Fák és gráfpakolások

Vásárhelyi Bálint Márk

Doktori értekezés tézisei

Témavezető:

Dr. Csaba Béla

Egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet

Szeged, 2018

1. Bevezetés

Ebben a disszertációban két fő témát vizsgálunk, mégpedig a szuffixfákat és gráfpakolási kérdéseket. A 2. fejezetben a szuffixfákkal foglalkozunk. A fejezet fő eredménye az egyszerű szuffixfák méretére adott alsó korlát. A további részekben pakolási feladatokat vizsgálunk. A 3. fejezetben majdnem szigorú feltételeket adunk egy páros pakolási feladatra. A 4. fejezetben egy fokszámsorozatokkal kapcsolatos beágyazási problémával foglalkozunk. Az 5. fejezetben megmutatjuk, hogy léteznek olyan korlátos fokú páros gráfok, melyeknek szeparáló halmaza kicsi, miközben sávszélessége nagy, és megmutatjuk, hogy bizonyos feltételek mellett ezeket a gráfokat be lehet ágyazni olyan gráfokba, melyek minimális foka kicsit nagyobb $n/2$-nél.

A disszertáció a következő cikkeken alapszik: [3], [4], [5], [11] és [12]. A $\langle$ és $\rangle$ zárójelek közé tett számozás a disszertációbeli, eredeti számozás.

2. Szuffixfák

Legyen S egy n hosszú szöveg. Az i-edik karakterét jelölje $S[i]$. Az i-edik karaktertől a j-edik karakterig terjedő részszöveget $S[i,j]$-vel jelöljük ($j \geq i$).

S szuffixfája egy gyökeres, irányított fa n levéllel. Minden élen szerepel egy címke. Az egy csúcsból kifutó élek címkéje kü-

lönböző. A gyökérből a j-edik levélig vezető út mentén lévő címkéket összeolvasva az $S[j,n]$ szuffixot kapjuk meg, a végén egy, az ábécében nem szereplő \$ jellel.

A disszertációban bemutatunk egy egyszerű algoritmust a szuffixfa felépítésére. Ebben a szuffixeket az $S[1,n]$-nel kezdve egyesével vesszük sorra.

Az S *növekményét* $\gamma(S)$-sel jelöljük. Ez eggyel kisebb, mint az 1. levél távolsága a hozzá legközelebbi, legalább két gyermekkel rendelkező belső csúcstól. Az n hosszú, k növekményű, σ méretű ábécé fölötti szövegek száma $\Omega(n,k,\sigma)$.

Megfigyelhetjük, hogy az $S[n-1,n], S[n-2,n], \ldots, S[1,n]$ szövegek növekményeinek összege alsó korlátot ad a szuffixfa csúcsainak számára.

Egy S szöveget *periodikusnak* nevezünk d periódussal, ha van egy olyan $d|n$, melyre $S[i] = S[i+d]$ minden $i \leq n-d$. S *minimális periódusa* a legkisebb ilyen d. Ha nincs ilyen d, akkor S *aperiodikus*. A j hosszú aperiodikus szövegek száma a σ méretű ábécé fölött $\mu(j,\sigma)$.

A fő eredményeket a következő három tétel foglalja össze:

1. Tétel. *⟨23⟩ Egy σ méretű ábécé felett, rögzített egész k-ra minden $n \geq 2k$-ra $\Omega(n,k,\sigma) \leq \varphi(k,\sigma)$ valamely φ függvénnyel.*

2. Tétel. *⟨24⟩ Létezik egy $c > 0$ és egy n_0 úgy, hogy bármely $n > n_0$-ra a következő teljesül. Legyen S' egy $n-1$ hosszú szöveg. S-et úgy kapjuk, hogy S' elejéhez hozzáadjuk az ábécé egy* *uniform véletlen módon választott karakterét. Ekkor S várható növekménye legalább cn.*

3. Tétel. ⟨25⟩ *Létezik egy $d > 0$, hogy bármely $n > n_0$-ra (itt n_0 ugyanaz, mint a 2. Tételben) fennáll a következő. Egy σ méretű ábécé fölött egy n hosszú, véletlen S szöveg egyszerű szuffixfája várhatóan legalább dn^2 csúcsot tartalmaz.*

Az 1. Tételből következik a 2. Tétel, amelyből pedig következik a 3. Tétel.

Az 1. Tétel bizonyításához szükségünk van néhány lemmára az aperiodikus szövegekről.

