

Informatikai Tanszékcsoporth  
Szegedi Tudományegyetem

# Bináris képek rekonstrukciója, leszámlálása és elemzése prior információ felhasználásával

PhD értekezés tézisei

Hantos Norbert

Témavezető:

Dr. Balázs Péter

Szeged  
2015



# 1. Bevezetés

A tomográfia célja egy háromdimenziós objektum kétdimenziós szeleteit ábrázoló képeinek előállítására a vetületek ismeretében. A tomográfia elsősorban orvostudományi probléma, de előfordul fizikai, kémiai, biológiai, ipari alkalmazásokban is. Egy fontos alterülete a tomográfiának a bináris tomográfia [24], ahol a cél homogén alakzatok bináris rekonstrukciója. A legtöbb esetben csak kevés vetület áll rendelkezésre, mivel a vetületképzés költséges, illetve roncsolhatja a vizsgált objektumot. Ezen felül a képalkotó berendezések fizikai korlátai miatt a valós alkalmazásokban nem lehetséges tetszőlegesen sok vetületet képezni; márpedig kevés vetület esetén a rekonstrukció bizonytalan, a lehetséges megoldások száma nagy lehet. A lehetséges megoldások számának csökkentése érdekében gyakran feltételeznek a rekonstruálandó képről bizonyos geometriai tulajdonságokat.

A bináris tomográfia legtöbb alkalmazásában a rekonstruálandó kép természetesen nem áll rendelkezésre, azonban bináris képek tárolása, tömörítése lehetséges a vetületek révén, ha a vetületek mellett bizonyos információkat is eltárolunk. Ez esetben a dekódolás maga a rekonstrukció, és fontos kérdés hogy a megoldás egyértelmű-e [25]. Ennélfogva a bináris alakzatok és mátrixok elemzése fontos területet képvisel a bináris tomográfiában.

A bináris rekonstrukció területén a bináris képek egyik kiemelt fontossággal bíró részstruktúrája az úgynevezett kapcsoló komponensek, amelyek a tomográfia mellett az adatelemzésben, biogeográfiában, adatok közötti összefüggéseket leíró bináris mátrixokban is kulcsszerepet játszik.

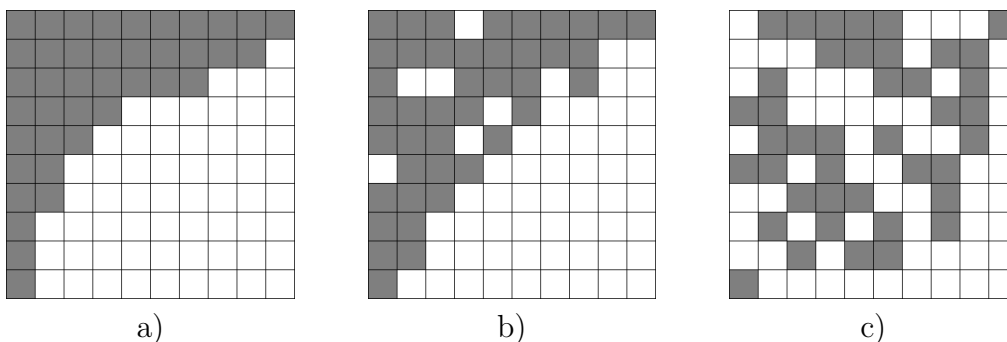
Jelen értekezés a Szerző bináris tomográfiában elért, bináris mátrixokat érintő eredményeit tartalmazza. Az értekezés elsősorban a két vetületből történő rekonstrukcióra terjed ki, ha a rekonstrukció során bizonyos megszorításokat teszünk az eredményképre. További eredményeket tartalmaz a kapcsoló komponensekről, a rekonstrukciós probléma bonyolultságelméletéről, a lehetséges megoldások számáról, és új algoritmusokat mutat be bináris képek alosztályainak rekonstrukciójához.

## 2. A bináris rekonstrukciós probléma

A bináris tomográfia célja egy kétdimenziós bináris kép előállítására a vetületek ismeretében. A képet gyakran  $A = (a_{ij})$  mátrixos alakban reprezentálják, de jelölheti a  $\mathbb{Z}^2$  rács egy részhalmaza, amely eltolás erejéig meghatározott. A kép méretét a befoglaló minimális téglalap mérete jelöli. Bináris tomográfia esetén csak kevés vetület áll rendelkezésre; két vetület esetén ezek leggyakrabban a horizontális, illetve vertikális vetületek, amelyek megegyeznek a képet reprezentáló bináris mátrix sor, illetve oszlopösszegeivel. A feladat az  $A$  mátrix előállítása a horizontális és vertikális vetületek ismeretében. A problémához kapcsolódó kérdések a rekonstrukciós eljárás bonyolultsága, a megoldások száma, és hogy milyen további megszorításokkal lehet a lehetséges megoldások számát csökkenteni.

## 3. Bináris mátrixok kapcsoló komponenseinek megszüntetése

Bináris mátrixokat gyakran használnak két adathalmaz közötti kapcsolat jelölésére, ahol a sorok és az oszlopok reprezentálják az egyes adathalmazok tagjait; a mátrix elemei pedig két adattag közötti összefüggés meglétét vagy hiányát jelzi. Ez esetben a bináris mátrixot reprezentáló képen bizonyos mintázatok jelenhetnek meg, ha az adathalmazok nem teljesen függetlenek. Bináris



1. ábra. Három mátrix a lehető legjobban beágyazottá alakítása sor- és oszlop-cserékkel. a) Teljesen beágyazott (kapcsoló komponens mentes) mátrix; b) egy közel teljesen beágyazott mátrix kevés számú 0-1 váltással; c) egy uniform véletlen mátrix.

mátrixok ilyen módon történő elemzése az adatelemzésben [4], adatbányászatban [32], alacsony szintű képfeldolgozásban [14], illetve gépi tanulásban [29] játszik fontos szerepet. Az egyik alapvető feladat bizonyos részstruktúrák keresése a bináris képen. Egy ilyen lényeges és fontos struktúra az úgynevezett kapcsoló komponens, ami egy  $2 \times 2$ -es méretű rész mátrix, a főátlóban 1-esekkel, a mellékátlóban 0-ákkal (vagy fordítva). A kapcsoló komponensek hiánya szükségszerű és elegendő feltétele a két vetületből történő bináris rekonstrukció egyértelműségének [30]. Azonban még ha a bináris kép tartalmaz is kapcsoló komponenseket, lehetséges a bináris kép egyértelmű rekonstrukciója, ha a mátrix bizonyos elemeit rögzítettnek tekintjük [10], prior információként kezelve ezeket az elemeket. Egy ilyen lehetséges módszer azoknak a 0 elemeknek a tárolása, amiket 1-essé átírva (0-1 váltás) a bináris mátrix kapcsoló komponens mentessé válik. A cél, hogy a 0 elemekből minél kevesebbet válasszunk ki a bináris mátrix kapcsoló komponens mentessé alakításához.

