végpontbeli értékének tetszőleges lineáris kombinációját tartalmazzák. A fő megszorításaink a sajátfrekvenciák aszimptotikus viselkedésére vonatkoznak, illetve egy diofantoszi feltételt jelentenek a megfigyelési időpontokra vonatkozóan. Ezután áttekintünk három konkrét alkalmazást az előbbi eredmény illusztrálására.

A 3. Fejezet a végtelen húrra vonatkozó Duhamel-elv egy új változatát tartalmazza, ahol megmutatjuk, hogy a

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \equiv 0, \quad v_t(x,0) = \psi(x) \equiv 0$$

kezdeti érték problémának C^2-beli megoldhatóságához az $f(x,t)$ erőfüggvényre tett szokásos, folytonos differenciálhatósági feltétel helyett elegendő azt megkövetelnünk, hogy f folytonos, differenciálható a t irány szerint, és az f_t iránymenti derivált is folytonos. Ezen eredmények a [17] dolgozatban találhatóak meg.

A 4. Fejezetben végtelen húrok rezgéseire folytonosan differenciálható függvények körében kitűzött megfigyelhetőségi problémákkal foglalkozunk, zömében külső erő hatása mellett. Az élesebb megfigyelhetőségi tételek érdekében az előző fejezetben megkövetelt simaságot tesszük fel az f erőfüggvényről, és mind u-tól, mind u_t-től függő megfigyelési feltételeket vizsgálunk a két $t = t_1, t_2$ megfigyelési időpontban. Előbb áttekintünk egy egyszerűbb esetet, amikor a megfigyelési feltételünkben bizonyos együtthatók nulla értéket vesznek fel, majd tükrözések módszerének segítségével állításunkat megfogalmazzuk félvégtelen húrokra is. Végül az általános esettel folytatjuk. A fejezet eredményei a [17] és [18] cikkekben találhatóak meg.

Kutatásunk során sikerült eredményeket elérni a téglalap, illetve kör alakú membránok rezgéseire vonatkozó megfigyelési feladatok kapcsán is, de csak az f_1, f_2 megfigyelési adatok speciális osztályai esetén, így ezek az értekezésben nem szerepelnek.

A disszertáció végén az eredményeinknek mind a magyar, mind az angol nyelvű összefoglalóját megadjuk.

2. fejezet

Húrrezgések megfigyelési problémái általánosított függvények körében

2.1. Egy egyszerű megfigyelési probléma a Klein-Gordon egyenletre

Ebben az alfejezetben azt a viszonylag egyszerű megfigyelési problémát tárgyaljuk, amikor mindkét megfigyelt részleges állapot a húr pozíciója. Az itt használt metódus később jó alapot szolgáltat a következő alfejezetbeli, általánosabb megfigyelési probléma vizsgálatához.

Tekintsük az l hosszúságú húr rezgését, melyet a következő, Klein-Gordon egyenlet ír le:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - cu(x,t), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < a, c \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Itt $u(x,t)$ jelenti a rezgő húr x koordinátájú pontjának transzverzális kitérését a t időpontban, továbbá a rezgés során jelen van egy, a kitéréssel arányos, azzal ellentétes irányú visszahúzó erő.

A húr rögzített végű, melyet a következő elsőfajú, homogén peremfeltételekkel fejezünk ki:

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

A húr kezdeti helyzetét, illetve kezdeti sebességét pedig a következő függvényekkel adjuk meg:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l. \tag{2.3}$$

A (2.1)–(2.3) probléma megoldását összehasonlítva ugyanezen probléma $c = 0$ esetbeli megoldásával adódik (lásd [13]), hogy amennyiben

$$\varphi \in C^2[0, l], \qquad \psi \in C^1[0, l]$$

adottak, és

$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0, \tag{2.4}$$

akkor a (2.1)–(2.3) vegyes feladatnak pontosan egy klasszikus megoldása létezik, azaz található egyetlen olyan $u \in C^2([0, l] \times \mathbb{R})$ függvény, ami kielégíti (2.1)–(2.3)-at. A megoldás egyértelműsége a [13]-ban bebizonyított energiabecslésből adódik. Az u függvényt a Fourier módszer segítségével a következő alakban lehet előállítani:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(t\omega_n) + \beta_n \sin(t\omega_n)] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad (x,t) \in [0, l] \times \mathbb{R}, \tag{2.5}$$

ahol

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 + c}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \Rightarrow \alpha_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.7}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n\ \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \Rightarrow \beta_n = \frac{1}{\omega_n}\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Jelen értekezésben a (2.1)–(2.3) problémát, illetve a vele kapcsolatos megfigyelési problémákat általánosított függvények körében fogjuk vizsgálni.

Tetszőleges s valós számra a $\sin \dfrac{n\pi}{l}x$, $n = 1,2,\dots,$ függvények által kifeszített D altéren tekintsük a következő euklideszi normát:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \right\|_s := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ha teljessé tesszük a D teret erre a normára nézve, akkor egy Hilbert teret kapunk, melyet D^s-sel jelölünk. Könnyen ellenőrizhető, hogy $s \geq 0$ esetén D^s zárt altere a

$H^s(0,l)$ Szoboljev térnek, azaz

$$D^s = \{u \in H^s(0,l) \ : \ u^{(2i)}(0) = u^{(2i)}(l) = 0, \ i = 0, 1, \dots, [(s-1)/2]\}.$$

Amennyiben azonosítjuk $D^0 = L^2(0,l)$-et a duálisával, akkor azt kapjuk, hogy a D^{-s} tér a D^s tér duálisa. A [3] monográfia 1.3. és 2.2. fejezeteinek eredményei szerint tetszőleges s valós számra $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ esetén a (2.1)–(2.3) vegyes feladatnak létezik pontosan egy u megoldása, mely

$$u \in C(D^{s+1}, \mathbb{R}) \cap C^1(D^s, \mathbb{R}) \cap C^2(D^{s-1}, \mathbb{R}) \tag{2.9}$$

simaságú, továbbá érvényes a (2.5)-beli Fourier soros előállítás a (2.7) és (2.8)-beli α_n és β_n együtthatókkal. Innentől kezdve ebben az alfejezetben φ, ψ, f_1, f_2 és u függvények Fourier sorát a $D^s(0,l)$ terekben értjük. A D^s terek tulajdonságairól a [4] könyvben található további információ.

Vizsgálatainkat a Klein-Gordon egyenlettel kapcsolatos négy olyan megfigyelési problémával kezdtük, amikor a φ, ψ kezdeti függvények ismeretlenek, ellenben f_1 és f_2 adottak és olyan u általánosított függvényeket keresünk, amelyekre a (2.10)–(2.13) megfigyelési feltételek valamelyike teljesül:

$$u(x,t_1) = f_1(x), \quad u(x,t_2) = f_2(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.10}$$

$$u_t(x,t_1) = f_1(x), \quad u(x,t_2) = f_2(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.11}$$

$$u(x,t_1) = f_1(x), \quad u_t(x,t_2) = f_2(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.12}$$

$$u_t(x,t_1) = f_1(x), \quad u_t(x,t_2) = f_2(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2.13}$$

ahol u a (2.1)–(2.3) probléma megoldása. Tehát a $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$ időpontokban ismert a rezgő húr részleges állapota, melyet az f_1 és f_2 függvények fejeznek ki, a feladat pedig megtalálni a φ, ψ kezdeti függvényeket ezen f_1 és f_2 segítségével.

Állításaink formalizálva a következők:

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$f_1 \in D^{s+2}, \quad f_2 \in D^{s+2}, \qquad \textit{valamely } \ s \in \mathbb{R} \textit{ számra, és} \tag{2.14}$$

$$(2.15) \qquad t_2 - t_1 = \frac{p}{q}\frac{2l}{a}, \qquad p,\ q \in \mathbb{N},$$

ahol p és q relatív prímek. Továbbá tegyük fel, hogy

$$(2.16) \qquad \sin\left((t_2 - t_1)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 + c}\right) \neq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor a (2.1)–(2.3) problémához kapcsolódó, (2.10) feltételű megfigyelési probléma egyértelműen megoldható a $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ kezdeti függvényekre. A bizonyítás konstruktív, a kezdeti függvények Fourier soros reprezentációja a bizonyításban megtalálható.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$f_1 \in D^{s+1}, \quad f_2 \in D^{s+2}, \qquad \textit{valamely} \ \ s \in \mathbb{R} \ \textit{számra},$$

a (2.15) feltétel teljesül, továbbá

$$(2.17) \qquad \cos\left((t_2 - t_1)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 + c}\right) \neq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor a (2.1)–(2.3) problémához kapcsolódó, (2.11) feltételű megfigyelési probléma egyértelműen megoldható a $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ kezdeti függvényekre.

2.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$f_1 \in D^{s+2}, \quad f_2 \in D^{s+1}, \qquad \textit{valamely} \ \ s \in \mathbb{R} \ \textit{számra},$$

és a (2.15), (2.17) feltételek fennállnak.

Ekkor a (2.1)–(2.3) problémához kapcsolódó, (2.12) feltételű megfigyelési probléma egyértelműen megoldható a $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ kezdeti függvényekre.

2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy*

$$f_1 \in D^{s+1}, \quad f_2 \in D^{s+1}, \qquad \textit{valamely} \ \ s \in \mathbb{R} \ \textit{számra},$$

és a (2.15), (2.16) feltételek teljesülnek.

Ekkor a (2.1)–(2.3) problémához kapcsolódó, (2.13) feltételű megfigyelési probléma egyértelműen megoldható a $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ kezdeti függvényekre.

Jelen alfejezetben csak a 2.1. Tételt bizonyítjuk (tehát azt a megfigyelési problémát oldjuk meg, amikor a t_1, t_2 időpontokban a rezgő húr helyzetét figyeljük meg, és csak azt), de a másik három megfigyelési probléma (amikor a t_1 és t_2 időpontokban a pozíció-sebesség, sebesség-pozíció vagy sebesség-sebesség ismert) tárgyalása is hasonló módon történik. Ezen eredmények bizonyításai [14]-ben megtalálhatóak, emellett a következő alfejezetbeli általánosabb tétel speciális eseteként is megkaphatóak, így a 2.2–2.4. Tételek bizonyításától itt eltekintünk,

Az 2.1. Tétel bizonyításához először is belátjuk a következő lemmát.

2.5. Lemma. *Amennyiben a* (2.15) *feltétel teljesül, akkor létezik $N \in \mathbb{N}$ határszám és egy $m \in \mathbb{R}$ rögzített pozitív egész úgy, hogy*

$$\frac{1}{|\sin(\omega_n(t_2-t_1))|} < \frac{n}{m}, \qquad \forall n > N \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. Először az egyenlőtlenség bal oldalának nevezőjén végzünk elemi átalakításokat:

$$\sin(\omega_n(t_2-t_1)) = \sin\left((t_2-t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2-t_1)\left[\omega_n - \frac{n\pi}{l}a\right]\right) = \tag{2.18}$$

$$= \sin\left((t_2-t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2-t_1)\frac{\omega_n^2 - (\frac{n\pi}{l}a)^2}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right) = \sin\left((t_2-t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2-t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right).$$

A (2.15) feltételből következik, hogy

$$(t_2-t_1)\frac{n\pi}{l}a = \frac{p}{q}2n\pi,$$

és ez legfeljebb q darab különböző értéket vehet fel (mod 2π), ahogy n-et változtatjuk. Legyen

$$z_n := (t_2-t_1)\frac{n\pi}{l}a \qquad \text{és} \qquad d_1 := \min_{n,\ \sin z_n \neq 0}\{|\sin(z_n)|\}.$$

Az abszolút érték képzés miatt létezik egy d_2 valós szám úgy, hogy

$$\sin(d_2) = d_1, \qquad 0 < d_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Mivel ω_n értéke n nagyságrendű, ezért könnyű látni, hogy

$$(t_2-t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a} = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{ha } n \to \infty.$$

Ezért léteznek $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}^+$ konstansok úgy, hogy

$$\frac{\pi m}{2n} < \left|(t_2-t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right| < \frac{d_2}{2} \;\text{ és }\; \frac{m}{n} < \sin\left(\frac{d_2}{2}\right), \qquad \forall n > N. \tag{2.19}$$

Tehát egyrészt, ha $\sin\left((t_2 - t_1)\frac{n\pi}{l}a\right) \neq 0$, akkor (2.19) következtében

$$\left|\sin\left((t_2 - t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right)\right| > \left|\sin\left(d_2 - \frac{d_2}{2}\right)\right| = \sin\left(\frac{d_2}{2}\right) > \frac{m}{n},$$

amint $n > N$.

Másrészt, ha $\sin\left((t_2 - t_1)\frac{n\pi}{l}a\right) = 0$, akkor a (2.19) és a közismert

$$|\sin t| > \frac{2}{\pi}|t|, \qquad \text{ha } 0 < |t| < \frac{\pi}{2},$$

egyenlőtlenségek miatt azt kapjuk, hogy

$$\left|\sin\left((t_2 - t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right)\right| = \left|\sin\left((t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right)\right| >$$

$$> \frac{2}{\pi}\left|(t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right| > \frac{m}{n}, \qquad \forall n > N \text{ esetén.}$$

Egy közös egyenlőtlenségbe írva az előbbi két esetet pedig megkapjuk, hogy

$$\left|\sin\left((t_2 - t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi}{l}a}\right)\right| > \frac{m}{n}, \qquad \forall n > N\text{-re},$$

és ez az amit a lemma állított. □

A 2.1. Tétel bizonyítása. Mivel a (2.1)–(2.3) probléma bármely u megoldása felírható a (2.5) alakban valamilyen $\alpha_n,\ \beta_n;\ n \in \mathbb{N}$ együtthatókkal, ezért a megfigyelési probléma visszavezethető ezen együtthatók olyan alkalmas megválasztására, melyekkel (2.10) fennáll.

Ehhez először helyettesítsük be a $t_1,\ t_2$ időpontokat a (2.5) előállításba, majd követeljük meg a (2.10)-ben szereplő két feltétel teljesülését. Így a következő szükséges feltételeket kapjuk az $\alpha_n,\ \beta_n$ együtthatókra:

$$f_1(x) = u(x, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n \cos(\omega_n t_1) + \beta_n \sin(\omega_n t_1)] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad x \in [0, l], \tag{2.20}$$

$$f_2(x) = u(x, t_2) = \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n \cos(\omega_n t_2) + \beta_n \sin(\omega_n t_2)] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \qquad x \in [0, l], \tag{2.21}$$

ahol ω_n a (2.6)-ban megadott kifejezést jelöli.

A (2.14) feltétel biztosítja, hogy az $f_1(x),\ f_2(x)$ függvények egyértelműen szinuszos

Fourier sorba fejthetőek, amiket a (2.20), (2.21) egyenletekkel összevetve a következő szükséges feltételekhez jutunk α_n-re és β_n-re:

$$\begin{aligned}
\alpha_n \cos(\omega_n t_1) + \beta_n \sin(\omega_n t_1) &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \qquad n \in \mathbb{N},\\
\alpha_n \cos(\omega_n t_2) + \beta_n \sin(\omega_n t_2) &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx, \qquad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

A (2.16) feltétel miatt ez a (2.22) egyenletrendszer egyértelműen megoldható az ismeretlen α_n, β_n együtthatókra, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\sin(\omega_n t_2)\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx - \sin(\omega_n t_1)\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_2(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx}{\sin(\omega_n(t_2 - t_1))},\\
\beta_n &= \frac{-\cos(\omega_n t_2)\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx + \cos(\omega_n t_1)\frac{2}{l}\int\limits_0^l f_2(x)\sin(\frac{n\pi}{l}x)dx}{\sin(\omega_n(t_2 - t_1))}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Ez alapján pedig a keresett ismeretlen φ, ψ függvényeket egyértelműen fel tudjuk írni a (2.7), illetve a (2.8) alakban. Ezután már csak azt kell megmutatni, hogy az ezekkel az együtthatókkal felírt φ és ψ függvények rendre a D^{s+1}, illetve a D^s osztályba tartoznak, azaz be kell látnunk, hogy a következő egyenlőtlenség fennáll:

$$\max\left\{\|\varphi\|_{s+1}^2, \|\psi\|_s^2\right\} < \infty. \tag{2.24}$$

Az átláthatóság kedvéért bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned}
D_n &:= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_1(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx,\\
E_n &:= \frac{2}{l}\int\limits_0^l f_2(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.
\end{aligned}$$

Mivel $(f_1, f_2) \in D^{s+2} \times D^{s+2}$, így tudjuk, hogy az f_1 és f_2 függvények D^{s+2} normája véges, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s+4} \max\left\{|D_n|^2, |E_n|^2\right\} < \infty. \tag{2.25}$$

Behelyettesítve E_n-et és D_n-et (2.23)-ba, illetve használva a 2.5. Lemmát, a következő becsléseket kapjuk az α_n, β_n együtthatókra, minden $n > N$-re:

$$|\alpha_n| = \left|\frac{\sin(\omega_n t_2)D_n - \sin(\omega_n t_1)E_n}{\sin(\omega_n(t_2-t_1))}\right| < \left|\frac{n}{m}D_n\right| + \left|\frac{n}{m}E_n\right|,$$

$$|\beta_n| = \left|\frac{-\cos(\omega_n t_2)D_n + \cos(\omega_n t_1)E_n}{\sin(\omega_n(t_2-t_1))}\right| < \left|\frac{n}{m}D_n\right| + \left|\frac{n}{m}E_n\right|.$$

Ezen becslések alapján tehát létezik olyan $c_1 > 0$ konstans, hogy

$$\max\{|\alpha_n|, |\beta_n|\} < c_1 n \max\{|D_n|, |E_n|\}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Mivel ω_n (lásd (2.6)) n nagyságrendű, ezért létezik olyan $M \geq 1$ szám, hogy $\omega_n < < Mn$, $\forall n \in \mathbb{N}$-re, így a (2.25) és (2.26) egyenlőtlenségekből, illetve a $\|.\|_s$ norma definíciójából megkapjuk a kívánt (2.24) egyenlőtlenséget:

$$\max\{\|\varphi\|_{s+1}^2, \|\psi\|_s^2\} = \max\left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s+2}|\alpha_n|^2, \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s}|\omega_n\beta_n|^2\right\} \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} M^2 n^{2s+2} \max\left\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\right\} < c_1^2 M^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s+4} \max\left\{|D_n|^2, |E_n|^2\right\} < \infty.$$

□

2.6. Megjegyzés. A 2.1. Tételbeli, általánosított függvények körében tett állításunkból a klasszikus esetre is tudunk következtetni. Ugyanis ha

$$u(x,t_1) = f_1(x) \in C^4[0,l], \quad u(x,t_2) = f_2(x) \in C^4[0,l],$$
$$f_1|_{0,l} = f_2|_{0,l} = f_1''|_{0,l} = f_2''|_{0,l} = 0,$$

akkor f_1, $f_2 \in D^4$, és alkalmazva a 2.1. Tételt (feltéve, hogy (2.15) és (2.16) fennállnak) azt kapjuk, hogy a megfigyelési probléma egyértelműen megoldható, és erre az u megoldásra

$$u(x,0) = \varphi(x) \in D^3 \subset C^2, \quad u_t(x,0) = \psi(x) \in D^2 \subset C^1,$$

azaz u a klasszikus megoldás.

2.7. Megjegyzés. A (2.18) átalakítás segítségével a (2.16) feltétel a következő alakot veszi fel:

$$\sin((t_2-t_1)\omega_n) = \sin\left((t_2-t_1)\frac{n\pi}{l}a + (t_2-t_1)\frac{c}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 + c} + \frac{n\pi}{l}a}\right) \neq 0 \tag{2.27}$$

minden $n \in \mathbb{N}$-re. Megvizsgálva a 2.5. Lemmát azt láthatjuk, hogy az az itt szereplő kifejezés abszolút értékének reciprokára ad becslést. Emiatt elég nagy n számokra ($n > > N$) a (2.15) feltétel teljesülése maga után vonja, hogy a fentebbi feltétel is teljesül. Így pedig, ha szeretnénk, a (2.16) feltétel helyett tehetünk könnyen ellenőrizhető (de nem szükséges) kikötést. Például

$$(t_2 - t_1)\frac{c}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{l}a\right)^2 + c} + \frac{\pi}{l}a} < \frac{\pi}{q} \tag{2.28}$$

egy ilyen feltétel. Ez a következőképpen látható be. A (2.27)-beli szinusz függvény argumentumának első tagja vagy 0 (mod 2π), vagy legalább π/q távolságra van a szinusz zéróhelyeitől. A (2.27)-beli szinusz függvény argumentumának második tagja pedig pozitív csökkenő függvénye n-nek, így ha feltesszük, hogy a második tag már $n = = 1$ esetén is kisebb, mint π/q – ami éppen (2.28) – akkor (2.27) teljesülni fog minden $n \geq 1$ egész számra.