4. Lemma. ⟨26⟩ *Minden $j > 0$ egészre és minden σ méretű ábécére az aperiodikus szövegek száma*

$$\mu(j, \sigma) = \sigma^j - \sum_{\substack{d|j \\ d \neq j}} \mu(d, \sigma). \tag{1}$$

Ennek következménye:

5. Következmény. ⟨27⟩ *Ha p prím, és $t \in \mathbb{N}$, akkor minden σ méretű ábécére*

$$\mu\left(p^t, \sigma\right) = \sigma^{p^t} - \sigma^{p^{t-1}}. \tag{2}$$

A következő két lemma felső és alsó korlátot ad az aperiodikus szövegek számára. Ezeket az 1. Tétel bizonyításában használjuk.

6. Lemma. *⟨28⟩ Minden $j > 1$-re és minden σ méretű ábécére*

$$\mu(j,\sigma) \le \sigma^j - \sigma. \tag{3}$$

7. Lemma. *⟨29⟩ Minden $j \ge 1$-re, és minden σ méretű ábécére*

$$\mu(j,\sigma) \ge \sigma(\sigma-1)^{j-1}. \tag{4}$$

3. Páros pakolási feladat

Legyen H és G két n csúcsú gráf. H *beágyazható* G-be, ha H G-nek részgráfja, azaz H egy példánya megtalálható G-ben. Ezt $H \subseteq G$-vel jelöljük.

H és G *pakolható*, ha H beágyazható $\overline{G}$-be. Egy ekvivalens definíció az, hogy a K_n teljes gráfban megtalálható H és G éldiszjunkt példánya.

Vegyük észre, hogy a beágyazás és a pakolás komplementer kérdések.

E rész fő eredménye a következő tétel.

8. Tétel. *⟨33⟩ Minden $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$-hez létezik egy $n_0 = n_0(\varepsilon)$ úgy, hogy ha $n > n_0$, valamint $G(A,B)$ és $H(S,T)$ páros gráfok (ahol $|A| = |B| = |S| = |T| = n$), és a következők teljesülnek, akkor $H \subseteq G$.*

1. feltétel *$deg_G(x) > \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) n$ minden $x \in A \cup B$-re,*

2. feltétel *$deg_H(x) < \frac{\varepsilon^4}{100} \frac{n}{\log n}$ minden $x \in S$-re,*

3. feltétel *$deg_H(y) = 1$ minden $y \in T$-re.*

A következő két példa azt mutatja, hogy szükséges valamilyen feltételt adni $\delta(G)$-re (vö. 1. feltétel) és $\Delta(H)$-ra (vö. 2. feltétel).

Először, legyen $G = K_{\frac{n}{2}+1,\frac{n}{2}-1} \cup K_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+1}$. Világos, hogy G-ben nincs teljes párosítás. Ez megmutatja, hogy az 1. feltételben meghatározott korlátnál lényegében nem tudunk jobbat adni.

A második példához legyen $G = G(n, n, 0.6)$ egy véletlen páros gráf. Standard valószínűségi érvelés mutatja, hogy G nagy valószínűséggel teljesíti az 1. feltételt. Nem tudjuk azonban H-t G-be beágyazni, ha $H(S, T)$ a következő páros gráf: T-ben minden pont foka 1. S-ben minden pont foka 0, kivéve $\frac{\log n}{c}$ csúcsot, melyek foka $\frac{cn}{\log n}$. A H gráf nem beágyazható G-be, amint az Komlós et al. [8] példájából következik.

Bizonyításunkhoz használjuk Gale és Ryser következő lemmáját.

9. Lemma. *⟨36⟩ [6, 10] Legyen $G(A, B)$ páros gráf, valamint π páros fokszámsorozat (A, B)-n. Ha minden $X \subseteq A$-re és minden $Y \subseteq B$-re*

$$\sum_{x \in X} \pi(x) \leq e_G(X, Y) + \sum_{y \in \overline{Y}} \pi(y) \tag{5}$$

teljesül, akkor π beágyazható G-be.

A tétel technikai kulcslemmáját a következőkben mondjuk ki.