A képrekonstrukció mellett a biogeográfiában és az ökológiában is fontos szerepet játszik a kapcsoló komponensek számának meghatározása. Egyes esetekben a bináris mátrix jelölheti bizonyos fajok (sorok) meglétét vagy hiányát a megadott területeken (oszlopok). A kapcsoló komponensek száma szoros összefüggésben áll a minimális 0-1 váltások számával [27]. Az ún. beágyazottság (nestedness) egy fontos mértéke a bináris mátrixnak, ami leírja, milyen erősen függenek a fajok egymástól, illetve az adott területtől. Ha a mátrix teljesen vagy közel teljesen beágyazott, abban az esetben a kapcsoló komponensek száma, és így a 0-1 váltások száma kicsi (lásd az 1-es ábrát).

Sajnálatos módon a minimális számú 0-1 váltások meghatározása általánosan NP-nehéz probléma [27]. A tézisben megmutattuk, hogy a minimális számú 0-1 váltások megtalálásához elegendő a bináris kép egy megfelelő oszloppermutációját megtalálni ahelyett, hogy a kép elemein és magukon a kapcsoló komponenseken végeznénk a keresést. Az elméleti eredményre alapozva megterveztünk két determinisztikus, polinom futásidejű algoritmust a lehető legkevesebb 0-1 váltások megtalálásához. A módszereket összevetettük a szakirodalomban leggyakrabban használt eljárásokkal. A tesztelést mesterségesen generált, illetve a valós életből származó, adathalmazok közötti összefüggéseket tartalmazó mátrixokon végeztük. Ezen felül megmutattuk, hogyan lehet a módszereket alkalmazni bináris képek tömörítéséhez.

### 3.1. A probléma meghatározása

A minimum váltás probléma (Minimum Flip Augmentation Problem, MFA) a következő: adott egy bináris mátrix, keressük meg a minimális számú 0-1 váltást, hogy a mátrix kapcsoló komponens mentes legyen. Először definiáljuk a kanonikus bővítés (canonical expansion) fogalmát. Egy  $A$  mátrix kanonikus bővítése az a  $\psi A$ -val jelölt mátrix, amelynek az elemei

$$\psi a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ha } a_{ij'} = 0 \text{ minden } j' \geq j\text{-re,} \\ 1 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az alábbi tételt sikerült bebizonyítanunk:

**Tétel 1** *Legyen  $A$  egy  $m \times n$ -es méretű bináris mátrix, és legyen  $A^*$  az  $MFA(A)$  probléma megoldása. Ebben az esetben létezik egy olyan  $n$  elemű,  $\pi$ -vel jelölt oszloppermutáció, hogy  $\pi^{-1}\psi\pi A = A^*$ .*

Következésképp, ahhoz, hogy megtaláljuk az  $MFA(A)$  probléma megoldását, elegendő keresnünk egy alkalmas  $\pi$  oszloppermutációt.

### 3.2. Heurisztikák és mérési eredmények

Négy különböző heurisztikát vizsgáltunk az MFA problémára. A SWITCH és a COLUMNS algoritmus a szakirodalomban ismert [27]. Előbbi egy kapcsoló komponensek keresésén alapuló eljárás, az utóbbi egy mohó, oszloponkénti feltöltés. Az általunk kidolgozott COLPERM1 (Algoritmus 1) és COLPERM2 (Algoritmus 2) eljárások a fenti tételen alapuló, oszloppermutációt kereső heurisztikák.

---

#### Algoritmus 1 COLPERM1

---

Legyen  $\pi$  az identikus permutáció

**for** minden  $i$  oszlopindexre **do**

Legyen  $j > i$  az az oszlopindex, amelyre  $\pi_{ij}$  a legnagyobb számú 0-1 váltást eredményezi  $\psi$  alkalmazása után

$i$  és  $j$  oszlop cseréje  $\pi_{ij}$  permutációval

$\pi \leftarrow \pi \cdot \pi_{ij}$

**end for**

**return**  $A' \leftarrow \pi^{-1}\psi\pi A$

---

Az eljárások hatékonyságát véletlen generált bináris mátrixokon, valamint valós életbeli adatmátrixokon teszteltük. A mesterséges teszthalmaz  $20 \times 20$ -as,  $40 \times 40$ -es,  $60 \times 60$ -as,  $80 \times 80$ -as, és  $100 \times 100$ -as véletlen mátrixokat tartalmaz 10%, 20%, ..., 90%-os sűrűséggel. Minden mátrixméret és sűrűség párhoz 50 darab véletlen mátrixot generáltunk egyenletes eloszlás szerint. A teljes mesterséges adatbázis 2250 darab mátrixból áll.

Az eredményekből arra következtethetünk, hogy az oszloppermutáción alapuló kereső eljárások jóval hatékonyabbak futásidőben, mint a kapcsoló komponens alapú eljárások. Ezen felül a COLPERM2 eljárás nagyméretű és kis sűrűségű mátrixok esetén általában jobb eredményt adott a 0-1 váltások számában. A SWITCH jobban teljesített, ha a kapcsoló komponensek száma kevés volt, ami általában a kicsi illetve kellően sűrű mátrixokra volt jellemző.

A valós teszthalmaz [27] elsősorban bináris mátrixok beágyazottságának vizsgálatára szolgál. A teszthalmaz 150 mátrixot tartalmaz szigetvilágok élőlényének és élőhelyeinek kapcsolatáról;

---

**Algoritmus 2 COLPERM2**

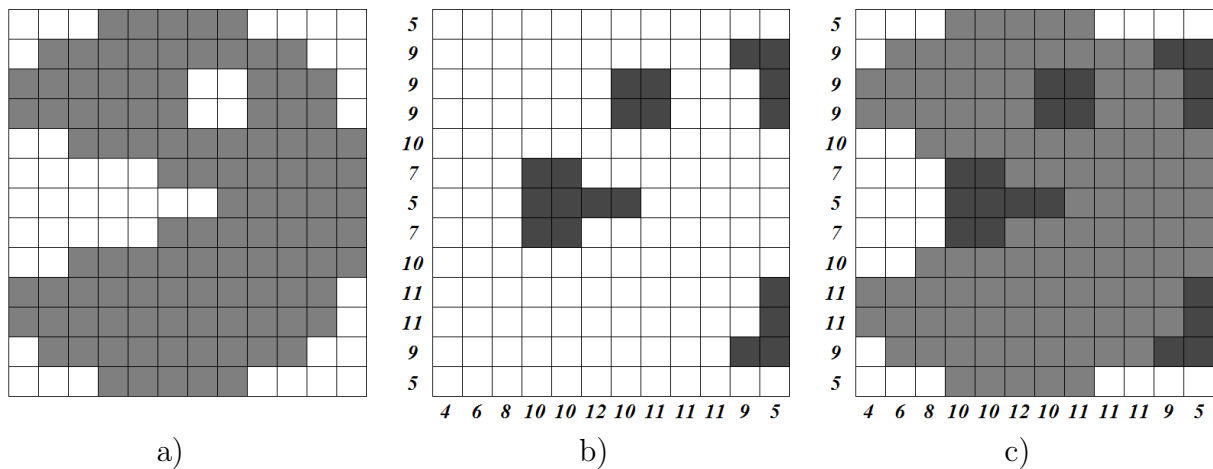
---

**while true do**Legyen  $i$  és  $j$  az az oszlopindex pár, amelyre  $\pi_{ij}$  a legnagyobb számú 0-1 váltást eredményezi  $\psi$  alkalmazása után**if** létezik ilyen  $i$  és  $j$  **then** $i$  és  $j$  oszlop cseréje  $\pi_{ij}$  permutációval $\pi \leftarrow \pi \cdot \pi_{ij}$ **else**