Mindazonáltal ebből az egyszerűbb (2.28) feltételből látható, hogy amennyiben a vizsgált (2.1) egyenletben a c paraméter elég kicsi, vagy az a paraméter elég nagy, akkor (2.27) mindig fennáll.

Amennyiben a 2.1. Tétellel analóg állítást szeretnénk megfogalmazni a standard rezgő húrral kapcsolatban ($c = 0$ eset), akkor azt tapasztaljuk, hogy a (2.16) feltétel szerint a $(t_2 - t_1)a/l$ kifejezés irracionális kell legyen, különben a keresett φ, ψ függvények csak speciális f_1, f_2 megfigyelési adatok esetén lennének meghatározhatóak. Amennyiben $(t_2 - t_1)a/l$ irracionális, akkor – a 2.1. Tétel bizonyításához hasonló módon – elő tudjuk állítani a keresett φ, ψ kezdeti függvények (2.7), (2.8) alakú Fourier soros reprezentációját, de ekkor nem áll rendelkezésünkre a (2.26) becslés, és így ezen sorok sem klasszikus, sem D^s-beli konvergenciáját, illetve a velük előállított függvények kellő simaságát sem tudjuk így garantálni.

Ambroise Vest később részletesen vizsgálta a [16] munkájában ezt az esetet, melyre vonatkozóan a következő tételt sikerült bebizonyítania:

2.8. Tétel (A. Vest, [16], Theorem 3.3., p. 5). *Legyen* $(\varphi, \psi) \in D^s \times D^{s-1}$ *és* $(f_1, f_2) \in \in D^r \times D^r$. *Ekkor* $c = 0$ *esetén a* (2.1), (2.2), (2.3), (2.10) *megfigyelési problémával kapcsolatban:*

- *ha* $r - s < 1$, *akkor semmilyen* (t_1, t_2) *megfigyelési időpontok esetén nem oldható meg a megfigyelési probléma.*
- *ha* $r - s = 1$, *akkor azon* (t_1, t_2) *párok halmaza, melyekre a megfigyelési probléma megoldható* 0 *Lebesgue mértékű és teljes Hausdorff dimenziójú* $\mathbb{R}^2$*-ben.*

- *ha $r - s > 1$, akkor a megfigyelési probléma egy nulla Lebesgue mértékű halmazt leszámítva minden (t_1, t_2) pár esetén megoldató.*

2.2. Egy általános megfigyelési probléma változó együtthatós egyenletre

Ebben az alfejezetben a 2.1. Alfejezet eredményeit általánosítjuk. Mint azt majd látni fogjuk, mind a vizsgált egyenlet, mind a lehetséges peremfeltételek, mind a megfigyelt részleges állapotok terén a korábbiaknál általánosabb megfigyelési problémákat is sikerül megoldanunk.

Továbbra is általánosított függvények körében dolgozunk. A 2.1. Alfejezethez hasonlóan most is a $D^s(S)$, $s \in \mathbb{R}$ tereket használjuk.

Legyen adva egy $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ teljes ortonormált bázis az $L_2(S)$ térben. Tetszőleges valós s szám esetén tekintsük az $X_n(x)$ függvények által kifeszített lineáris D alteret, ahol $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $x \in \overline{S}$. Tekintsük ezen a téren a következő euklideszi normát:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x) \right\|_s := \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teljessé téve a D teret erre a normára nézve egy Hilbert teret kapunk, melyet D^s-sel jelölünk. A húrrezgésekkel kapcsolatban mi az $S = (0, l)$ intervallumot, bázisnak pedig majd a (2.34)-beli $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ rendszert fogjuk használni,

Az alábbi, (2.29)–(2.31) vegyes feladattal kapcsolatos megfigyelési problémát fogjuk vizsgálni.

$$u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u \equiv Lu, \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < p, q \in C^{\infty}([0,l]), \tag{2.29}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \tag{2.30}$$

$$\mathcal{U}_i[u] \equiv \mathcal{U}_i(u|_{x=0},\ u|_{x=l},\ u_x|_{x=0},\ u_x|_{x=l}) = 0, \qquad i = 1,2, \tag{2.31}$$

ahol $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ független, önadjungált, lineáris kifejezések, u, φ, ψ függvények a D^s általánosított függvénytérből származnak, és ennek megfelelően (2.31) és (a nemsokára következő) (2.32) feltételeket is az általánosított függvények körében értjük.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az

$$y = y(x), \quad L \sim (p(x)y')' - q(x)y$$

közönséges differenciálegyenlethez tartozó

$$Ly = 0, \qquad \mathcal{U}_i[y] = 0, \quad i = 1{,}2,$$

homogén peremérték feladatnak csak triviális megoldása van. Az L közönséges differenciáloperátor önadjungált, így az $\mathcal{L} \sim (L, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ operátor is önadjungált.

A célunk az előző alfejezetbelihez hasonló eredményt bizonyítani az ehhez a vegyes feladathoz kapcsolódó megfigyelési problémára. Ehhez pedig a következő megfigyelési feltételeket tesszük, melyek a t_1 és t_2 időpontokban a pozíció és sebesség valamely ismert, tetszőleges lineáris kombinációját tartalmazzák:

$$\begin{aligned} A_1 u|_{t=t_1} + B_1 u_t|_{t=t_1} &= f_1, \qquad |A_1| + |B_1| > 0, \\ A_2 u|_{t=t_2} + B_2 u_t|_{t=t_2} &= f_2, \qquad |A_2| + |B_2| > 0, \end{aligned} \tag{2.32}$$

ahol $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ f_1$ és f_2 adottak. Vegyük észre, hogy amennyiben a megfelelő együtthatók nullák, akkor visszakaphatjuk a (2.10)–(2.13) megfigyelési feltételek valamelyikét.

Állításunk megfogalmazásához tegyük fel, hogy bármely $s \in \mathbb{R}$ és bármely $(\varphi, \psi) \in$ $\in D^{s+1}(0,l) \times D^s(0,l)$ esetén a (2.29)–(2.31) vegyes feladat rendelkezik az alábbi jó tulajdonságokkal:

$$\exists!\, u \text{ megoldás } \text{ és } u \in C(D^{s+1}, \mathbb{R}) \cap C^1(D^s, \mathbb{R}) \cap C^2(D^{s-1}, \mathbb{R}), \tag{2.33}$$

és u felírható a következő alakban

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right] X_n(x), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \text{ ahol} \\ LX_n = -\omega_n^2 X_n, \qquad \mathcal{U}_i X_n = 0, \quad i = 1{,}2. \end{gathered} \tag{2.34}$$

2.9. Megjegyzés. Azon problémák halmaza melyek kielégítik $(L, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$-re tett megszorításainkat és a (2.33), (2.34) feltételeinket nem üres. Tartalmazza például az előző alfejezetben részletesen megvizsgált problémát, a 2.3.1., 2.3.2. és 2.3.3. Szakaszbeli példákat, továbbá például a (2.29)–(2.31) problémát az

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_1 : &\qquad a_{11}y'(0) + a_{12}y'(l) = 0, \\ \mathcal{U}_2 : &\qquad a_{21}y(0) + a_{22}y(l) = 0, \end{aligned}$$

peremfeltétel mellett, ha $a_{12}a_{22}p(0) = a_{11}a_{21}p(l)$. Ez utóbbi egyenlőség szükséges és elegendő feltétele annak, hogy ekkor az $\mathcal{L} \sim (L,\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2)$ operátor önadjungált legyen.

A későbbiekben szükségünk lesz a következő lemmára bizonyos becslésekhez.

2.10. Lemma. *Legyen az r_n számsorozat olyan, hogy $0 < M/n < |r_n| \to 0$ valamely M pozitív valós konstanssal és legyen $x_0 > 0$ racionális szám. Ekkor bármely rögzített $d \in \mathbb{R}$ számra létezik egy N határszám, hogy*

$$|\sin(n\pi x_0 + d + r_n)| > \frac{M}{2n}, \qquad \forall n > N\text{-re.}$$

Bizonyítás. Mivel x_0 racionális, így felírható $x_0 = p/q$; $p,\ q \in \mathbb{N}$ alakban. Ez azt is jelenti, hogy $\sin(n\pi x_0 + d)$ legfeljebb q darab különböző értéket vehet fel. Legyen $\mathbb{N}_1$ és $\mathbb{N}_2$ diszjunkt felbontása a természetes számoknak úgy, hogy

$$\mathbb{N}_1 \bigcup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N},$$
$$\sin(n\pi x_0 + d) = 0 \text{ ha } n \in \mathbb{N}_1,$$
$$\sin(n\pi x_0 + d) \neq 0 \text{ ha } n \in \mathbb{N}_2.$$

A lemma állításában szereplő egyenlőtlenséget ezen két számhalmazra külön-külön látjuk be.

Egyrészt, amennyiben $n \in \mathbb{N}_1$, akkor

$$|\sin(n\pi x_0 + d + r_n)| = |\sin(r_n)| > \frac{1}{2}|r_n| > \frac{M}{2n}$$

bármely elég nagy $\mathbb{N}_1$-beli n természetes számra, mivel feltételeink szerint $r_n \to 0$ amint $n \to \infty$.

Másrészt, ha $n \in \mathbb{N}_2$, az azt jelenti, hogy létezik egy $d_1 > 0$ konstans úgy, hogy $|\sin(n\pi x_0 + d)| > d_1$ minden $n \in \mathbb{N}_2$ esetén. A szinusz függvény egyenletes folytonosságából következik, hogy a

$$|\sin(n\pi x_0 + d + r_n)| > \frac{d_1}{2} > \frac{M}{2n}$$

egyenlőtlenség minden elég nagy $n \in \mathbb{N}_2$ számra teljesül.

Egyesítve a két esetet megkapjuk a 2.10. Lemma állítását. □

Ennyi előkészület után fogalmazzuk meg tételünket a megfigyelési problémánk megoldhatóságáról.

2.11. Tétel. *Legyen*

$$f_1 \in D^{s+2},\ f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{2.35}$$

és tegyük fel, hogy léteznek $0 < A \in \mathbb{Q},\ B \in \mathbb{R},\ 0 < M_1 \in \mathbb{R}$ *konstansok és* $C_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *sorozat úgy, hogy*

$$\begin{gathered} \omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n = n\pi A + B + C_n, \\ 0 < \frac{M_1}{n} < |C_n|,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad C_n \to 0 \text{ amint } n \to \infty, \end{gathered} \tag{2.36}$$

és

$$\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.37}$$

Az itt szereplő $\gamma_n,\ \delta_n \in [0, 2\pi)$ *szögek az alábbi egyenletek által egyértelműen meghatározottak:*

$$\begin{aligned} \sin\gamma_n &= \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}}, \quad & \cos\gamma_n &= \frac{B_1\omega_n}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}}, \\ \sin\delta_n &= \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}, \quad & \cos\delta_n &= \frac{B_2\omega_n}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}. \end{aligned}$$

Amennyiben a (2.29)–(2.31) *vegyes feladat megoldása kielégíti a* (2.33), (2.34) *feltételeket és* (2.35), (2.36), (2.37) *fennállnak, akkor a* (2.29)–(2.31) *problémával kapcsolatos megfigyelési problémának a* (2.32) *megfigyelési feltétel mellett létezik pontosan egy* $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ *megoldása.*

2.12. Megjegyzés. A (2.36) feltétel alapján használhatjuk a 2.10. Lemmát a

$$\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) = \sin\left(n\pi A + B + C_n\right),$$

kifejezés becslésére, ami egyben azt is jelenti, hogy $\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) \neq 0$ automatikusan teljesül minden elég nagy n számra (amikor $n > N$). Tehát ha a gyakorlatban érdekel minket, hogy (2.37) fennáll -e, akkor nem kell végtelen sok egyenlőséget ellenőrizni.

A 2.11. Tétel bizonyítása. Nyilvánvaló, hogy a kezdeti függvények egyértelműen Fourier sorba fejthetőek az $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ rendszer szerint valamilyen – egyelőre ismeretlen –

$\alpha_n,\ \omega_n\beta_n;\ n \in \mathbb{N}_0$ együtthatókkal:

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \tag{2.38}$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \beta_n X_n(x). \tag{2.39}$$

Mivel a (2.29)–(2.31) vegyes feladat u megoldása előállítható (2.34) alakban, ezért a megfigyelési probléma visszavezethető α_n és β_n olyan alkalmas megválasztásaira, hogy a velük előállított u függvényre (2.32) teljesüljön. Ehhez helyettesítsük be a (2.34) reprezentációba a t_1, t_2 megfigyelési időpontokat, és az így kapott kifejezéseket vessük össze a (2.32) megfigyelési feltételekkel. Ezáltal a következő szükséges feltételeket nyerjük α_n-re és β_n-re:

$$f_1(x) = A_1 u(x,t_1) + B_1 u_t(x,t_1) = \tag{2.40}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n (A_1 \cos(\omega_n t_1) - B_1 \omega_n \sin(\omega_n t_1)) + \beta_n (A_1 \sin(\omega_n t_1) + B_1 \omega_n \cos(\omega_n t_1))] X_n(x),$$

$$f_2(x) = A_2 u(x,t_2) + B_2 u_t(x,t_2) = \tag{2.41}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha_n (A_2 \cos(\omega_n t_2) - B_2 \omega_n \sin(\omega_n t_2)) + \beta_n (A_2 \sin(\omega_n t_2) + B_2 \omega_n \cos(\omega_n t_2))] X_n(x).$$

Mivel $f_1 \in D^{s+2}$ és $f_2 \in D^{s+2}$, ezért f_1 és f_2 Fourier sorainak az $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ szerinti sorfejtésének együtthatói egyértelműen meghatározottak. Ezen Fourier sorokat összevetve (2.40)-nel és (2.41)-gyel a következő feltételeket kapjuk az α_n, β_n együtthatókra:

$$\begin{aligned} \alpha_n (A_1 \cos(\omega_n t_1) - B_1 \omega_n \sin(\omega_n t_1)) + \beta_n (A_1 \sin(\omega_n t_1) + B_1 \omega_n \cos(\omega_n t_1)) &= D_n, \\ \alpha_n (A_2 \cos(\omega_n t_2) - B_2 \omega_n \sin(\omega_n t_2)) + \beta_n (A_2 \sin(\omega_n t_2) + B_2 \omega_n \cos(\omega_n t_2)) &= E_n, \end{aligned} \tag{2.42}$$

ahol

$$D_n = \int_0^l f_1(x) X_n(x) dx \quad \text{és} \quad E_n = \int_0^l f_2(x) X_n(x) dx.$$

Behelyettesítve γ_n-et és δ_n-et a (2.42) egyenletrendszerekbe – trigonometrikus azonosságok használata után – azt kapjuk, hogy

$$-\alpha_n \sin(\omega_n t_1 - \gamma_n) + \beta_n \cos(\omega_n t_1 - \gamma_n) = \frac{D_n}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}},$$
$$-\alpha_n \sin(\omega_n t_2 - \delta_n) + \beta_n \cos(\omega_n t_2 - \delta_n) = \frac{E_n}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}.$$

Ezek a lineáris egyenletrendszerek egyértelműen megoldhatóak az ismeretlen α_n, β_n együtthatókra, mivel a (2.37) feltétellel feltettük, hogy a determinánsa semmilyen n esetén sem nulla:

$$(2.43)\qquad \begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}\cos(\omega_n t_2 - \delta_n) D_n - \sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}\cos(\omega_n t_1 - \gamma_n) E_n}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n)}, \\ \beta_n &= \frac{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}\sin(\omega_n t_2 - \delta_n) D_n - \sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}\sin(\omega_n t_1 - \gamma_n) E_n}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n)}. \end{aligned}$$

Ezzel egyértelműen meghatároztuk a keresett φ és ψ kezdeti függvényeket a (2.38) és (2.39) alakban. Már csak azt kell megmutatni, hogy φ, ψ rendre a D^{s+1}, D^s osztályból valóak, azaz hogy a következő egyenlőtlenség fennáll:

$$(2.44)\qquad \max\{\|\varphi\|_{s+1}, \|\psi\|_s\} = \max\left\{\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s+2}|\alpha_n|^2, \sum_{n=0}^{\infty} n^{2s}|\omega_n\beta_n|^2\right\} < \infty.$$

Vegyük észre, hogy a (2.36) feltétel magában foglalja, hogy $|\omega_n| = O(n)$, tehát használva a 2.10. Lemmát és a (2.43) előállítást azt kapjuk, hogy létezik egy M konstans, amire

$$|\alpha_n| \le \left|M\frac{n}{1 + B_1 n} D_n\right| + \left|M\frac{n}{1 + B_2 n} E_n\right|, \quad \forall n > N,$$
$$|\beta_n| \le \left|M\frac{n}{1 + B_1 n} D_n\right| + \left|M\frac{n}{1 + B_2 n} E_n\right|, \quad \forall n > N,$$

ez pedig azt jelenti, hogy

$$(2.45)\qquad \max\{|\alpha_n|, |\beta_n|\} < c_1 n \max\{|D_n|, |E_n|\}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

valamilyen c_1 konstanssal.

Világos, hogy ez a (2.45)-ös becslés (és így egyben a (2.35) feltétel) javítható, amennyiben $B_1 \neq 0$ vagy $B_2 \neq 0$ (lásd 2.15. Megjegyzés később).

Használva a (2.45) egyenlőtlenséget arra jutunk, hogy

$$\max\left\{\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s+2}|\alpha_n|^2, \sum_{n=0}^{\infty} n^{2s}|\omega_n\beta_n|^2\right\} \le \sum_{n=0}^{\infty} C^2 n^{2s+2}\max\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\} <$$
$$< c_1^2 C^2 \sum_{n=0}^{\infty} n^{2s+4}\max\{|D_n|^2, |E_n|^2\},$$

ahol

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s+4}\max\{|D_n|^2, |E_n|^2\} \le \|f_1\|_{s+2}^2 + \|f_2\|_{s+2}^2 < \infty$$

az $s+2$ norma definíciója szerint, hiszen feltettük, hogy $(f_1, f_2) \in D^{s+2} \times D^{s+2}$. □

2.13. Megjegyzés. A fentebbi vizsgálatok és becslések azt mutatják, hogy az az $\mathcal{A}$ operátor, ami a részleges, t_1, t_2 időpontokban megfigyelt (f_1, f_2) állapotokat hozzárendeli a (φ, ψ) párhoz, egy folytonos (korlátos) lineáris operátor $D^{s+2} \times D^{s+2}$-ről $D^{s+1} \times$ $\times$ D^s-be.

A (2.11). Tétel bizonyítását újra megvizsgálva, a (2.42) egyenletrendszerből kiindulva arra jutunk, hogy

$$\alpha_n \sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) = \frac{D_n\cos(\omega_n t_2 - \delta_n)}{v_n} - \frac{E_n\cos(\omega_n t_1 - \gamma_n)}{w_n},$$
$$\beta_n \sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) = \frac{D_n\sin(\omega_n t_2 - \delta_n)}{v_n} - \frac{E_n\sin(\omega_n t_1 - \gamma_n)}{w_n},$$

ahol

$$v_n = \sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}, \qquad w_n = \sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2},$$

és evidens, hogy

$$v_n = |A_1|, \text{ ha } B_1 = 0, \qquad w_n = |A_2|, \text{ ha } B_2 = 0,$$

$$v_n = O(n), \text{ ha } B_1 \ne 0, \qquad w_n = O(n), \text{ ha } B_2 \ne 0, \quad n \to \infty.$$

Az α_n, β_n Fourier együtthatók végtelenben való viselkedése alapján azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^{2s+4}|\alpha_n|^2 + n^{2s+2}|\omega_n\beta_n|^2\right)\sin^2(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) \le$$
$$\le C\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^{2s+4}|D_n|^2 + n^{2s+4}|E_n|^2\right) \le C\left(\|f_1\|_{s+2}^2 + \|f_2\|_{s+2}^2\right),$$

ami azt mutatja, hogy a $(\varphi, \psi) = \mathcal{A}(f_1, f_2)$ párra kissé erősebb simaság is érvényes. Ez pedig azt sugallja, hogy a 2.11. Tételbelinél kissé élesebb állítás is tehető.

Ehhez vezessük be a $D_0^s \subset D^s$ altereket, ami azon $f \in D^s$ függvényeket tartalmazza, amiknek az f_n Fourier együtthatói $n \in \mathbb{N}_1$ esetén (az $\mathbb{N}_1$ halmaz a vizsgált problémától függ, a definícióját lásd a 2.10. Lemmában) a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} |f_n|^2|n|^{2s+2} < \infty.$$

Természetesen ez a definíció maga után vonja, hogy $D^{s+1} \subset D_0^s$.