10. Lemma. *⟨37⟩ Legyen $\varepsilon \in (0, 0.5)$ és c, mint a 8. Tételben. Legyen $G(Z, W)$ és $H(Z', W')$ páros gráf, ahol $|Z| = |Z'| = z$ és $|W| = |W'| = n$, valamint $z > \frac{2}{\varepsilon}$.*

Tegyük fel a következőket:

1a. feltétel $deg_G(x) > \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) n$ *minden* $x \in Z$*-re,*

1b. feltétel $deg_G(y) > \left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\right) z$ *minden* $y \in W$*-re,*

2. feltétel *Létezik egy* $M \in \mathbb{N}$ *és egy* $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{10} < \frac{1}{20}$*, melyekre*

$$M \leq deg_H(x) \leq M(1+\delta) \text{ minden } x \in Z' \text{ -re,} \tag{6}$$

3. feltétel $deg_H(y) = 1$ *minden* $y \in W'$*-re.*

Ekkor H beágyazható G-be.

A 8. Tételt martingálok használatával bizonyítjuk, ehhez pedig szükségünk van az Azuma–Hoeffding-egyenlőtlenségre.

11. Lemma. *⟨38⟩ [1] Ha $\mathcal{Z}$ egy legfeljebb 1 differenciájú martingál, akkor bármely j-re és t-re teljesül a következő:*

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{Z}_j \geq \mathbb{E}\mathcal{Z}_j - t\right) \geq 1 - e^{-\frac{t^2}{2j}}. \tag{7}$$

4. Fokszámsorozatok beágyazása

Ebben a fejezetben a fokszámsorozatok és gráfok beágyazási kérdésével foglalkozunk, melyek kapcsolódnak a korábbi eredményekhez. Először a következő tételt bizonyítottuk.

12. Tétel. ⟨*40*⟩ *Minden* $\eta > 0$*-hoz és* $D \in \mathbb{N}$*-hez létezik egy* $n_0 = n_0(\eta, D)$ *úgy, hogy minden* $n > n_0$*-ra ha* G *egy* n *csúcsú gráf, melyre* $\delta(G) \geq \left(\frac{1}{2} + \eta\right) n$*, továbbá* π *egy* n *hosszú fokszámsorozat, melyre* $\Delta(\pi) \leq D$*, akkor* π *beágyazható* G*-be.*

Könnyen látható, hogy a 12. Tétel éles az ηn additív tagtól eltekintve. Ehhez legyen n egy páros szám, és legyen π minden tagja 1. Az egyetlen gráf, ami realizálja π-t, $n/2$ diszjunkt él uniója. Legyen most $G = K_{n/2-1,n/2+1}$ a teljes páros gráf, $n/2 - 1$ és $n/2 + 1$ osztályméretekkel. G nyilvánvalóan nem tartalmaz $n/2$ diszjunkt élt.

A 12. Tételt úgy bizonyítjuk, hogy először keresünk egy megfelelő H realizációt π-hez, majd H-t beágyazzuk G-be. A bizonyításhoz használjuk Szemerédi Regularitási Lemmáját.

A másik fő eredmény az alábbi definíciót használja.

13. Definíció. ⟨41⟩ Legyen $q \geq 1$ egész. Egy H páros gráf S és T osztályokkal *q-kiegyensúlyozatlan*, ha $q|S| \leq |T|$. A π fokszámsorozat *q-kiegyensúlyozatlan*, ha megvalósítható q-kiegyensúlyozatlan páros gráffal.

14. Tétel. ⟨*42*⟩ *Legyen* $q \geq 1$ *egész. Minden* $\eta > 0$*-hoz és* $D \in \mathbb{N}$*-hez létezik olyan* $n_0 = n_0(\eta, q)$ *és* $M = M(\eta, D, q)$*, hogy ha* $n \geq n_0$*, valamint* π *egy* q*-kiegyensúlyozatlan,* $n - M$ *hosszú fokszámsorozat, melyre* $\Delta(\pi) \leq D$*, továbbá* G *egy* n *csúcsú gráf, melyre* $\delta(G) \geq \left(\frac{1}{q+1} + \eta\right) n$*, akkor* π *beágyazható* G*-be.*

A 14. Tétel bizonyításához először megmutatjuk, hogy van egy megfelelő q-kiegyensúlyozatlan, páros H gráf, ami realizálja π-t, majd a Regularitási Lemma és a Blow-Up Lemma segítségével beágyazzuk G-be.

A megfelelő H gráf kereséséhez az alábbi lemmát bizonyítjuk.

