A matematikai problémamegoldás és problémaalkotás tanításáról

Doktori értekezés tézisei

Pintér Klára

Témavezető:
Dr. Kosztolányi József
egyetemi docens

Matematika-és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2012
Szeged

I. A téma időszerűsége, célkitűzések

1. Problémamegoldás, problémaalkotás a tanítóképzésben

A tanulók problémamegoldási képességének fejlesztése a NAT szerint a magyar matematika tanítás központi céljai közé tartozik. A kompetencia alapú tanítás, a gyakorlati problémák megoldása olyan pedagógust kívánnak, aki maga is otthon van a problémák megoldásában, és képes bizonyos hétköznapi helyzeteket a matematika nyelvén megfogalmazni. Ahhoz, hogy az új kihívásoknak megfelelni tudó, alkotó pedagógusokat képezzünk, a felsőoktatásban is nagy figyelmet kell fordítani a hallgatók problémamegoldási és problémaalkotási képességének fejlesztésére. A leendő tanároknak, tanítóknak tudatosan kell végigjárniuk a problémamegoldás lépéseit, alkalmazni a problémamegoldási stratégiákat ahhoz, hogy diákjaikat a sikeres problémamegoldásra nevelhessék. Tudniuk kell a problémák különböző reprezentációit megfogalmazni, a tanulók életkori sajátosságainak megfelelő tevékenységeket, képi megvalósításokat bemutatni. Ezek az ábrázolási módok segítik a problémák megértését, a megoldáshoz szükséges összefüggések megtalálását. A hallgatóknak különösen fontos a problémaalkotás módszereinek tanulása, gyakorlása, amelyek a folyamatosan változó körülmények között egyre nagyobb jelentőséggel bírnak.
A tanító szakos hallgatók képzésében választható tantárgyként szerepel a Problémamegoldás kurzus, amelynek tananyaga a hallgatók matematikai felkészültségének, és a tanítandó korosztály igényeinek figyelembe vételével készült a problémamegoldási és problémaalkotási képesség fejlesztése céljából. A tanító hallgatók számára korábban nem állt rendelkezésre célzottan a számukra lényeges elemeket fejlesztő, megfelelő nehézségű tananyag. A problémamegoldás fejlesztése sokrétű és hosszú folyamat, így nem elegendő egyetlen kurzus, szükséges, hogy emellett a problémaközpontú tanítás több tantárgyban is megjelenjen, például a Matematika tantárgy-pedagógia gyakorlatokon, Elemi matematika kurzusokon, a Kombinatorikai és valószínűségi játékok kurzuson, amelyek lehetőséget adnak a problémamegoldás és problémaalkotás gyakorlására.

2. A kutatás célja

A kutatás a tanító szakos hallgatók problémamegoldási és problémaalkotási képességeinek fejlesztését vizsgálja.
A kutatás céljai a következők:

- A problémamegoldás és problémaalkotás elméleti hátterének meghatározása, bemutatása.
- A hallgatók problémamegoldási és problémaalkotási képességeinek felmérése, a fejlesztés céljainak meghatározása, különböző csoportok problémamegoldási képességeinek összehasonlítása.
- Problémamegoldási és problémaalkotási képességfejlesztő kurzus kidolgozása, megvalósítása, értékelése.

- A problémamegoldás fejlesztésével kapcsolatos hipotézisek igazolása:
  - A tanító szakos hallgatók problémamegoldási képessége speciális kurzus során fejleszthető.
  - A problémamegoldási stratégiák taníthatóak a tanító hallgatóknak.
  - A tanító szakos hallgatók szöveges indoklása fejleszthető.
  - A tanító szakos hallgatók problémaalkotási képessége fejleszthető.

II. A kutatás elméleti keretei

A kutatás során áttekintettük a matematika didaktikai szakirodalmi hátteret, amely alapján kijelöltük a kutatás kereteit.
Kutatásaink során azt tekintjük **problémá**nak, amikor valamely cél elérésének útja a megoldó számára rejtve van [36].
A **problémák szintjei** az éppen tanult módszer alkalmazásától indulnak, ezután ismert módszerek közül kell választani a megoldónak. Alkalmanként több módszer kombinációjával kapható meg a megoldás, a legmagasabb szint az új megoldási módszer felfedezése. Igyekeztünk olyan fokozatosan nehezedő problémákat választani a hallgatók számára, amelyek gondolkodást igényeltek. Így végigjártuk mindegyik szintet, az ismert módszerek alkalmazásához a probléma átfogalmazására volt szükség, az új megoldási módszereket kísérletezés közben fedezhették fel, és kellő irányítással nem volt elérhetetlen számukra.
A kutatásunk alapja a Pólya-féle modell Schoenfeld-féle kiegészítéseinek [70] [78] alábbi változata, amely a problémamegoldás kognitív elemei mellett a metakognitív elemeket is tartalmazza.

1. lépés: Értsük meg a problémát, határozzuk meg a célt!

- Olvassuk el a szituációt, problémát, fogalmazzuk meg a saját szavainkkal.
- Képzeljük el, játsszuk el a szituációt.
- Válasszuk ki és jegyezzük le az adatokat és a feltételeket, vezessünk be jelöléseket, ha szükséges.
- Tisztázzuk, mit kell meghatározni.
- Rajzoljunk ábrát, diagramot, hogy szemléltessük, rendszerezzük az adatokat.
- Nézzük meg, van-e szükség további adatokra, vannak-e felesleges adatok.
- Ha lehetséges fogalmazzuk át a problémát, hogy világosabb legyen.

2. lépés: Tervezzük meg a problémamegoldási stratégiát.

- Nézzük meg, mi zavar bennünket a problémában, próbáljuk meghatározni a probléma kritikus elemét és fókuszáljunk erre.
- Próbálkozzunk egyszerűbb feladattal (számok csökkentésével, feltételek változtatásával).
- A rendszeres próbálkozások alapján keressünk szabályosságot.
- Próbáljuk részekre, lépésekre bontani a problémát.
- Keressünk hasonló, rokon problémát, és nézzük meg, annak megoldási stratégiája alkalmazható-e.
- Találjunk ki egy elindulást, és próbáljuk folytatni.
- Figyeljük, hogy hol tartunk, és mi a célunk, és próbáljuk közelíteni őket egymáshoz valamelyik irányból (akár a helyzet, akár a cél átfogalmazásával).

3. lépés: Hajtsuk végre a stratégiát, ellenőrizzük és módosítsuk, ha szükséges.

- Írjuk le a megoldás lépéseit, és magyarázzuk őket.
- Határozzuk meg a megoldáshoz szükséges eszközöket (módszereket, eljárásokat).
- Ellenőrizzünk lépésenként, hogy az esetleges hiba ne a végén derüljön ki.
- Ha a terv nem vezet eredményre, keressünk másik tervet.

4. lépés: Ellenőrizzük és járjuk körbe a megoldást.

- Bizonyosodjunk meg arról, hogy a megoldás elfogadható, ésszerű.
- Keressünk a megoldástól független módot az ellenőrzésre.
- Ellenőrizzük a következtetések helyességét.
- Írjuk le világosan a megoldást, értékeljük a megoldási módszert.
- Keressünk másik megoldási módszert.
- Keressünk következményeket, általánosítást.
- Tegyünk fel további kérdéseket, alkossunk új problémát az adatok, a feltételek változtatásával.

A problémamegoldási lépések (belső párbeszéd), heurisztikus stratégiák tanítása mellett kiemelten foglalkozunk a reprezentációk variálásával, a problémamegoldás metakognitív és affektív elemeivel.

