Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Bolyai Intézet
Természettudományi és Informatikai Kar
Szegedi Tudományegyetem

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Absztrakt unitálok konstrukciói, klasszifikációja és beágyazásai

Mezőfi Dávid Csaba

Szeged, 2020.

Témavezető:
Dr. Nagy Gábor Péter, egyetemi tanár

1. Bevezetés

A kombinatorikus struktúrák klasszifikációja már régóta egy központi kutatási terület, mi a $t = 2$ és a $\lambda = 1$ paraméterű dizájnokkal foglalkozunk. Az ilyen 2-dizájnok alapvető osztályai az affin és projektív síkok, a Steiner-rendszerek és az absztrakt unitálok. A disszertáció főként absztrakt unitálokat, ezeknek a klasszikus projektív síkba való beágyazhatóságát, valamint ún. paramodifikációk segítségével új unitálok keresését tárgyalja. Az 1. fejezet bevezetésként szolgál: vázolja a disszertáció szerkezetét.

Ebben a szakaszban az unitálok definiálásához elengedhetetlen fogalmakat és állításokat írjuk le, az olvasó további részleteket a tézis 2. fejezetében, illetve a [1, 2, 3] monográfiákban talál.

1.1. Definíció. Legyenek t és λ pozitív egészek, és legyen $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ egy véges illeszkedési struktúra. Pontosan akkor nevezzük $\mathbf{D}$-t *t-dizájnnak* k és λ paraméterrekel, ha

(i) a $\mathcal{P}$ ponthalmaz bármely t-elemű $\mathcal{Q}$ részhalmazára pontosan λ blokk illeszkedik, és

(ii) bármely blokkra pontosan k pont illeszkedik.

A v ponton definiált t-dizájnt $\mathrm{S}_\lambda(t, k, v)$-nak vagy t-(v, k, λ) dizájnnak nevezzük. Ha $\lambda = 1$, akkor $\mathrm{S}(t, k, v)$ Steiner-rendszernek nevezzük. A v ponton definiált 2-dizájn neve *blokkrendszer*.

1.2. Tétel. *Legyen* $\mathbf{D}$ *egy* 2-(v, k, λ) *dizájn. Ekkor*

(i) minden P pontra r illeszkedik, ahol

$$r = \frac{\lambda\,(v-1)}{k-1};$$

(ii) a blokkok számát $|\mathcal{B}|$-vel jelölve

$$|\mathcal{B}| = \lambda \frac{v\,(v-1)}{k\,(k-1)}.$$

A $\mathrm{PG}(2, \mathbb{F})$ projektív síkot, amelyet valamely (ferde)test feletti háromdeimenziós vektortérből származtatunk, *klasszikus projektív* *síknak* nevezzük. Véges esetben $\mathbb{F} = \mathrm{GF}(q)$ valamely q prímhatványra. Ebben az esetben $\mathrm{PG}(2, \mathbb{F})$-et $\mathrm{PG}(2, q)$-val jelöljük.

1.3. Definíció. Legyen Π egy projektív sík, és jelölje Π^* a duális síkját. Ekkor egy $\alpha\colon \Pi \to \Pi^*$ bijekciót, amely megőrzési tartalmazási relációt, *korrelációnak* nevezünk. Bármely α korreláció egy $\Pi^* \to \Pi$ korreláció is. Ha az α korreláció rendje kettő, azaz $\alpha \circ \alpha$ az identikus kollineáció Π-n, akkor α neve *polaritás*.

1.4. Definíció. Legyen ρ egy unitér polaritása $\mathrm{PG}(2, q^2)$-nek. A ρ polaritás autokonjugált pontjainak halmazát *nemelfajuló Hermite-görbének* nevezzük és $\mathcal{H}(q)$-val jelöljük.

A nemelfajuló Hermite-görbék kombinatorikus tulajdonságait felhasználva definiáljuk az n-edrendű absztrakt unitál fogalmát.

1.5. Definíció. Legyen $n \geq 3$ egész. Egy 2-$\left(n^3+1, n+1, 1\right)$ dizájnt *n-edrendű unitálnak* nevezünk.

2. Unitálok paramodifikációi

A disszertáció 3. fejezete Mezőfi és Nagy *New Steiner 2-designs from old ones by paramodifications* dolgozatán [6] alapul.