15. Lemma. *⟨47⟩ Legyen π egy q-kiegyensúlyozatlan, páros fokszámsorozat, melynek minden eleme pozitív, és $\Delta(\pi) \leq D$. Ekkor π realizálható egy q-kiegyensúlyozatlan, páros H gráffal, amely a $H_1, \ldots, H_k$ diszjunkt uniója, ahol minden i-re a H_i részgráf q-kiegyensúlyozatlan, továbbá, $v(H_i) \leq 4D^2$.*

Használjuk a Gale-Ryser lemma (9. Lemma) alábbi következményét is.

16. Lemma. *⟨49⟩ [6, 10] Legyen $G = (A, B; E(G))$ páros gráf, valamint f egy nemnegatív egész függvény $A \cup B$-n, melyre $f(A) = f(B)$. Ekkor G-nek akkor és csak akkor létezik egy $F = (A, B; E(F))$ részgráfja, melyre $deg_F(x) = f(x)$ minden $x \in A \cup B$ -re, ha*

$$f(X) \leq e(X, Y) + f(\overline{Y}) \tag{8}$$

minden $X \subseteq A$-ra és $Y \subseteq B$-re, ahol $\overline{Y} = B - Y$.

Ennek segítségével bizonyítjuk a következő lemmát:

17. Lemma. *⟨50⟩ Ha $f = (a_1, \ldots, a_s; b_1, \ldots, b_t)$ pozitív egészek sorozata, melyre $s, t \geq 2\Delta^2$, ahol Δ az f maximuma, és*

$f(A) = f(B)$, ahol $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ és $B = \{b_1, \ldots, b_t\}$, akkor f bigrafikus (azaz páros fokszámsorozat).

A 17. Lemma alkalmazásával bebizonyítjuk a 15. Lemmát.

Miután megtaláltuk H-t, a Regularitási Lemma segítségével felbontjuk a G gráfot osztályokra, majd beágyazzuk H-t G-be.

A 14. Tétel egyik következményét mondja ki a következő tétel.

18. Tétel. *⟨62⟩ Legyen $q \geq 1$ egész. Minden $\eta > 0$-hoz és $D \in \mathbb{N}$-hez létezik olyan $n_0 = n_0(\eta, q)$ és $K = K(\eta, D, q)$, melyre ha $n \geq n_0$, és π egy q-kiegyensúlyozatlan, n hosszú fokszámsorozat, melyre $\Delta(\pi) \leq D$, valamint G egy n csúcsú gráf, melyre $\delta(G) \geq \left(\frac{1}{q+1} + \eta\right) n$, akkor létezik egy n csúcsú G' gráf úgy, hogy G és G' átszerkesztési távolsága legfeljebb K, és π beágyazható G'-be.*

5. A szeparálhatóság és a sávszélesség kapcsolatáról

Ebben a fejezetben egy újabb beágyazási problémával foglalkozunk, Csaba [2] eredményét kiterjesztve.

Először definiáljuk egy gráf sávszélességét.

19. Definíció. ⟨65⟩ Legyen $H(V, E)$ egy gráf. Legyen $\mathcal{F} = \big\{f : V \to \{1, \ldots, n\}\big\}$ a V-re ható bijektív függvények egy családja. H sávszélessége:

$$\varphi(H) = \min_{f \in \mathcal{F}} \max_{v_i v_j \in E} \{|f(v_i) - f(v_j)|\}.$$

20. Definíció. ⟨67⟩ Egy n csúcsú H gráf γ-*szeparálható*, ha van egy γn méretű $S \subseteq V(H)$ részhalmaza, melyre $H - S$ minden komponense $o(n)$ méretű.

Egyik fő eredményünkben megmutatjuk, hogy ha a szeparáló halmaz lineáris (kicsi, de nem túl kicsi), akkor a sávszélesség akár korlátos fokú gráfokra is lehet nagy.

21. Tétel. *⟨68⟩ Legyen $r \geq 35$ és $t \geq 2$ egész szám, és legyen $\gamma = \gamma(r) = 1/(8r2^r)$. Ekkor létezik gráfok végtelen $\mathcal{H}_{r,t}$ osztálya úgy, hogy $\mathcal{H}_{r,t}$ minden H elemének van egy legfeljebb $\gamma v(H)$ méretű szeparáló halmaza, sávszélessége legalább $0.3v(H)/(2t+4)$, továbbá $\Delta(H) = \mathcal{O}(1/\gamma)$.*

A 21. tételre adott konstrukciónk a Ramanujan-gráfokon alapszik. Először létrehozunk egy $r+1$-reguláris, páros F gráfot. Adott egy r-reguláris U Ramanujan-gráf ($r \geq 35$). F csúcsosztályai $V(U)$ másolatai lesznek. Minden $x \in V(U)$ csúcshoz két másolatot készítünk, ezek $x_1 \in V_1$ és $x_2 \in V_2$. Minden $xy \in E(U)$ élre $E(F)$-hez adjuk az x_1y_2 és az x_2y_1 éleket. Végül, minden $x \in V(U)$ csúcsra $E(F)$-hez adjuk az x_1x_2 élt is.