Kiugrás a ciklusból

**end if****end while****return**  $A' \leftarrow \pi^{-1}\psi\pi A$ 

---

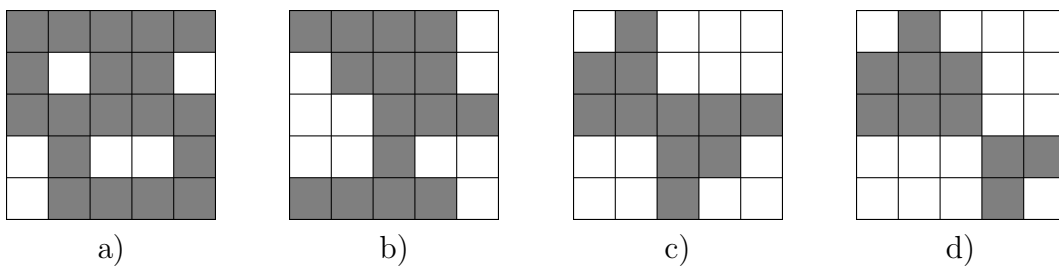


2. ábra. Példa bináris képek tömörítésére. a) eredeti kép; b) a tárolt adat: a horizontális és vertikális vetületek, valamint a 0-1 váltások pozíciói; c) Chang algoritmusával történő rekonstrukció.

de megtalálható gerinctelen élőlények rendszertanára, tengeri és vízi élőhelyekre, illetve geográfiai helyekre vonatkozó mátrixok is. A teljes adatbázis 289 mátrixot tartalmaz, ezeket 9 osztályba soroltuk a sűrűségük szerint. Az algoritmusokat teszteltük attól függően, hogy mennyi 0-1 váltással teszik az egyes mátrixokat kapcsoló komponens mentessé. A rangsort az alapján állítottuk fel, hogy hány alkalommal érték el legjobb, illetve legrosszabb eredményt. Úgy találtuk, hogy az eredmények konzisztensek a véletlen generált tesztalacson elért eredményekkel. Összességében a COLPERM2 algoritmus találta meg a legkevesebb 0-1 váltást; a SWITCH algoritmus jó eredményt ért el kis illetve sűrű mátrixok esetén, míg a COLUMNS algoritmus a legrosszabb, de a leggyorsabb heurisztikának bizonyult. Futásidőben a COLPERM2 és a SWITCH algoritmusok néhány másodpercig futottak, míg a COLPERM1 és COLUMNS algoritmusok tized illetve századmásodperc alatt végeztek.

Bináris képek veszteségmentes tömörítésére egy lehetséges eljárás, ha eltároljuk a 0-1 váltások pozícióit. Ez esetben a horizontális és a vertikális vetületek ismeretében Chang algoritmusát [10] használva az egyértelmű rekonstrukció polinom időben elvégezhető. Erre mutat példát a 2-es ábra. Ez a fajta képtömörítés a szerzők jövőbeni kutatási tervét képezi.

A téziscsoport eredményei egy konferenciakiadványban [18] kerültek publikálásra, illetve egy folyóiratban [17] publikálásra elfogadták.



3. ábra. Különböző alosztályba tartozó,  $5 \times 5$ -ös méretű bináris képek: (a) általános, lyukakat is tartalmazó poliominó; (b)  $h$ -konvex, de nem  $v$ -konvex poliominó; (c)  $hv$ -konvex poliominó; (d)  $hv$ -konvex, 8- de nem 4-összefüggő bináris kép. Ez utóbbi a 4-összefüggőség hiánya miatt nem poliominó.

## 4. $hv$ -Konvex képek rekonstrukciója és véletlen generálása a horizontális vetületből

A szakirodalomban a bináris képek több alosztályát is vizsgálták, ahol a rekonstruálandó kép bizonyos ismert tulajdonságoknak felelt meg. A bináris mátrixok egyik gyakran vizsgált alosztálya az úgynevezett  $hv$ -konvex poliominók, ami olyan 4-összefüggő bináris mátrixokat jelent, amelyekben minden sor illetve oszlop konvex. A 3-as ábra mutat néhány példát különböző osztályba tartozó bináris képekre.

A  $hv$ -konvex poliominók horizontális és vertikális vetületből történő rekonstrukciójára, illetve számosságának becslésére sok eredmény létezik a szakirodalomban [2, 3, 8, 11, 12, 13]. Meglepő módon az egy vetületből történő rekonstrukció, illetve számosság kérdését eddig nem vizsgálták. Ebben a téziscsoportban megadtunk egy lineáris futásidejű algoritmust  $hv$ -konvex poliominók rekonstruálására, valamint meghatároztuk a lehetséges megoldások számát mind tetszőleges, mind meghatározott képszélességre vonatkozóan. Ezen eredményekre alapozva kidolgoztunk egy módszert  $hv$ -konvex poliominók véletlen generálásához illetve leszámolásához, aminek a futásideje a vetület méretével négyzetesen arányos. Hasonló eredményeink vannak  $hv$ -konvex kanonikus mátrixokra, illetve 8- de nem 4-összefüggő mátrixokra. Megmutattuk, hogy egy minimális méretű  $hv$ -konvex kanonikus kép rekonstruálása a horizontális vetületből mindig lehetséges a vetület méretével lineáris futásidőben.

### 4.1. $hv$ -Konvex poliominók rekonstruálása

Legyen  $H = (h_1, \dots, h_m) \in \mathbb{N}^m$  egy  $m$  elemet tartalmazó vektor. Az általunk megadott *Greedy-Rec* algoritmus (Algoritmus 3) egy olyan  $A$   $hv$ -konvex poliominót állít elő, amelynek a horizontális vetülete megegyezik a  $H$  vektorral, és a mérete minimális. A leírásban horizontális sávnak (strip) nevezzük a  $hv$ -konvex poliominó egy sorában található, egymást után következő 1-eseket.

**Tétel 2** *GreedyRec* egy  $H$ -val megegyező horizontális vetülettel rendelkező, minimális méretű  $hv$ -konvex poliominóval tér vissza  $O(m)$  futásidőben.

A *GreedyRec* algoritmus könnyen módosítható úgy, hogy tetszőleges, előre megadott szélességű poliominóval térjen vissza (ha ez lehetséges). Ehhez a  $k$ -adik,  $(k + 1)$ -edik,  $\dots$ ,  $m$ -edik horizontális sávot az összes alatta lévő sávval együtt jobbra kell csúsztatni úgy, hogy a 4-összefüggőség tulajdonság ne sérüljön. A legkisebb lehetséges oszlopszám (amit a módosíthatatlan

---

**Algoritmus 3** *GreedyRec*

---

```
 $s_1 \leftarrow 1$ 
for  $i = 2 \rightarrow m$  do
  if  $h_i = h_{i-1}$  then
    Legyen az  $i$ -edik horizontális sáv az  $(i - 1)$ -edik sáv alatt
  end if
  if  $h_i < h_{i-1}$  then
    Legyen az  $i$ -edik horizontális sáv az  $(i - 1)$ -edik sáv alatt jobbra igazítva
  end if
  if  $h_i > h_{i-1}$  then
    Legyen az  $i$ -edik horizontális sáv az  $(i - 1)$ -edik sáv alatt balra igazítva
  end if
end for
return  $s_1, \dots, s_m$  horizontális sávpozíciók
```

---

*GreedyRec* eredményez)  $N_{\min} = N_m$ , ahol

$$N_i = \begin{cases} h_i & \text{ha } i = 1, \\ N_{i-1} & \text{ha } h_i \leq h_{i-1}, \\ N_{i-1} + h_i - h_{i-1} & \text{ha } h_i > h_{i-1}. \end{cases} \quad (1)$$

A formula egyértelműen következik a *GreedyRec* algoritmus leírásából. A legnagyobb lehetséges oszlopszám

$$N_{\max} = \sum_{i=1}^m h_i - m + 1, \quad (2)$$

amikor minden horizontális sáv az előző sávnak mindössze egyetlen elemével 4-szomszédos. A módosított *GreedyRec* algoritmus bármilyen előre megadott,  $N_{\min}$  és  $N_{\max}$  oszlopszélességre elő tud állítani egy adott szélességű, a horizontális vetülettel megegyező  $hv$ -konvex poliominót.