Kutatásunk során a **problémaalkotás** változatos formáit alkalmazzuk.

- Játék, tevékenység alapján felvetődő kérdésekből alkotunk problémákat.
- A problémamegoldás folyamata közben lépéseket, új reprezentációkat fogalmazunk meg, amelyek a végső probléma megoldásához vezető részproblémák.
- A megoldott probléma folytatásaként a „Mi lenne, ha" stratégia alkalmazásával az adatok, feltételek változtatásával alkotunk probléma csokrot.
- Adott, vagy kitalált helyzethez alkotunk problémát.
- Adott megoldási módszerhez, megoldáshoz találunk ki problémát.

Minden alkalommal megoldás is társul a problémaalkotáshoz, így a problémaalkotás célja nem a minél több probléma kitalálása, hanem a megoldással együtt járó komplex tevékenység.

A **problémamegoldás fejlesztése** során figyelembe vettük a fejlesztés három aspektusát:

- Kognitív tevékenységek fejlesztése:
  - a probléma változatos reprezentációinak alkotása a megoldásnak legjobban kedvező forma megtalálása;
  - problématípusok tanítása;
  - problémamegoldási stratégiák tanítása.
- Metakogníció fejlesztése:
  - a megoldás lépéseinek tudatosságának fejlesztése;
  - a kontroll, az önellenőrzés, a megoldás folyamatának felügyeletének fejlesztése.
- Affektív aspektusok fejlesztése:
  - a tanulói aktivitás, önálló problémamegoldás ösztönzése;
  - a problémamegoldás sikeréhez való pozitív hozzáállás erősítése;
  - mintaadás a problémamegoldást ösztönző tanári magatartásra.

A problémamegoldás fejlesztése kiscsoportos foglalkozások keretében, kooperatív tevékenység közben hatékonyabban zajlik, így ezt a munkaformát is alkalmazzuk.

III. A kutatás módszere

A kutatás kezdetén felmérést készítettünk a hallgatók problémamegoldási képességeinek vizsgálata, a fejlesztés irányainak kijelölése céljából. Ennek megfelelően 10 témában folyt a fejlesztés, amelyeket a következőkben ismertetünk. A kutatást záró méréssel fejeztük be, amely a fejlesztés eredményeit mutatja.
A kutatás valódi osztálytermi körülmények között folyt, kis létszámú csoportokban. A hallgatók problémamegoldási viselkedését különböző szempontok alapján esettanulmányok során elemezzük. A minták adottak – a problémamegoldás kurzusra jelentkezett tanító szakos hallgatók – a minták mérete kicsi, így az adatok nem tekinthetők diagnosztikus méréseknek.

1. A felmérés

1.1. A felmérés céljai

- a hallgatók problémamegoldási képességének felmérése, a fejlesztendő területek meghatározása;
- különböző csoportok problémamegoldási viselkedésének összehasonlítása (tanár szakos egyetemisták, főiskolások, speciális matematika tagozatos gimnazisták, tanító szakos hallgatók fejlesztendő és kontroll csoportja).

1.2. A felmérés módszere

A hallgatók megoldottak egy 7 problémából álló feladatsort, a feladatok a problémamegoldás különböző aspektusaira vonatkoznak. Ezek közül a legfontosabbak:
- a probléma modelljének felismerése különböző bonyolultságú kontextusokban, a különböző reprezentációk hatásai;
- a hallgatók problémamegoldási módszerei, van-e igényük többféle megoldási módszer keresésére.
- a szöveges feladatok megoldási lépéseinek végrehajtása, indoklása;
- ellenőrzési stratégiák alkalmazása;
- bizonyítási igény;
- kreatív konstrukciók alkotása;
- új problémák alkotása.

1.3. A feladatok és értékelésük

Feladatlap

A feladatok megoldásának lényeges eleme a gondolkodási lépések leírása. Kérném, hogy ezeket akkor is írjuk le, ha a megoldás végül nem eredményes, hogy a gondolatok és azok esetleges kritikája nyomon követhető legyen.
Amennyiben lehetséges, keressünk többféle megoldási módot a feladatokra.

A feladatokat nem kell feltétlenül ebben a sorrendben megoldani.

1. Két kör, A és B sugara 4 illetve 3 egység. A két kör úgy metszi egymást, hogy mindkét metszéspontra igaz, hogy az A körnek a metszéspontba húzott érintője merőleges a B körnek a metszéspontba húzott érintőjére. Számítsuk ki, hogy mennyivel nagyobb területű az A körnek a B kör által le nem fedett része a B körnek az A kör által nem lefedett részénél!
2. Három könyvszekrényben könyvek vannak. A másodikban kétszer, a harmadikban háromszor annyi, mint az elsőben. Ha a harmadikból 460 könyvet átteszünk az elsőbe, ott 310 könyvvel lesz több, mint a másodikban. Hány könyv lesz ekkor az első könyvszekrényben?
3. Egy osztályban 18-an tanulnak angolt és 15-en franciát. Mennyivel többen tanulnak csak angolt, mint ahányan csak franciát, ha néhányan mindkét nyelvet tanulják, és más nyelvet senki sem tanul?
4. A középiskolák kosárlabda bajnokságában egy gimnázium csapata eddig 10 meccset megnyert, és 5 meccset elvesztett. Akkor jut be a döntőbe, ha az összes meccs legalább 4/5 részét (80%-át) megnyeri. Legkevesebb, hány meccse van még hátra, ahhoz, hogy bejusson a döntőbe?
5. Két szám különbsége 548. Mekkora lesz a különbségük, ha mindkét számból kivonunk 496-ot?
6. Laci azt mondja: „Gondoltam egy egész számra. Megszoroztam önmagával, és a szorzathoz hozzáadtam a gondolt számot. Az összeg 5-re végződik. Mire gondoltam?” Éva ellenkezik: „Ez lehetetlen.” Kinek van igaza és miért?
7. Feldarabolható-e egy négyzet 6 darab nem feltétlenül egybevágó négyzetre? A feladat feltételeinek változtatásával fogalmazzunk meg újabb feladatokat!

Az 1., 3. és 5. feladat modellje azonos: a különbség nem változik, ha a kisebbítendő és a kivonandó ugyanannyival csökken. A hallgatók a számfeladatban még felismerték a modellt, és nagy arányban helyesen oldották meg a feladatot. A halmazos példánál már kevesebb jó megoldás született, és ők sem mind vették észre a közös modellt. A körök területével kapcsolatos feladatnál alig akadt jó megoldás, ami azt mutatja, hogy a szövegben a felesleges információk elfedték a lényeges összefüggést.
A 2. feladatot viszonylag kevesen oldották meg szakaszokkal, és többen nem ellenőriztek, így nem jöttek rá, hogy a válasz az, hogy nincsen megoldása a feladatnak.
A 4. feladatot a tanítók főleg próbálgatással oldották meg, de többen a komplementerre áttéréssel okoskodtak sikeresen. A tanár szakos hallgatók inkább egyenletet írtak fel.
A 6. feladat megoldása során a tanító szakosok leginkább a végződésekkel ellenőriztek, a tanár szakosok nagyobb arányban igazolták állításaikat a paritás alapján.
A 7. feladat megoldásakor a konstrukció megtalálása után elvétve akadt, aki új kérdést tett volna fel, a kérdések megfogalmazása pontatlan, és a feltett kérdés többnyire nem jelentett valódi problémát [59].