Legyen $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ egy t-(v, k, λ) dizájn. Az

$$r = \frac{|\mathcal{B}|\, k}{n}$$

egész az egy pontra illeszkedő blokkok száma. A $\chi\colon \mathcal{B} \to X$ leképezést $\mathbf{D}$ egy *jó blokkszínezésének* nevezzük, ha különböző b, b' blokkok esetén ahányszor $b \cap b' \neq \emptyset$, mindannyiszor $\chi(b) \neq \chi(b')$. Ha $|X| = m$ és $\mathbf{D}$-nek létezik egy $\chi\colon \mathcal{B} \to X$ jó blokkszínezése, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{D}$ *blokk-m-színezhető.*

2.1. Lemma (Lemma 3.1.1 (iv))**.** *Legyen* $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ *egy* t-(v, k, λ) *dizájn.* $\mathbf{D}$ *pontosan akkor blokk-r-színezhető, ha feloldható.*

A továbbiakban $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ jelöljön egy 2-$(v, k, 1)$ dizájnt. Legyen az illeszkedési reláció $I = \in$, azaz $\mathbf{D}$ blokkjai k méretű részhalmazai $\mathcal{P}$-nek. Rögzítsünk egy $b \in \mathcal{B}$ blokkot, és tekintsük a blokkoknak

$$C(b) = \left\{b' \in \mathcal{B} \colon |b' \cap b| = 1\right\}$$

részhalmazát. A $(\mathcal{P} \setminus b, C(b), I)$ részrendszert jelölje $\mathbf{D}_b$. Definiáljuk a $\chi_b \colon C(b) \to b$ leképezést a következőképpen:

$$\chi_b \colon b' \mapsto b' \cap b;$$

ez nyilván egy blokkszínezése $\mathbf{D}_b$-nek.

2.2. Lemma (Lemma 3.1.2)**.** $\mathbf{D}_b$ *egy feloldható* 1-$(v-k, k-1, k)$ *dizájn.*

A disszertáció 3.1. szakaszában megmutatjuk, hogy $\mathbf{D}_b$ bármely parallelizmusa egy olyan $\mathbf{D}'$ blokkrendszerre vezet, amelynek paraméterei azonosak $\mathbf{D}$ megfelelő paramétereivel.

2.1. Definíció. Legyen $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ egy Steiner 2-$(v, k, 1)$ dizájn. Legyen $b \in \mathcal{B}$ egy blokk, és legyen $\chi \colon C(b) \to b$ $\mathbf{D}_b$ részrendszer egy blokkszínezése k színnel. Definiáljuk az $I^* \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ illeszkedési relációt a következőképpen:

$$P \; I^* \; b' \Leftrightarrow \begin{cases} P \; I \; b', & \text{if } b' \notin C(b) \text{ or } P \not I \, b \\ P = \chi(b'), & \text{if } P \; I \; b \text{ and } b' \in C(b). \end{cases}$$

A

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^*_{\chi,b} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I^*)$$

illeszkedési struktúrát $\mathbf{D}$ (χ, b)*-paramodifikációjának* nevezzük.

2.2. Tétel (Theorem 3.1.4)**.** *Legyen* $\mathbf{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ *egy* 2-$(v, k, 1)$ *dizájn. Legyen* $b \in \mathcal{B}$ *egy blokk, és legyen* $\chi \colon C(b) \to b$ *a* $\mathbf{D}_b$ *részrendszer egy blokkszínezése* k *színnel. Ekkor* $\mathbf{D}^*_{\chi,b}$ *egy Steiner* 2*-dizájn ugyanazokkal a paraméterekkel.*

A 3.2. szakasz a paramodifikáció hatását írja le a $\mathbf{D}$ 2-$(v, k, 1)$ dizájn illeszkedési mátrixán.