## 4.2. $hv$ -Konvex poliominók leszámlálása

Megadunk egy képletet a megadott  $H = (h_1, \dots, h_m)$  horizontális vetülettel megegyező  $hv$ -konvex poliominók leszámlálására, amennyiben a kép szélessége tetszőleges lehet. A felső háromszög poliominó (upper stack polyomino), az alsó háromszög poliominó (lower stack polyomino), a paralelogram poliominó (parallelogram polyomino), a  $k$  legkisebb bal horgony pozíció (smallest left anchor position), a  $K$  legkisebb lehetséges bal horgony pozíció (smallest possible left anchor position), az  $l$  legnagyobb jobb horgony pozíció (greatest right anchor position), és az  $L$  legnagyobb lehetséges jobb horgony pozíció (greatest possible right anchor position) definíciója a tézisben megtalálható.

Jelölje  $\bar{S}_k(H)$ ,  $\underline{S}_l(H)$  és  $P_{k,l}(H)$  rendre a felső háromszög, alsó háromszög és paralelogram poliominók számát rögzített horgonypozíciók esetén, adott  $H$  horizontális vetület mellett. Ekkor (feltételezve, hogy  $K < L$ ), azt kapjuk, hogy

$$\bar{S}_1(H) = 1, \quad \bar{S}_k(H) = \prod_{i=2}^k (h_i - h_{i-1} + 1) \quad (k \geq 2), \quad (3)$$

$$\underline{S}_m(H) = 1, \quad \underline{S}_l(H) = \prod_{i=l}^{m-1} (h_i - h_{i+1} + 1) \quad (l < m), \quad (4)$$



$$P_{k,l}(H) = \prod_{i=k}^{l-1} \min\{h_i, h_{i+1}\} . \quad (5)$$

A  $hv$ -konvex poliominók száma  $H$  horizontális vetülettel mellett

$$P_{K<L}(H) = 2 \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{l=L}^m \left( \bar{S}_{k-1}(H) \cdot (h_k - h_{k-1}) \cdot P_{k,l}(H) \cdot (h_l - h_{l+1}) \cdot \underline{S}_{l+1}(H) \right) . \quad (6)$$

Ha  $K \geq L$ , akkor a megoldások száma

$$P_{K \geq L}(H) = P_{K<L}(H) - \bar{S}_L(H) \cdot \underline{S}_K(H) . \quad (7)$$

Ezen felül megadunk egy rekurzív formulát a  $H$ -val megegyező horizontális vetületű, rögzített  $n$  szélességű  $hv$ -konvex poliominók  $P_n(H)$ -val jelölt számára. Tegyük fel, hogy  $K < L$ . Legyen  $r \geq 1$ , és jelölje  $P(p_1, \dots, p_r, n)$  az  $n$  szélességű,  $(p_1, \dots, p_r)$  vektorral megegyező horizontális vetületű paralelogram poliominók számát. Egyértelmű, hogy  $P(p_1, n) = 1$  ha  $p_1 = n$ , és  $P(p_1, n) = 0$  ha  $p_1 \neq n$ . Továbbá,  $r > 1$  esetén tekintsük az alábbi rekurziót:

$$P(p_1, \dots, p_r, n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{p_1} P(p_2, \dots, p_r, n - i + 1) & \text{ha } p_1 \leq p_2 , \\ \sum_{i=1}^{p_2} P(p_2, \dots, p_r, n - (p_1 - p_2) - i + 1) & \text{ha } p_1 > p_2 . \end{cases} \quad (8)$$

A megoldások száma rögzített  $n$  esetén:

$$P_n(H) = 2 \cdot \sum_{k=1}^K \sum_{l=L}^m \left( \bar{S}_{k-1}(H) \cdot (h_k - h_{k-1}) \cdot P(h_k, \dots, h_l, n) \cdot (h_l - h_{l+1}) \cdot \underline{S}_{l+1}(H) \right) , \quad (9)$$

ahol  $P(h_k, \dots, h_l, n) = 0$  ha  $k > l$ .

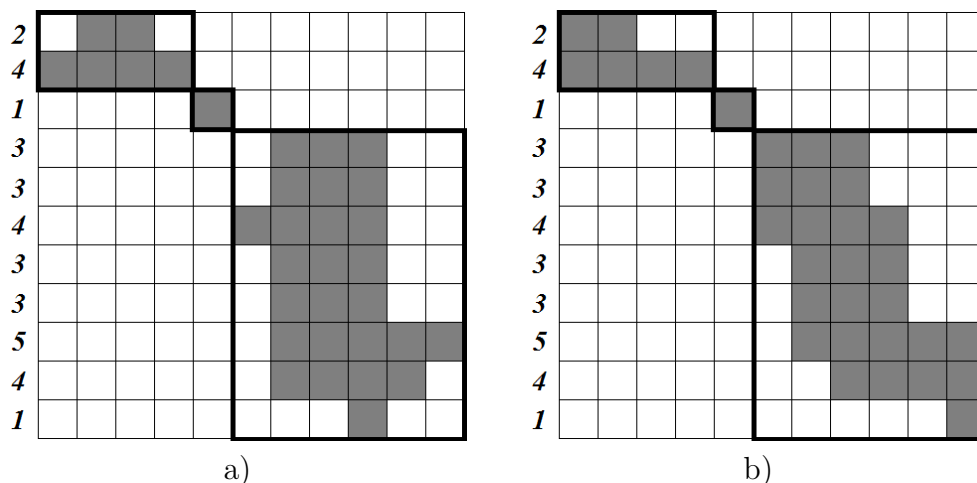
Ezekre az eredményekre alapozva a tézisben megadtunk egy módszert  $hv$ -konvex poliominók véletlen generálására, illetve leszámolására adott horizontális vetület, és tetszőleges, illetve rögzített képszélesség mellett. Az algoritmus legrosszabb futásideje tetszőleges képszélességre  $O(m^2)$ .

### 4.3. $hv$ -Konvex kanonikus mátrixok rekonstrukciója

A kanonikus mátrixok [1] olyan mátrixok, amelyek 4-összefüggő komponenseket tartalmaznak oly módon, hogy az egyes komponensek legkisebb befoglaló téglalapjai 8-összefüggőek a jobb-alsó illetve bal-felső sarkaikkal. A feladat kanonikus  $hv$ -konvex képeknek a rekonstruálása úgy, hogy a rekonstruált kép horizontális vetülete a megadott vektorral, 4-összefüggő komponenseinek a száma a megadott komponensszámmal egyezzen meg. A 4-es ábra ilyen rekonstrukcióra mutat példát.