A konstrukció befejezéséhez két állításra van még szükségünk.

22. Állítás. *⟨74⟩ Tetszőleges $A \subseteq V_1$ és $B \subseteq V_2$ halmazokra, ahol $|A| = |B| = k/3$, teljesül $e(A, B) \geq 1$.*

23. Állítás. ⟨*75*⟩ *Tetszőleges* $A \subseteq V_1$ *halmazra teljesül* $|N(A)| \geq |A|$. *Analóg állítást írhatunk fel a* $B \subseteq V_2$ *halmazokra is.*

Most pedig következik a konstrukció.

24. Definíció. ⟨76⟩ Legyen $n, m \in \mathbb{N}$ és $\gamma = \gamma(r) = 1/(8r2^r)$. Legyen F_i a fenti páros gráf $2k_i$ csúcson, ami $r+1$-reguláris, ahol k_i a legnagyobb olyan szám, melyre $\gamma n \geq 2k_i$.

A $\mathcal{H}_{r,t}$ család elemeit a következőképpen konstruáljuk. Adott n-re legyen $H = (A, B; E) \in \mathcal{H}_{r,t}$ a következő páros gráf.

1. $\big||A| - |B|\big| \leq 1$, és $|V| = |A \cup B| = n$,
2. legyen $S = S_A \cup S_B$ úgy, hogy $|S_A| = |S_B| = k_i$,
3. $H[S] = F$ és $E(H[S_A]) = E(H[S_B]) = \emptyset$,
4. $D = \Delta(H) = O(r2^r)$,
5. minden $x \in S$ csúcsra létezik egy egyértelmű P_x t hosszú út x-ből z-be, és z-nek D szomszédja van úgy, hogy mindegyiknek 1 a foka, kivéve azt, amelyik z-t P_x-en megelőzi.

A következőkben megmutatjuk a $\mathcal{H}_{r,t}$ család néhány tulajdonságát.

25. Lemma. ⟨*77*⟩ *Legyen* H *a* $\mathcal{H}_{r,t}$ *egyik* n *csúcsú tagja. Tegyük fel, hogy* $X, Y \subseteq V(H)$, *és* $|X|, |Y| \geq 0.35n$, *valamint* $X \cap Y = \emptyset$. *Ekkor létezik egy* $x \in X$ *és egy* $y \in Y$ *úgy, hogy* x *és* y *távolsága legfeljebb* $2t + 4$.

26. Következmény. *⟨78⟩ Legyen H a $\mathcal{H}_{r,t}$ egyik n csúcsú tagja. Ekkor H sávszélessége legalább $\frac{0.3n}{2t+4}$.*

27. Definíció. ⟨69⟩ Legyen $0 < \nu \leq \mu < 1$. Tegyük fel, hogy G egy n csúcsú gráf és $S \subseteq V(G)$. S *ν-robusztus szomszédsága* $RN_{\nu,G}(S)$ azon $v \in V(G)$ csúcsok halmaza, melyekre $|N(v) \cap S| \geq \nu n$. Azt mondjuk, hogy G *robusztus* (ν, μ)*-expander*, ha $|RN_{\nu,G}(S)| \geq |S| + \nu n$ minden $S \subseteq V(G)$ halmazra, melyre $\mu n \leq |S| \leq (1-\mu)n$. Ld. [7].

Konstruáljunk egy n csúcsú robusztus expandert, G-t. Legyen $V = A_0 \dot\cup A_1 \dot\cup \cdots \dot\cup A_{400}$, ahol $|A_i| = (1+\alpha)^i \frac{n}{1000}$ minden $0 \leq i < 400$-ra, és A_{400} tartalmazza a többi csúcsot. G élei között szerepel $v_i v_{i+1}$ minden $v_i \in A_i$-re és $v_{i+1} \in A_{i+1}$-re ($0 \leq i < 400$), és $G[A_{400}]$ a teljes $|A_{400}|$-csúcsú gráf. Ekkor G egy $(1/1000, 1/1000)$-robusztus expander.