1.4. A felmérés eredményei

A felmérés eredményei határozták meg a fejlesztés fő irányait.
A felmérés alapján a tanító szakos hallgatók problémamegoldási képességének leginkább fejlesztendő területei a következők:

- a problémamegoldás lépéseinek végigjárása;
- a problémamegoldás tudatossága;
- problémamegoldási stratégiák megismerése;
- többféle megoldási módszer keresése;
- problémák közös modelljének felismerése különféle reprezentációkban, új reprezentációk alkotása;
- a megoldások szöveges leírása;
- állítások indoklásának igénye és gyakorlata;
- új problémák alkotása.

A felmérésben szereplő csoportok összevetése alapján elmondható, hogy
- a tanító szakos hallgatók absztrakciós szintje alacsonyabb a tanár szakos hallgatókénál, kevésbé alkalmaznak szimbolikus módszereket, leginkább próbálgatással fognak hozzá a problémák megoldásához;
- a tanító szakos hallgatók aktívan állnak hozzá a probléma megoldásához, nem csak akkor fognak hozzá a probléma megoldásához, ha látják a végső megoldást;
- a kontroll csoport tagjai sikeresebben oldották meg a feladatokat, kreatívabbak voltak az új konstrukciókban.

2. A fejlesztés módszere

A problémamegoldás kurzuson a fejlesztést 10 témára tagoltuk.
A problémamegoldást fejlesztő témák esetében a hallgatók kaptak egy-egy feladatsort.
A feladatsorok felépítése:
- Mintaproblémák: az első néhány példa minta probléma, az első probléma könnyebb, a továbbiak azonban fokozatosan nehezednek a differenciálás, és a fejlődés érdekében. A mintaproblémákat minden alkalommal tevékenységből indulva a hallgatókkal közösen oldottuk meg. A tevékenységeket párban, néhány fős csoportokban végezték. A kísérletek alapján sejtéseket fogalmaztak meg, és próbáltak igazolni. A megoldások utóbb a hallgatók javaslatai alapján tanári irányítással születtek. A megoldás során tudatosítottuk a problémamegoldás lépéseit, és mintakérdésekkel fejlesztettük a hallgatóknak azt a képességét, hogy felügyeljék saját problémamegoldási tevékenységüket. A problémák megoldását a megoldás vizsgálata követte, amely nemcsak a módszer értékelését, hanem a probléma folytatását, új problémák alkotását is jelentette.
- Önállóan megoldandó problémák: a mintaproblémákat követő, többnyire azokhoz hasonló gyakorló feladatok, amelyeket a hallgatóknak házi feladatként otthon kellett megoldani, és írásban beadni. Ennek célja a tanult módszerek alkalmazása, az önálló aktivitás fejlesztése, a szöveges indoklások erősítése volt. A beadott megoldásokat minden témánál értékeltük, és levontuk a következtetéseket.
- Rejtvény: a kreativitás fejlesztése céljából.

A problémaalkotást fejlesztő témák esetén meghatároztuk a kiindulást, és bemutattuk a problémaalkotás módszereit közösen alkotva új kérdéseket, amelyekre a válaszokat is a hallgatókkal együtt találtuk meg. Ezeket a témákat is az órához kapcsolódó házi feladatok követték, amelyeket értékeltünk.

IV. A fejlesztés folyamata és értékelésük

1. A problémamegoldás lépései

- A téma leírása:
  Ebben a témában néhány probléma megoldása, boncolgatása során mutattuk be a problémamegoldás lépéseit különböző reprezentációkban, a tárgyi tevékenységtől a képi ábrázoláson át a szimbolikus megoldásig. Gyakoroltuk a problémamegoldás közbeni problémaalkotást, a probléma lépésekre bontását. Bemutattuk a problémamegoldás közben megfogalmazandó kérdéseket, amelyek a munkát ellenőrzik, előreviszik. A hallgatók gyakorolták a problémák megértését, az adatok, összefüggések lejegyzését különféle formákban, az ellenőrzési stratégiákat.
- A téma értékelése:
  - A tárgyi tevékenység nagyban segítette a probléma megértését és megoldását. A kísérletezés közben gazdagodó problématérben több reprezentációt fedeztek fel, ötleteket találtak a megoldáshoz.
  - A hallgatókat problémamegoldás közben segítette a lépések kérdés formájában való megfogalmazása. A „ Hol tartunk?” és „Mi a célunk?” kérdések segítették a hallgatókat, hogy értékeljék a helyzetet, és rövidebb idő alatt döntsenek a folytatásról, vagy más út kereséséről.
  - A hallgatók szívesen találtak ki új kérdéseket, a pontos megfogalmazásban eleinte többet kellett segíteni, később már kevesebbet. A hallgatókat érdekelte az általuk megfogalmazott probléma megoldása.
  - A hallgatók hasznosnak találták a problémamegoldási tapasztalatok összefoglalását a megoldás befejezéseként.

2. Kísérletezés, példák és ellenpéldák

- A téma leírása:
  A problémamegoldás folyamatában a kísérletezés jelentőségét mutattuk be. A hallgatókhoz közel áll a próbálgatás módszere, ezt fejlesztettük a tudatosság tekintetében, példák, ellenpéldák tervezett keresésében. A hallgatók felismerhették a sejtések igazolásának szükségességét, gyakorolhatták az indoklásokat. A hallgatók tapasztalatot szerezhettek arról, hogy mikor elég egy ellenpélda az állítás igazolására, és mikor van szükség következtetésre.
- A téma értékelése:
  A példák és ellenpéldák keresése a közös munka során sikeres volt, önállóan nehezebben ment. A példák alapján sikeresen tudtak sejtéseket megfogalmazni. Egyszerűbb bizonyításokat néhányan el tudtak végezni önállóan is, de az algebrai összefüggések alkalmazása már csak nagyon kevés hallgatónak ment.

3. Rajzoljunk!

- A téma leírása:
  A szimbolikus reprezentációk előtt célszerű módszereket megismerni a képi reprezentációk alkotására. A képi reprezentációk alkotását segítik az ábra rajzolás stratégiáját bemutató problémák. Az ábrák közül elsősorban a gráfokra, halmazábrákra, táblázatokra koncentráltunk, hiszen ezek már az alsó tagozatban is előfordulnak [61].
- A téma értékelése:
  - A hallgatók fogékonyak voltak az újdonságokra, szívesen foglalkoztak az új módszer többféle problémára való alkalmazásával.
  - A hallgatók számára nem volt könnyű a probléma átfogalmazása az új reprezentációra, majd a megoldás visszafordítása az eredeti helyzetre.
  - Láthatták, hogy ezek a reprezentációk hogyan gazdagították a megoldást azáltal, hogy megmutatták a probléma struktúráját, így felfedezhették, ha a problémát nem lehet megoldani, vagy több megoldás is létezik.
  - A házi feladatok alapján megállapítható, hogy a hallgatók jól alkalmazták a halmazábrát, a táblázatos reprezentációt, és a gráfokat az összeszámlálási problémákra, azonban nincsenek hozzászokva a szöveges indoklások leírásához.