2.14. Tétel. *Amennyiben a 2.11. Tétel feltételei teljesülnek, továbbá f_1, $f_2 \in D_0^{s+1}$ (D^{s+2} helyett), akkor a (2.29)–(2.31) problémához kapcsolódó megfigyelési problémának a (2.32) megfigyelési feltétel mellett pontosan egy $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ megoldása létezik.*

Más szavakkal, az $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}(f, g) := (\varphi, \psi)$ operátor, ami $D_0^{s+1} \times D_0^{s+1}$-ről képez $D^{s+1} \times D^s$-be, folytonos (korlátos) operátor.

Bizonyítás. Ugyanazokat a lépéseket tehetjük, amiket a 2.11. Tétel bizonyítása során. Csak azt kell a korábbiakon felül megmutatnunk, hogy (2.44) abban az esetben is fennáll, ha $(f_1, f_2) \in D_0^{s+1} \times D_0^{s+1}$. Valóban, hiszen ekkor a következő érvényes:

$$\max\left\{\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s+2}|\alpha_n|^2, \sum_{n=0}^{\infty} n^{2s}|\omega_n\beta_n|^2\right\} \le \sum_{n=0}^{\infty} C^2 n^{2s+2} \max\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\} =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}_1} C^2 n^{2s+2} \max\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\} + \sum_{n\in\mathbb{N}_2} C^2 n^{2s+2} \max\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\}.$$

Használva a (2.44) egyenlőtlenséget az első szummára azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_1} C^2 n^{2s+2} \max\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\} \le c_1^2 C^2 \sum_{n\in\mathbb{N}_1} n^{2s+4} \max\{|D_n|^2, |E_n|^2\},$$

ami a D_0^{s+1} terek definíciója miatt véges.

Viszont $n \in \mathbb{N}_2$ esetén javíthatunk a (2.44) egyenlőtlenségen. Ugyanis ezen n értékekre (amennyiben n elég nagy) teljesül, hogy

$$\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) > \frac{d_1}{2},$$

ahogy azt a 2.10. Lemma bizonyítása során láthattuk. Ebből pedig az következik, hogy

$$\max\{|\alpha_n|, |\beta_n|\} < c_2 \max\{|D_n|, |E_n|\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}_2\text{-re}$$

valamilyen alkalmas c_2 konstanssal. Tehát így azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_2} C^2 n^{2s+2} \max\{|\alpha_n|^2, |\beta_n|^2\} \le c_2^2 C^2 \sum_{n\in\mathbb{N}_2} n^{2s+2} \max\{|D_n|^2, |E_n|^2\} < \infty,$$

köszönhetően annak, hogy $D_0^{s+1} \subset D^{s+1}$. □

2.15. Megjegyzés. Ahogy korábban említettük, a (2.45)-ös egyenlőtlenség javítható, amennyiben $B_1 \neq 0$ vagy $B_2 \neq 0$. Pontosabban, amikor $B_1 \neq 0$, akkor $f_1 \in D^{s+1}$; míg ha $B_2 \neq 0$ akkor $f_2 \in D^{s+1}$ simaságot elegendő megkövetelni a (2.35) feltételben.

Abban a speciális esetben, ha mind A_1, B_1 valamelyike, mind A_2, B_2 valamelyike nulla, akkor a (2.32) megfigyelési feltétel a (2.10)–(2.13) feltételek egyikére vezet az A_1, A_2, B_1, B_2 együtthatók közül a megfelelőekkel való osztás után. Ebben az esetben $\gamma_n \equiv 0$ vagy $\gamma_n \equiv \pi/2$; illetve $\delta_n \equiv 0$ vagy $\delta_n \equiv \pi/2$, és a (2.36), (2.37) feltételek is ennek megfelelően egyszerűsödnek.

2.16. Megjegyzés. A 2.11. Tétel (2.36) feltételét a 2.10. Lemma segítségével arra használtuk, hogy rendelkezzünk a következő típusú becsléssel:

$$\frac{1}{|\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n)|} < \frac{n}{c_3}, \qquad c_3 \in \mathbb{R}^+, \ \forall n > N.$$

Viszont a (2.36) feltétel nem szükséges, helyettesíthetjük például azzal a feltevéssel, hogy $D_n = E_n = 0$ minden $n \in \mathcal{K}(\epsilon)$ esetén, ahol tetszőlegesen kis rögzített $\epsilon > 0$ számra $\mathcal{K}(\epsilon) \subset \mathbb{N}$ azon n természetes számok gyűjteménye, melyekre

$$-\epsilon < \omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n < \epsilon \mod (\pi).$$

2.3. Példák

Ebben az alfejezetben a 2.11. Tétel alkalmazhatóságának illusztrálására megadunk három példát. Mint látni fogjuk, a (2.33), (2.34), (2.36) megkötéseink konkrét feladat esetén gyakran nem jelentenek megszorítást, mert adott kitűzés esetén automatikusan telesülhetnek. Végül áttekintjük, hogy mi a helyzet abban az esetben, ha a (2.36), (2.37) feltételeink nem teljesülnek.

2.3.1. Rögzített balvégpontú és szabad jobbvégpontú rezgő húr

Tekintsük ismét a 2.1. Alfejezetben is vizsgált Klein-Gordon egyenletet, azaz azon rezgő húr egyenletét, amikor jelen van egy, a kitéréssel arányos, azzal ellentétes irányú rugalmas visszahúzó erő. Az e jelenséget leíró

$$(2.46) \qquad u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - cu(x,t), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < a, c \in \mathbb{R}$$

egyenletet a

$$(2.47) \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l$$

kezdeti feltételekkel tekintjük. A szakasz címének megfelelő homogén peremfeltételeink pedig:

$$u(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0, \qquad t\in\mathbb{R}. \tag{2.48}$$

Ahogy a 2.1. Alfejezet esetében, úgy most is [3] 1.3. és 2.2. fejezetei alapján tudjuk, hogy tetszőleges $s\in\mathbb{R}$ és $(\varphi,\psi)\in D^{s+1}\times D^s$ esetén a (2.46)–(2.48) vegyes feladat megoldása kielégíti a (2.33), (2.34) feltételeinket, és ha figyelembe vesszük, hogy $q(x)\equiv c>0$, akkor azt kapjuk, hogy

$$X_n=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\right), \qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

és

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\left(\omega_n t\right)+\beta_n\sin\left(\omega_n t\right)\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{l}x\right), \qquad (x,t)\in[0,l]\times\mathbb{R}.$$

Itt az ω_n sajátfrekvencia

$$\omega_n=\sqrt{\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}\right)^2+c}, \qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

amit átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\omega_n=\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}+\left(\omega_n-\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}\right)=\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}+\frac{\omega_n^2-\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}\right)^2}{\omega_n+\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}}=\\ =n\frac{\pi a}{l}+\frac{\pi a}{2l}+\frac{c}{\omega_n+\frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}}.\end{aligned}$$

Tekintsük a (2.32) megfigyelési feltételt:

$$\begin{aligned}A_1u|_{t=t_1}+B_1u_t|_{t=t_1}&=f_1, \qquad |A_1|+|B_1|>0,\\ A_2u|_{t=t_2}+B_2u_t|_{t=t_2}&=f_2, \qquad |A_2|+|B_2|>0,\end{aligned}$$

és továbbá tegyük fel, hogy $A_1B_1\geq 0$ és $A_2B_2\leq 0$. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $A_1,B_1,B_2\geq 0$ és $A_2\leq 0$. Ezeket az együtthatókat behelyettesítve a $\gamma_n,\ \delta_n$ szögek definíciójába (lásd a 2.11. Tételt), ebből az következik, hogy $\sin\gamma_n\to 0^+$, $\gamma_n\to 0^+$, $\sin\delta_n\to 0^-$, $\delta_n\to 0^-$; amint $n\to\infty$. Tehát létezik egy $N\in\mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy bármely $n > N$ esetén,

$$0 \leq \frac{2}{\pi}\gamma_n \leq \sin\gamma_n \leq \gamma_n, \qquad \delta_n \leq \sin\delta_n \leq \frac{2}{\pi}\delta_n \leq 0.$$

Köszönhetően annak, hogy

$$\sin\gamma_n = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}}, \qquad \sin\delta_n = \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}, \qquad \omega_n = O(n),$$

létezik olyan $M \in \mathbb{R}^+ \bigcup \{0\}$ konstans, amire

$$0 \leq \frac{M}{n} \leq \gamma_n \to 0, \qquad 0 \leq \frac{M}{n} \leq -\delta_n \to 0.$$

Tehát a (2.36) feltétel teljesül az

$$A = (t_2 - t_1)\frac{a}{l}, \qquad B = (t_2 - t_1)\frac{\pi a}{2l}, \qquad C_n = (t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{(n+\frac{1}{2})\pi a}{l}} + \gamma_n - \delta_n,$$

tagokkal, feltéve, hogy $(t_2 - t_1)\frac{a}{l} \in \mathbb{Q}$.

Következésképpen alkalmazhatjuk a 2.11. Tételt, így pedig a következő állítást nyerjük.

2.17. Tétel. *Legyen*

$$f_1 \in D^{s+2}, \ f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

és tegyük fel, hogy

$$\sin((t_2 - t_1)\omega_n + \gamma_n - \delta_n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ekkor a (2.46), (2.47), (2.48) *vegyes feladathoz kapcsolódó megfigyelési probléma a* (2.32) *megfigyelési feltétel mellett egyértelműen megoldható a* $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ *kezdeti függvényekre, feltéve, hogy a megfigyelési feltételben szereplő együtthatókra teljesül, hogy* $A_1B_1 \geq 0$, $A_2B_2 \leq 0$, *továbbá a* t_1 *és* t_2 *megfigyelési időpontok között eltelt idő* l/a *racionális többszöröse.*

2.3.2. Rezgő húr szabad végpontokkal

Az előző problémához képest változtassunk annyit, hogy most legyen a rezgő húr mindkét végpontja szabad, azaz a következő, Neumann típusú peremfeltételt használjuk:

(2.49) $$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

A [3] könyv 1.3. és 2.2. fejezetei szerint tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ és $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ esetén a (2.46), (2.47), (2.49) vegyes feladat megoldása kielégíti a (2.33), (2.34) feltételeket, továbbá ebben a speciális esetben az X_n bázis és a (2.34)-beli sorfejtés a következő alakokat veszik fel:

$$X_0 = \sqrt{\frac{1}{l}} \quad \text{és} \quad X_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right] X_n(x), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}.$$

Itt a sajátfrekvencia

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 + c}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$

ahonnan

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l} + \left(\omega_n - \frac{n\pi a}{l}\right) = n\frac{\pi a}{l} + \frac{\omega_n^2 - \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}{\omega_n + \frac{n\pi a}{l}} = n\frac{\pi a}{l} + \frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi a}{l}}.$$

Amennyiben $A_1B_1 \geq 0$ és $A_2B_2 \leq 0$, akkor megismételve a 2.3.1 Szakaszban szereplő gondolatmenetet a γ_n, δ_n szögekre arra jutunk, hogy (2.36) teljesül a következőekkel:

$$A = (t_2 - t_1)\frac{a}{l}, \qquad B = 0, \qquad C_n = (t_2 - t_1)\frac{c}{\omega_n + \frac{n\pi a}{l}} + \gamma_n - \delta_n,$$

feltéve, hogy $(t_2 - t_1)\dfrac{a}{l} \in \mathbb{Q}$.

Ezek alapján a következőképpen alkalmazhatjuk a 2.11. Tételt a szabad végpontokkal rendelkező rezgő húrra.

2.18. Tétel. *Legyen*

$$f_1 \in D^{s+2},\ f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

és tegyük fel, hogy

$$\sin((t_2 - t_1)\omega_n + \gamma_n - \delta_n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ekkor a (2.46), (2.47), (2.49) *vegyes feladattal kapcsolatos megfigyelési probléma a* (2.32) *megfigyelési feltétel mellett egyértelműen megoldható a* $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ *kezdeti függvényekre, feltéve, hogy a* (2.32) *megfigyelési feltételben szereplő együtthatókra* $A_1B_1 \geq 0$ *és* $A_2B_2 \leq 0$ *teljesülnek, továbbá a* t_1 *és* t_2 *megfigyelési időpontok között eltelt idő* l/a *racionális többszöröse.*

2.3.3. Rezgő húr Sturm-Liouville peremfeltételekkel

Most tekintsük a véges, $[0, l]$ rezgő húr problémáját, változó nagyságú, az $u(x, t)$ kitéréssel arányos, azzal ellentétes irányú visszahúzóerő esetén Sturm-Liouville peremfeltételek mellett. Ekkor az egyenlet:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - c(x)u(x,t), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R},\ 0 < a \in \mathbb{R}, \tag{2.50}$$

ahol $0 < c(x) \in C^2[0, l]$; a kezdeti feltételek:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \qquad 0 \le x \le l; \tag{2.51}$$

és a Sturm-Liouville peremfeltételek:

$$\begin{aligned} u(0,t)\cos\alpha + u_x(0,t)\sin\alpha = 0, &\qquad \cot\alpha < 0,\\ u(l,t)\cos\beta + u_x(l,t)\sin\beta = 0, &\qquad \cot\beta > 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

A (2.52) peremfeltételen belül a $\cot\alpha$ és $\cot\beta$ értékek előjelére vonatkozó feltétel biztosítja az energiamegmaradást, ezzel pedig garantálja, hogy a (2.50)–(2.52) vegyes feladat a klasszikus esetben egyértelműen megoldható. Továbbá ennek a feltételnek köszönhetően (a lentebb bevezetett) γ konstans szigorúan pozitív lesz.

Ismét [3] 1.3. és 2.2. fejezetei szerint tetszőleges $s \in \mathbb{R}$ és $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ esetén a (2.50)–(2.52) vegyes feladat megoldása kielégíti (2.33), (2.34) feltételeket. A (2.34)-beli $\{X_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ ortonormált bázis a [21], 5-13. o. eredményei alapján:

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \frac{\beta(x)}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

ahol

$$\beta(x) = -\gamma\frac{\pi}{l}x - \frac{l}{\pi}\cot\alpha + \frac{1}{2a^2}\int_0^x \frac{l}{\pi}c(\tau)d\tau.$$

A (2.34) sorfejtett alak most

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_n\cos(\omega_n t) + \beta_n\sin(\omega_n t)\right]X_n(x), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R},$$

ahol

$$\omega_n = \frac{a\pi}{l}\left(n + \frac{\gamma}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right), \qquad \gamma = \frac{l}{\pi^2}\left(-\cot\alpha + \cot\beta + \frac{1}{2a^2}\int_0^l c(\tau)d\tau\right).$$

Elvégezve a műveletet, ω_n felírható az

$$\omega_n = n\frac{\pi a}{l} + \left(\frac{\gamma a\pi}{nl} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

alakban. Amennyiben $A_1B_1 \geq 0$ és $A_2B_2 \leq 0$, akkor a γ_n és δ_n szögekre alkalmazva a korábbi, 2.3.1 Szakaszbeli gondolatmenetünket azt kapjuk, hogy (2.36) teljesül a következőekkel:

$$A = (t_2 - t_1)\frac{a}{l}, \qquad B = 0, \qquad C_n = (t_2 - t_1)\frac{\gamma a\pi}{nl} + \gamma_n - \delta_n + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

feltéve, hogy $(t_2 - t_1)\frac{a}{l} \in \mathbb{Q}$.

Ezek alapján alkalmazhatjuk a 2.11. Tételt a Sturm-Liouville rögzítésű rezgő húrra.

2.19. Tétel. *Legyen*

$$f_1 \in D^{s+2},\ f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

és tegyük fel, hogy

$$\sin((t_2 - t_1)\omega_n + \gamma_n - \delta_n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Ekkor a (2.50), (2.51), (2.52) *vegyes feladathoz kapcsolódó megfigyelési probléma a* (2.32) *megfigyelési feltétel mellett egyértelműen megoldható a* $(\varphi, \psi) \in D^{s+1} \times D^s$ *kezdeti függvényekre, feltéve, hogy a megfigyelési feltételben szereplő együtthatókra teljesül, hogy* $A_1B_1 \geq 0$, $A_2B_2 \leq 0$, *továbbá a* t_1 *és* t_2 *megfigyelési időpontok között eltelt idő* l/a *racionális többszöröse.*

2.3.4. Megfigyelési eredmények tetszőleges megfigyelési időpontok esetén

Vizsgáljuk meg mi a helyzet akkor, amikor a 2.11. Tételben kitűzött megfigyelési probléma kapcsán a (2.36), (2.37) feltételek teljesülését nem követeljük meg, azaz abban az esetben, amikor a rendszer részleges állapotának a megfigyeléséhez a t_1, t_2 megfigyelési időpontokat a megszorításainktól mentesen, tetszőlegesen választjuk. Ekkor a korábbitól eltérő, alternatív módszerhez folyamodhatunk, melyhez vezessük be a következő jelöléseket:

$$h_n := \omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

$$d_n := \rho(h_n, \mathbb{N}_0\pi), \quad n \in \mathbb{N}_0, \qquad \mathbb{N}_0\pi := \bigcup_{k=0}^{\infty}\{k\pi\},$$

azaz d_n jelölje a h_n érték távolságát a szinuszfüggvény legközelebbi zéróhelyétől.

- Amennyiben $d_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}_0$ esetén (tehát (2.37) teljesül, csak (2.36) nem), akkor a megfigyelési probléma (formálisan) egyértelműen megoldható, hiszen az $\alpha_n,\ \beta_n$ együtthatók egyértelműen meghatározhatók a (2.42) egyenletrendszerből minden $n \in \mathbb{N}_0$ számra és definiálják a $\varphi,\ \psi$ kezdeti függvényeket. Viszont az $\alpha_n,\ \beta_n$ együtthatók becsléséhez (és így ahhoz, hogy a $\varphi,\ \psi$ függvények rendre a $D^{s+1},\ D^s$ osztályhoz tartozzanak) speciális eszközök szükségesek (például a 2.2. Alfejezetben diofantikusakat használtunk). Egy általános eredmény lehet, a következő: a
$$\varphi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X_n(x), \quad \psi(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \beta_n X_n(x)$$
formális sorok rendelkeznek a következő tulajdonságokkal:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n d_n X_n(x) \in D^{s+1}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \beta_n d_n X_n(x) \in D^s, \tag{2.53}$$
mi több, a (2.53) tulajdonság akkor is teljesüljön, ha a d_n távolságot helyettesítjük a $\widetilde{d}_n$ számmal, ami
$$\widetilde{d}_n = \begin{cases} 1, & d_n \geq \delta > 0, \\ b_n, & d_n < \delta, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$
tetszőlegesen kicsi rögzített δ és tetszőleges $|b_n| \leq d_n$ esetén.

- Amennyiben bizonyos természetes számokra d_n értéke nulla, akkor jelölje $\mathbb{N}(0)$ az összes ilyen természetes szám halmazát. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}(0)$ szám esetén a (2.42) lineáris rendszer pontosan akkor oldható meg az (α_n, β_n) párra, ha a megfigyelt $f_1,\ f_2$ függvények Fourier együtthatóira teljesül, hogy
$$\frac{D_n}{E_n} = \frac{A_1 \cos(\omega_n t_1) - B_1 \omega_n \sin(\omega_n t_1)}{A_2 \cos(\omega_n t_2) - B_2 \omega_n \sin(\omega_n t_2)} = \left(\frac{A_1 \sin(\omega_n t_1) + B_1 \omega_n \cos(\omega_n t_1)}{A_2 \sin(\omega_n t_2) + B_2 \omega_n \cos(\omega_n t_2)} \right).$$
Viszont a megoldás még így sem egyértelmű ezen (α_n, β_n) párokra, és ennélfogva a segítségükkel konstruált $\varphi,\ \psi$ kezdeti függvényekre sem, továbbá a $\varphi,\ \psi$ függvényeknek a rendre $D^{s+1},\ D^s$ terekhez történő tartozása sem garantált.

3. fejezet

A Duhamel-elv egy változata

A továbbiakban véges rezgések helyett rátérünk a végtelen rezgő húr vizsgálatára, a klasszikus tárgyalásmódra támaszkodva. Lényeges különbség az eddigiekhez képest, hogy ekkor rendelkezésünkre áll a D'Alembert formula, mely a Duhamel-elvvel együtt megadja az inhomogén egyenletű rezgő húr problémájának megoldását a kezdeti adatok és az inhomogenitást jelentő tag függvényeként. Szeretnénk a megfigyelési problémák témaköréhez tartozó eredményeinket a lehető legáltalánosabb (de még klasszikus) külső erő hatása melletti húrrezgés egyenletekre megfogalmazni (lásd a következő fejezetben), ezért bemutatjuk a Duhamel-elv egy új változatát a végtelen rezgő húr esetére.