28. Lemma. *⟨79⟩ Legyen H a $\mathcal{H}_{r,t}$ egy n csúcsú tagja, és G mint fent. Ekkor $H \not\subseteq G$, ha $t \leq 47$.*

A fejezet másik fő eredménye az, hogy ezek a gráfok beágyazhatóak olyan gráfokba, melyeknek legkisebb foka kicsit nagyobb $n/2$-nél.

29. Tétel. *⟨70⟩ Legyen $r \geq 35$ és $t \geq 2$ egész, és legyen $\gamma = \gamma(r) = 1/(8r2^r)$. Ekkor létezik egy $n_0 = n_0(\gamma)$ úgy, hogy a következő teljesül. Tegyük fel, hogy $n \geq n_0$, és G egy n csúcsú gráf, melynek minimumfoka $\delta(G) \geq (1/2 + 2\gamma^{1/3})n$. Ha $H \in \mathcal{H}_{r,t}$ egy n csúcsú gráf, akkor $H \subseteq G$.*

A 29. Tétel bizonyítása hasonló Csaba [2] fő eredményének bizonyításához. Először alkalmazzuk G-re a Regularitási Lemmát, létrehozzuk a G_r redukált gráfot, majd keresünk benne egy maximális M párosítást. M-et szuperregulárissá tesszük, majd a kivételes halmaz csúcsait szétosztjuk, miközben a szuperregularitást fenntartjuk. Végül H csúcsait hozzárendeljük G_r kupacaihoz, és alkalmazzuk a Blow-up Lemmát.

Hivatkozások

[1] K. Azuma. Weighted sums of certain dependent random variables. *Tohoku Mathematical Journal*, 19(3):357–367, 1967.

[2] B. Csaba. On embedding well-separable graphs. *Discrete Mathematics*, 308(19):4322–4331, 2008.

[3] B. Csaba and B.M. Vásárhelyi. On the relation of separability and bandwidth. Közlésre benyújtva, 2018.

[4] B. Csaba and B.M. Vásárhelyi. On embedding degree sequences. In *Proceedings of the Middle European Conference on Applied Theoretical Computer Science (MATCOS 2016)*, pages 68–71, 2016.

[5] B. Csaba and B.M. Vásárhelyi. On embedding degree sequences. *Informatica (SI)*, Közlésre elfogadva, 2018+

[6] D. Gale. A theorem on flows in networks. *Pacific Journal of Mathematics*, 7(2):1073–1082, 1957.

[7] F. Knox and A. Treglown. Embedding spanning bipartite graphs of small bandwidth. *Combinatorics, Probability and Computing*, 22(1):71–96, 2013.

[8] J. Komlós, G. N. Sárközy, and E. Szemerédi. Spanning trees in dense graphs. *Combinatorics, Probability and Computing*, 10(5):397–416, 2001.

[9] L. Lovász. *Combinatorial Problems and Exercises.* American Mathematical Society, second edition, 2007.

[10] H.J. Ryser. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canadian Journal of Mathematics*, 9:371–377, 1957.

[11] B.M. Vásárhelyi. An estimation of the size of non-compact suffix trees. *Acta Cybernetica*, 22(4):823–832, 2016.

[12] B.M. Vásárhelyi. On the bipartite graph packing problem. *Discrete Applied Mathematics*, 227:149–155, 2017.

A disszertáció a szerző alábbi cikkein alapul:

[3], [4], [5], [11] és [12].

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Vásárhelyi Bálint Márk Ph.D. fokozatra pályázó Fák és gráfpakolások című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- Béla Csaba, Bálint Márk Vásárhelyi, *On embedding degree sequences*, Middle-European Conference on Applied Theoretical Computer Science (MATCOS 2016), Proceedings, p.68–71, 2016
- Béla Csaba, Bálint Márk Vásárhelyi, *On embedding degree sequences*, Informatica (SI), 2018+
- Béla Csaba, Bálint Márk Vásárhelyi, *On the relation of separability and bandwidth*, Benyújtva, 2018+

Vásárhelyi Bálint Márk hozzájárulása a fent felsorolt cikkekhez 50-50%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2018. május 24.

Dr. Csaba Béla
Szegedi Tudományegyetem
Egyetemi docens