4. Szöveges feladatok megoldása szakaszokkal

- A téma leírása:
  Az alsó tagozatos szöveges feladatok legfontosabb megoldási stratégiája a szakaszok rajzolása, viszont a hallgatóknak nehézséget jelent az alkalmazása. Ezt a stratégiát nehezebb feladatok tekintetében is gyakoroltuk. [66]. Szakaszos modellhez szövegeket alkottunk.
- A téma értékelése:
  - A hallgatók számára sokszor nehézséget jelent a szakaszos megoldás, azt gondolják, hogy egyenlettel könnyebben boldogulnak, így szívesebben alkalmazzák az egyenleteket. Kiderült azonban, hogy a bonyolultabb feladatoknál az egyenletek felírása is nehézségekbe ütközik. Ha könnyebb feladatokon nem gyakorolják a szakaszos ábrázolást, akkor a nehezebbeknél sem tudják használni a módszert. Ezért erőfeszítéseket tettünk arra, hogy könnyebb feladatoknál esetleg az egyenlet felírása után rajzzal, következtetéssel is oldják meg a problémát. Sajnos az önálló feladatmegoldás során csak néhány esetben láttunk próbálkozást erre, amelyek azonban sikertelenek voltak.
  - Megfigyelhető, hogy amint az egyenletek felírása, szakaszok rajzolása nehézségekbe ütközik, előkerül a próbálgatás. Fontos tudatosítani a hallgatókban azt, hogy a próbálgatás a probléma megértésének, sejtések alkotásának fontos módszere. Azonban ne elégedjenek meg egy megfelelő válasz megtalálásával, törekedjenek a teljes megoldásra, a következtetések megtalálására, hiszen az alsó tagozatos gyerekek gondolkodásának fejlesztését is ezek szolgálják.
  - A szakaszos ábrázolási mód elsajátítását segítette, hogy többféle megoldási módot mutattunk a problémákra, a hallgatók ötleteit javítottuk, befejeztük akkor is, ha nekik nem sikerült. Így láthatták, hogy nem csak egy jó módszer létezik egy probléma megoldására, bátran induljanak el, és próbálják befejezni az ötleteiket.
  - A legnagyobb nehézséget az arányokkal kapcsolatos összefüggések ábrázolása jelentette.

5. Gondolkodjunk visszafelé!

- A téma leírása:
  A visszafelé gondolkodás stratégiája már az alsó tagozaton is megjelenik, ezért fontos hogy a hallgatók ismerjék, és tudják alkalmazni nehezebb problémák esetén is. A visszafelé gondolkodás stratégiájának többféle ábrázolási módját - buborékok, táblázat, szakaszok - is bemutattuk [63].
- A téma értékelése:
  - A hallgatók a visszafelé gondolkodás stratégiáját műveletekkel könnyebben, állapotokkal nehezebben alkalmazták.
  - A feladatok lépésekre bontását, a lépések tudatosítását párbeszédes módszerrel is fejlesztettük, ami a jövendő pedagógusok számára különösen fontos.
  - Még mindig sokan dolgoztak nyitott mondatokkal a képi ábrázolás helyett, holott éppen a visszafelé számolásos feladatoknál több lépés esetén elrettentően hosszúvá váltak a nyitott mondatok.

6. Alkossunk problémákat Harry Potter nyomán!

- A téma leírása:
  Példát mutattunk arra, hogy a gyerekek által kedvelt olvasmányok is alapot adhatnak a problémaalkotásra. Egy, a könyvben szereplő rejtvényhez alkottunk feladatokat, és megrajzoltuk a könyvből hiányzó ábrát, ami szükséges ahhoz, hogy az olvasó maga is megoldhassa a rejtvényt [62].
- A téma értékelése:
  - A közös munka során tapasztalták a kérdések pontos megfogalmazásának szükségességét.
  - A hallgatók egy része a minta alapján szívesen és ötletesen alkotott feladatokat.
  - Voltak hallgatók, akik idegenkedtek az önálló feladatalkotástól, bár a megoldások során ügyesek voltak.
  - A hallgatók számára újdonság volt a problémaalkotási tevékenység, bár a tanítói munka során nagyon hasznos akár a különböző tantárgyak kapcsolatának erősítése céljából is.

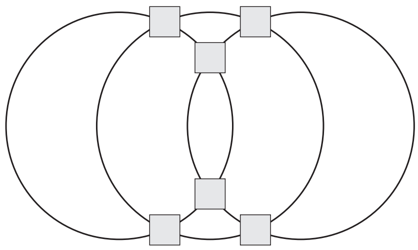
7. Problémacsokrok – mi lenne, ha?

- A téma leírása:
  A problémaalkotás „Mi lenne, ha…” stratégiáját mutattuk be. Az adatokat, feltételeket változtattuk, új kérdéseket találtunk ki, így egy problémából indulva „kis kutatást” folytattunk az adott témában.
- A téma tartalma:
  Ezt a témát röviden ismertetjük, hogy példát mutassunk a fejlesztő foglalkozásokra.

Bűvös körök

1. Az eredeti probléma

Rajzoljunk három kört az ábra szerint! Írjunk számokat a körök metszéspontjaiba, és korönként adjuk össze őket! A köröket bűvös köröknek nevezzük, ha mindegyik körön ugyanannyi a számok összege. Helyezzük el az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat a három kör hat metszéspontjában úgy, hogy bűvös köröket kapjunk!



Találtunk több megoldást. Észrevettük, hogy a számokat három párba kell rendezni úgy, hogy az egy párban levő számok összege minden párra ugyanannyi legyen.

További problémák

1. **Hány** olyan **elrendezés**e van a számoknak, amely bűvös köröket ad?
2. **Változtassuk a számokat**.
   Található-e más hat szám, amelyeket az eredeti négyzetekbe írva bűvös köröket kapunk? Találtunk szükséges és elégséges feltételt a számok összegére, amelyeket a négyzetekbe lehet írni úgy, hogy bűvös köröket kapjunk.
3. **Változtassuk a négyzetek kitöltésének módszerét**.
   a) Az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat hat kártyára írtuk (minden kártyára egy számot), és ezeket a kártyákat egy kalapba raktuk. Véletlenszerűen húzunk kártyát a kalapból, és beírjuk a rajta levő számot az első négyzetbe. Visszatevés nélkül húzzuk a kártyákat, és sorban kitöltjük a négyzeteket a kártyákon levő számokkal. Mi a valószínűsége, hogy bűvös köröket kapunk?
   b) A négyzetekbe írt számokat úgy kapjuk, hogy sorban dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége, hogy bűvös köröket kapunk?
   c) Dobunk hat számot szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége, hogy elhelyezhetők a négyzetekben úgy, hogy bűvös köröket kapjunk?
   Melyik esetben legnagyobb a valószínűség?
   d) Keressünk hat különböző Fibonacci számot, amelyeket a négyzetekbe írva bűvös köröket kapunk.
   Bebizonyítottuk, hogy nem létezik hat ilyen Fibonacci szám.
4. **Változtassuk a körök számát négyre.**
   Írjuk az 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 számokat négy kör metszéspontjaiba úgy, hogy a négy kör bűvös kör legyen.
5. **Keressünk másik 12 számot**, amelyeket a körök metszéspontjaiba írva bűvös köröket kapunk.
6. **Változtassuk a köröket egyenesekre**.
   Írjuk az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat négy egyenes metszéspontjaiba úgy, hogy az egy egyenesen levő számok összege minden egyenesre ugyanannyi legyen. Azt kaptuk, hogy hat különböző számot nem lehet elhelyezni úgy, hogy az egyeneseken levő számok összege ugyanannyi legyen.

7. **Változtassuk a műveletet**.
   Írjuk az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számokat az eredeti négyzetekbe úgy, hogy az egy körön levő számok szorzata mindegyik körre ugyanannyi legyen. Ez lehetetlen, mert a párok szorzata egyenlő kell legyen, és az 5, ami prímszám csak egyszer szerepel. Található hat különböző szám, amelyek szorzásra bűvös köröket adnak, például: 1; 2; 3; 4; 6; 12.

- A téma értékelése:
  A hallgatók a közös munkában jól dolgoztak, de hasonló „kis kutatások” önálló végrehajtására még nem vállalkoztak. Kevesen voltak, akik megfogalmaztak sejtéseket, még kevesebben oldottak meg új problémákat.