A *CanonicalRec* algoritmus (Algoritmus 4) egy 8-összefüggő megoldást ad  $O(m)$  futásidőben. A töréspontok (breakpoints) definíciója megtalálható a tézisben. Ezen felül a *CanonicalRec* algoritmus módosítható úgy, hogy rögzített  $n$  szélességű megoldással térjen vissza, ahol  $n$  értéke tetszőleges lehet a minimális (a módosíthatatlan *CanonicalRec* által előállított képszélesség) és  $(\sum_{i=1}^m h_i) - m + k$  között, ahol  $k$  a 4-összefüggő komponensek száma.

A téziscsoport eredményei két konferenciakiadványban [15, 20], és egy folyóiratban [19] jelentek meg.



4. ábra. (a) Egy minimális szélességű kanonikus  $hv$ -konvex mátrix; (b) az általunk megadott *CanonicalRec* algoritmus eredménye. Mindkét kép szélessége 11. Vegyük észre, hogy a második kép 8-összefüggő.

---

#### Algoritmus 4 *CanonicalRec*

---

- 1) Keressük meg azon  $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$  ( $1 \leq c_i < m$ , és  $c_i \neq c_j$  ha  $i \neq j$ ) pozíciókat, amelyekre a  $\sum_{c_i} \min\{h_{c_i}, h_{c_i+1}\}$  értéke minimális
  - 2) Állítsunk elő egy  $G$  rekonstrukciós eredményt  $H$  vetületből a *GreedyRec* algoritmus felhasználásával
  - 3) A  $c_i$  pozíciókat töréspontként felhasználva állítsunk elő  $F^*$ -ot  $G$ -ből
- return**  $F^*$
- 

## 5. A morfológiai váz felhasználása a rekonstrukcióban

A disszertációban vizsgáltuk a bináris rekonstrukció azon változatát, ahol a horizontális és vertikális vetületek mellett egy alakleíró jellemző, az úgynevezett morfológiai váz (morphological skeleton) [14, 31] is ismertnek tekintett. Bináris képek morfológiai váza morfológiai operátorokkal állítható elő. Ilyen operátorok az iteratív morfológiai dilatació (morphological dilation,  $\oplus_k$ ), és az iteratív morfológiai erózió (morphological erosion,  $\ominus_k$ ), ahol  $k$  az iterációs számot jelöli,  $k = 1$  esetén elhagyható. Egy  $F$  bináris kép az  $Y \subset \mathbb{Z}^2$  szerkesztőelemmel előállított  $\mathcal{S}(F, Y)$  morfológiai váza

$$\mathcal{S}(F, Y) = \bigcup_{k=0}^K \mathcal{S}_k(F, Y), \quad (10)$$

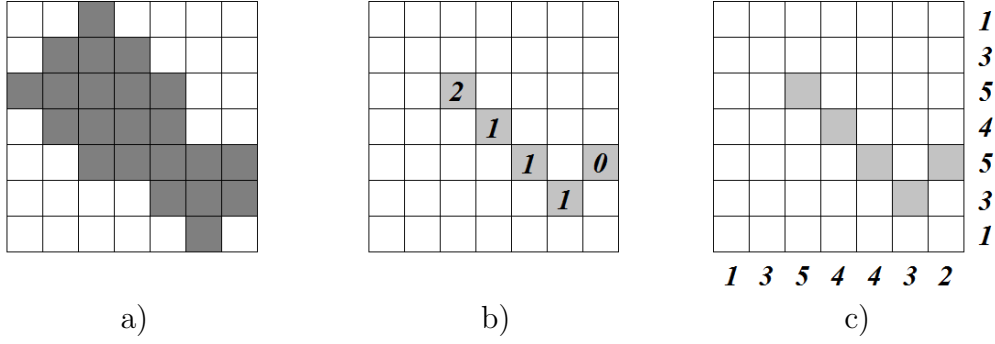
ahol

$$\mathcal{S}_k(F, Y) = (F \ominus_k Y) \setminus [(F \ominus_{k+1} Y) \oplus Y], \quad (11)$$

és  $K$  a legnagyobb beírható (szerkesztőelemmel közelített) kör lap sugarát jelenti. Egy  $p \in F$  képpont vázpont, ha  $p \in \mathcal{S}(F, Y)$  a megadott  $Y$  szerkesztőelemmel.

Egy fontos tulajdonsága a morfológiai váznak, hogy az eredeti  $F$  kép pontosan rekonstruálható az  $\mathcal{S}_k(F, Y)$  váz-részhalmozok ismeretében:

$$F = \bigcup_{k=0}^K [\mathcal{S}_k(F, Y) \oplus_k Y] = \bigcup_{p \in \mathcal{S}(F, Y)} (p \oplus_{\kappa_p} Y), \quad (12)$$



5. ábra. (a) A rekonstruálandó  $F$  kép; (b) ha a címkék ismertek minden  $p \in \mathcal{S}(F, Y)$  vázpontra, akkor  $F$  egyértelműen előállítható; (c) a feladat  $F$  rekonstruálása két vetületből és a morfológiai vázból.

ahol  $\kappa_p$  a  $p$  vázpont címkéjét (skeletal label) jelöli, hogy  $p \in S_{\kappa_p}(F, Y)$ . Mivel a váz-részhalmazok diszjunktak, az egyes vázpontok címkéi jól definiáltak. A továbbiakban feltételezzük, hogy az  $Y$  szerkesztőelem rögzített, és az origót, valamint a vele 4-szomszédos pontokat tartalmazó részhalmazt jelöli:

$$Y = \{ (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0) \}. \quad (13)$$

A feladat egy bináris kép előállítása a két vetület valamint a morfológiai váz ismeretében. A rekonstrukciós feladatra az 5-ös ábra mutat példát. Az alábbi tételket sikerült bebizonyítanunk:

**Tétel 3** *Poliominók rekonstruálása két vetületből és a morfológiai vázból NP-teljes. Bináris képek rekonstruálása két vetületből és a morfológiai vázból NP-teljes. Bináris képek rekonstruálása egy vetületből és a morfológiai vázból NP-teljes.*

## 5.1. Rekonstrukció mint optimalizálási probléma

Bár a rekonstrukció két vetületből és a morfológiai vázból általánosan NP-nehéz probléma, bizonyos esetekben lehetséges egy közelítő rekonstrukciós eredménykép előállítása. Ehhez a problémát energiaminimalizációs (függvényminimalizációs) problémaként fogalmazzuk meg, ahol a feladat egy adott, a problémát reprezentáló függvény globális minimumának megkeresése. Egyszerűsége, robusztussága és paramétereizhetősége miatt a szimulált hűtést (Simulated Annealing, SA) [9, 26, 28] választottuk kiindulási eljárásaként.