3.1. Tétel. *Amennyiben $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ és az f függvény t irány szerinti f_t deriváltja létezik, továbbá $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$, akkor a következő,* (3.1)–(3.3) *kezdeti érték problémának pontosan egy megoldása van.*

$$v(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2), \tag{3.1}$$

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \tag{3.2}$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0 \tag{3.3}$$

A v megoldás egy reprezentációját a

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \right) d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.4}$$

úgynevezett Duhamel-integrál adja meg.

A szokásos kitűzés $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ simasági feltételét élesíti ez a tétel. De mielőtt bebizonyítjuk a 3.1. Tételt, előbb bemutatunk négy példát, amik jellemzik az inhomogén hullámegyenlet klasszikus megoldásai simasági tulajdonságainak változatosságát, valamint azt, hogy a (3.4) Duhamel-integrál a 3.1. Tétel feltételeinél gyengébb feltételek mellett is megadhatja a (3.1)–(3.3) probléma (klasszikus) megoldását speciális f erőfüggvény esetén.

3.2. Példa. *Az n dimenziós hullámegyenlet esetén, amennyiben $f(\underline{x}, t) = g(t) \in \in C^k(\mathbb{R})$, akkor a*

$$v_{tt} - a^2 \sum_{i=1}^{n} v_{x_i x_i} = g(t), \qquad (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0,$$

probléma v klasszikus megoldása a következő alakú:

$$v(\underline{x}, t) = \int_0^t \left(\int_0^\tau g(s)ds \right) d\tau = \int_0^t g(\tau)(t - \tau)d\tau, \qquad (\underline{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

és nyilvánvaló, hogy $v \in C^{k+2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$. Azaz a $v \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ simasághoz elegendő, ha a g erőfüggvény folytonos.

Természetesen ez a példa nem általánosítja a 3.1. Tételt, hiszen speciális alakú jobb oldalt vettünk, mindazonáltal ez a példa is azt mutatja, hogy a 3.1. Tételbeli feltételeink nem szükségesek a megoldás $v \in C^2$ simaságának biztosításához.

3.3. Példa. *Rezgő húr esetén ($n = 1$ az előző példában), amennyiben $f(x, t) = h(x) \in \in C(\mathbb{R})$ alakú, akkor a*

$$v(x, t) \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

$$v_{tt}(x, t) - a^2 v_{xx}(x, t) = h(x), \qquad (x, t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0$$

probléma v megoldása a következőképpen írható fel:

$$v(x, t) = \frac{1}{2a} \left[-\frac{2}{a}\widehat{H}(x) + \frac{1}{a}\widehat{H}(x + at) + \frac{1}{a}\widehat{H}(x - at) \right], \tag{3.5}$$

ahol

$$\widehat{H}(x) = \int_0^x H(s)ds, \qquad H(x) = \int_0^x h(s)ds.$$

A (3.5)-beli v függvényt a (3.4) Duhamel-integrállal definiáljuk:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} h(s)ds\right) d\tau = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left[H(x+a(t-\tau)) - H(x-a(t-\tau))\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a}\left[-\frac{1}{a}\widehat{H}(x+a(t-\tau))\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{1}{a}\widehat{H}(x-a(t-\tau))\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}\right].$$

A (3.5) formulából közvetlenül látható, hogy ez a $v(x,t)$ függvény valóban megoldása a (3.1)–(3.3) problémának, és hogy a szokásos $f(x,t) = h(x) \in C^1(\mathbb{R})$ megkötés nem szükséges a v megoldás $C^2(\mathbb{R}^2)$-beliségének biztosításához.

3.4. Példa. *Továbbra is a rezgő húrnál maradva, ha*

$$f(x,t) = h(x) + g(t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad h, g \in C(\mathbb{R}), \tag{3.6}$$

alakra bontható, akkor a

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = h(x) + g(t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0,$$

probléma klasszikus C^2 megoldása $v = v_1 + v_2 \in C^2$, ahol a v_1 és v_2 függvények rendre a 3.2. ($n = 1$ esetben) és 3.3. Példa megoldásai.

Ezen 3.4. Példa eredménye élesebb mint a 3.1. Tételé a (3.6) speciális alakú jobboldal esetén.

3.5. Példa. *Az általunk előzetesen megvizsgáltak közül ez van legközelebb a 3.1. Tételbeli helyzethez. Legyen $f(x,t) = h(x)g(t)$, $h \in C(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Ekkor a*

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = h(x)g(t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0$$

probléma v klasszikus megoldása a következő:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t g(\tau)\left[H(x+a(t-\tau)) - H(x-a(t-\tau))\right] d\tau, \tag{3.7}$$

ahol $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Itt is (mint fentebb a 3.3. Példában) $H(x) = \int\limits_0^x h(s)ds$.

A (3.7)-beli v függvényt szintén a (3.4) Duhamel-integrállal definiáljuk:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} h(s)g(\tau)ds \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\limits_0^t g(\tau)\left[H(x+a(t-\tau)) - H(x-a(t-\tau))\right] d\tau.$$

A (3.7) formula megmutatja, hogy v valóban (klasszikus) megoldása a (3.1)–(3.3) problémának, és hogy a $g \in C^1(\mathbb{R}),\ h \in C(\mathbb{R})$ feltételek nem enyhíthetőek.

A v függvény folytonossága nyilvánvalóan következik a (3.7) alakú felírásból. A v_t és v_x deriváltak létezése és folytonossága szintén a (3.7) alak folyománya, és ezek a következő reprezentációval rendelkeznek:

$$v_t = \frac{1}{2}\int\limits_0^t g(\tau)[h(x+a(t-\tau)) + h(x-a(t-\tau))]d\tau,$$

$$v_x = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t g(\tau)[h(x+a(t-\tau)) - h(x-a(t-\tau))]d\tau.$$

Sajnos a másodrendű deriváltak létezése és folytonossága nem vezethető le ezen reprezentációkból a szokásos érvelés segítségével, hiszen a fentebbi kifejezéseket nem lehet az integráláson belül deriválni. Ellenben használható hasonló gondolatmenet, mint amit a 3.1. Tétel bizonyítása során majd részletesen kifejtünk.

Ezek után lássunk neki a 3.1. Tétel bizonyításának.

Bizonyítás. Mint tudjuk, folytonosan differenciálható f függvény esetén a szokásos Duhamel-elv szolgáltatja a (3.1)–(3.3) kezdeti érték probléma $v(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását, melyre

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \right) d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.8}$$

A bizonyítás alapja, hogy a (3.8) formula értelmes, és egy $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ függvényt definiál akkor is, ha csupán $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$ simaságot tételezünk fel, a parciális deriváltak kiszámításából pedig majd láthatjuk, hogy meg is oldja a (3.1)–(3.3) problémát.

Lépésenként be fogjuk látni a (3.8) által definiált v függvény x, illetve t irány szerinti deriváltjainak létezését és folytonosságát a második rendűekig bezárólag, így eljutva a kívánt $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tulajdonságig.

A v függvény folytonossága azonnal következik a (3.8) formulából.

A v_x és v_t iránymenti deriváltak létezése és folytonossága $t > 0$, illetve $t < 0$ esetben szintén következik a (3.8) formulából, csakúgy, mint bármely $(x, t) \in \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ esetén az alábbi reprezentációjuk:

$$v_x(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t [f(x + a(t-\tau), \tau) - f(x - a(t-\tau), \tau)]\, d\tau, \tag{3.9}$$

$$v_t(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t [f(x + a(t-\tau), \tau) + f(x - a(t-\tau), \tau)]\, d\tau. \tag{3.10}$$

Valójában ezen v_x és v_t deriváltak a v függvény szokásos parciális deriváltjai. A (3.9) és (3.10) alakból a következő tulajdonságok egyből következnek:

$$v_x,\ v_t \in C(\mathbb{R} \times (0, \infty)),$$

$$v_x,\ v_t \in C(\mathbb{R} \times (-\infty, 0)).$$

Továbbá az is következik a (3.9), (3.10) kifejezésekből, hogy

$$v_x(x,t) \to 0 \qquad \text{amint} \qquad t \to 0+0 \quad \text{vagy} \quad t \to 0-0, \tag{3.11}$$

$$v_t(x,t) \to 0 \qquad \text{amint} \qquad t \to 0+0 \quad \text{vagy} \quad t \to 0-0. \tag{3.12}$$

A (3.11) és (3.12) határértékek megfelelnek a v függvény deriváltjának a $t = 0$ felületen. Egyrészt a (3.8) formulában $v|_{t=0} = 0$, és így $(v|_{t=0})_x = 0$. Másrészt a v_t derivált létezése $t = 0$ pontban, és az, hogy $v_t|_{t=0} = 0$ a Lagrange középértéktételből következik:

$$\frac{v(x,t) - v(x,0)}{t - 0} = v_t(x, \theta t) \to 0, \quad \text{amint } t \to 0, \quad \theta \in (0,1),$$

köszönhetően (3.12)-nek.

Tehát ezek a számolások azt mutatják, hogy

$$v,\ v_x,\ v_t \in C(\mathbb{R}^2)$$

és (3.3) teljesül.

Most bebizonyítjuk v második deriváltjainak létezését és folytonosságát $t > 0$ esetén.

Kezdjük a v_{xx} deriválttal, ami nem más, mint v_x deriváltja az x irány mentén. Behelyettesítve $x_2 > x_1$ értékeket a (3.9) formulába és rögzítve egy $t > 0$ időpontot, azt kapjuk, hogy

$$\frac{v_x(x_2,t) - v_x(x_1,t)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2a}(I_1(f,x_1,x_2,t) - I_2(f,x_1,x_2,t)), \tag{3.13}$$

ahol

$$I_1(f,x_1,x_2,t) = \int_0^t \frac{f(x_2 + a(t-\tau),\tau) - f(x_1 + a(t-\tau),\tau)}{x_2 - x_1} d\tau, \tag{3.14}$$

$$I_2(f,x_1,x_2,t) = \int_0^t \frac{f(x_2 - a(t-\tau),\tau) - f(x_1 - a(t-\tau),\tau)}{x_2 - x_1} d\tau. \tag{3.15}$$

Legyen $\delta := (x_2 - x_1)/a$. Mivel az x_2 értéket majd tartatjuk x_1-hez, így feltehetjük, hogy $\delta < t$. Tekintsük a következő két párhuzamos karakterisztikát:

$$l_1^+ := \{(x_1 + a(t-\tau),\tau),\ 0 \le \tau \le t\},$$

$$l_2^+ := \{(x_2 + a(t-(\tau+\delta)),\tau+\delta),\ -\delta \le \tau \le t-\delta\}.$$

Ezeket osszuk fel két-két részre:

$$l_1^+ = l_{1,1}^+ \cup l_{1,2}^+, \text{ ahol}$$

$$l_{1,1}^+ := \{(x_1 + a(t-\tau),\tau) \equiv A_{1,1}^+(\tau),\ \tau \in [0, t-\delta]\},$$

$$l_{1,2}^+ := \{(x_1 + a(t-\tau),\tau) \equiv A_{1,2}^+(\tau),\ \tau \in [t-\delta, t]\},$$

és hasonlóképp

$$l_2^+ = l_{2,1}^+ \cup l_{2,2}^+, \text{ ahol}$$

$$l_{2,1}^+ := \{(x_2 + a(t-(\tau+\delta),\tau+\delta) \equiv A_{2,1}^+(\tau),\ \tau \in [-\delta, 0]\},$$

$$l_{2,2}^+ := \{(x_2 + a(t-(\tau+\delta)),\tau+\delta) \equiv A_{2,2}^+(\tau),\ \tau \in [0, t-\delta]\}.$$

Felhasználva ezeket a jelöléseket arra jutunk, hogy

$$
\begin{aligned}
I_1(f, x_1, x_2, t) &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\int\limits_{l_2^+} f d\tau - \int\limits_{l_1^+} f d\tau\right] = \\
&= \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\int\limits_{l_{2,2}^+} f d\tau - \int\limits_{l_{1,1}^+} f d\tau + \int\limits_{l_{2,1}^+} f d\tau - \int\limits_{l_{1,2}^+} f d\tau\right].
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Vegyük észre, hogy

$$A_{2,2}^+(\tau) = A_{1,1}^+(\tau) + (0, \delta), \qquad \forall \tau \in [0, t - \delta].$$

A Lagrange középértéktétel alapján a (3.16) formula jobb oldalán szereplő első két integrálra a következőt kapjuk: [1]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x_2 - x_1}\left[\int\limits_{l_{2,2}^+} f d\tau - \int\limits_{l_{1,1}^+} f d\tau\right] &= \frac{1}{x_2 - x_1}\left[\int\limits_0^{t-\delta} f(A_{2,2}^+(\tau)) d\tau - \int\limits_0^{t-\delta} f(A_{1,1}^+(\tau)) d\tau\right] = \\
= \frac{1}{a}\int\limits_0^{t-\delta} \frac{f(A_{1,1}^+(\tau) + (0,\delta)) - f(A_{1,1}^+(\tau))}{\delta} d\tau &= \frac{1}{a}\int\limits_0^{t-\delta} f_t(D(\tau)) d\tau,
\end{aligned}
$$

egy alkalmas

$$D(\tau) \in (A_{1,1}^+(\tau), A_{2,2}^+(\tau)), \qquad \tau \in (0, t - \delta)$$

függvénnyel. Képezve az $x_2 \to x_1$ $(\delta \to 0)$ határátmenetet arra jutunk, hogy

$$\frac{1}{a}\int\limits_0^{t-\delta} f_t(D(\tau)) d\tau \to \frac{1}{a}\int\limits_0^{t} f_t(x_1 + a(t - \tau), \tau) d\tau.$$

Az integrál-középértéktétel szerint létezik olyan $A_{2,1}^* \in l_{2,1}^+$ pont, hogy a (3.16) formula jobb oldalán lévő harmadik tag a következőbe megy át amint $x_2 \to x_1$ $(\delta \to 0)$:

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{l_{2,1}^+} f d\tau = \frac{1}{a}\int\limits_{-\delta}^{0} \frac{f(A_{2,1}^+(\tau))}{\delta} d\tau = \frac{1}{a} f(A_{2,1}^*) \to \frac{1}{a} f(x_1 + at, 0).$$

[1] Itt és a továbbiakban az $f_t(x_i \pm a(t-\tau), \tau) := f_t(x, t)\Big|_{\substack{x = x_i \pm a(t-\tau) \\ t = \tau}}$ jelölést fogjuk használni.

Hasonlóképpen a (3.16)-beli utolsó tag esetére, létezik egy olyan $A^*_{1,2} \in l^+_{1,2}$ pont, hogy

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \int\limits_{l^+_{1,2}} f d\tau = \frac{1}{a} \int\limits_{t-\delta}^{t} \frac{f(A^+_{1,2}(\tau))}{\delta} d\tau = \frac{1}{a} f(A^*_{1,2}) \to \frac{1}{a} f(x_1, t),$$

amint $x_2 \to x_1$ ($\delta \to 0$).

Összeadva a kiszámolt határértékeket, $x_2 \to x_1$ esetén azt kaptuk, hogy

$$I_1(f, x_1, x_2, t) \to \frac{1}{a} \int\limits_0^t f_t(x_1 + a(t-\tau), \tau) d\tau + \frac{1}{a} f(x_1 + at, 0) - \frac{1}{a} f(x_1, t). \tag{3.17}$$

Az I_2-re vonatkozó (3.15) formula abban különbözik az I_1-re vonatkozó (3.14) formulától, hogy benne $x_2 + a(t-\tau)$ le van cserélve $x_2 - a(t-\tau)$-ra, $x_1 + a(t-\tau)$ pedig le van cserélve $x_1 - a(t-\tau)$-ra. Ennek megfelelően az $I_2(f, x_1, x_2, t)$ kifejezésnek az $x_2 \to x_1$ pontnál vett határértékének a kiszámításához az előzőhöz hasonló gondolatmenetet alkalmazhatunk, amennyiben a következő karakterisztikákat (illetve azok szegmenseit) definiáljuk:

$$l^-_1 = l^-_{1,1} \cup l^-_{1,2}, \qquad l^-_2 = l^-_{2,1} \cup l^-_{2,2},$$

$$l^-_{1,1} := \{(x_1 - a(t-\tau), \tau) \equiv A^-_{1,1}(\tau),\ \tau \in [0, t-\delta]\},$$

$$l^-_{1,2} := \{(x_1 - a(t-\tau), \tau) \equiv A^-_{1,2}(\tau),\ \tau \in [t-\delta, t]\},$$

$$l^-_{2,1} := \{(x_2 - a(t - (\tau+\delta), \tau+\delta) \equiv A^-_{2,1}(\tau),\ \tau \in [-\delta, 0]\},$$

$$l^-_{2,2} := \{(x_2 - a(t - (\tau+\delta)), \tau+\delta) \equiv A^-_{2,2}(\tau),\ \tau \in [0, t-\delta]\},$$

Megismételve a korábbi számolásokat, ezen karakterisztika szegmensek mentén integrálva azt kapjuk, hogy amennyiben $x_2 \to x_1$, akkor

$$I_2(f, x_1, x_2, t) \to -\frac{1}{a} \int\limits_0^t f_t(x_1 - a(t-\tau), \tau) d\tau - \frac{1}{a} f(x_1 - at, 0) + \frac{1}{a} f(x_1, t). \tag{3.18}$$

Összefoglalva az eddigieket, azt kaptuk a v_{xx} jobb oldali deriváltra (tehát $x_2 \to x_1$ a (3.13) formulában), hogy

$$\begin{aligned} v_{xx}(x_1, t) &= \frac{1}{2a^2} \int\limits_0^t [f_t(x_1 + a(t-\tau), \tau) + f_t(x_1 - a(t-\tau), \tau)] d\tau + \\ &+ \frac{f(x_1 + at, 0) + f(x_1 - at, 0)}{2a^2} - \frac{1}{a^2} f(x_1, t), \qquad x_1 \in \mathbb{R},\ t > 0. \end{aligned} \tag{3.19}$$

A $v_{xx}(x_1,t)$ bal oldali derivált kiszámítása $x_1 \in \mathbb{R}$ és $t > 0$ esetén a fentebbiekkel analóg módon történik, csak ki kell cserélni az (x_2,x_1) párt az (x_1,x_2) párra és figyelembe venni, hogy ekkor $x_2 - x_1 < 0$.

Abban az esetben, ha $t < 0$, helyettesítsük a

$$t = -\widetilde{t}, \quad \tau = -\widetilde{\tau}, \quad f(\xi,\eta) = \widetilde{f}(\xi,-\eta) \tag{3.20}$$

kifejezéseket a (3.14) formulába, mellyel arra jutunk, hogy ekkor

$$I_1(f,x_1,x_2,t) = -\int\limits_0^{\widetilde{t}} \frac{\widetilde{f}(x_2 - a(\widetilde{t}-\widetilde{\tau}),\widetilde{\tau}) - \widetilde{f}(x_1 - a(\widetilde{t}-\widetilde{\tau}),\widetilde{\tau})}{x_2 - x_1} d\widetilde{\tau} = -I_2(\widetilde{f},x_1,x_2,\widetilde{t}).$$

Mivel $\widetilde{t} > 0$, így a már kiszámolt (3.18) határértékből kiindulva, majd visszahelyettesítve a (3.20) kifejezéseket azt kapjuk, hogy [2]

$$-I_2(\widetilde{f},x_1,x_2,\widetilde{t}) \to \frac{1}{a}\int\limits_0^{\widetilde{t}} \widetilde{f}_{\widetilde{t}}(x_1 - a(\widetilde{t}-\widetilde{\tau}),\widetilde{\tau})d\widetilde{\tau} - \frac{1}{a}\widetilde{f}(x_1 - a\widetilde{t},0) + \frac{1}{a}\widetilde{f}(x_1,\widetilde{t}) =$$

$$= \frac{1}{a}\int\limits_0^{t} f_t(x_1 + a(t-\tau),\tau)d\tau + \frac{1}{a}f(x_1 + at,0) - \frac{1}{a}f(x_1,t),$$

amint $x_2 \to x_1$ ($\delta \to 0$). Ez pedig megegyezik azzal, amit $I_1(f,x_1,x_2,t)$ határértékére kaptunk a $t > 0$ esetben.

Hasonlóképpen, $t < 0$ esetén vizsgálva a (3.17) kifejezést, (3.15), (3.20) és (3.17) alapján azt kapjuk, hogy

$$I_2(f,x_1,x_2,t) = -I_1(\widetilde{f},x_1,x_2,\widetilde{t}) \to -\frac{1}{a}\int\limits_0^{t} f_t(x_1 - a(t-\tau),\tau)d\tau - \frac{1}{a}f(x_1 - at,0) + \frac{1}{a}f(x_1,t),$$

és ez a határérték pedig egybeesik azzal, amit $I_2(f,x_1,x_2,t)$-re kaptunk, ha $t > 0$ és $x_2 \to x_1$ ($\delta \to 0$).