8. Egy modell – különféle reprezentációk

- A téma leírása:
  - A közös modellel rendelkező problémák többféle reprezentációját mutattuk be, ami lehetővé teszi, hogy az újabb problémáknál felismerjük a hasonlóságot, és tudjuk alkalmazni a megismert megoldási módot.
  - Gyakoroltuk a szöveges feladatok modelljeinek műveletekkel való leírását.
  - A bemutatott példák után a hallgatóknak gyűjteniük kellett adott modellre feladatokat, ami fontos tanári tevékenység.
- A téma értékelése:
  - A műveletsorokra vonatkozó szövegek értelmezése nem volt mindig egyszerű a hallgatók számára.
  - Feltűnő a különbség az összeadás és a szorzás, mint modell felismerése között. Az összeadás és kivonás értelmezése még nem okozott gondot, de a szorzás, osztás, törtrész-számítás már többeknek nem sikerült.
  - Kevesen találtak jó feladatokat adott modellhez.

9. Alkossunk játékokat matematika problémákból!

- A téma leírása:
  Adott feladattípusokhoz, összeszámlálási feladatokhoz, skatulya-elvvel, színezéssel megoldható feladatokhoz mutattunk módszereket, amelyekkel a problémákból játékot alkothatunk. [62].
- A téma értékelése:
  A játék segítette a problémák mélyebb megértését, a problémák megoldási ötletének megtalálását. A hallgatók önállóan még nem tudtak játékot alkotni.

10. Szerepjáték a problémaalkotás, problémamegoldás lépéseire

- A téma leírása:
  A szerepjátékot a hallgatók 6-7 fős csoportokban játsszák. A problémamegoldás lépéseinek megfelelő szerepeket a hallgatók alakítják, így megismerkednek a problémaalkotás nehézségeivel, tudatosulnak a problémamegoldás lépései.

A szerepek:
Kapitány: meghatározza a szabályokat, és ellenőrzi azok betartását.
Fürkész: kérdez:
– felteszi a problémát adó kérdést,
– megkérdezi az adatokat,
– segíti, irányítja a Bölcsek munkáját (Mi a zavaró? Mi hiányzik? Jó irányban haladunk? Miért jó, amit csináltunk?)
Számítógép:
– megadja a kért adatokat, feltéve, hogy azokat nem lehet kikövetkezni,
– elvégzi a Bölcsek által kért számításokat.
Bölcsek: megoldják a problémát.
Írnok: feljegyzi a csoport tevékenységét, a Kapitány szabályát, a kérdéseket, a válaszokat, a megoldásokat.

- A téma értékelése:
  - A problémamegoldás különböző lépéseinek megszemélyesítése jó hatással van a problémamegoldás és problémaalkotás tudatosítására, a szerepeknek megfelelő lépések szétválasztására. Így több figyelmet fordítottak a hallgatók azokra az elemekre, például a megoldás leírására, ellenőrzésre, új kérdések kitalálására, amelyeket korábban többnyire elhanyagoltak.
  - Még jobban ki kell emelni a metakognitív irányításra vonatkozó kérdéseket, az indoklások leírását.
  - A kooperatív tevékenység ösztönzően hatott a hallgatókra, élvezettel dolgoztak együtt, vitatkoztak, véleményt cseréltek, meghallgatták egymást, szétosztották a feladatokat és építettek egymás munkájára.
  - A maguk által alkotott szituációkban szívesen oldottak meg matematikai problémákat, a munkamódszer erősen motiváló hatású.
  - A szerepjátéknak ez a formája a problémamegoldásra, problémaalkotásra más kurzusokon is alkalmazható lenne.

V. Záró mérés

1. A záró mérés célja

A kurzus végén a hallgatók megoldottak egy feladatsort, melynek célja a kezdeti méréshez hasonlóan a hallgatók problémamegoldási képességeinek felmérése, valamint a fejlesztett és a kontroll csoport eredményeinek összehasonlítása volt.

2. A záró mérés módszere

A záró mérés egy feladatsor megoldásából állt, amelynek feladatai nem egyszerű rutinfeladatok voltak. Részben közepes nehézségű problémák, amelyek a megfelelő stratégia kiválasztását és új helyzetben való alkalmazását kívánták. A problémák másik fele nehezebb, megoldásuk több lépést és nehezebb reprezentációk alkalmazását kívánta. Ezzel azt szerettük volna felmérni, hogy a fejlesztő kurzus során milyen szintre sikerült eljuttatni a hallgatókat. Nem

volt célunk a kezdeti méréshez nagymértékben hasonló feladatokkal azok megtanítását kimutatni, inkább a szemlélet változására voltunk kíváncsiak.
A feladatlap a következő képességek felmérését szolgálta.

- különböző reprezentációk értelmezése, alkotása adott probléma kapcsán;
- problémák lépésekre bontása, a belső párbeszéd megfogalmazása és szöveges leírása;
- állítások szöveges indoklása;
- szakaszos ábrázolás stratégiájának alkalmazása;
- visszafele gondolkodás stratégiájának alkalmazása;
- új konstrukciók alkotása;
- új problémák alkotása.

3. A feladatok és értékelésük

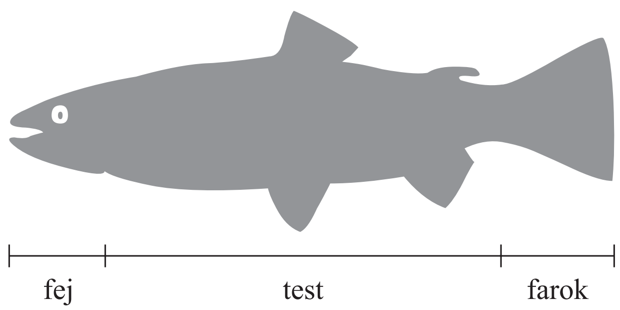
1. Egy *ABCD* négyzet alakú papír egyik oldala fehér, a másik fekete. A négyzet területe 3 dm^2. Az *A* csúcsot az *AC* átló *A’* pontjára hajtjuk úgy, hogy a látható részek fele fehér, fele fekete. Mekkora távolságra van az *A’* pont a hajtásvonaltól?

2. Két háromjegyű szám összege 1000. Meg lehet-e mondani, mennyi a két szám számjegyei összegének összege, ha egyik számjegy sem 0?

3. Jankának volt egy zsák golyója. A felét és még 2 darabot Borinak adott. Utána Blankának adta a maradék felét és még 2 darabot. Végül Teri kapta a maradék felét és még 2 darabot. Jankának így 1 golyó maradt a zsákjában. Hány golyó volt benne eredetileg?

4. Robi, Csaba és Dénes kártyáznak. Megegyeztek abban, hogy minden játék után a vesztes egyenlően szétosztja a pénzét a másik két játékos között. Három játék alatt mindegyikük egyszer veszített. Robinak 400 forintja lett, Csabának1000 forintja lett, míg Dénesnek nem maradt pénze. Ki veszítette el az első játékot?
5. Egy dobozban almák és körték vannak. Ugyanannyi alma kukacos, mint ahány körte. Az almák két-harmada, a körték három-negyede kukacos. A dobozban levő gyümölcsök hányad része kukacos?

6. Egy halnak a farka olyan hosszú, mint a feje és a teste hosszának a negyede. A teste három-negyede az egész hal hosszának. Ha a feje 4 cm hosszú, akkor milyen hosszú az egész hal?