2.3. Állítás (Proposition 3.2.1). *Legyen* $\mathbf{D}$ *egy Steiner* 2-$(v, k, 1)$ *dizájn, és legyen* $\mathbf{D}^* = \mathbf{D}^*_{\chi,b}$ *a* (χ, b)*-paramodifikációja* $\mathbf{D}$*-nek. Legyen* $r = (v-1) / (k-1)$. *Ekkor a megfelelő illeszkedési mátrixok,* $\mathbf{M}$ *and* $\mathbf{M}^*$, *legfeljebb* $k \times k(r-1)$ *méretű almátrixban különböznek.*

A Proposition 3.2.2-ben megmutatjuk, hogy a *switching* operáció a paramodifikáció egy speciális esete. Egy 2-$(v, k, 1)$ dizájnban egy Pasch-konfiguráció hat $P_1, \ldots, P_6$ pontból úgy, hogy a $\{P_1, P_3, P_4\}$, $\{P_1, P_5, P_6\}$, $\{P_2, P_3, P_5\}$, $\{P_2, P_4, P_6\}$ hármasok kollineárisak. A dizájnt anti-Paschnak mondjuk, ha nem tartalmaz Pasch-konfigurációt.

2.4. Állítás (Proposition 3.2.3). *Legyen* $\mathbf{D}$ *egy anti-Pasch* 2-$(v, k, 1)$ *dizájn. Ha*

$$v < 2k^3 - 8k^2 + 13k - 6,$$

akkor nem lehet switching *operációt elvégezni* $\mathbf{D}$*-n.*

A dolgozat 3.3. szakasza a Steiner 2-dizájnok néhány jól ismert osztályának paramodifikációit ismerteti.

2.5. Állítás (Proposition 3.3.1 (i)). *Egy véges projektív sík paramodifikációi izomorfak. Azaz a véges projektív síkok merevek a paramodifikációra nézve.*

Egy STS(v) Steiner-rendszer egy 2-$(v, 3, 1)$ dizájn; STS(v) pontosan akkor létezik, ha $v \equiv 1, 3 \pmod 6$. A Steiner-rendszerek, a 3-reguláris gráfok és az élszínezések szoros kapcsolatban állnak különböző nézőpontokból. Legyen $\mathbf{T} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ egy STS(v), és rögzítsük a $b = \{x, y, z\} \in \mathcal{B}$ hármast. Ekkor $\mathbf{T}_b$ egy egyszerű 3-reguláris gráf, amelynek élei három színnel színezhetők. A $\mathbf{T}$ Steiner-rendszer merev a paramodifikációra nézve, ha a $\mathbf{T}_b$ 3-reguláris gráf éleinek egyértelműen létezik 3-színezése bármely b blokkra. A Steiner-rendszerek paramodifikációit a paramodifikációra nézve merev Steiner-rendszerek létezésének nyitott problémájának megfogalmazásával zárjuk.

Sok transzlációs középponttal rendelkező unitálok konstrukcióival (csak a véges esetben) foglalkozik Grundhöfer, Stroppel és Van

Maldeghem [4]-ban: az ő módszerük motiválta a Steiner 2-dizájnok paramodifikációit.

A disszertáció 3.3. szakaszát egy a véges Hermite-féle unitálokon tett megfigyeléssel zárjuk.

2.6. Állítás (Proposition 3.3.4). *Véges Hermite-féle unitálokra nem végezhető el a* switching *művelet, azonban létezik nem-triviális paramodifikációjuk.*

A 3.4. szakasz egy $\mathbf{D}_b$ részrendszer blokkszínezéseinek kiszámítására mutat be több módszert. Az összes blokkszínezésre vagyunk kíváncsiak, hogy új Steiner 2-dizájnokat szerkeszthessünk paramodifikáció segítségével. A feladatot egyszerű gráfok csúcsszínezéseként fogalmazzuk meg, amelyről ismert, hogy általánosan egy NP-nehéz probléma. Legyen a $\Gamma = (V, E)$ *vonalgráf* csúcshalmaza $V = C(b)$, és $(b_1, b_2) \in E$ pontosan akkor, ha b_1 és b_2 egy egyértelmű $P \notin b$ pontban metszik egymást. A 2.2. Lemma közvetlen következménye, hogy Γ egy $(k-1)^2$-reguláris egyszerű gráf.

2.7. Definíció. Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, és legyen $\chi \colon V \to C$ jó csúcsszínezés. A $v \in V$ csúcsot *dominánsnak*nevezzük, ha bármely $c' \in C \setminus \{\chi(v)\}$ színre létezik v-nek egy v' szomszédja úgy, hogy $\chi(v') = c'$. A χ színezést *b-színezésnek* mondjuk, ha létezik legalább egy domináns csúcs minden színosztályban.