Következésképpen, (3.19) biztosítja a $v_{xx}(x,t)$ derivált létezését, mi több, a következő formulát szolgáltatja rá:

[2] A korábbiakkal analóg módon az $\widetilde{f}_{\widetilde{t}}(x_i \pm a(\widetilde{t}-\widetilde{\tau}),\widetilde{\tau}) := \widetilde{f}_{\widetilde{t}}(x,\widetilde{t})\Big|_{\substack{x = x_i \pm a(\widetilde{t}-\widetilde{\tau}) \\ \widetilde{t} = \widetilde{\tau}}}$ jelölést használjuk.

$$(3.21)\qquad \begin{aligned} v_{xx}(x,t) &= \frac{1}{2a^2}\int_0^t [f_t(x+a(t-\tau),\tau)+f_t(x-a(t-\tau),\tau)]d\tau+ \\ &+\frac{f(x+at,0)+f(x-at,0)}{2a^2}-\frac{1}{a^2}f(x,t), \qquad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{aligned}$$

Ebből a (3.21) reprezentációból látható a $v_{xx}(x,t)$ folytonossága az $\mathbb{R}\times(-\infty,0)$ és az $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ félsíkokon. Képezve a $t\to 0$ határátmenetet pedig arra jutunk, hogy

$$v_{xx}(x,t)\to 0, \qquad x\in\mathbb{R},\ t\to 0+0 \text{ vagy } t\to 0-0,$$

ami megfelel a

$$v_{xx}(x,0):=(v_x(x,0))_x=0$$

tulajdonságnak. Ezzel beláttuk, hogy valóban $v_{xx}\in C(\mathbb{R}^2)$.

Most megmutatjuk, hogy v_{tt}, mint a $v_t\in C(\mathbb{R}^2)$ függvény t szerinti deriváltja létezik és folytonos. Először tekintsük a $t>0$ esetet. Ha $t_2>t_1>0$, és rögzítjük az $x\in\mathbb{R}$ pontot, akkor (3.10) alapján azt kapjuk, hogy

$$(3.22)\qquad \frac{v_t(x,t_2)-v_t(x,t_1)}{t_2-t_1}=\frac{1}{2}(I_3(f,x,t_1,t_2)+I_4(f,x,t_1,t_2)),$$

ahol az

$$(3.23)\quad I_3(f,x,t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_0^{t_2} f(x+a(t_2-\tau),\tau)d\tau-\int_0^{t_1} f(x+a(t_1-\tau),\tau)d\tau\right],$$

$$(3.24)\quad I_4(f,x,t_1,t_2)=\frac{1}{t_2-t_1}\left[\int_0^{t_2} f(x-a(t_2-\tau),\tau)d\tau-\int_0^{t_1} f(x-a(t_1-\tau),\tau)d\tau\right]$$

jelöléseket használtuk. Legyen $d:=t_2-t_1$, és vezessük be a következőeket:

$$l_3^+:=\{(x+a(t_1-\tau),\tau)\equiv A_{3,3}^+,\ 0\le\tau\le t_1\}:=l_{3,3}^+,$$

$$l_4^+:=\{(x+a(t_2-(\tau+d)),\tau+d),\ -d\le\tau\le t_2-d\}.$$

Most (ellentétben a v_{xx} derivált számításakor történttel) elegendő csak az l_4^+ szakaszt tovább bontani:

$$l_{4,3}^{+} := \{(x + a(t_2 - (\tau + d), \tau + d) \equiv A_{4,3}^{+}(\tau),\ \tau \in [-d, 0]\},$$

$$l_{4,4}^{+} := \{(x + a(t_2 - (\tau + d)), \tau + d) \equiv A_{4,4}^{+}(\tau),\ \tau \in [0, t_2 - d] = [0, t_1]\}.$$

A (3.23) formulát a következőképp tudjuk átírni ezen szakaszok mentén vett integrálásokként:

$$\begin{aligned} I_3(f, x, t_1, t_2) &= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int\limits_{l_4^{+}} f d\tau - \int\limits_{l_3^{+}} f d\tau\right] = \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int\limits_{l_{4,4}^{+}} f d\tau - \int\limits_{l_{3,3}^{+}} f d\tau + \int\limits_{l_{4,3}^{+}} f d\tau\right]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Vegyük észre, hogy

$$A_{4,4}^{+}(\tau) = A_{3,3}^{+}(\tau) + (0, d), \qquad \forall \tau \in [0, t_1] \text{ esetén.}$$

A Lagrange középértéktétel alapján a (3.25) jobb oldalán található integrálra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int\limits_{l_{4,4}^{+}} f d\tau - \int\limits_{l_{3,3}^{+}} f d\tau\right] &= \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int\limits_{0}^{t_1} f(A_{4,4}^{+}(\tau)) d\tau - \int\limits_{0}^{t_1} f(A_{3,3}^{+}(\tau)) d\tau\right] = \\ &= \int\limits_{0}^{t_1} \frac{f(A_{3,3}^{+}(\tau) + (0, d)) - f(A_{3,3}^{+}(\tau))}{d} d\tau = \int\limits_{0}^{t_1} f_t(D(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

egy alkalmas

$$D(\tau) \in (A_{3,3}^{+}(\tau), A_{4,4}^{+}(\tau)), \qquad \tau \in (0, t_1)$$

függvénnyel. A $t_2 \to t_1$ $(d \to 0)$ határátmenet azt eredményezi, hogy

$$\int\limits_{0}^{t_1} f_t(D(\tau)) \to \int\limits_{0}^{t_1} f_t(x + a(t_1 - \tau), \tau) d\tau.$$

A (3.25) jobb oldalán lévő harmadik tagra pedig alkalmazhatjuk az integrál középértéktételt, így arra jutunk, hogy létezik egy $A_{4,3}^{*} \in l_{4,3}^{+}$ pont, hogy

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{l_{4,3}^{+}} f d\tau = \int\limits_{-\delta}^{0} \frac{f(A_{4,3}^{+}(\tau))}{d} d\tau = f(A_{4,3}^{*}) \to f(x + at_1, 0), \quad \text{ha } t_2 \to t_1 \ (d \to 0).$$

Tehát miután a (3.25) jobb oldalán lévő tagokat külön-külön kiszámoltuk, azt kaptuk, hogy

$$
I_3(f,x,t_1,t_2) \to \int_0^{t_1} f_t(x+a(t_1-\tau),\tau)d\tau + f(x+at_1,0), \quad \text{ha } t_2 \to t_1. \tag{3.26}
$$

Az I_4-re vonatkozó (3.24) formula abban különbözik az I_3-ra vonatkozó (3.23) formulától, hogy $x+a(t_2-\tau)$ helyére $x-a(t_2-\tau)$, $x+a(t_1-\tau)$ helyére pedig $x-a(t_1-\tau)$ került. Hasonlóan az $I_3(f,x,t_1,t_2)$ esetében alkalmazott gondolatmenethez, most a következő karakterisztika szegmenseket definiáljuk:

$$
l_3^- := \{(x-a(t_1-\tau),\tau) \equiv A_{3,3}^-,\ 0 \le \tau \le t_1\} := l_{3,3}^-,
$$

$$
l_4^- := \{(x-a(t_2-(\tau+\delta)),\tau+\delta),\ -d \le \tau \le t_2-d\}.
$$

$$
l_{4,3}^- := \{(x-a(t_2-(\tau+d),\tau+d) \equiv A_{4,3}^-(\tau),\ \tau \in [-d,0]\},
$$

$$
l_{4,4}^- := \{(x-a(t_2-(\tau+d)),\tau+d) \equiv A_{4,4}^-(\tau),\ \tau \in [0,t_2-d] = [0,t_1]\},
$$

Követve a korábbi okfejtésünket, az $I_4(f,x,t_1,t_2)$ esetére ezen karakterisztikák mentén integrálva arra jutunk, hogy

$$
I_4(f,x,t_1,t_2) \to \int_0^{t_1} f_t(x-a(t_1-\tau),\tau)d\tau + f(x-at_1,0), \quad \text{ha } t_2 \to t_1\ (d \to 0). \tag{3.27}
$$

Összegezve, ha visszahelyettesítjük a kapott határértékeket (3.22)-be, a v_{tt} jobb oldali deriváltra a

$$
\begin{aligned}
v_{tt}(x,t_1) = \frac{1}{2}\int_0^{t_1} [f_t(x+a(t_1-\tau),\tau) + f_t(x-a(t_1-\tau),\tau)]d\tau+ \\
+\frac{f(x+at_1,0)+f(x-at_1,0)}{2}, \qquad 0 < t_1 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

előállítást nyertük.

Amennyiben $t_2 < t_1 < 0$, akkor hajtsuk végre a

$$
t = -\widetilde{t}, \quad t_1 = -\widetilde{t}_1, \quad t_2 = -\widetilde{t}_2, \quad \tau = -\widetilde{\tau}, \quad f(\xi,\eta) = \widetilde{f}(\xi,-\eta) \tag{3.29}
$$

változótranszformációkat a (3.23) formulában. Így azt kapjuk, hogy

$$I_3(f,x,t_1,t_2) = \frac{-1}{\widetilde{t}_1 - \widetilde{t}_2}\left[\int\limits_0^{\widetilde{t}_2} \widetilde{f}(x - a(\widetilde{t}_2 - \widetilde{\tau}), \widetilde{\tau})d\widetilde{\tau} - \int\limits_0^{\widetilde{t}_1} \widetilde{f}(x - a(\widetilde{t}_1 - \widetilde{\tau}), \widetilde{\tau})d\widetilde{\tau}\right] = \\ = I_4(\widetilde{f}, x, \widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2).$$

Mivel $0 < \widetilde{t}_1 < \widetilde{t}_2$, erre alkalmazhatjuk a már kiszámolt (3.26) határátmenetet, majd visszahelyettesítve a (3.29) összefüggéseket megkapjuk, hogy

$$I_4(\widetilde{f}, x, \widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2) \to \int\limits_0^{\widetilde{t}_1} \widetilde{f}_{\widetilde{t}}(x - a(\widetilde{t}_1 - \widetilde{\tau}), \widetilde{\tau})d\widetilde{\tau} + \widetilde{f}(x - a\widetilde{t}_1, 0) = \\ = \int\limits_0^{t_1} f_t(x + a(t_1 - \tau), \tau)d\tau + f(x + at_1, 0), \quad \text{ha } t_2 \to t_1 \ (d \to 0),$$

amely eredmény megegyezik azzal, amit $I_3(f, x, t_1, t_2)$-ra számoltunk a $t > 0$ esetben.

Ismét a $t_2 < t_1 < 0$ esetet vizsgálva, (3.24), (3.29) és (3.26) alapján arra jutunk, hogy

$$I_4(f, x, t_1, t_2) = I_3(\widetilde{f}, x, \widetilde{t}_1, \widetilde{t}_2) \to \int\limits_0^{t_1} f_t(x - a(t_1 - \tau), \tau)d\tau + f(x - at_1, 0), \quad \text{ha } t_2 \to t_1,$$

ez a formula pedig egybeesik a $I_4(f, x, t_1, t_2)$ határértékére vonatkozó formulával a $t > 0$ esetben, amint $t_2 \to t_1$ $(d \to 0)$.

A $v_{tt}(x, t_1)$ bal oldali derivált vizsgálata – azaz ha $0 < t_2 < t_1$ vagy $0 > t_2 > t_1$ – analóg módon kezelhető, csak a fentebbi számításokban a (t_1, t_2) párt a (t_2, t_1) párra kell cserélni.

Így a $v_{tt}(x, t)$, mint iránymenti derivált létezik, és a (3.28) formula alapján a következő:

$$v_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^t [f_t(x + a(t - \tau), \tau) + f_t(x - a(t - \tau), \tau)]d\tau + \\ + \frac{f(x + at, 0) + f(x - at, 0)}{2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{3.30}$$

Ez a (3.30) reprezentáció egyben a $v_{tt}(x, t)$ folytonosságát is mutatja amennyiben $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ vagy $(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$, továbbá azt, hogy

$$v_{tt} \to f(x, 0), \qquad x \in \mathbb{R},\ t \to 0 + 0 \text{ vagy } t \to 0 - 0.$$

Azaz v_{tt} a $t = 0$ egyenes mentén is létezik és folytonos.

A v_{xt} vegyes parciális deriváltra a (3.9) formulából kiindulva azt kapjuk, hogy

$$\frac{v_x(x,t_2) - v_x(x,t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2a}(I_3(f,x,t_1,t_2) - I_4(f,x,t_1,t_2)) \tag{3.31}$$

ugyanazon I_3 és I_4 kifejezésekkel, amiket (3.23) és (3.24) formulák adnak meg, és amelyek határértékét már kiszámoltuk. Így a v_x függvény t szerinti deriváltja a következő:

$$\begin{aligned} v_{xt}(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t [f_t(x+a(t-\tau),\tau) - f_t(x-a(t-\tau),\tau)]d\tau + \\ + \frac{f(x+at,0) - f(x-at,0)}{2a}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Hasonlóképpen járhatunk el a v_{tx} parciális derivált esetén. Ekkor a (3.10) formulának köszönhetően

$$\frac{v_t(x_2,t) - v_t(x_1,t)}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}(I_1(f,x_1,x_2,t) + I_2(f,x_1,x_2,t)), \tag{3.33}$$

ahol I_1 és I_2 kifejezés megegyezik (3.14)-mal és (3.15)-gyel. Így a v_t függvény x szerinti deriváltja

$$\begin{aligned} v_{tx}(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t [f_t(x+a(t-\tau),\tau) - f_t(x-a(t-\tau),\tau)]d\tau + \\ + \frac{f(x+at,0) - f(x-at,0)}{2a}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

A (3.32) és (3.34) formulák alapján továbbá $v_{xt} = v_{tx} \to 0$, ha $t \to 0$, ami összhangban van azzal, hogy

$$v_{tx}|_{t=0} = ((v_t)|_{t=0})_x = 0,$$

$$v_{xt}|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{v_x(x,t) - v_x(x,0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0} v_{xt}(x,\theta t) = 0, \qquad \theta \in (0,1).$$

Ez bizonyítja, hogy $v_{xt}, v_{tx} \in C(\mathbb{R}^2)$.

Összegezve az eddigieket, beláttuk, hogy a v függvény deriváltjai léteznek és folytonosak a másodrendűekig bezárólag. Továbbá ha a (3.21) és (3.30) kifejezéseket visszahelyettesítjük, akkor látható, hogy a (3.8) formulával megadott v függvény ki is elégíti a (3.2) egyenletet. A v függvény a (3.1)–(3.3) probléma egyetlen megoldása, hiszen két megoldás különbsége kielégíti a (3.1), (3.3) feltételeket és a homogén (3.2) egyenletet, ami az azonosan nulla függvény. □

Természetesen a 3.1. Tétel kimondása során nem szükséges a $t = 0$ kezdő időpontra szorítkoznunk.

3.6. Következmény. *Ha $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ és az f_t, mint az f függvény t szerinti deriváltja létezik és $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$, akkor a (3.1), (3.2) és*

$$v|_{t=t_0} = v_t|_{t=t_0} \equiv 0$$

kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható a $C^2(\mathbb{R}^2)$-beli függvények körében, és ez a $v(x,t) = v(x,t,t_0)$ megoldás felírható a következő alakban:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{t_0}^{t} \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \right) d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő transzformációkat:

$$\breve{v}(x,t) = v(x,t+t_0), \qquad \breve{f}(x,t) = f(x,t+t_0).$$

Ekkor a következmény állítása azonnal következik a 3.1. Tételből, amint megoldjuk a (3.1)–(3.3) kezdeti érték problémát ezen $\breve{v}$ és $\breve{f}$ függvényekkel. □

3.7. Megjegyzés. Megemlítjük még, hogy a 3.1. Tétel (és így az azt felhasználó 4. Fejezetbeli tételek is) igaz marad akkor is, ha

$$f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2), \quad f_\nu(x,t) := \frac{\partial f}{\partial \nu} \in C(\mathbb{R}^2),$$

ahol f_ν az f függvénynek egy $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ irány szerinti deriváltja, feltéve, hogy ν transzverzális a karakterisztikákhoz. Ennek a bizonyítása hosszadalmas számolást igényel, ami számos részesetre bomlik a ν iránytól függően. Viszont a v megoldás másodrendű deriváltjaira a megengedett ν irányok mindegyike esetén igazak a következő előállítások:

$$v_{xx}(x,t) = \frac{1}{2a} \left[\frac{\nu_2 f(x+at,0) - \nu_2 f(x,t) + \int_0^t f_\nu(x+a(t-\tau),\tau) d\tau}{\nu_1 + a\nu_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\nu_2 f(x-at,0) - \nu_2 f(x,t) + \int_0^t f_\nu(x-a(t-\tau),\tau) d\tau}{a\nu_2 - \nu_1} \right],$$

$$v_{tx}(x,t) = v_{xt}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\nu_2 f(x+at,0) - \nu_2 f(x,t) + \int\limits_0^t f_\nu(x+a(t-\tau),\tau)d\tau}{\nu_1 + a\nu_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu_2 f(x-at,0) - \nu_2 f(x,t) + \int\limits_0^t f_\nu(x-a(t-\tau),\tau)d\tau}{a\nu_2 - \nu_1}\right],$$

$$v_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\frac{a\nu_2 f(x+at,0) + \nu_1 f(x,t) + a\int\limits_0^t f_\nu(x+a(t-\tau),\tau)d\tau}{\nu_1 + a\nu_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a\nu_2 f(x-at,0) - \nu_1 f(x,t) + a\int\limits_0^t f_\nu(x-a(t-\tau),\tau)d\tau}{a\nu_2 - \nu_1}\right].$$

Ezen eredmény részletes bizonyítását egy későbbi, előkészületben lévő dolgozatban szeretnénk közölni.

Végezetül megfogalmazunk egy sejtést.

Sejtés. *A 3.1. Tétel általánosítható arra az esetre is, ha az*

$$f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2), \quad f_\nu(x,t) := \frac{\partial f}{\partial \nu} \in C(\mathbb{R}^2)$$

feltételben a karakterisztikákra transzverzális ν irány az (x,t) változó folytonos függvénye, feltéve, hogy a $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ irányok mindegyike egy és ugyanazon szektorba esik az alábbi három közül:

$$0 \le \frac{\nu_2}{\nu_1} < \frac{1}{a}, \qquad -\frac{1}{a} < \frac{\nu_2}{\nu_1} \le 0, \qquad \left|\frac{\nu_2}{\nu_1}\right| > \frac{1}{a}.$$

4. fejezet

Klasszikus kitűzésű megfigyelési problémák

Ebben a fejezetben a végtelen rezgő húrral kapcsolatos megfigyelési problémákat tárgyalunk klasszikus kitűzés esetén.

4.1. A végtelen rezgő húr problémája külső erőhatás mellett

Tekintsük a következő kezdeti érték problémát:

$$u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2) \tag{4.1}$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0, \tag{4.2}$$

$$u|_{t=t_0}(x) = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t_0}(x) = \psi(x), \qquad \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi \in C^1(\mathbb{R}). \tag{4.3}$$

Amennyiben (az előző fejezetnek megfelelően) $f(x,t)$ folytonos, és az f_t iránymenti derivált létezik és folytonos, akkor a (4.1)–(4.3) kezdeti érték probléma u megoldása létezik, egyértelmű és folytonosan függ a kezdeti adatoktól (azaz $u(x,t)$ klasszikus megoldás).