7. Mutassuk meg, hogyan lehet kimérni 6 cm-t, ha van egy téglalap alakú papírunk, amelynek két különböző oldala 17 cm és 22 cm!

8. A naptár egy lapján válasszuk ki a dátumoknak egy 3x3-as tömbjét, amelyben 9 szám van. Szorozzuk össze az átellenes sarkokban levő számokat. Mennyi az abszolút értéke a két szorzat különbségének?

November						
Vasárnap	**Hétfő**	**Kedd**	**Szerda**	**Csütörtök**	**Péntek**	**Szombat**
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

Az 1. feladatban a törtrészek és a geometriai összefüggések felismerése nagy nehézséget okozott.
A 2. feladatot a kontroll csoport tagjai főleg formálisan oldották meg, míg a fejlesztett csoport tagjai közül többen szöveggel indokoltak.
A 3. feladat megoldása során sikerrel alkalmazták a visszafelé gondolkodás stratégiáját, a kontroll csoport tagjai mind buborékokkal, a fejlesztett csoport tagjai szöveggel, buborékokkal, szakaszokkal.
A 4. feladatot a fejlesztett csoport tagjai nagyrészt táblázattal visszafelé gondolkodva oldották meg, míg a kontroll csoportból jóval kevesebben voltak sikeresek.
Az 5. és 6. feladat a fejlesztett csoport tagjainak sikeresebb volt, mint a kontroll csoportnak, és többen jól rajzoltak szakaszokat, fejlődtek az arányok ábrázolása terén.
A 7. feladat kreatív konstrukció alkotását várta, amiben a fejlesztett csoport már fejlődött a kezdetekhez képest. A reprezentációk közti átmeneteket kevesen követték.
A 8. feladatban a számításokkal kapható sejtést szimbolikus módszerrel kellett volna igazolni, ami alig sikerült. Viszont a fejlesztett csoport tagjai már kevesebben fogadták el tényként a sejtést bizonyítás nélkül. A naptár lapja sok lehetőséget kínált új problémák alkotására, amit a fejlesztett csoport tagjai ki is használtak. A leírt problémákat többnyire meg is oldották.

4. A záró mérés eredményei

A záró mérés során összehasonlítottuk a fejlesztett és a kontroll csoport eredményeit, ami a fejlesztés hatásait mutatja.

- A fejlesztett csoport eredményei:
  - a közepesen nehéz feladatok megoldásával jól boldogultak;
  - a szöveges feladatokat többen ábrázolták szakaszokkal;
  - a visszafelé gondolkodás stratégiáját sikeresen alkalmazták;
  - a feladatok szöveges indoklása fejlődött;
  - javult az arányokkal kapcsolatos problémák megoldási sikeressége;
  - fejlődött az új konstrukció alkotása;
  - nagyon sokat fejlődött az új problémák alkotása, a problémák mennyisége és minősége is javult.
- A fejlesztés hatásai:
  A fejlesztett csoport tagjai a kontroll csoporthoz képest nagyobb arányban
  - oldották meg sikeresen a feladatokat;

– írtak szöveges indoklásokat a megoldásokhoz;
– rajzoltak szakaszokat a szöveges feladatokhoz;
– szemléltették táblázattal a visszafelé gondolkodási feladatot;
– ellenőrizték a megoldásokat;
– alkottak új problémákat, és oldották meg azokat.

VI. Konklúzió

1. A hipotézisek igazolása

A kutatás igazolta a hipotéziseket:

- A tanító szakos hallgatók problémamegoldási képességének fejlesztésére kidolgozott kurzus során a hallgatók problémamegoldási képessége fejlődött, nehezebb feladatokat is sikeresebben oldottak meg. A hallgatók pozitívan álltak hozzá a problémák megoldásához, igényelték a tárgyi tevékenységgel szemléltetést, kísérletezést, saját maguk is kitaláltak hasonló tevékenységeket. Meghallgatták, továbbfejlesztették egymás ötleteit, képesek voltak egyéni gondolkodás után közös munkára.
- A hallgatók sikeresen alkalmazták a visszafelé gondolkodás stratégiáját, és sokat fejlődtek a szakaszos ábrázolás stratégiájának alkalmazásában.
- Fejlődött a megoldások leírása, a hallgatók több szöveges indoklást írtak.
- A tanító szakos hallgatók problémaalkotási képessége sokat fejlődött, képesek lettek új problémákat találni adott helyzethez, vagy adott probléma folytatásaként. Az új kérdések megfogalmazása is pontosabb, lényegretörőbb lett.

2. Továbblépés

A problémamegoldási képesség fejlesztését feltétlen folytatni kellene.
Egyrészt további stratégiák tanításával, például színezés, paritás, invariáns módszer alkalmazásával megoldható problémákkal [60].
Az eredmények azt mutatják, hogy a tanító szakos hallgatók további fejlesztése szükséges a szakaszokkal való ábrázolás, és a bizonyítások terén. A szakaszos ábrázolás segítségével tudják az alsó tagozatos tanulók megoldani a szöveges feladatokat, indokolni a számítási lépéseket, ezért a hallgatóknak is biztonsággal el kell sajátítaniuk ezt a stratégiát.
Ugyancsak az általános iskolai matematika tananyag jellegzetessége, hogy az indoklások konkretizált bizonyítások, a következtetéseket nem egy-két példából vonjuk le. Ez az igény olyan pedagógusokat feltételez, akik képesek a magyarázatokra, az állítások bizonyítására.
Ezek az igények túlmutatnak egy kurzus keretein. A tanító szakos hallgatók problémamegoldási képességeinek fejlesztését összehangoltan több tantárgyon belül kell folytatni annak ellenére, hogy sajnálatosan kevés idő áll rendelkezésre.
A problémaalkotás sikerrel alkalmazható például kombinatorika problémák esetén, amikor egy-egy modell különböző reprezentációi nagy szerepet játszanak a megoldásban [65], vagy szöveges feladatoknál, amikor adott szakaszokhoz találunk ki szövegeket.

A problémamegoldás fejlesztésének másik iránya az általános iskolai tanulók fejlesztése, aminek lényeges eleme a gondolkodásra nevelés, a felfedeztető tanítás, amiben a tanár irányító szerepe nagyon fontos. A tananyag kidolgozása is erősíti a problémamegoldási képesség fejlesztését. Erre példa a szöveges feladatok megoldási módszereinek, lépéseinek tanítása [64]. A problémamegoldási képesség fejlesztését minden anyagrészben megvalósíthatjuk a reprezentációk, kérdésfeltevések változatosságával. A tanulók hozzáállását is pozitívan befolyásolja a problémák alkotása, a kérdésfeltevések ösztönzése.

A szerzőnek az értekezés tárgyköréhez kapcsolódó publikációi

[59] Pintér Klára: A tanító szakos hallgatók probléma megoldási képességének felmérése, XIV. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia 2010, Tanulmánykötet, Győr 2011,

[60] Pintér Klára: Egy ötlet: Színezzük ki! Polygon, III. kötet 2. szám 102-115. 1993. november

[61] Pintér Klára: Egy ötlet: Rajzoljunk gráfokat! Polygon, VIII. kötet 2. Szám 51-71, 1998. December

[62] Pintér, Klára: The secret of Harry Potter, Integrated Programmes for Lower-Primary Teacher Training, Mathematics and Fostering Talent, ed. Benkő Zsuzsanna, Juhász Gyula Felsőoktatási Kiadó, Szeged, 2004, 95-99.