2.3. Lemma (Lemma 3.4.2). *A* $\chi \colon C(b) \to b$ *leképezés egy jó blokkszínezés* $\mathbf{D}_b$*-nek pontosak akkor, ha egy b-színezése a* $\mathbf{D}_b$*-hez tartozó* Γ *vonalgráfnak.*

A Γ gráf összes b-színezése meghatározható, ha megtaláljuk egy független ponthalmazok halmazlefedési problémájának összes megoldását. Egy színosztály valójában egy $K = (v-k) / (k-1)$ méretű független ponthalmaz, és a χ színezés k darab színosztálya páronként diszjunkt. A GRAPE GAP-csomag segítségével ez a módszer könnyen implementálható.

A b-színezési feladat egészértékű lineáris programozási feladatként (ILP, *integer linear programming*) is felírható. A legtöbb ILP-megoldó szoftver a probléma egy megoldásának meghatározására van optimalizálva. Azonban mi a blokkszínezési feladatunk összes megoldására vagyunk kíváncsiak: erre a SCIP MILP-megoldó szoftver képes. Többféleképpen is megfogalmazhatunk egy gráfszínezési problémát ILP-feladatként. Az ún. *assignment-based* modell a csúcsszínezési feladat standard megfogalmazása. Ez a modell csak bináris változókat használ: egyet minden színre valamint egyet minden csúcs-szín párra, és a minimalizálandó célfüggvény a használt színek száma. Vannak más megközelítések is, például részbenrendezésen alapulóak, mint a POP és a POP2. Az ötlet az, hogy részbenrendezést vezetnek be a csúcsok és a színek unióján.

Az ILP feladatok hátulütője, hogy a halmazfedési módszerrel szemben nehezen kihasználható a szóbanforgó gráf szimmetriája. Mivel a GRAPE rendkívül hatékonyan aknázza ki a vonalgráf szimmetriáit, így arra jutottunk, hogy ez alkalmasabb Steiner 2-dizájnok összes paramodifikációinak meghatározására.

A dolgozat 3.5. szakasza legfeljebb hatodrendű unitálok paramodifikációinak számítási eredményeit mutatja be. Ezzel a módszerrel 173 új harmad- és 36 878 új negyedrendű unitált találtunk.

Egy adott n rend esetén a Ψ_n *paramodifikációs gráf* csúcsai n-edrendű unitálok ekvivalenciaosztályai, és két csúcsot éllel kötünk össze, ha az egyik ekvivalenciaosztályból megkapható a másik paramodifikációval. A paramodifikációs gráf összefüggő komponenseit *paramodifikáció osztályoknak* nevezzük.

Számításokat végeztünk Ψ_3 és Ψ_4 azon paramodifikáció osztályainak meghatározására, amelyek legalább egy unitált tartalmaznak a BBT, KRC vagy KNP könyvtárak valamelyikéből. A harmadadrendű esetben megtaláltuk az összes paramodifikáció osztályt, azaz Ψ_3 ezen részgráfja teljes abban az értelemben, hogy minden csúcs összes paramodifikációja ismert, ld. 2.1. táblázat (Table 3.1 a dolgozatban).

Mivel a switch-ek a paramodifikációk speciális esetei, a switching gráf Ψ_3 részgráfja. Megszorítva a transzfirmációkat a switch-ekre 623 élt veszítünk az unitálok között a paramodifikációhoz képest, és csak 131 új unitál érhető el a a 173-ból szigorúan csak switchinget alkalmazva.

A negyedrendű unitálok esetében az 1777 KNP-unitálból 1458

2.1. táblázat. A paramodifikáció osztályok méreteinek eloszlása

Osztályméret	Ψ_3	Ψ_4
1	3182	1458
2–5	466	99
6–10	35	13
11–100	13	16
101–1000		14
1001–2000		2
2001–7595		2
7596		1*
12 887		1*

unitál izolált csúcsa Ψ_4-nek. A paramodifikációt ismételve 36 878 új negyedrendű unitált találtunk. Azonban a részgráf hiányos, mert vannak befejezetlen csúcsai: ezen unitálok paramodifikációi nem lettek kiszámolva. Az izolált csúcsokat nem számítva a teljes paramodifikáció osztályok száma 146. Két osztály hiányos (lásd a csillaggal jelölt sorokat a 2.1. táblázatban), összesen 16 518 befejezetlen csúccsal. A legnagyobb komponensnek 12 887 csúcsát ismerjük, ezek közül hat darab KNP-unitál, és a komponens növekedése a szélességi keresés fájában szintenként az ötödik szintig

$$6, \quad 28, \quad 445, \quad 3008, \quad 9400,$$

azonban a keresés itt leállt, és valószínűleg több unitál található a további szinteken.