Ekkor az u megoldást $u_1 + u_2$ alakban állítjuk elő:

$$
\begin{aligned}
u = u_1 + u_2 = &\left[\frac{\varphi(x - a(t - t_0)) + \varphi(x + a(t - t_0))}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds\right] + \\
&+\frac{1}{2a}\int_{t_0}^{t}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

ahol u_1 a homogén rezgő húr megoldása (φ, ψ) kezdeti függvények mellett, melyet a közismert D'Alembert formula szolgáltat; u_2 pedig az inhomogén rezgő húr megoldása homogén kezdeti feltételekkel, mely a Duhamel-elvből származik. Szeretnénk felhívni rá a figyelmet, hogy a (4.4) formula tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ időpontban megadja a megoldást, azaz időben előre és visszafele haladva is működik. Továbbá lényeges, hogy ha ismerjük a végtelen rezgő húr teljes állapotát (pozició és sebesség) valamely időpontban, akkor annak segítségével már a teljes rezgés leírható. Ugyanis tegyük fel, hogy a g_1, g_2 függvények ismertek, amelyekre

$$
u|_{t=T_0}(x) = g_1(x), \quad u_t|_{t=T_0}(x) = g_2(x), \qquad g_1 \in C^2(\mathbb{R}),\ g_2 \in C^1(\mathbb{R}),
\tag{4.5}
$$

azaz a T_0 időpontban g_1 és g_2 írja le a rezgő húr helyzetét, illetve sebességét. Ekkor ha tekintjük a $w(x,t) = u(x, t + (T_0 - t_0))$ eltolást, akkor a w függvény a következő probléma klasszikus megoldása:

$$
w_{tt}(x,t) - a^2 w_{xx}(x,t) = f(x, t + (T_0 - t_0)), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0,
$$

$$
w|_{t=t_0} = g_1(x), \quad w_t|_{t=t_0} = g_2(x), \qquad g_1 \in C^2(\mathbb{R}),\ g_2 \in C^1(\mathbb{R}).
$$

Erre alkalmazva a (4.4) reprezentációt azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = w(x, t - (T_0 - t_0)) = &\frac{g_1(x - a(t - T_0)) + g_1(x + a(t - T_0))}{2} + \\
&+\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-T_0)}^{x+a(t-T_0)} g_2(s)ds + \frac{1}{2a}\int_{T_0}^{t}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

mellyel sikeresen megadtuk az $u(x,t)$ függvényt. Emellett ebbe a (4.6) formulába, illetve a deriváltjába behelyettesítve a t_0 kezdeti időpontot megkapjuk a kezdeti függvényeket is, amelyek a következők:

$$\varphi(x) = u|_{t=t_0} = \frac{g_1(x - a(t_0 - T_0)) + g_1(x + a(t_0 - T_0))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t_0-T_0)}^{x+a(t_0-T_0)} g_2(s)ds +$$
$$+\frac{1}{2a} \int\limits_{T_0}^{t_0} \left(\int\limits_{x-a(t_0-\tau)}^{x+a(t_0-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau,$$

$$\psi(x) = u_t|_{t=t_0} =$$
$$\frac{a[g_1'(x + a(t_0 - T_0)) - g_1'(x - a(t_0 - T_0))]}{2} + \frac{g_2(x + a(t_0 - T_0)) + g_2(x - a(t_0 - T_0))}{2} +$$
$$+\frac{1}{2} \int\limits_{T_0}^{t_0} [f(x + a(t_0 - \tau), \tau) + f(x - a(t_0 - \tau), \tau)] d\tau.$$

A továbbiakban a megfigyelési probléma megoldása során a célunk a rezgő húr teljes állapotának megadása lesz a két megfigyelési időpont: $t_1,\ t_2$ egyikében, pl. $t = t_1$-ben. Amennyiben ez sikerül, akkor egyben a megfigyelési problémát is megoldottuk, hiszen ekkor a fentiek miatt egyszerűen meg tudjuk kapni a keresett kezdeti függvényeket a $t = t_0$ időpontban is. Így a számolások egyszerűsítésének céljából az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy a kezdeti időpont és az egyik megfigyelési időpont egybeesik, azaz $t_0 = t_1$.

A 4. Fejezet további részében az

$$\begin{aligned} A_1(x)u|_{t=t_1} + B_1(x)u_t|_{t=t_1} &= f_1(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ A_2(x)u|_{t=t_2} + B_2(x)u_t|_{t=t_2} &= f_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

megfigyelési feltétel segítségével kitűzött megfigyelési problémát fogjuk megvizsgálni, ahol az $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ függvényegyütthatók és az $f_1,\ f_2$ megfigyelt állapotok ismertek.

4.2. Egy speciális eset

Ebben az alfejezetben azon azon speciális esetet tárgyaljuk, amikor $B_1 \equiv B_2 \equiv 0$. Ekkor a következő állítást tudjuk megfogalmazni.

4.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (4.7) *feltételben*

(i) $$A_i(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad B_i \equiv 0, \quad A_i,\ f_i \in C^2(\mathbb{R}), \qquad i = 1{,}2.$$

Továbbá legyen $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ és az f_t, mint az f függvény t irány szerinti deriváltja *létezzen és $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$. Ekkor a (4.1)–(4.3) problémához tartozó, (4.7) megfigyelési feltételű problémának létezik $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldása.*

Amennyiben a (4.7) feltételben

$$\text{(ii)} \qquad B_i \equiv 0, \quad A_i \not\equiv 0, \quad A_i,\ f_i \in C^2(\mathbb{R}), \qquad i = 1{,}2,$$

akkor a (4.1)–(4.3), (4.7) problémának pontosan akkor létezik $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldása, ha f_1/A_1 és f_2/A_2 értelmezhetőek, mint $C^2(\mathbb{R})$ függvények (azaz f_i/A_i, $i = 1{,}2$ kiterjeszthetőek a valós számok halmazára, mint C^2 függvények).

Bizonyítás. Az (i) megkötés mellett a (4.7)-ben szereplő megfigyelési feltételek a

$$\varphi(x) = \frac{f_1(x)}{A_1(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

$$\frac{\varphi(x-T)+\varphi(x+T)}{2} + \frac{\Psi(x+T)-\Psi(x-T)}{2a} + v(x,t_2) = \frac{f_2(x)}{A_2(x)}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{4.9}$$

alakot nyerik, ahol az áttekinthetőség kedvéért a

$$T = a(t_2 - t_1), \qquad \Psi(x) = \int_0^x \psi(s)ds, \qquad v(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{t_1}^{t}\left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau$$

jelöléseket használtuk. Figyelembe vettük továbbá, hogy $t_0 = t_1$, így az első megfigyelési feltétel valójában a húr kezdőállapotára vonatkozik, így egyszerű osztással megkaphattuk (4.8)-at. A (4.9) formula pedig a második megfigyelési feltételből következik a (4.4) előállítás felhasználásával a $t = t_2$ időpontra.

Amellett, hogy azonnal megkaptuk a keresett φ kezdeti pozíciót, a (4.8) formulából az is látszik, hogy $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, így csak a $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ kezdősebesség meghatározása van hátra. Ehhez behelyettesítjük a (4.8) formulát (4.9)-be, ahonnan átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\Psi(x+T)-\Psi(x-T) = 2a\frac{f_2(x)}{A_2(x)} - a\frac{f_1(x-T)}{A_1(x-T)} - a\frac{f_1(x+T)}{A_1(x+T)} - 2av(x,t_2) := h(x), \tag{4.10}$$

ahol $h(x)$ ismert függvény és $h(x) \in C^2(\mathbb{R})$.

Megmutatjuk, hogy a (4.10) egyenletnek létezik $\Psi \in C^2(\mathbb{R})$ megoldása. Ahhoz, hogy egy $\Psi \in C^2$ függvény teljesítse (4.10)-et az $x = 0$ pontban, a következő három egyenlőségnek kell teljesülnie:

$$\Psi(T) - \Psi(-T) = h(0), \tag{4.11}$$

$$\Psi'(T) - \Psi'(-T) = h'(0), \tag{4.12}$$

$$\Psi''(T) - \Psi''(-T) = h''(0). \tag{4.13}$$

Válasszunk egy tetszőleges $\Psi \in C^2[-T,T]$ függvényt, ami teljesíti (4.11)–(4.13)-at. A (4.10) egyenlet alapján bármely $\Psi(x)$ függvényérték rekurzívan meghatározható az $x-2T$, illetve $x+2T$ pontokban felvett értékéből:

$$\Psi(x+T) = \Psi(x-T) + h(x), \qquad x \in [0,2T], \tag{4.14}$$

$$\Psi(x-T) = \Psi(x+T) - h(x), \qquad x \in [-2T,0]. \tag{4.15}$$

Ha eltoljuk az argumentumot, (4.14) és (4.15) rendre ekvivalensek a következő formulákkal:

$$\Psi(x) = \Psi(x-2T) + h(x-T), \qquad x \in [T,3T],$$

$$\Psi(x) = \Psi(x+2T) - h(x+T), \qquad x \in [-3T,-T].$$

Ezzel a választott $\Psi \in C^2[-T,T]$ függvényt kiterjesztettük a $[-3T,3T]$ intervallumra. Ezt ismételve, azaz $2T$ értékkel lépdelve mindkét irányba, a következőeket nyerjük:

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \Psi(x-2nT) + \sum_{k=1}^{n} h(x-(2k-1)T), \\ x \in I_n := [(2n-1)T,(2n+1)T],\ n \in \mathbb{N},\end{gathered} \tag{4.16}$$

$$\begin{gathered}\Psi(x) = \Psi(x+2nT) - \sum_{k=1}^{n} h(x+(2k-1)T), \\ x \in I_{-n} := [(-2n-1)T,(-2n+1)T],\ n \in \mathbb{N}.\end{gathered} \tag{4.17}$$

Mivel a $\Psi(x)$ függvényt C^2-belinek választottuk a $[-T,T]$ intervallumon, továbbá $h \in C^2(\mathbb{R})$, ezért az így kapott $\Psi(x)$ függvény a $2T$ hosszúságú I_n és I_{-n} intervallumok belsejében nyilvánvalóan jól definiált és C^2-beli.

Bebizonyítjuk, hogy a $\Psi(x)$ függvény az $x=(2n+1)T$, $n \in \mathbb{Z}$, csatlakozási pontokban is jól definiált és kellőképpen sima.

Tetszőleges $0 < n \in \mathbb{Z}$ esetén vizsgáljuk meg a Ψ függvényt a $x = (2n+1)T$ csatlakozási pontban. A folytonosság igazolásához írjuk fel ebben a pontban a féloldali határértékeket a (4.16) formula segítségével:

$$\lim_{r\to 0^+} \Psi((2n+1)T - r) = \lim_{r\to 0^+} \left(\Psi(T-r) + \sum_{k=1}^{n} h(2kT - r) \right),$$

$$\lim_{r\to 0^+} \Psi((2n+1)T + r) = \lim_{r\to 0^+} \left(\Psi(-T+r) + \sum_{k=0}^{n} h(2kT + r) \right).$$

Láthatjuk, hogy a

$$\lim_{r\to 0^+} \Psi((2n+1)T + r) = \lim_{r\to 0^+} \Psi((2n+1)T - r)$$

egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a (4.11) feltétel fennáll. A (4.17) formula segítségével hasonlóképpen kaphatjuk meg, hogy (4.11) szükséges és elegendő feltétele annak is, hogy $\Psi(x)$ folytonos az $x = (2n+1)T,\ 0 > n \in \mathbb{Z}$ pontokban.

Amennyiben deriváljuk a (4.16) és (4.17) formula mindkét oldalát x szerint, az előbbihez hasonló gondolatmenet azt adja, hogy

$$\lim_{r\to 0^+} \Psi'((2n+1)T + r) = \lim_{r\to 0^+} \Psi'((2n+1)T - r),$$

azaz $\Psi(x)$ folytonosan differenciálható az $x = (2n+1)T,\ n \in \mathbb{Z}$ pontokban pontosan akkor, ha (4.12) teljesül.

Ha kétszer deriváljuk (4.16) és (4.17) mindkét oldalát, majd vesszük a féloldali határértékeket az $x = (2n+1)T$ pontokban akkor pedig arra jutunk, hogy

$$\lim_{r\to 0^+} \Psi''((2n+1)T + r) = \lim_{r\to 0^+} \Psi''((2n+1)T - r)$$

pontosan akkor teljesül, ha (4.13) fennáll. Ez pedig az adott pontban vett kétszer folytonosan differenciálhatóságot jelenti.

Mivel Ψ-t úgy választottuk, hogy (4.11)–(4.13) fennálljon, így kaptunk egy olyan $\Psi \in C^2(\mathbb{R})$ függvényt, mely kielégíti a (4.10) egyenlőséget. Vagyis a (4.8) által meghatározott $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, és a $\psi := \Psi' \in C^1(\mathbb{R})$ kezdeti függvényekkel a (4.4) formula segítségével előállított u megoldása a (4.2) húrrezgésegyenletnek kielégíti a (4.7) megfigyelési feltételt az (i) megkötés mellett, azaz megoldja a megfigyelési problémát. A megoldás nem egyértelmű, hiszen a konstrukció során a Ψ függvényt (és ezzel ψ-t is) a $[-T, T]$ intervallum belsejében tetszőlegesen választhattuk.

A (ii) megkötés mellett a 4.1. Tétel bizonyítása a következő. Ha valamely $x^* \in \mathbb{R}$ esetén $A_1(x^*) = 0$ vagy $A_2(x^*) = 0$, akkor a (4.8), (4.9) egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy rendre $f_1(x^*) = 0$ vagy $f_2(x^*) = 0$. Amennyiben ez a feltétel teljesül, és az $f_1(x)/A_1(x)$, $f_2(x)/A_2(x)$ függvényeket rendre az $x \in \mathcal{M}(A_1)$, $x \in \mathcal{M}(A_2)$ helyeken értelmezzük, ahol

$$A_1(x) \neq 0, \quad \text{ha } x \in \mathcal{M}(A_1), \qquad A_2(x) \neq 0, \quad \text{ha } x \in \mathcal{M}(A_2),$$

akkor $f_1(x)/A_1(x)$ és $f_2(x)/A_2(x)$ rendre kiterjeszthető a $\mathcal{M}(A_1)$, $\mathcal{M}(A_2)$ halmazokról $\mathbb{R}$-re, mint $C^2(\mathbb{R})$ függvények. Ekkor a bizonyítás (i) megkötéshez tartozó részét megismételve megkapjuk a keresett φ, ψ (és velük együtt az u) függvényeket.

A (ii) megkötéshez tartozó eset például ha az A_1, A_2 együtthatóknak izolált zéróhelyei vannak, vagy ha egy intervallumon azonosan nullák. □

4.2. Megjegyzés. *Egy másik lehetőség a* (4.10) *egyenlet megoldására, ha a* Ψ *függvényt nem a* $[-T, T]$ *intervallumon választjuk tetszőlegesnek, hanem olyan diszjunkt* $[c_i, d_i]$, $i \in \mathbb{N}$ *intervallumok unióján adjuk meg,* $\Psi|_{[c_i,d_i]} \equiv \Psi_i$, *amelyekre léteznek olyan* S_i, *a* (4.16), (4.17)*-nek alávetett eltolás transzformációk, hogy az* $\{S_i\Psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *rendszer diszjunkt tagokból áll (a grafikonok csatlakozási pontjaitól eltekintve), és*

$$\bigcup S_i\Psi_i \in C^2([-T, T]), \qquad \textit{és ez a függvény kielégíti } (4.11)\text{–}(4.13)\textit{-at.}$$

A 4.1. Tételhez hasonló állítások tehetők akkor, amikor a (4.7) megfigyelési feltételben szereplő A_1, A_2, B_1, B_2 együtthatók közül nem a B_1, B_2 pár azonosan egyenlő nullával. Mivel a számolás menete a fentebbihez hasonló, ezért itt a részletezésétől eltekintünk, de a [18] cikkben megtalálhatóak azok az esetek, amikor $B_1 \equiv A_2 \equiv 0$ vagy $A_1 \equiv A_2 \equiv 0$.

Mielőtt rátérnénk a végtelen húrra vonatkozó általános esetre, azaz amikor nem tűnnek el az együtthatók, terjesszük ki a 4.1. Tétel eredményét félvégtelen húrokra. Ehhez a tükrözések módszerét használjuk.

4.3. Kiterjesztés félvégtelen húrra

4.3.1. A rögzített végpont esete

Rögzített végpontú félvégtelen húr esetén páratlan kiterjesztésekre lesz szükségünk, ezért tekintsük azt az esetet, amikor a paritások a következőek:

- a (4.2) húrrezgésegyenletben az $f(x, t)$ külső erő páratlan függvény az $x = 0$ egyenesre nézve

- a (4.7) feltételben az $f_1(x)$, $f_2(x)$ megfigyelt részleges állapotok páratlan függvények, az $A_1(x)$, $A_2(x)$ együtthatók pedig páros függvények az $x = 0$ pontra nézve
- a 4.1. Tétel bizonyítása során a $\Psi(x)$ függvényt válasszuk párosnak a $[-T, T]$ intervallumon.

Ekkor a konstruált $\Psi(x)$ páros lesz az $x = 0$ pontra az egész számegyenest tekintve is. Az ehhez a Ψ függvényhez kapcsolódó u megoldása a megfigyelési problémának így pedig páratlan lesz.

Ugyanis tekintsük a (4.16), (4.17) formulákat, és legyen $x \in I_n$. Ekkor

$$\begin{aligned}\Psi(x) - \Psi(-x) &= \Psi(x - 2nT) - \Psi(-(x - 2nT)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} h(x - (2k-1)T) + \sum_{k=1}^{n} h(-(x - (2k-1)T)).\end{aligned} \tag{4.18}$$

Mivel $v(x, t)$ páratlan amennyiben $f(x, t)$ páratlan az $x = 0$ egyenesre, és $f_1/A_1, f_2/A_2$ is páratlan függvények, így a (4.10)-ben definiált $h(x)$ függvény is páratlan a valós számok halmazán az $x = 0$ pontra nézve. Továbbá $\pm(x - 2nT) \in [-T, T]$ és Ψ páros az $x = 0$ pontra a $[-T, T]$ intervallumon, ezért azt kapjuk, hogy (4.18) jobb oldala 0, azaz Ψ páros a teljes számegyenest tekintve. Ebből pedig az következik, hogy a $\varphi = f_1/A_1$, $\psi = \Psi'$ és $f(x, t)$ páratlan függvényekből a (4.4) formula segítségével előállított u megoldás szintén páratlan.

Ezenkívül a (4.11), (4.12) és (4.13) feltételek egyszerűsíthetőek amennyiben az előbbinek megfelelő paritású függvényeket tekintünk. Ahogy említettük, ekkor $h(x) \in$ $\in C^2(\mathbb{R})$ páratlan, ami egyben azt is jelenti, hogy $h(0) = 0$, így pedig (4.11) automatikusan fennáll, hiszen Ψ páros. Mivel Ψ' páratlan, így azt kapjuk, hogy

$$\Psi'(T) = \frac{h'(0)}{2}. \tag{$\widetilde{4.12}$}$$

A Ψ'' függvény ismét páros, és ez a $h''(0) = 0$ egyenlőséggel együtt azt jelenti, hogy ekkor (4.13) is teljesül.

Tekintsük a félvégtelen ($x \geq 0$) rezgő húr egyenletét:

$$u(x, t) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}), \tag{4.19}$$

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = g(x, t), \qquad (x, t) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad a > 0, \tag{4.20}$$

ahol

$$g(x,t) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}), \quad g_t(x,t) \in C([0,\infty) \times \mathbb{R}). \tag{4.21}$$

Legyen a végpont rögzített:

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4.22}$$

és legyenek a megfigyelt részleges állapotok a következőek:

$$u|_{t=t_1} = g_1(x), \quad u|_{t=t_2} = g_2(x), \qquad g_1, g_2 \in C^2([0,\infty)). \tag{4.23}$$

4.3. Tétel. *A* (4.19)–(4.23) *megfigyelési problémának létezik* u *megoldása minden olyan* g_1, g_2 *és* g *függvények esetén, amelyek teljesítik a következő illeszkedési feltételt:*

$$g(0,t) = g_1(0) = g_1''(0) = g_2(0) = g_2''(0) = 0. \tag{4.24}$$

A megoldás nem egyértelmű, viszont bármely u *megoldás felírható a következő alakban:*

$$u(x,t) = \frac{f_1(x - a(t-t_1)) + f_1(x + a(t-t_1))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-t_1)}^{x+a(t-t_1)} \psi(s)ds +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \right) d\tau,$$

ahol a jobb oldalt megszorítjuk $x \geq 0$*-ra. Az* f_1 *és* f *függvények a* g_1 *és* g *függvények páratlan kiterjesztései a valós számok halmazára az* $x = 0$ *pontra, illetve egyenesre nézve, a*

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(s)ds \in C^2(\mathbb{R})$$

függvény pedig tetszőlegesen választható a $[0,T]$ *intervallumon, feltéve, hogy* $\Psi'(0) = 0$ *és kielégíti* (4.12)*-őt.*

Bizonyítás. Először kiterjesztjük páratlanul a g, g_1 és g_2 függvényeket, azaz legyen

$$f(x,t) := \begin{cases} g(x,t), & \text{ha } x \geq 0, \\ -g(-x,t), & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_1(x) := \begin{cases} g_1(x), & \text{ha } x \geq 0, \\ -g_1(-x), & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) := \begin{cases} g_2(x), & \text{ha } x \geq 0, \\ -g_2(-x), & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A (4.24) feltételnek köszönhetően $f \in C(\mathbb{R}^2)$, $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$ és $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R})$.