Az energiafüggvényt az alábbi módon definiáljuk: adottak  $H \in \mathbb{N}_0^n$  és  $V \in \mathbb{N}_0^n$  vektorok és  $S \subset \mathbb{Z}^2$  ponthalmaz. A feladat egy olyan  $F$  bináris kép előállításra, amelyre (a lehető legkisebb hibával) teljesül, hogy  $\mathcal{S}(F, Y) = S$ ,  $\mathcal{H}(F) = H$ , és  $\mathcal{V}(F) = V$ . Minden  $p \in \mathcal{S}(F, Y)$  vázponthoz hozzárendelhető egy  $\kappa_p$  címke, vagyis az  $F$  kép leírható  $K(\mathcal{S}(F, Y)) = (\kappa_{p_1}, \kappa_{p_2}, \dots, \kappa_{p_{|\mathcal{S}(F, Y)|}}) \in \mathbb{Z}^{|\mathcal{S}(F, Y)|}$  címkék sorozatával. A feladat így egy olyan  $K^*(S) = (\kappa_{p_1}^*, \kappa_{p_2}^*, \dots, \kappa_{p_{|S|}}^*)$  címke-sorozat megtalálása, hogy az abból a (12)-ben leírt módon előállított  $F^*$  képre az  $f(\mathbf{x}^*) = \|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}\|_2^2$  kifejezés értéke minimális. A kifejezésben  $\mathbf{x}^*$  jelöli az  $F^*$  bináris képet oszlopvektorként kifejezve;  $\mathbf{b}$  a vetületeket tartalmazó oszlopvektor,  $\mathbf{A}$  bináris együtthatómátrix a képpontok és a vetületek kapcsolatát írja le. A szimulált hűtést a fentiek szerint specifikáltuk (Algoritmus 5).

A paramétereket kísérleti úton határoztuk meg. A rekonstrukcióra különböző, szimulált hűtésen alapuló stratégiát dolgoztunk ki  $K(S)$  módosítására, illetve a célfüggvény felírására. Két esetben kihasználtuk, hogy a vázpontoknak teljesíteniük kell az alábbi tulajdonágot, melyet a tézisben bizonyítottunk:

---

**Algorithm 5** Szimulált hűtés a rekonstrukciós problémára

---

$K(S) \leftarrow K_0(S)$  kiindulási vázcímkék  
 $t \leftarrow 0$   
**repeat**  
   $K'(S) \leftarrow \text{MÓDOSÍT}(K(S))$   
   $\mathbf{x}'$  és  $\mathbf{x}$  meghatározása  $K'(S)$ -ből és  $K(S)$ -ből  
  **if**  $f(\mathbf{x}') < f(\mathbf{x})$  **or**  $\text{RAND} < \exp\left(\frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')}{T(t)}\right)$  **then**  
     $K(S) \leftarrow K'(S)$   
  **end if**  
   $t \leftarrow t + 1$   
**until** a kilépési feltételek teljesülnek  
**return**  $K(S)$  vázcímkék

---

**Lemma 1** *A fent megadott  $Y$  szerkesztőelem esetén minden  $p$  és  $q$  vázpontra teljesül, hogy  $d(p, q) > |\kappa_p - \kappa_q|$ , ahol  $d(p, q)$  a  $p$  és  $q$  pontok Manhattan-távolságát jelöli.*

A rekonstrukció során preferáltuk, ha a 8-szomszédos vázpontok címkéi között az eltérés legfeljebb 1 volt.

1. *No Skeletal Constraint* (NSC): A MÓDOSÍT lépés során egy véletlenszerűen kiválasztott  $\kappa_p$  vázpontot véletlenszerűen megváltoztatunk.
2. *Dynamic Skeletal Constraint* ( $\text{DSC}_C$ ): Minden lépésben egy véletlenszerűen választott  $k_p$  címke értékét úgy módosítjuk, hogy minden  $p$ -vel szomszédos  $q$  vázpontra teljesüljön, hogy  $|\kappa_p - \kappa_q| \leq C$ . Ha  $C = 1$ , akkor a 8-szomszédos vázpontokon legfeljebb 1 eltérés a megengedett. Mivel ez lassú konvergenciához vezet az iterációk során, a rekonstrukció elején  $C$  értéke nagyobb, és az iterációk során  $C$  értéke fokozatosan csökken.
3. *Combined Energy Function* ( $\text{CEF}_\alpha$ ): A vázpont címkékre tett megszorítást a célfüggvényben fogalmazzuk meg:

$$f(\mathbf{x}) = \alpha \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + (1 - \alpha)g(\mathbf{x}),$$

ahol  $\alpha$  súlyparaméter ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{0 < d_1(p, q) \leq 2} h(\kappa_p, \kappa_q) \quad (p, q \in S, \kappa_p, \kappa_q \in K(S)),$$

és

$$h(\kappa_p, \kappa_q) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |\kappa_p - \kappa_q| \leq 1 \\ |\kappa_p - \kappa_q|/2 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az algoritmusokat 50 mesterségesen generált,  $256 \times 256$ -os méretű képen teszteltük. A képek közül hat teljesítette azt a tulajdonságot, hogy a morfológiai váz egy pont vékony és kevés 8-összefüggő komponensből áll; azonban akadtak olyan képek is, amelyeknek a váza szakadozott, izolált pontokat tartalmaz. A véletlen algoritmus miatt minden futást 10-szer ismételtünk, a hibamértékeket és a futásidőket átlagoltuk. Hibamértékként az eredménykép relatív hibamértékét (Relative Mean Error, RME) számoltuk.

Az eredmények tükrében úgy találtuk, hogy a legtöbb esetben az 1-es Lemma által megkövetelt tulajdonság nélkül is egy közelítő rekonstrukció már kevés iterációval és rövid futásidővel

is elérhető. További megszorításokkal az eredménykép simább, bár a módszer lassabban konvergál. Az NSC algoritmus általában véve jól teljesített, de az eredménykép gyakran sok hibát tartalmazott az élek mentén. A DSC algoritmus érte el leggyakrabban a legkisebb hibamértékű eredményképeket, de ehhez több iterációra volt szüksége. A CEF algoritmus valamivel rosszabbul teljesített, mint a DSC, viszont még lassabban konvergált. A legtöbb esetben úgy találtuk, hogy a megoldó algoritmustól függetlenül az eredménykép hibamértéke nagyban függött a vázpontok számától és a váz simaságától, összefüggőségétől. Az algoritmusokat teszteltük a rekonstrukció azon változatánál is, amikor csak egyetlen vetület és a morfológiai váz áll rendelkezésre; a rekonstrukciós eredmények valamivel rosszabbak voltak, de az algoritmusok általában véve hasonlóan teljesítettek.