Az A függelék tartalmazza a paramodifikáció implementációjának forráskódját az UnitalSZ csomagot használva.

3. Absztrakt unitálok teljes pontjai

A disszertáció 4. fejezete Mezőfi és Nagy *On the geometry of full points of abstract unitals* [7] c. cikkének eredményeit ismerteti.

3.1. Definíció. Legyen $U = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ egy n-edrendű absztrakt unitál, és rögzítsük a b_1, b_2 blokkokat. Azt mondjuk, hogy $P \in \mathcal{P}$ *teljes pont* (b_1, b_2)*-re nézve*, ha $P \notin b_1 \cup b_2$ és minden $Q \in b_1$ esetén a P-t és Q-t összekötő blokk metszi b_2-t.

Más szóval létezik egy π_{b_1,P,b_2} jóldefiniált P középpontú projekció b_1-ről b_2-re. $F_U(b_1, b_2)$-vel jelöljük a U teljes pontjainak halmazát a b_1, b_2 blokkokra nézve. Definíció szerint a b_1, b_2 blokkok bármely P teljes pontja egy $\pi_{b_1,P,b_2} : b_1 \to b_2$ bijektív leképezést definiál; ezt *P középpontú perspektivitásnak* nevezzük.

3.2. Definíció. Legyenek b_1, b_2 az U unitál blokkjai. Definiáljuk b_1 *perspektivitási csoportját* a következőképpen:

$$\operatorname{Persp}_{b_2}(b_1) = \left\langle \pi_{b_1,P,b_2}\pi_{b_2,Q,b_1} : P, Q \in F_U(b_1, b_2) \right\rangle .$$

A 4.1. szakasz a teljes pontok halmazainak néhány kombinatorikus tulajdonságát mutatja be és bevezeti a beágyazott duális k-net fogalmát.

3.1. Lemma (Lemma 4.1.2). *Legyen $U = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ egy n-edrendű absztrakt unitál, ahol $n \geq 2$. Ekkor*

$$|F_U(b_1, b_2)| \leq \begin{cases} n^2 - n & \text{ha } b_1, b_2 \text{ egy pontban metszik egymást,} \\ n^2 - 1 & \text{ha } b_1, b_2 \text{ diszjunktak.} \end{cases}$$

3.3. Definíció. Legyen $U = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ egy n-edrendű absztrakt unitál, és legyen $k \geq 3$ egész szám. Azt mondjuk, hogy a $b_1, \ldots, b_k$ blokkok *beágyazott duális k-netet* alkotnak U-ban, ha a következők teljesülnek minden $1 \leq i < j \leq k$ esetén:

(i) $b_i \cap b_j = \emptyset$.
(ii) Minden $P \in b_i$, $Q \in b_j$ esetén a P-t és Q-t összekötő blokk $b_1, \ldots, b_k$ mindegyikét metszi egy pontban.

Beágyazott duális k-netekre $k \leq n + 1$ egy triviális korlát. Megmutatjuk, hogy $k \leq n - 1$ is teljesül, amiből következik, hogy harmadrendű absztrakt unitáloknak nincsenek beágyazott duális 3-neteik.

3.4. Állítás (Proposition 4.1.7). *Legyen U egy n-edrendű absztrakt unitál, ahol $n \geq 3$.*

(i) Ha U-ban a $\{b_1, \dots, b_k\}$ blokkhalmaz egy beágyazott duális k-net, akkor $k \leq n-1$.

(ii) Bármely b_1, b_2 blokkok esetén $F_U(b_1, b_2)$ nem tartalmazhat több mint $n-3$ blokkot.

Az absztrakt unitálok projektív síkokba való beágyazhatósága egy régóta vizsgált probléma, különös tekintettel a q-adrendű absztrakt unitálok beágyazhatóságára a $\mathrm{PG}(2, q^2)$ Desargues-féle síkba. Korchmáros, Siciliano és Szőnyi [5] bevezették a *teljes pont* fogalmát a beágyazhatóság vizsgálatához, és a blokkok perspektivitási csoportjait vizsgálták.