[63] Pintér Klára: Egy ötlet: Fordítsuk meg! Polygon, XIV. kötet 1. szám 71-82. 2005. május

[64] Pintér Klára: Hogyan oldjunk meg feladatokat? Sokszínű Matematika 6. osztály, Mozaik Kiadó, 2007, Szeged, 62-97

[65] Pintér Klára: A kombinatorika tanítása XII. Apáczai Napok 2008, Tanulmánykötet 203-210.

[66] Pintér Klára: A szöveges feladatok tanítása XIII. Apáczai Napok 2009, Tanulmánykötet 468-475.

[67] Pintér Klára: How to create games from mathematical problems. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, Vol 21, Number 1, January 2011, p. 73-90

[68] Pintér Klára: A problémamegoldó képesség fejlesztési lehetőségei Pólya nyomán a Sokszínű Matematika felső tagozatos tankönyveivel. Matematika Tanítása, 2011, XIX. évf. 1. szám 24-28

Irodalomjegyzék

[1] Ambrus András: A konkrét és vizuális reprezentációk szükségessége az iskolai matematikaoktatásban. http://xml.inf.elte.hu/~mathdid (2007. 03.21.)

[2] **Averbach, B.; Chein, O.: Problem Solving Through Recreational Mathematics. Dover Publications, Mineola, New York, 2000. p. 96**

[3] Behr, M., Lesh, R.,& Post, T.: Rational number ideas and the role of representational systems. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association,Los Angeles, April, 1981.

[4] Blake, R. N.: 1089: An Example of Generating Problems. Mathematics Teacher, January, 1984, p 14-19

[5] **Billstein, R.; Libeskind, S.; Lott, J. W.: A Problem Solving Approach to Mathematics. Pearson Educational International, Boston. 2010. p.1. p.13.**

[6] **Bogomolny, A. : Breaking Chocolate Bars, Cut the Knot! www.cut-the-knot.org/ctk/chocolad.shtml 2008.**

[7] Bonawitz, E. et al..: The double-edged sword of pedagogy: Instruction limits spontaneous exploration and discovery. Cognition, doi: 10.1016/j.cognition.2010.10.001.

[8] Bonotto, C.: Engaging Students in mathematical Modelling and Problem Posing Activities. Journal of Mathematical Modelling and Application 2010, Vol. 1, No. 3, 18-32

[9] Branca, N. A. (2009). Mathematical Problem Solving: Lessons from the British Experience In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 71-80). Routledge, New York and London 2009.

[10] **Briggs, W.: Ants, Bikes and Clocks. SIAM, Philadelphia, 2005. p.20**

[11] Brown, S. I., Walter, M.: The art of problem posing. NJ: Lawrence ErlbaumAssociates 1990.

[12] Bruner, J. S.: The act of discovery. *Harvard Educational Review* 1960, **31**, pp.21-32.

[13] Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D.& Sriraman, B.: A empirical taxonomy of problem posing processes. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 2005, 37(3), 143-158.

[14] Cifarelli, V. V. and Cai, J.. A Framework for Examining Mathematical Exploration of Problem Solvers.

[15] Crespo, S.: Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices. Educational Studies in Mathematics 2003, **52**: 243-270.

[16] Csíkos Cs.: A szöveges feladatok szerepe a matematikai gondolkodás fejlesztésében. Tanítás-tanulás 2008, 6 1.sz.26-27; 3.sz. 28-29;5. sz. 30-31; 2009, 7. sz. 32-33; 9. sz. 30-31

[17] **Csordás M.; Konfár L.; Kothencz Jánosné.; Kozmáné Jakab Á.; Pintér K.; Vincze Istvánné: Sokszínű Matematika 6. osztály. Mozaik Kiadó, Szeged, 2007 73. oldal**

[18] Dörner, D.: Emotion und prolemlösendes Denken. In Mandl, H. und Huber, G.: Emotion und Kognition, München, 1983.

[19] Einstein, A., & Insfeld, L.: The evolution of physics (p. 92). New York: Simon and Schuster, 1938.

[20] **Engel, A.: Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag New York, 1998. p. 9. p.61.**
[21] English, L.D.: Children's Problem posing Within Formal and Informal Contexts. Journal for Research in Mathematics Education, 1998, Vol. 29, No.1, 83-106
[22] Flavell, J. H.: Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1976.
[23] Flavell, J. H., & Wellman, H.: Metamemory. In R. Kail & J. Hagen (Eds.), *perspectives ont he development of memory and cognition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1977.
[24] Graeber, A. O.: Problem solving: Managing it all. *The Mathematics Teacher,* **87**. 3. sz. pp. 195-199, 1994.
[25] Greeno, J. G.: Basic cognitive processes. Open University Press, Milton Keyness, 1975.
[26] Greeno, J. G.: Natures of problem solving abilities. In: Estes, W.K.(szerk.): Handbook of learning and cognitive processes. Vol. 5. Erlbaum, Hillsdale. N. J., 1978.
[27] **Honsberger, R.: More Mathematical Morsels. Washington DC: Mathematical Association of America, 1991**
[28] **Howe, R.: Hermione Grangers. Mathematics Teacher,Vol. 95, No.2 p 86-89.**
[29] Jackson, K. F.: The art of solving problems: Bulmershe-Comino Problem Solving Project. Reading: Bulmershe College, 1983.
[30] Johnson, D. M.: Systematic introduction to the psychology of thinking. Harper and Row, New York, 1972.
[31] Kahney, H.: Problem solving: A cognitive approach. Open University Press, Milton Keynes, 1986.
[32] Kersh, M. E. and McDonald, J.: How do I solve thee? Let me count the ways! Arithmetic Teacher, October 1991, pp. 38-41.
[33] Kilpatrick, J.: Problem formulating: Where do good problems come from? In: A. Schoenfeld (Ed.) Cognitive science and mathematics education, Hillsdale, NJ: 1987, Erlbaum, 123-147
[34] Kilpatrick, J.: A retrospective Account of the Past Twenty-five Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 1-16). Routledge, New York and London, 2009.
[35] Krulik, S. and Rudnick J. A.: For better problem solving and reasoning. Arithmetic Teacher, February 1994, pp. 334-338.
[36] Lénárd Ferenc: A problémamegoldó gondolkodás Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.
[37] Lester, F. K. Jr.: Musings about Mathematical Problem-Solving Research: 1970-1994. Journal for Research in Mathematics Education 1994, Vol.25, No. 6, 660-675
[38] Lester, F. K. Jr.: Methodological Consideration in Research on Mathematical Problem-Solving Instruction. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 41-69). Routledge, New York and London, 2009.
[39] Llinares, S.; Krainer, K.: Mathematics (student) Teachers and Teacher Educators as Learners. In A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 429-459). Sense Publishers, Rotterdam/Taipei, 2006.
[40] **Mathematics Teacher Vol. 86, No. 1 January 1993, Calendar 8**
[41] **Mathematics Teacher, Vol. 86, No. 1 January 1993 Calendar 14**
[42] **Mathematics Teacher Vol. 92, No. 1 January 1999 Calendar 2**
[43] **Mathematics Teacher, Vol. 92, No. 5 May 1999 Calendar 20**