## 5.2. *hv*-Konvex poliominók rekonstrukciójának egyértelmősége

Bináris képek, illetve annak alosztályainak rekonstrukciója esetén fontos az egyértelműség kérdése, vagyis hogy mikor létezik pontosan egy megoldás. Ebben az alfejezetben *hv*-konvex poliominók egy parametrikus alosztályának egyértelműségi kérdését vizsgáltuk, amikor a rekonstrukció során két vetület és a morfológiai váz áll rendelkezésre. Megmutattuk, hogy az alosztályban az egyértelműség kérdése csak a paraméterektől függ. Egy adott  $k, l \in \mathbb{N}_0$  számpárra legyen  $G_{k,l}$  az alábbi bináris kép:

$$G_{k,l} = (p \oplus_k Y) \cup (q \oplus_l Y) \cup (r \oplus_l Y) \cup (s \oplus_k Y), \quad (14)$$

ahol  $p = (i, j)$ ,  $q = (i, j + k + l + 1)$ ,  $r = (i + k + l + 1, j)$ ,  $s = (i + k + l + 1, j + k + l + 1)$ . Továbbá legyen  $H_{k,l} \subset \mathbb{Z}^2$  egy  $G = G_{k,l}$ -ből konstruált bináris kép úgy, hogy

$$\begin{aligned} H_{k,l} = & \{ (u, v) \mid \exists (u_1, u_2) \ u_1 < u < u_2, \\ & (u_1, v) \in G, (u_2, v) \in G, (u, v) \notin G \} \\ \cup & \{ (u, v) \mid \exists (v_1, v_2) \ v_1 < v < v_2, \\ & (u, v_1) \in G, (u, v_2) \in G, (u, v) \notin G \}. \end{aligned}$$

Végül legyen  $B_{k,l} = G_{k,l} \dot{\cup} H_{k,l}$ , ahol  $\dot{\cup}$  a képek mint halmazok diszjunkt unióját jelöli. Egy példát láthatunk a 6-os ábrán  $k = 4$ ,  $l = 2$ , és  $k = 5$ ,  $l = 1$  értékekkel.

Bebizonyítottuk, hogy az ilyen  $B_{k,l}$  képek rekonstrukciójának egyértelműsége és annak  $k, l$  paramétere között az alábbi összefüggés igaz.

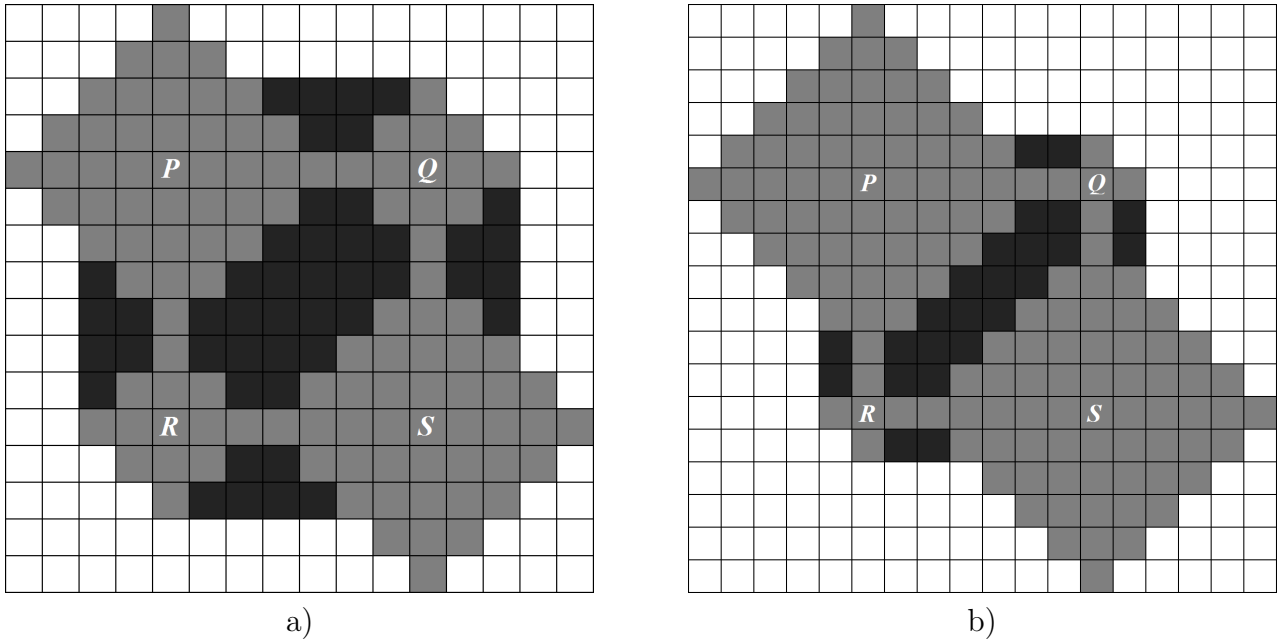
**Tétel 4** *Legyen  $B = B_{k,l}$  tetszőleges  $k \geq l$  paraméterekre. Ebben az esetben a  $B$  kép rekonstrukciója két vetületből és a morfológiai vázból akkor és csak akkor nem egyértelmű, ha*

$$\left\lfloor \frac{k+l}{2} \right\rfloor \leq 2l. \quad (15)$$

A téziscsoport eredményei két konferenciakiadványban [16, 22], és két folyóiratban [23, 21] jelentek meg. Az értekezés kiadásának időpontjáig az eredményekre négy független hivatkozást [5, 6, 7, 33] kaptunk.

## Az eredmények tézisszerű összefoglalása

A kutatás eredményei három csoportba oszthatók. Az eredmények és a hozzájuk kapcsolódó publikációk viszonyát az 1. táblázat tartalmazza.



6. ábra. Példa  $B_{k,l}$  képekre: (a)  $B_{4,2}$ ; (b)  $B_{5,1}$ . A szürke és a fekete képpontok a megfelelő  $G$  és  $H$  részhalmazokat jelölik. Horizontális és vertikális vetületekből, valamint a morfológiai vázból a  $B_{4,2}$  kép nem egyértelmű, míg a  $B_{5,1}$  kép egyértelműen rekonstruálható.

Az első téziscsoportban azt vizsgáltam, hogyan lehet a lehető legkevesebb 0-1 váltással kapcsoló komponens mentessé tenni bináris mátrixokat. Az eredmények egy konferencia kiadványban [18] jelentek meg, illetve egy folyóiratban [17] kerültek elfogadásra.

I/1. Megmutattam, hogy hogyan lehet a keresési teret drasztikusan csökkenteni úgy, hogy közben optimális megoldást ne veszítsünk el. Ez alapján megadtam két olyan heurisztikát, amik az eddig publikált módszereknél a legtöbb esetben jobbnak bizonyultak a 0-1 váltások számának minimalizálásában.

A második tézispontban  $hv$ -konvex poliominók és  $hv$ -konvex kanonikus mátrixok rekonstrukcióját vizsgáltam egy vetületből. Az eredmények két konferenciakiadványban [15, 20], és egy folyóiratcikkből [19] kerültek publikálásra.

II/1. Megadtam egy olyan algoritmust, amely a horizontális vetület méretével lineáris időben megad egy, a vetületet kielégítő  $hv$ -konvex poliominót. Bebizonyítottam, hogy az eljárás mindig minimális méretű mátrixot állít elő, továbbá megmutattam, hogy az eljárás könnyen módosítható tetszőleges szélességű mátrix előállításához. Ezen felül megadtam egy zárt képletet a megoldások számának pontos meghatározásához tetszőleges mátrixméret esetén, illetve egy rekurzív formulát rögzített mátrixméret esetén.

II/2. Megadtam egy eljárást olyan  $hv$ -konvex poliominók véletlen generálásához, amelyek egy adott horizontális vetületet kielégítenek. Az eljárás legrosszabb futásideje  $O(m^2)$ , ahol  $m$  a vetület méretét jelöli. Az eljárás módosítható rögzített méretű mátrixok véletlen generálásához.