3.5. Definíció. Legyen $U = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ egy absztrakt unitál, legyenek $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ diszjunkt blokkok.

(i) Az (U, b_1, b_2) hármas *teljespont-reguláris*, ha a teljes pontok halmazára $F_U(b_1, b_2) \subseteq c$ valamely $c \in \mathcal{B}$ blokk esetén úgy, hogy $b_1 \cap c = b_2 \cap c = \emptyset$.

(ii) Ha (U, b_1, b_2) egy teljespont-reguláris hármas és $\mathrm{Persp}_{b_2}(b_1)$ egy ciklikus szemireguláris permutációcsoportja b_1-nek, akkor (U, b_1, b_2)-t *erősen teljespont-reguláris* hármasnak nevezzük.

(iii) Az U absztrakt unitált *erősen teljespont-regulárisnak* nevezzük, ha bármely b_1, b_2 diszjunkt blokkok esetén az (U, b_1, b_2) hármas erősen teljespont-reguláris.

A disszertáció 4.2. szakaszának fő tétele az absztrakt unitálok $\mathrm{PG}(2, q^2)$-be való beágyazhatóságának egy szükséges feltételét adja meg.

3.6. Tétel (Theorem 4.2.6). *Ha a q-adrendű U unitál beágyazható a $\mathrm{PG}(2, q^2)$ síkba, akkor U erősen teljespont-reguláris.*

A dolgozat 4.3. szakaszában megmutatjuk, hogy q páros prímhatvány esetén a $\mathcal{H}(q)$ Hermite-unitál egy poláris háromszögben szereplő blokkjai beágyazott duális 3-netet alkotnak (vö. Proposition 4.3.1 a disszertációban), valamint, hogy a beágyazott duális

3-netek és a Baer-részegyenesek szorosan kapcsolódnak egymáshoz.

3.7. Állítás (Proposition 4.3.3)**.** *Legyen* $U = (\mathcal{P}, \mathcal{B})$ *egy q-adrendű absztrakt unitál beágyazva* $\mathrm{PG}(2, q^2)$*-be. Ha a* b_1, b_2, b_3 *blokkok beágyazott duális 3-netet alkotnak, akkor* b_1, b_2, b_3 *Baer-részegyenesek.*

A dolgozat 4.4. szakasza kis unitálok teljes pontjainak struktúrájára vonatkozó számítási eredményeket mutat be. Táblázatos formában jelenítjük meg a harmad- és negyedrendű unitálok számát a teljes pontok száma és a perspektivitási csoport struktúrája szerinti bontásban. A vizsgált könyvtárakban található (erősen) teljespont-reguláris unitálok száma a 3.1. táblázatban (Table 4.4 a disszertációban) található. Megjegyezzük, hogy a nem erősen teljespont-reguláris unitálok nem ágyazhatók be $\mathrm{PG}(2, q^2)$-be.

3.1. táblázat. Teljespont-regularitás

Könyvtár	Unitálok	FPR	SFPR
BBT	909	815	815
KRC	4466	4081	4081
P3M	173	166	166
KNP	1777	1586	1582
P4M	25 641	9196	8980

4. Az UnitalSZ GAP csomag

A dolgozat 5. fejezete az UnitalSZ [8] GAP-csomagot mutatja be, melyet a jelen disszertáció szerzője, valamint témavezetője, dr. Nagy Gábor Péter feljesztett. A csomag jelenlegi verziója 0.6, a kiadás elérhető a `https://nagygp.github.io/UnitalSZ` honlapon, illetve a forráskód elérhető a GitHubon a GNU General Public License v3.0 alatt. A csomaghoz használatához a GAP legalább 4.8-as verziója, valamint a GAPDoc, Digraphs és az IO GAP-csomagok szükségesek. A fejezet során példa GAP-kódok illusztrálják az ismertetett függvényeket.