Az ezekkel az f, f_1, f_2 függvényekkel kitűzött (4.1), (4.2), (4.3), (4.7) (ahol $A_1 \equiv \equiv A_2 \equiv 1$, $B_1 \equiv B_2 \equiv 0$) megfigyelési problémát a 4.1. Tétel megoldja. A 4.1. Tétel bizonyításában szereplő $\Psi \in C^2$ függvényt a $[-T, T]$ intervallumon párosnak választjuk, és ahogy láttuk ekkor a kapott megoldás páratlan. Ennek a megoldásnak a $[0, \infty) \times \mathbb{R}$-ra való megszorítása szolgáltatja a 4.3. Tételbeli probléma u megoldását. □

4.3.2. A szabad végpont esete

Ebben a szakaszban tekintsük azt a speciális esetet, amikor:

- a (4.2) egyenletben $f(x,t)$ páros az $x = 0$ egyenesre nézve
- a (4.7) feltételben $f_1(x)$, $f_2(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ páros függvények az $x = 0$ pontra nézve
- a 4.1. Tétel bizonyításában szereplő $\Psi(x)$ függvényt pedig válasszuk páratlannak a $[-T, T]$ intervallumon.

Ekkor a 4.1. Tétel bizonyítása során konstruált $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}$ függvény páratlan lesz az $x = 0$ pontra nézve a teljes számegyenest tekintve is. Ebből pedig az következik, hogy az ehhez a $\Psi(x)$ függvényhez tartozó u megoldása a (4.1), (4.2), (4.3), (4.7) megfigyelési problémának páros lesz.

Ennek igazolásához adjuk össze a (4.16) és (4.17) formula megfelelő oldalait:

$$\begin{aligned} &\Psi(x) + \Psi(-x) = \Psi(x - 2nT) + \Psi(-(x - 2nT)) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} h(x - (2k-1)T) - \sum_{k=1}^{n} h(-(x - (2k-1)T)). \end{aligned} \tag{4.25}$$

A $\pm(x - 2nT)$ érték $[-T, T]$ közötti, ott pedig a $\Psi(x)$ függvényt páratlannak választottuk, továbbá a paritásokra vonatkozó megkötéseink miatt a (4.10)-ben definiált $h(x)$ függvény is páros. Ezek következtében a (4.25) jobb oldala 0, tehát $\Psi(x)$ páratlan a valós számok halmazán az $x = 0$ pontra nézve. Ekkor a (4.4) formula, és a páros f, illetve páros $\varphi = f_1/A_1$, $\psi = \Psi'$ függvények segítségével előállított u függvény páros lesz.

A (4.11), (4.12) és (4.13) feltételek a fentebbi paritású függvények esetén a következő alakra egyszerűsödnek:

$$\widehat{(4.11)} \qquad \Psi(T) = \frac{h(0)}{2},$$

$$\widehat{(4.13)} \qquad \Psi''(T) = \frac{h''(0)}{2},$$

miközben a (4.12) feltétel $h'(0) = 0$ és Ψ' párossága miatt automatikusan teljesül.

Ebben a szakaszban Neumann peremérték feltétel mellett tekintjük a félvégtelen rezgő húrt, azaz

$$u_x(0,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{4.26}$$

4.4. Tétel. *A (4.19), (4.20), (4.21), (4.23), (4.26) megfigyelési problémának létezik u megoldása minden olyan g_1 és g_2 függvények mellett, melyek kielégítik a következő illeszkedési feltételt:*

$$g_1'(0) = g_2'(0) = 0. \tag{4.27}$$

A megoldás nem egyértelmű, viszont felírható a következő alakban:

$$u(x,t) = \frac{f_1(x - a(t-t_1)) + f_1(x + a(t-t_1))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-t_1)}^{x+a(t-t_1)} \psi(s)ds,$$
$$+\frac{1}{2a} \int\limits_{t_1}^{t} \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi \right) d\tau,$$

ahol a jobb oldalt $x \geq 0$-ra tekintjük. Itt az f_1 függvény g_1, az $f(x,t)$ függvény pedig $g(x,t)$ páros kiterjesztése az $x = 0$ pontra, illetve egyenesre nézve. A

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(s)ds \in C^2(\mathbb{R})$$

függvény tetszőlegesen választható a $[0,T]$ intervallumon úgy, hogy teljesítse a $\Psi(0) = \Psi''(0) = 0$ egyenlőségeket, továbbá $\widehat{(4.11)}$-et és $\widehat{(4.13)}$-at.

Bizonyítás. Ennek a problémának a megoldásához is a tükrözések módszerét fogjuk használni, a 4.1. Tétel állítását alapul véve. Terjesszük ki a g, a g_1 és a g_2 függvényeket párosan, azaz legyen

$$f(x,t) := \begin{cases} g(x,t), & \text{ha } x \geq 0, \\ g(-x,t), & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$f_1(x) := \begin{cases} g_1(x), & \text{ha } x \geq 0, \\ g_1(-x), & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$f_2(x) := \begin{cases} g_2(x), & \text{ha } x \geq 0, \\ g_2(-x), & \text{ha } x < 0, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Ezután a 4.1. Tétel segítségével megoldjuk a (4.1), (4.2), (4.3), (4.7) ($A_1 \equiv A_2 \equiv$ $\equiv 1$, $B_1 \equiv B_2 \equiv 0$ együtthatók mellett) megfigyelési problémát. A Ψ függvényt a megoldás megkonstruálása során a $[-T, T]$ intervallumon páratlannak választjuk, és ahogy láttuk ekkor a kapott megoldás páros lesz az $x = 0$ pontra nézve. Ezt a megoldást megszorítva $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ halmazra megkapjuk a 4.4. Tételbeli probléma u megoldását.

□

4.4. Az általános megfigyelési feltételek esete

Térjünk rá arra az esetre, amikor a megfigyelési feltételben az együtthatók nemeltűnőek, azaz amikor valóban a rezgő húr pozíciójának és sebességének egy lineáris kombinációját figyeljük meg, és ez alapján próbáljuk megtalálni a kezdeti helyzetet és sebességet.

4.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* (4.7) *megfigyelési feltételben*

$$A_1(x), A_2(x), B_1(x), B_2(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ f_1,\ f_2 \in C^1(\mathbb{R}).$$

Ekkor a (4.1)–(4.3), (4.7) *megfigyelési problémának létezik megoldása.*

Bizonyítás. A (4.1), (4.2) összes megoldása előáll (4.4) alakban, amit ha t szerint deriválunk azt kapjuk, hogy

$$u_t(x,t) = a\frac{\varphi'(x+a(t-t_0)) - \varphi'(x-a(t-t_0))}{2} + \\ + \frac{\psi(x+a(t-t_0)) + \psi(x-a(t-t_0))}{2} + v_t(x,t). \tag{4.28}$$

ahol

$$v(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{t_1}^{t}\left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi\right)d\tau.$$

Helyettesítsük be a $t = t_2$ időpontot a (4.4) és (4.28) reprezentációkba, amiket felhasználva a (4.7) megfigyelési feltételre a következő alakot nyerjük:

$$A_1(x)\varphi(x) + B_1(x)\psi(x) = f_1(x), \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} &A_2(x)\left(\frac{\varphi(x+T)+\varphi(x-T)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-T}^{x+T}\psi(s)ds + v(x,t_2)\right) + \\ &+B_2(x)\left(a\frac{\varphi'(x+T)-\varphi'(x-T)}{2} + \frac{\psi(x+T)+\psi(x-T)}{2} + v_t(x,t_2)\right) = f_2(x), \end{aligned} \tag{4.30}$$

ahol a $T = a(t_2 - t_1)$ jelölést használjuk az átláthatóság kedvéért. A (4.29) egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{f_1(x)}{B_1(x)} - \frac{A_1(x)}{B_1(x)}\varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \psi'(x) &= \left(\frac{f_1(x)}{B_1(x)}\right)' - \left(\frac{A_1(x)}{B_1(x)}\right)'\varphi(x) - \frac{A_1(x)}{B_1(x)}\varphi'(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Előbb elosztjuk (4.30) mindkét oldalát az $A_2(x)$ függvénnyel, majd deriváljuk mindkét oldalt x szerint, így arra jutunk, hogy

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\varphi(x+T)+\varphi(x-T)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-T}^{x+T}\psi(s)ds + v(x,t_2)\right)' + \\ &+\left(\frac{B_2(x)}{A_2(x)}\left(a\frac{\varphi'(x+T)-\varphi'(x-T)}{2} + \frac{\psi(x+T)+\psi(x-T)}{2} + v_t(x,t_2)\right)\right)' = \\ &= \left(\frac{g_2(x)}{A_2(x)}\right)'. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Miután behelyettesítjük (4.31)-et (4.32)-be, a következő másodrendű differenciálegyenletet nyerjük a φ függvényre:

$$\begin{aligned} &D_1(x)\varphi''(x+T) + D_2(x)\varphi'(x+T) + D_3(x)\varphi(x+T) = \\ &= E_1(x)\varphi''(x-T) + E_2(x)\varphi'(x-T) + E_3(x)\varphi(x-T) + h(x), \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{4.33}$$

ahol az $E_i(x), D_i(x)$, $i = 1{,}2{,}3$ együtthatók és a $h(x)$ függvény ismertek minden $x \in$ $\in \mathbb{R}$ számra. A pontos formula az $E_i(x), D_i(x)$, $i = 1{,}2{,}3$ együtthatókra és $h(x)$-re a bizonyítás szempontjából nem lényeges ugyan, de a következő alakban lehet kifejezni őket:

$$D_1(x) = E_1(x) = \frac{aB_2(x)}{2A_2(x)} \neq 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$D_2(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{aB_2(x)}{2A_2(x)}\right)' - \frac{B_2(x)A_1(x+T)}{2A_2(x)B_1(x+T)},$$

$$E_2(x) = -\frac{1}{2} + \left(\frac{aB_2(x)}{2A_2(x)}\right)' + \frac{B_2(x)A_1(x-T)}{2A_2(x)B_1(x-T)},$$

$$D_3(x) = -\frac{A_1(x+T)}{2aB_1(x+T)} - \left(\frac{B_2(x)}{A_2(x)}\right)' \frac{A_1(x+T)}{2B_1(x+T)} - \frac{B_2(x)}{2A_2(x)} \left(\frac{A_1(x+T)}{B_1(x+T)}\right)',$$

$$E_3(x) = -\frac{A_1(x-T)}{2aB_1(x-T)} + \left(\frac{B_2(x)}{A_2(x)}\right)' \frac{A_1(x-T)}{2B_1(x-T)} + \frac{B_2(x)}{2A_2(x)} \left(\frac{A_1(x-T)}{B_1(x-T)}\right)',$$

$$h(x) := \left(-\frac{1}{a} - \left(\frac{B_2(x)}{A_2(x)}\right)'\right) \left(\frac{g_1(x+T)}{2B_1(x+T)} - \frac{g_1(x-T)}{2B_1(x-T)}\right) -$$

$$- (v(x,t_2))' - \left(\frac{B_2(x)}{A_2(x)}\right)' (v_t(x,t_2))'.$$

A 4.5. Tétel feltételei miatt ezek értelmezettek és folytonosak a valós számok halmazán, továbbá a (4.33) egyenlet főtagjának együtthatója nem 0.

A (4.33) differenciálegyenletet lépésenként fogjuk megoldani, melyhez a következő lemmát fogjuk használni.

4.6. Lemma. *Ha adott egy $x_0 \in \mathbb{R}$ és egy $\Phi_1 \in C^2([x_0 - T, x_0 + T])$ függvény úgy, hogy*

$$\begin{aligned} &D_1(x_0)\Phi_1''(x_0+T) + D_2(x_0)\Phi_1'(x_0+T) + D_3(x_0)\Phi_1(x_0+T) = \\ &= E_1(x_0)\Phi_1''(x_0-T) + E_2(x_0)\Phi_1'(x_0-T) + E_3(x_0)\Phi_1(x_0-T) + h(x_0), \end{aligned} \tag{4.34}$$

akkor létezik egy $\Phi_2 \in C^2([x_0 + T, x_0 + 3T])$, aminek a segítségével definiált

$$\varphi(x) := \begin{cases} \Phi_1(x), & \text{ha } x \in [x_0 - T, x_0 + T] \\ \Phi_2(x), & \text{ha } x \in [x_0 + T, x_0 + 3T] \end{cases}$$

függvény kielégíti a (4.33) egyenletet minden $x \in [x_0, x_0 + 2T]$ esetén, továbbá $\varphi \in$ $\in C^2([x_0 - T, x_0 + 3T])$.

Bizonyítás. A φ függvény ki fogja elégíteni (4.33)-at minden $x \in [x_0, x_0 + 2T]$-re, ha találunk hozzá olyan Φ_2 függvényt, amire

$$\begin{aligned} &D_1(x)\Phi_2''(x+T) + D_2(x)\Phi_2'(x+T) + D_3(x)\Phi_2(x+T) = \\ &= E_1(x)\Phi_1''(x-T) + E_2(x)\Phi_1'(x-T) + E_3(x)\Phi_1(x-T) + h(x) \end{aligned} \tag{4.35}$$

fennáll minden $x \in [x_0, x_0+2T]$ esetén. Ez a (4.35) egyenlet átírható a következő, Φ_2-re vonatkozó másodrendű, lineáris differenciálegyenletre:

$$\widetilde{D_1}(x)\Phi_2''(x) + \widetilde{D_2}(x)\Phi_2'(x) + \widetilde{D_3}(x)\Phi_2(x) = \widetilde{h}(x), \qquad x \in [x_0+T, x_0+3T] \tag{4.36}$$

ahol a jobb oldalon szereplő

$$\widetilde{h}(x) = E_1(x-T)\Phi_1''(x-2T) + E_2(x-T)\Phi_1'(x-2T) + E_3(x-T)\Phi_1(x-2T) + h(x-T)$$

függvény ismert és $C([x_0+T, x_0+3T])$-beli, továbbá

$$\widetilde{D_1}(x) = D_1(x-T), \quad \widetilde{D_2}(x) = D_2(x-T), \quad \widetilde{D_3}(x) = D_3(x-T).$$

Jól ismert, hogy a (4.36) típusú differenciálegyenlet egyértelműen megoldható a

$$\Phi_2(x_0+T) = \Phi_1(x_0+T), \quad \Phi_2'(x_0+T) = \Phi_1'(x_0+T) \tag{4.37}$$

kezdeti feltételek mellett és a Φ_2 megoldásra teljesül, hogy $\Phi_2 \in C^2([x_0+T, x_0+3T])$.

Az ezzel a Φ_2 függvénnyel konstruált φ függvény kielégíti (4.33)-at minden $x \in [x_0, x_0+2T]$ esetén, és nyilvánvalóan C^2 simaságú az $[x_0-T, x_0+T]$ és az $[x_0+T, x_0+3T]$ intervallumok belsejében. A (4.37) kezdeti feltételek miatt φ jól definiált és folytonosan differenciálható az x_0+T pontban, így már csak azt kell megmutatnunk, hogy a φ függvény kétszer is folytonosan differenciálható x_0+T-ben, azaz hogy

$$\lim_{r\to 0^+} \varphi''(x_0+T+r) = \lim_{r\to 0^-} \varphi''(x_0+T+r). \tag{4.38}$$

Ha használjuk φ definícióját, a tényt, hogy φ kielégíti (4.33)-at az x_0+T+r

pontokban, és hogy (4.34) fennáll, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\widetilde{D_1}(x_0+T+r)\varphi''(x_0+T+r)\right)=\lim_{r\to 0^+}\widetilde{h}(x_0+T+r)-$$
$$-\lim_{r\to 0^+}\left(\widetilde{D_2}(x_0+T+r)\varphi'(x_0+T+r)\right)-\lim_{r\to 0^+}\left(\widetilde{D_3}(x_0+T+r)\varphi(x_0+T+r)\right)=$$
$$=\widetilde{h}(x_0+T)-\widetilde{D_2}(x_0+T)\varphi'(x_0+T)-\widetilde{D_3}(x_0+T)\varphi(x_0+T)=$$
$$=\widetilde{h}(x_0+T)-\widetilde{D_2}(x_0+T)\Phi_1'(x_0+T)-\widetilde{D_3}(x_0+T)\Phi_1(x_0+T)=$$
$$=\widetilde{D_1}(x_0+T)\Phi_1''(x_0+T)=\lim_{r\to 0^-}\left(\widetilde{D_1}(x_0+T+r)\varphi''(x_0+T+r)\right).$$

□

Vegyük észre, hogy a 4.6. Lemmához hasonlóan a $\Phi_1\in C^2([x_0-T,x_0+T])$ függvényhez létezik olyan $\Phi_2\in C^2([x_0-3T,x_0-T])$, hogy

$$\varphi(x):=\begin{cases}\Phi_1(x), & \text{ha } x\in[x_0-T,x_0+T]\\ \Phi_2(x), & \text{ha } x\in[x_0-3T,x_0-T]\end{cases}$$

kielégíti a (4.33) egyenletet minden $x\in[x_0-2T,x_0]$-ra. Ez az állítás könnyedén következik (4.35) átrendezéséből.

A megfigyelési probléma megoldásához válasszunk olyan $\varphi\in C^2([-T,T])$ függvényt, amely $\varphi(\pm T)$, $\varphi'(\pm T)$, $\varphi''(\pm T)$ függvényértékeire (4.33) fennáll az $x=0$ pontban. Emellett legyen a választott $\varphi\in C^2([-T,T])$ olyan, hogy teljesül rá a

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{-T}^{T}\frac{A_1(s)}{B_1(s)}\varphi(s)ds=$$
$$=A_2(0)\left(\frac{\varphi(T)+\varphi(-T)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{-T}^{T}\frac{f_1(s)}{B_1(s)}ds+v(0,t_2)\right)+B_2(0)\left(a\frac{\varphi'(T)-\varphi'(-T)}{2}\right)+$$
$$+B_2(0)\left(\frac{f_1(T)}{2B_1(T)}-\frac{A_1(T)}{2B_1(T)}\varphi(T)+\frac{f_1(-T)}{2B_1(-T)}-\frac{A_1(-T)}{2B_1(-T)}\varphi(-T)+v_t(0,t_2)\right)-f_2(0),$$

egyenlőség, azaz a φ függvény elégítse ki a (4.30) egyenletet az $x=0$-ban. Tetszőleges $\varphi(\pm T)$, $\varphi'(\pm T)$, $\varphi''(\pm T)$ értékekhez létezik ilyen $\varphi\in C^2([-T,T])$ függvény, így ez megtehető. Ekkor a 4.6. Lemma segítségével lépésenként meg tudjuk konstruálni a $\varphi\in$ $\in C^2((-\infty,\infty))$ megoldását a (4.29), (4.32) egyenletrendszernek, ahol a hozzá tartozó ψ kezdeti függvényt a (4.31) egyenletből tudjuk kiszámolni:

$$\psi(x)=\frac{g_1(x)}{B_1(x)}-\frac{A_1(x)}{B_1(x)}\varphi(x).$$

Mivel a (4.30) is fennáll egy pontban, ezért ez a (φ,ψ) egyben a (4.29) és (4.30) egyenletrendszer megoldása is minden $x \in \mathbb{R}$ számra. Továbbá $(\varphi, \psi) \in C^2 \times C^1$, tehát ezzel a (φ, ψ) függvénypárral indított rezgő húr (mely a (4.4) reprezentációval előállítható) megoldja a (4.1), (4.2), (4.3), (4.7) megfigyelési problémát. $\square$

5. fejezet

Összefoglalás

A disszertáció húrrezgésekkel kapcsolatos megfigyelési problémák megoldhatóságával, illetve a megoldások simaságával foglalkozik.

Egy ilyen megfigyelési feladat, amikor a rezgő húr több (esetünkben 2) időpontban megfigyelt részleges állapotát ismerve kíséreljük meg leírni a teljes rezgést, vagy legalább megadni a húr olyan kezdeti pozícióját és sebességét, melyből indulva a megfigyelt állapotok előállnak.

A bevezetés után következő 2. Fejezet általánosított függvények körében kitűzött megfigyelési problémákat tárgyal. Ehhez a [3]-ban is megtalálható $D^s(S)$, $s \in \mathbb{R}$ tereket hívjuk segítségül.

Legyen adva egy $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ teljes ortonormált bázis az $L_2(S)$ térben. Tetszőleges valós s szám esetén tekintsük az $X_n(x)$ függvények által kifeszített lineáris D alteret, ahol $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $x \in \overline{S}$. Tekintsük ezen a téren a következő euklideszi normát:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x) \right\|_s := \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teljessé téve a D teret erre a normára nézve egy Hilbert teret kapunk, melyet D^s-sel jelölünk. A húrrezgésekkel kapcsolatban mi az $S = (0, l)$ intervallumot használjuk.