II/3. Megmutattam, hogyan lehet  $hv$ -konvex kanonikus mátrixokat előállítani egy vetületből. Az eljárás bizonyítottan mindig minimális szélességű, 8-összefüggő képpel tér vissza.

A harmadik téziscsoportban a rekonstrukció azon változatát vizsgáltam, ahol két vetület mellett a rögzített szerkesztőelemmel előállított morfológiai váz is ismert. A téziscsoport eredményei két konferenciakiadványban [16, 22] és két folyóiratcikkben [23, 21] jelentek meg.

- III/1. Bebizonyítottam, hogy poliominók rekonstrukciója két vetület illetve a morfológiai váz ismeretében NP-teljes. Ezenfelül, ha eltekintünk a 4-összefüggőségtől, a probléma továbbra is NP-teljes. Akkor is NP-teljes a probléma, ha a morfológiai váz mellett csak egy vetületnek kell megfelelnie a rekonstrukciós eredménynek.
- III/2. Megadtam egy módszert a rekonstrukció függvényminimalizációs problémaként történő leírására. A rekonstrukcióhoz a szimulált hűtés három változatát használtam, és megmutattam, hogy egy elfogadható minőségű rekonstrukció már rövid időn belül, kevés iterációval is lehetséges, a probléma nehézsége ellenére.
- III/3. Megadtam a  $hv$ -konvex poliominók egy speciális, parametrikus alosztályát, és bebizonyítottam, hogy a két vetületből és morfológiai vázból történő rekonstrukció egyértelműsége csak a paraméterektől függ.

	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]	[21]	[22]	[23]
I/1.			•	•					
II/1.						•			
II/2.					•				
II/3.	•								
III/1.							•		•
III/2.								•	•
III/3.		•							

1. táblázat. A tézispontok és a Szerző publikációinak kapcsolata.

## Hivatkozások

- [1] P. Balázs, *Reconstruction of canonical  $hv$ -convex discrete sets from horizontal and vertical projections*, Lecture Notes in Computer Science, 5852, 280–288 (2009).
- [2] E. Balogh, A. Kuba, Cs. Dévényi, A. Del Lungo, *Comparison of algorithms for reconstructing  $hv$ -convex discrete sets*, Linear Algebra and Its Applications, 339(1–3), 23–35 (2001).
- [3] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, *Medians of polyominoes: A property for the reconstruction*, International Journal of Imaging Systems and Technology, 9, 69–77 (1998).
- [4] M.R. Berthold, C. Borgelt, F. Höppner, F. Klawonn, *Guide to Intelligent Data Analysis*, Springer, 2010.
- [5] S. Bilotta, S. Brocchi, *Discrete tomography reconstruction algorithms for images with a blocking component*, Lecture Notes in Computer Science, 8668, 250–261 (2014).
- [6] S. Brocchi, *A new approach for the reconstruction of object-based images in discrete tomography*, Fundamenta Informaticae, 135(1-2), 43–57 (2014).

- [7] S. Brocchi, *An object-based tomographic reconstruction algorithm exploiting interest points in image projections*, Proceedings of the 8th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), IEEE, 606–611 (2013).
- [8] S. Brunetti, A. Del Lungo, F. Del Ristoro, A. Kuba, M. Nivat, *Reconstruction of 4- and 8-connected convex discrete sets from row and column projections*, Linear Algebra and Its Applications, 339(1–3), 37–57 (2001).
- [9] V. Černý, *Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm*, Journal of Optimization Theory and Applications, 45(1), 41–51 (1985).
- [10] S.K. Chang, *The reconstruction of binary patterns from their projections*, Communications of the ACM, 14, 21–25 (1971).
- [11] M. Chrobak, C. Dürr, *Reconstructing hv-convex polyominoes from orthogonal projections*, Information Processing Letters, 69(6), 283–289 (1999).
- [12] A. Del Lungo, *Polyominoes defined by two vectors*, Theoretical Computer Science, 127, 187–198 (1994).
- [13] A. Del Lungo, M. Nivat, R. Pinzani, *The number of convex polyominoes reconstructible from their orthogonal projections*, Discrete Mathematics, 157(1–3), 65–78 (1996).
- [14] R.C. Gonzalez, R.E. Woods, *Digital Image Processing (3rd Edition)*, Prentice Hall, 2008.
- [15] N. Hantos, P. Balázs, *A fast algorithm for reconstructing hv-convex binary images from their horizontal projection*, Lecture Notes in Computer Science, 8888, 789–798 (2014).
- [16] N. Hantos, P. Balázs, *A uniqueness result for reconstructing hv-convex polyominoes from horizontal and vertical projections and morphological skeleton*, Proceedings of the 8th International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA), IEEE Signal Processing Society, 788–793 (2013).
- [17] N. Hantos, P. Balázs, *Eliminating switching components in binary matrices by 0-1 flips and columns permutations*, accepted for publication in Fundamenta Informaticae (2015).
- [18] N. Hantos, P. Balázs, *Fast heuristics for eliminating switching components in binary matrices by 0-1 flips*, Lecture Notes in Computer Science, 8827, 62–69 (2014).
- [19] N. Hantos, P. Balázs, *Random generation of hv-convex polyominoes with given horizontal projection*, Fundamenta Informaticae, 135(1–2), 103–115 (2014).
- [20] N. Hantos, P. Balázs, *Reconstruction and enumeration of hv-convex polyominoes with given horizontal projection*, Lecture Notes in Computer Science, 8258, 100–107 (2013).
- [21] N. Hantos, P. Balázs, *The reconstruction of polyominoes from horizontal and vertical projections and morphological skeleton is NP-complete*, Fundamenta Informaticae, 125(3-4), 343–359 (2013).
- [22] N. Hantos, P. Balázs, K. Palágyi, *Binary image reconstruction from two projections and skeletal information*, Lecture Notes in Computer Science, 7655, 263–273 (2012).



- [23] N. Hantos, S. Iván, P. Balázs, K. Palágyi, *Binary image reconstruction from a small number of projections and the morphological skeleton*, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, in press (2015).
- [24] G.T. Herman, A. Kuba (Eds.), *Advances in Discrete Tomography and Its Applications*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [25] R.W. Irving, M.R. Jerrum, *Three-dimensional data security problems*, SIAM Journal on Computing, 23, 170–184 (1994).
- [26] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt Jr., M.P. Vecchi, *Optimization by simulated annealing*, Science 220, 671–680 (1983).
- [27] H. Mannila, E. Terzi, *Nestedness and segmented nestedness*, KDD '07 Proceedings of the 13th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery and data mining, 480–489 (2007).
- [28] N. Metropolis, A.W. Rosenbluth, M.N. Rosenbluth, A.H. Teller, E. Teller, *Equation of state calculations by fast computing machines*, Journal of Chemical Physics, 21, 1087–1092 (1953).
- [29] T.M. Mitchell, *Machine Learning*, McGraw Hill, 1997.
- [30] H.J. Ryser, *Combinatorial properties of matrices of zeros and ones*, Canadian Journal of Mathematics, 9, 371–377 (1957).
- [31] J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, New York, 1982.
- [32] X. Wu, V. Kumar (Eds.), *The Top Ten Algorithms in Data Mining*, Chapman & Hall/CRC, 2007.
- [33] A. Zamuda, J. Brest, *Vectorized procedural models for animated trees reconstruction using differential evolution*, Information Sciences, 278, 1–21 (2014).