[44] **Mathematics Teacher Vol. 98, No. 2 September 2004, Calendar 3**
[45] **Mathematics Teacher Vol. 98, No. 6 February 2005, Calendar 20**
[46] **Mathematics Teacher Vol. 102, No. 4 November 2008, Calendar 4**
[47] **Mathematics Teacher Vol. 102, No. 6 February 2009, Calendar 9**
[48] **Mathematics Teacher Vol. 103, No. 3 October 2009, Calendar 1**
[49] **Mathematics Teacher Vol. 103, No. 3 October 2009, Calendar 18**
[50] Mason, J.: Thinking mathematically. Addison Wesley, Amsterdam, 1961.
[51] Mayer, R. E.: The psychology of mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research*. Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1982.
[52] Mayer, R. E.: Implications of Cognitive Psychology for Instruction in Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 123-138). Routledge, New York and London, 2009.
[53] Molnár Gyöngyvér: Problémamegoldás és probléma alapú tanítás. Iskolakultúra, 2004, 2. sz. 12-19
[54] NAT 1995 A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 130/1995. (X.26.) Korm. rend.
[55] NAT 2003 A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. (XII.17.) Korm. rend.
[56] NAT 2007 A Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 134/2007. (XII.17.) Korm. rend.
[57] Noddings, N.: Small Groups as a Setting for Research on Mathematical Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 345-360). Routledge, New York and London, 2009.
[58] Ohlsson, S.: Informationprocessing explanations of insight and related phenomena. In: Keane, M. T. and Gilhooly, K. J.: *Advances int he psychology of thinking. Volume one.* Harvester Wheatsheaf, Hertfordshire. 144, 1992.
[59] Pintér Klára: A tanító szakos hallgatók probléma megoldási képességének felmérése, XIV. Apáczai-napok Nemzetközi Tudományos Konferencia 2010, Tanulmánykötet, Győr 2011,
[60] Pintér Klára: Egy ötlet: Színezzük ki! Polygon, III. kötet 2. szám 102-115. 1993. november
[61] Pintér Klára: Egy ötlet: Rajzoljunk gráfokat! Polygon, VIII. kötet 2. Szám 51-71, 1998. December
[62] Pintér, Klára: The secret of Harry Potter, Integrated Programmes for Lower-Primary Teacher Training, Mathematics and Fostering Talent, ed. Benkő Zsuzsanna, Juhász Gyula Felsőoktatási Kiadó, Szeged, 2004, 95-99.
[63] Pintér Klára: Egy ötlet: Fordítsuk meg! Polygon, XIV. kötet 1. szám 71-82. 2005. május
[64] Pintér Klára: Hogyan oldjunk meg feladatokat? Sokszínű Matematika 6. osztály, Mozaik Kiadó, 2007, Szeged, 62-97
[65] Pintér Klára: A kombinatorika tanítása XII. Apáczai Napok 2008, Tanulmánykötet 203-210.
[66] Pintér Klára: A szöveges feladatok tanítása XIII. Apáczai Napok 2009, Tanulmánykötet 468-475.
[67] Pintér Klára: How to create games from mathematical problems. Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, Vol 21, Number 1, January 2011, p. 73-90

[68] Pintér Klára: A problémamegoldó képesség fejlesztési lehetőségei Pólya nyomán a Sokszínű Matematika felső tagozatos tankönyveivel. Matematika Tanítása, 2011, XIX. évf. 1. szám 24-28
[69] **Pintér Lajos: Analízis I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1987. 168. oldal**
[70] Pólya György: A gondolkodás iskolája, Gondolat, Budapest, 1977
[71] Pólya György: A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1985.
[72] Pólya, G.: Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving. Wiley, New York, 1981.
[73] Pólya, G.: On learning, teaching, and learning teaching. In F.R. Curcio (Ed.), *Teaching and learning: A problem solving focus* (pp. 1-15). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1987.
[74] Riley, M. S., Greeno, J. G., & Heller, J. I.: Development of children’s problem-solving ability in arithmetic. In H. P. Gindburg (Ed.), *The development of mathematical thinking.* New York: Academic Press, 1983.
[75] Rissland, E. L.: Artifical Intelligence and the Learning of Mathematics: A Tutorial Sampling. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 147-176). Routledge, New York and London, 2009.
[76] **Rowling, J. K.: Harry Potter és a bölcsek köve. Animus Kiadó, Budapest, 2000. 263. o.**
[77] **Rowling, J. K. : Harry Potter and the Sorcerer’s Stone. New York: Scholastic, 1998**
[78] Schoenfeld, A.: Mathematical Problem Solving, Academic Press INC.. New York, 1985.
[79] Schoenfeld, A.: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense makin gin mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan, 1992.
[80] Shulman, L. S.: On Teaching Problem Solving and Solving the Problems of Teaching. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 439-450). Routledge, New York and London, 2009.
[81] Silver, E. A.: Knowledge organization and mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving: Issues in research.* Philadelphia: The Franklin Institute Press, 1992.
[82] Silver, E. A.: On mathematical problem posing. For the Learning Mathematics, 14(1), 19-28., 1994.
[83] Silver, E. A., and Cai, J.: An Analysis of Arithmetic problem Posing by Middle School Students. Journal for research in Mathematics Education, Vol. 27, No. 5, 521-539, 1996.
[84] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Kenney, P. A.: Posing Mathematical Problems: An Exploratory Study, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 27, No.3, 293-309, 1996.
[85] Silver, E. A., and Marshall, S. P.: Mathematical and scientific problem solving: Findings, issues and instructional implications. In B. F. Jones & L. Idol (Eds.), *Dimensions of thinking and cognitive instruction* (pp.265-290). Hillsdale, NJ: Erlbaum, 1989.
[86] Silver, E. A.: Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some Underrepresenting Themes and Needed Directions. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 247-266). Routledge, New York and London, 2009.

[87] **Stewart, I.: Professor Stewart's Cabinet of Mathematical Curiosities. Profile Books, London, 2008. p. 71.; p. 82.; p. 229**
[88] Stoyanova, E and Ellerton, N. F. A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics.
[89] Stoyanova, E.: Problem posing in mathematics classrooms. – In: A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), Research in Mathematics Education: a contemporary perspective. Edith Cowan University: MASTEC, p. 164-185, 1998.
[90] Thompson, A. G.: Teachers' Conceptions of Mathematics and the Teaching of Problem Solving. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (pp. 281-294). Routledge, New York and London, 2009.
[91] Tichá, M. & Hospesová, A.: Problem posing and development of pedagogical content knowledge in pre-service teacher training. Proceedings of CERME 6, January 26th-February 1st 2009, Lyon France INRP. www.inrp.fr/editions/cerme6 2012. 01. 12.
[92] **Vaderlind, P.; Guy, R.; Larson, L.: The Inquisitive Problem Solver. The Mathematical Association of America, Washington DC, 2002. P23a. P34.**
[93] Verschaffel, L., De Corte, E.: Teaching Realistic Mathematical Modeling in the Elementary School: A Teaching Experiment With Fifth Graders, Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 28, No. 5, 577-601, 1997.
[94] Verschaffel, L., De Corte, E, Borghart, I.: Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-word knowledge in mathematical modelling of school word problems, Learning and Instruction, Vol.7. No. 4, pp.339-359, 1997.
[95] Verschaffel, L. & Greer, B. & Torbeyns, J.: Numerical Thinking. In A. Gutiérrez and P. Boero (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 51-82). Sense Publishers, Rotterdam/Taipei, 2006.
[96] Vidákovich T.; Csapó B. (1998): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. In: Varga Lajos és Budai Ágnes (szerk.): Közoktatás-kutatás. 1996-1997. MKM. Budapest, 247-278, 1998.
[97] Wachsmuth, I. (1981). Two models of thinking- also relevant for the learning of mathematics. In: For the learning of mathematics 2 (2) 38-45, 1981.
[98] Wallas, G. (1926). The art of thought. Jonathan Cape, London, 1926.
[99] Watts, M. (1991). The science of problem solving. Cassel Educational Limited, London, 1991.
[100] Wittmann, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig, 1981, p.101-102.