Az 5.1. szakasz betekintést ad, hogy miként lehet unitál objektumokat létrehozni igaz-hamis, és illeszkedési mátrixok, valamint blokklisták által. Az 5.1. Algoritmusban látható, hogy az unitálokra vonatkozó feltételek hogyan vannak a csomagban implementálva. Ismertetünk az unitálok néhány alapvető tulajdonságára, attribútumára vonatkozó metódust, például hogyan lehet az unitál pontjait, blokkjait, automorfizmus-csoportját lekérni, illetve hogy ellenőrízhető, hogy két unitál izomorf-e. Az 5.2. szakaszban az elérhető unitálosztályokhoz és -könyvtárakhoz kapcsolódó parancsokat mutatjuk be. Az 5.2. és 5.3. Algoritmusok a Hermite- és a Buekenhout–Metz-unitálok implementációját illusztrálják.

Az 5.3. szakaszban ismertetjük az unitálok teljes pontjaira vonatkozó parancsokat: meghatározható egy U unitál teljes pontjai két különböző blokkra vonatkoztatva, sőt, kiszámolható a perspektivitási csoport is (vö. 5.4. és 5.6. Algoritmusok). Az 5.5. Algoritmus bemutatja, hogy egy unitál teljes pontjainak kiszámítása az U unitál automorfizmus-csoportjának erejéig hogyan van implementálva a csomagban. A beágyazott duális 3-netek, illetve az (erős) teljespont-regularitás meghatározására szolgáló függvények leírása a szakasz végén található.

Hivatkozások

[1] E. F. Assmus Jr. és J. D. Key. *Designs and their codes*. 103. köt. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1992, x+352. old.

[2] Susan Barwick és Gary Ebert. *Unitals in projective planes*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2008, xii+193. old.

[3] Thomas Beth, Dieter Jungnickel és Hanfried Lenz. *Design theory. Vol. I*. Second. 69. köt. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1999, xx+1100. old.

[4] Theo Grundhöfer, Markus J. Stroppel és Hendrik Van Maldeghem. "A non-classical unital of order four with many translations". *Discrete Math.* 339.12 (2016), 2987–2993. old.

[5] Gábor Korchmáros, Alessandro Siciliano és Tamás Szőnyi. "Embedding of classical polar unitals in $\mathrm{PG}(2, q^2)$". *J. Combin. Theory Ser. A* 153 (2018), 67–75. old.

[6] Mezőfi Dávid és Nagy Gábor P. "New Steiner 2-designs from old ones by paramodifications". *Discrete Appl. Math.* 288 (2021), 114–122. old.

[7] Mezőfi Dávid és Nagy Gábor P. "On the geometry of full points of abstract unitals". *Des. Codes Cryptogr.* 87.12 (2019), 2967–2978. old.

[8] Nagy G. P. és Mezőfi D. *UnitalSZ, Algorithms and libraries of abstract unitals and their embeddings, Version 0.6*. GAP package. 2020. márc. URL: `https://nagygp.github.io/UnitalSZ/`.

Témavezetői és társszerzői nyilatkozat

Alulírott Dr. Nagy Gábor Péter ezennel kijelentem, hogy az én témavezetésemmel doktori tanulmányokat végző Mezőfi Dávid Csaba alábbi két dolgozata teljesíti az SZTE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája által előírt publikációs követelményeket:

[7] Mezőfi Dávid és Nagy Gábor P. "On the geometry of full points of abstract unitals". *Des. Codes Cryptogr.* 87.12 (2019), 2967–2978. old.

[6] Mezőfi Dávid és Nagy Gábor P. "New Steiner 2-designs from old ones by paramodifications". *Discrete Appl. Math.* 288 (2021), 114–122. old.

Mindkét folyóiratot referálja az AMS Mathematical Reviews.

Mivel a [7] és [6] dolgozatoknak társszerzője is vagyok, ezért egyben arról is nyilatkozom, hogy a két publikáció létrejöttében – mint társszerzők – egyenlő arányban vettünk részt, illetve működtünk közre. Ezt a két publikációt semmilyen későbbi minősítési eljárásban nem kívánjuk felhasználni.

A fenti cikkeinkben használtuk a következő, nem referált programcsomagot.

[8] Nagy G. P. és Mezőfi D. *UnitalSZ, Algorithms and libraries of abstract unitals and their embeddings, Version 0.6*. GAP package. 2020. márc. URL: `https://nagygp.github.io/UnitalSZ/`.

A [8] programcsomag létrejöttében az én hozzájárulásom 66 %.

Kelt: Szeged, 2020. szeptember 23.

Dr. Nagy Gábor Péter
egyetemi tanár
MTA doktora