A 2.1. Alfejezetben egy, a Klein-Gordon egyenlettel kapcsolatos egyszerűbb megfigyelési problémát vizsgálunk. Erre vonatkozó tételünk a következő:

2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy adottak f_1, f_2 megfigyelt állapotok és t_1, t_2 megfigyelési időpontok úgy, hogy*

$$f_1 \in D^{s+2}, \quad f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

és

$$t_2 - t_1 = \frac{p}{q}\frac{2l}{a}, \qquad p,\ q \in \mathbb{N},$$

ahol p és q relatív prímek. Továbbá tegyük fel, hogy

$$\sin\left((t_2 - t_1)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 + c}\right) \neq 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor egyértelműen meghatározhatók olyan $(\varphi, \psi) = (u(x,0), u_t(x,0)) \in D^{s+1} \times D^s$ kezdeti függvények, melyekkel indított

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - cu(x,t), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < a, c \in \mathbb{R}$$

egyenletű,

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

rögzítésű rezgő húr a t_1, t_2 időpontokban az

$$u(x,t_1) = f_1(x), \quad u(x,t_2) = f_2(x), \qquad 0 \leq x \leq l$$

előírt pozíciókat veszi fel.

A bizonyítás konstruktív, a kezdeti függvények Fourier soros reprezentációja a bizonyításban megtalálható.

Kutatásunk során később ezt az eredményt sikerült általánosítanunk mind a rezgést leíró egyenletet, mind a peremfeltételeket, mind a megfigyelt állapotokat tekintve. Ez az általánosítás a 2.2. Alfejezetben található meg, mely tétel (ami egyben a 2. Fejezet fő eredménye) a következő megfigyelési problémát oldja meg:

Tekintsük a következő vegyes feladatot ismeretlen φ, ψ kezdeti függvényekkel:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u \equiv Lu, \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \quad 0 < p, q \in C^\infty([0,l]), \\ &u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \\ &\mathcal{U}_i[u] \equiv \mathcal{U}_i(u|_{x=0},\ u|_{x=l},\ u_x|_{x=0},\ u_x|_{x=l}) = 0, \qquad i = 1{,}2, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ független, önadjungált lineáris kifejezések, az u, φ, ψ függvények a D^s általánosított függvénytérből származnak.

Tegyük fel, hogy bármely $s \in \mathbb{R}$ és bármely $(\varphi, \psi) \in D^{s+1}(0,l) \times D^s(0,l)$ esetén ez a vegyes feladat rendelkezik az alábbi jó tulajdonságokkal:

$$\exists!\, u \text{ megoldás és } u \in C(D^{s+1}, \mathbb{R}) \cap C^1(D^s, \mathbb{R}) \cap C^2(D^{s-1}, \mathbb{R}), \tag{2}$$

továbbá u felírható a következő alakban

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)\right] X_n(x), \qquad (x,t) \in [0,l] \times \mathbb{R}, \text{ ahol} \tag{3}$$
$$LX_n = -\omega_n^2 X_n, \qquad \mathcal{U}_i X_n = 0, \quad i = 1{,}2.$$

Megfigyelési feltételeink a t_1 és t_2 időpontokban a pozíció és sebesség valamely ismert, tetszőleges lineáris kombinációját tartalmazzák:

$$\begin{aligned} A_1 u|_{t=t_1} + B_1 u_t|_{t=t_1} &= f_1, \qquad |A_1| + |B_1| > 0, \\ A_2 u|_{t=t_2} + B_2 u_t|_{t=t_2} &= f_2, \qquad |A_2| + |B_2| > 0, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol az $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2 \in \mathbb{R}$ együtthatók és az $f_1,\ f_2$ függvények adottak.

Legyen

$$f_1 \in D^{s+2},\ f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

és tegyük fel, hogy léteznek $0 < A \in \mathbb{Q},\ B \in \mathbb{R},\ 0 < M_1 \in \mathbb{R}$ konstansok és $C_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sorozat úgy, hogy

$$\begin{gathered} \omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n = n\pi A + B + C_n, \\ 0 < \frac{M_1}{n} < |C_n|,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{és} \quad C_n \to 0 \text{ amint } n \to \infty, \end{gathered} \tag{6}$$

és

$$\sin(\omega_n(t_2 - t_1) + \gamma_n - \delta_n) \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{7}$$

Az itt szereplő $\gamma_n,\ \delta_n \in [0, 2\pi)$ szögek az alábbi egyenletek által egyértelműen meghatározottak:

$$\begin{aligned} \sin\gamma_n &= \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}}, \quad \cos\gamma_n = \frac{B_1\omega_n}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2\omega_n^2}}, \\ \sin\delta_n &= \frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}, \quad \cos\delta_n = \frac{B_2\omega_n}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2\omega_n^2}}. \end{aligned}$$

2.11. Tétel. *Az itt vázolt* (1)–(7) *megfigyelési problémának létezik pontosan egy* $(\varphi,\psi) \in D^{s+1} \times D^s$ *megoldása.*

A 2.3. Alfejezetben a 2.11. Tétel alkalmazhatóságának illusztrálására megadunk három példát a Klein-Gordon egyenlet esetén, különböző peremfeltételek mellett. A 2.3.1. Szakaszban a rögzített végpontú, a 2.3.2. Szakaszban a szabad végpontú, a 2.3.3. Szakaszban a Sturm-Liouville rögzítésű húrt tekintjük. Ezen vizsgálatok során láthatjuk, hogy a 2.11. Tétel technikai jellegű feltételei konkrét példa esetén jelentősen egyszerűsödhetnek, vagy akár automatikusan teljesülhetnek. A 2.3.4. Szakaszban megnézzük mi történik, ha a $t_1,\ t_2$ megfigyelési időpontokra nem teszünk megszorításokat a 2.11. Tételben.

A 3. Fejezetben a Duhamel-elv egy új változatát mutatjuk be végtelen rezgő húr esetére, amely a következő:

3.1. Tétel. *Amennyiben $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ és az f függvény t irány szerinti f_t deriváltja létezik, továbbá $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$, akkor a*

$$v(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0$$

kezdeti érték problémának van megoldása. A megoldás egyértelmű.

A szokásos kitűzés $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ simasági feltételét élesíti ez a tétel. A v megoldás felírató a következő alakban:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \right) d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Ez a reprezentáció megegyezik azzal, amit a szokásos kitűzés esetén kapunk. A bizonyítás alapja az, hogy az így definiált függvény értelmezve van és C^2-beli akkor is, ha csak az általunk tett enyhébb megkötéseket tesszük az f erőfüggvényre.

A 4. Fejezetben klasszikus eszközöket alkalmazunk megfigyelési problémák vizsgálatára, s eközben a minél élesebb állítások megfogalmazásához felhasználjuk az előző fejezet eredményét. Itt elsősorban végtelen rezgő húrral kapcsolatos megfigyelési problémákat vizsgálunk, de a 4.3.1. és 4.3.2. Szakaszokban a tükrözések módszerének segítségével kitekintünk a félvégtelen rezgő húrok esetére is. A fejezet fő tétele a következő:

4.5. Tétel. *Tekintsük az*

$$u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0,$$

módon megadott húrrezgést, ahol $f(x,t)$ folytonos, és az f_t iránymenti derivált létezik *és folytonos. A megfigyelt részleges állapotokat pedig a*

$$\begin{aligned} A_1(x)u|_{t=t_1} + B_1(x)u_t|_{t=t_1} &= f_1(x), \qquad & x \in \mathbb{R}, \\ A_2(x)u|_{t=t_2} + B_2(x)u_t|_{t=t_2} &= f_2(x), \qquad & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

feltételek írják le, ahol az adott együtthatókra és jobb oldalakra teljesül, hogy

$$A_1(x), A_2(x), B_1(x), B_2(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ f_1,\ f_2 \in C^1(\mathbb{R}).$$

Az így kitűzött megfigyelési problémának létezik megoldása, azaz találhatóak olyan

$$u|_{t=t_0}(x) = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t_0}(x) = \psi(x), \qquad \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi \in C^1(\mathbb{R})$$

kezdeti függvények, amikkel indított húrrezgés során a megfigyelt állapotok előállnak. A megoldás nem egyértelmű.

Az értekezés a szerző következő négy publikációján alapul:

- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observation problems posed for the Klein-Gordon equation*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **7** (2012), 1–13.
- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observability of string vibrations*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **77** (2013), 1–16.
- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Classical solutions to observation problems for infinite strings under minimally smooth force*, Acta Sci. Math., **81** (2015), 503–526.
- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Vibrating infinite string under general observation conditions and minimally smooth force*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, közlésre benyújtva

6. fejezet

Summary

This thesis investigates the solvability of observation problems related to vibrating strings, and the smoothness of their solutions.

An observation problem is, when we observe the partial state of the string in multiple time instants (in our cases, two time instants), and we try to describe the whole vibration process, or at least give such initial position and speed of the string, from which the observed states are reproduced.

Chapter 2 studies observation problems appointed among generalized functions. For this purpose, we use the definition of the spaces $D^s(S)$, $s \in \mathbb{R}$ given in [3].

Let the system $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ be a complete orthonormal basis in $L_2(S)$. Given arbitrary real number s, we consider on the linear span D of the functions $X_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, $x \in \overline{S}$, the following Euclidean norm:

$$\left\| \sum_{n=0}^{\infty} c_n X_n(x) \right\|_s := \left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{2s} |c_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Completing D with respect to this norm, we obtain a Hilbert space denoted by D^s. We use the notation $S = (0, l)$ associated with string vibrations.

The subject of Section 2.1 is a somewhat simple observation problem related to the Klein-Gordon equation. Our statement is the following:

Theorem 2.1. *Let the given observed states f_1, f_2 and the observation instants t_1, t_2 be such that*

$$f_1 \in D^{s+2}, \quad f_2 \in D^{s+2}, \qquad s \in \mathbb{R},$$

and

$$t_2 - t_1 = \frac{p}{q}\frac{2l}{a}, \qquad p,\ q \in \mathbb{N},$$

where p and q are relative primes. Moreover let us suppose, that

$$\sin\left((t_2-t_1)\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2+c}\right)\neq 0, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Then the initial functions $(\varphi,\psi) = (u(x,0),u_t(x,0)) \in D^{s+1}\times D^s$ can be uniquely determined, such that the corresponding solution of the equation

$$u_{tt}(x,t) = a^2u_{xx}(x,t) - cu(x,t), \qquad (x,t)\in[0,l]\times\mathbb{R}, \quad 0<a,c\in\mathbb{R}$$

with boundary conditions

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0, \qquad t\in\mathbb{R}$$

will satisfy the observation condition

$$u(x,t_1)=f_1(x), \quad u(x,t_2)=f_2(x), \qquad 0\le x\le l.$$

The proof is constructive, the Fourier series representation of the initial functions can be found in the proof.

During our research, we managed to generalize this result in terms of each the equation describing the vibration, the boundary conditions and the observed states. This generalization can be found in Section 2.2, and it solves the following observation problem (which is the main result of Chapter 2):

Consider the following mixed problem with unknown initial functions $\varphi,\ \psi$:

$$\begin{gathered} u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u \equiv Lu, \qquad (x,t)\in[0,l]\times\mathbb{R}, \quad 0<p,q\in C^\infty([0,l]), \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad u_t|_{t=0}=\psi(x), \\ \mathcal{U}_i[u]\equiv\mathcal{U}_i(u|_{x=0},\ u|_{x=l},\ u_x|_{x=0},\ u_x|_{x=l})=0, \qquad i=1,2, \end{gathered} \tag{1}$$

where $\mathcal{U}_1,\ \mathcal{U}_2$ independent, self-adjoint linear expressions, and the functions $u,\ \varphi,\ \psi$ are from the generalized function space D^s.

Let us suppose, that for every $s\in\mathbb{R}$ and for every $(\varphi,\psi)\in D^{s+1}(0,l)\times D^s(0,l)$, this mixed problem possesses the following good properties:

$$\exists!\, u \text{ solution } \text{ and } u\in C(D^{s+1},\mathbb{R})\cap C^1(D^s,\mathbb{R})\cap C^2(D^{s-1},\mathbb{R}), \tag{2}$$

and u can be written in the following form:

$$
(3)\qquad \begin{gathered}
u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\left(\omega_n t\right)+\beta_n\sin\left(\omega_n t\right)\right]X_n(x),\qquad (x,t)\in[0,l]\times\mathbb{R},\ \text{where}\\
LX_n=-\omega_n^2X_n,\qquad \mathcal{U}_iX_n=0,\quad i=1{,}2.
\end{gathered}
$$

Our observation conditions are some known linear combination of the position and the speed of the string at the time instants t_1 and t_2:

$$
(4)\qquad \begin{aligned}
A_1u|_{t=t_1}+B_1u_t|_{t=t_1}&=f_1, &\qquad |A_1|+|B_1|>0,\\
A_2u|_{t=t_2}+B_2u_t|_{t=t_2}&=f_2, &\qquad |A_2|+|B_2|>0,
\end{aligned}
$$

where the coefficients $A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2$ and the functions $f_1,\ f_2$ are given.

Let

$$
(5)\qquad f_1\in D^{s+2},\ f_2\in D^{s+2},\qquad s\in\mathbb{R},
$$

and assume, that there are constants $0<A\in\mathbb{Q},\ B\in\mathbb{R},\ 0<M_1\in\mathbb{R}$ and a series $C_n\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ such that

$$
(6)\qquad \begin{gathered}
\omega_n(t_2-t_1)+\gamma_n-\delta_n=n\pi A+B+C_n,\\
0<\frac{M_1}{n}<|C_n|,\ \forall n\in\mathbb{N}\quad\text{and}\quad C_n\to 0\text{ as }n\to\infty,
\end{gathered}
$$

and

$$
(7)\qquad \sin(\omega_n(t_2-t_1)+\gamma_n-\delta_n)\neq 0,\qquad n\in\mathbb{N}_0.
$$

Here the angles $\gamma_n,\ \delta_n\in[0,2\pi)$ are uniquely determined by the following relationships:

$$
\begin{aligned}
\sin\gamma_n&=\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2\omega_n^2}}, &\quad \cos\gamma_n&=\frac{B_1\omega_n}{\sqrt{A_1^2+B_1^2\omega_n^2}},\\
\sin\delta_n&=\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2\omega_n^2}}, &\quad \cos\delta_n&=\frac{B_2\omega_n}{\sqrt{A_2^2+B_2^2\omega_n^2}}.
\end{aligned}
$$

Theorem 2.11. *The observation problem* (1)–(7) *described above has a unique solution* $(\varphi,\psi)\in D^{s+1}\times D^s$.

In Section 2.3, we give three examples to illustrate the applicability of Theorem 2.11 in the case of the Klein-Gordon equation with various boundary conditions. We consider the vibrating string with fixed ends in Subsection 2.3.1, with free ends in Subsection

2.3.2, and with Sturm-Liouville boundary condition in Subsection 2.3.3. During these considerations we can see, that the rather technical conditions of Theorem 2.11 can be significantly simplified or they even automatically hold in certain cases. In Subsection 2.3.4 we investigate the case when we doesn't make any restrictions to the observation instants t_1 and t_2 in Theorem 2.11.

In Chapter 3 we introduce a new version of Duhamel's principle for the infinite vibrating string, which is the following:

Theorem 3.1. *If $f(x,t) \in C(\mathbb{R}^2)$ and the directional derivative f_t of f along t exists and $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$, then the problem*

$$v(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2),$$

$$v_{tt}(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2,$$

$$v|_{t=0} = v_t|_{t=0} \equiv 0$$

can be uniquely solved.

This theorem sharpens the smoothness condition $f(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ of the classical result. The solution v can be written in the following form:

$$v(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau) d\xi \right) d\tau, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

This representation corresponds to the one in the usual setting. The base of the proof is that the function defined by this expression is well-defined and from C^2 even with our weaker condition for the function f.

In Chapter 4, we utilize classical tools for investigating observation problems. To formulate as sharp statements as possible, we use the result of the previous chapter. Here we primarily study observation problems related to the infinite vibrating string, but in Subsections 4.3.1 and 4.3.2 we consider the case of half-infinite strings with the help of the reflection method. The main result of the chapter is the following:

Theorem 4.5. *Consider the problem of the infinite vibrating string given by*

$$u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad a > 0,$$

where $f(x,t)$ is continuous, and the directional derivative f_t exists and $f_t \in C(\mathbb{R}^2)$. The observed partial states of the string are described by the conditions

$$\begin{aligned} A_1(x)u|_{t=t_1} + B_1(x)u_t|_{t=t_1} &= f_1(x), \qquad & x \in \mathbb{R}, \\ A_2(x)u|_{t=t_2} + B_2(x)u_t|_{t=t_2} &= f_2(x), \qquad & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

where the given coefficients and right-hand sides satisfy

$$A_1(x), A_2(x), B_1(x), B_2(x) \neq 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2,\ f_1,\ f_2 \in C^1(\mathbb{R}).$$

This observation problem can be solved, namely there can be found initial functions

$$u|_{t=t_0}(x) = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t_0}(x) = \psi(x), \qquad \varphi \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi \in C^1(\mathbb{R}),$$

such that the corresponding vibration described by $u(x,t)$ attain the observed states. The solution is not unique.

The dissertation is based on the following four papers of the author:

- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observation problems posed for the Klein-Gordon equation*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **7** (2012), 1–13.
- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observability of string vibrations*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **77** (2013), 1–16.
- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Classical solutions to observation problems for infinite strings under minimally smooth force*, Acta Sci. Math., **81** (2015), 503–526.
- Szijártó, A., Hegedűs, J., *Vibrating infinite string under general observation conditions and minimally smooth force*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, submitted

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani dr. Hegedűs Jenőnek, akinek a támogatására, tanácsaira és bátorítására az elmúlt években közösen végzett kutatómunka és ezen disszertáció megírása során is mindig számíthattam.

Szeretnék továbbá köszönetet mondani dr. Móricz Ferencnek, akihez szintén bármikor fordulhattam, és aki javaslataival, hasznos észrevételeivel rengeteget segített a disszertáció elkészüléséhez vezető úton.

Ezenkívül köszönettel tartozok a Bolyai Intézet oktatóinak és munkatársainak a remek munkakörülmények és a jó munkahelyi légkör biztosításáért.

Irodalomjegyzék

[1] Horváth, M., *Vibrating strings with free ends*, Acta Math. Hungar, **51** (1988), 171–180.

[2] Joó, I., *On the vibration of a string*, Studia Sci. Math. Hungar, **22** (1987), 1–9.

[3] Komornik, V., *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, Research in Applied Mathematics 36, Chichester: Wiley, Paris: Masson, 1994.

[4] Lions, J. L., Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogenès et applications I-III*, Dunod, Paris, 1968–1970.

[5] Lions, J. L., *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30** (1988), 1–68.

[6] Il'in, V. A., *Boundary control of the vibration process at two ends*, Dokl. Acad. Nauk **369**:5 (1999), 592–596.

[7] Moiseev, E. I., Kholomeeva, A. A., *Optimal boundary displacement control of string vibrations with nonlocal oddness condition of the first kind*, Differential Equations **46**:11 (2010), 1624–1630.

[8] Il'in, V. A., Moiseev, E. I., *Optimization of boundary controls of string vibrations*, Uspekhi Mat. Nauk **60**:6 (2005), 89–114.

[9] Romanov, I. V., *Control of plate oscillations by boundary forces* (in Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., **2** (2011), 3–9; translation in Moscow Univ. Math. Bull. **66**:2 (2011), 53–59.

[10] Romanov, I. V., *Exact control of the oscillations of a rectangular plate by boundary forces* (in Russian), Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., **4** (2011), 49–53; translation in Moscow Univ. Math. Bull. **66**:4 (2011), 166–170.

[11] Komornik, V., Loreti, P., *Fourier series in control theory*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2005.

[12] Znamenskaya, L. N., *State observability of elastic string vibrations under the boundary conditions of the first kind*, Differential Equations, **46** (2010), 748–752.

[13] Szijártó, A., *Parciális differenciálegyenletek: kiegészítő fejezetek*, diplomamunka, Szeged, 2010.

[14] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observation problems posed for the Klein-Gordon equation*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **7** (2012), 1–13.

[15] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Observability of string vibrations*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **77** (2013), 1–16.

[16] Vest, A., *Observation of vibrating systems at different time instants*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, **14** (2014), 1–14.

[17] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Classical solutions to observation problems for infinite strings under minimally smooth force*, Acta Sci. Math., **81** (2015), 503-526.

[18] Szijártó, A., Hegedűs, J., *Vibrating infinite string under general observation conditions and minimally smooth force*, E. J. Qualitative Theory of Differential Equations, közlésre benyújtva

[19] Egorov, A. I., *On the observability of elastic vibration of a beam*, Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz. **48**:6 (2008), 967–973.

[20] Komornik, V., Loreti, P., *Multiple-point internal observability of membranes and plates*, Applicable Analysis **90**:10 (2011), 1545–1555.

[21] Levitan, B. M., Sargsjan, I. S., *Introduction to spectral theory*, Nauka, Moscow, 1970. English translation: Translations of Mathematical Monographs, Vol. 39. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975.