Doktori (PhD) Értekezés

Sáfár Zoltán

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

SZEGED
2011

Kétváltozós periodikus függvények, általánosított Lipschitz és Zygmund osztályok

Doktori (PhD) értekezés

Sáfár Zoltán

témavezető:
Dr. Móricz Ferenc
professzor emeritus
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR
BOLYAI INTÉZET
MATEMATIKA- ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYOK
DOKTORI ISKOLA

SZEGED
2011

"Isten volt az első, aki Fourier-analízist művelt, amikor a fülünkbe beépített egy Fourier-analizátort."

William R. Wade (1985)

"Figyelemre méltó, hogy olyan görbék és felületek ordinátáit is ki tudjuk fejezni konvergens sorok segítségével, amelyek nincsenek folytonos szabálynak alávetve."

"Egy függvény egészen tetszőleges lehet, azaz adott értékek olyan egymásutánja, melyek az x értékeinek felelnek meg és nem feltétlenül vannak alávetve egy közös szabálynak... Az f(x) függvény az ordináta értékeinek egymásutánját jelenti, amely értékek mindegyike tetszőleges... Ezek bármilyen módon követhetik egymást és mindegyik úgy van megadva mintha különálló mennyiségek volnának."

Charles Fourier

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnék köszönetet mondani mindenkinek, aki segített a dolgozat elkészítésében. Külön kiemelném közülük témavezetőmet, Dr. Móricz Ferencet, aki mindig türelemmel válaszolt kérdéseimre, értékes tanácsokkal és folyamatos odafigyeléssel kísérte munkám. Köszönettel tartozom társszerzőimnek is, név szerint Dr. Fülöp Vandának és Dr. Gawin Brownnak, akik nélkül nem születhetett volna meg ez a dolgozat.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A periodikus függvényeket már nagyon régóta használják, hiszen az ismétlődés szinte mindenhol megfigyelhető. Talán a csillagászok figyeltek fel legelőször ezekre a számukra nagyon hasznos függvényekre. A Fourier-sorok elméletének kialakulása azonban csak a XVIII. század közepére tehető, amikor az l hosszúságú, a két végén kifeszített rezgő húr alakját szerették volna meghatározni tetszőleges t időpontban, azon feltevés mellett, hogy a húr transzverzális síkrezgést végez. Daniel Bernoulli 1750-ben azt találta, hogy megfelelő időegység választása esetén a megoldás egy

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

trigonometrikus sor. A kor vezető matematikusai – Euler, D' Alambert – számára ellentmondásnak tűnt, hogy egy ilyen, analítikus függvényekből álló sor a $t = 0$ időpontban egy tetszőleges kezdőfeltételt, például egy törtvonal alakot is leírhat. Euler előtt lehetetlennek látszott, hogy egy "mechanikai görbe", amelynek egyes darabjai között semmi szerves kapcsolat sincs, egész menetében ugyanazzal a trigonometrikus sorral legyen kifejezhető. Az általános vélemény csak akkor kezdett változni, amikor Fourier – 1807-től kezdve – a változók szétválasztásával számos problémát hasonló módon oldott meg. A bizonyítások még nem voltak elég precízek, így több matematikus kételkedett ezen eredmények helyességében is. Bár a klasszikus Fourier-sorfejtések legegyszerűbb, és legfontosabb (a szakaszonként monoton és folytonos függvények) esetére már Dirichlet bebizonyította a pontonkénti konvergenciát, a problémakör máig élő, például a négyzetesen integrálható függvények klasszikus Fourier-sorának majdnem mindenütti konvergenciáját csak 1966-ban bizonyította be Carleson. Így érthető, hogy manapság is több matematikus kutatja az analízisnek ezt az ágát.

Az értekezésben olyan komplex együtthatójú egy- és kétváltozós trigonometrikus sorokkal foglalkozunk, amelyek abszolút és így egyenletesen is konvergensek. Ezen sorok összegfüggvénye minden pontban létezik, továbbá folytonos is. Az a tény is jól ismert, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sor egyben az összegfüggvényének Fourier sora is. E sorok együtthatóinak nagyságrendjét vizsgáljuk abból a szempontból, hogy az összegfüggvény valamely megfelelő általánosított Lipschitz vagy Zygmund függvényosztályba tartozzék. Ezen tulajdonság teljesülésére adunk szükséges és elegendő feltételeket az együtthatók segítségével. Majd megvizsgáljuk a kettős Fourier transzfolmált valamely "klasszikus" Lipschitz, illetve Zygmund függvényosztályba tartozásának szükséges és elegendő feltételét.

Az első fejezetben bevezetjük az egyváltozós esetben használt jelöléseket, röviden ismertetjük a dolgozat első és második fejezetében használt definiciókat, majd megfogalmazzuk az általánosítani kívánt állításokat (bizonyítás nélkül).

A második fejezetben az egyváltozós abszolút konvergens trigonometrikus sorok összegfüggvényének differenciálhatósági és simasági tulajdonságait vizsgáljuk. Elegendő feltételt adunk az $f(x)$ függvény Fourier együtthatóira ahhoz, hogy az $f(x)$ függvény r-edik deriváltja valamelyik

Lip(α), lip(α) (ahol $0 < \alpha \leq 1$) vagy Zyg(1), zyg(1) osztályba tartozzék. Ezek az elégséges feltételek szükségesek is bizonyos speciális esetekben.

A harmadik fejezetben bevezetjük a kétváltozós Fourier sorok tárgyalásához szükséges jelöléseket és definiciókat, majd bemutatjuk az általánosítani kívánt állításokat (bizonyítás nélkül).

A negyedik fejezetben további jelöléseket és definiciókat vezetünk be, majd bemutatjuk az új elért eredményeket kettős Fourier sorokra. Összefüggést keresünk a függvények kétváltozós folytonossági modulusa, simasági modulusa és a Fourier együtthatók nagyságrendje között. Elégséges feltételt adunk, mely biztosítja egy abszolút konvergens Fourier sorral rendelkező függvény kiterjesztett Lipschitz vagy kiterjesztett Zygmund osztályba tartozását. Továbbá azt is bizonyítjuk, hogy ezek a feltételek nem csupán elegendőek, de szükségesek is a Fourier együtthatóosztályok többségében. Ezek után megmutatjuk a fenti tételeknek bizonyos speciális eseteit is.

Az ötödik fejezetben bevezetjük a Fourier transzformált definicióját és ismertetjük az egyváltozós eredményeket, melyeket a következő fejezetben kiterjesztünk kétváltozós esetre. Az eddigiektől eltérően ebben a fejezetben már az egyváltozós segédállítások bizonyítását is bemutatjuk, mivel erre hivatkozni fogunk később.

A záró fejezetben megvizsgáljuk a kettős Fourier transzformált "klasszikus" kétváltozós Lipschitz és Zygmund osztályba tartozásának elegendő feltételeit is, melyek a lehető legjobbak abban az értelemben, hogy bizonyos függvények esetében szükségesek is.

1. fejezet

Ismert állítások egyváltozós trigonometrikus sorokra

Ebben a részben ismertetjük a későbbiekben használandó jelöléseket, definiciókat, majd kimondjuk (bizonyítás nélkül) a már ismert tételeket. Definiáljuk a lassú változású függvények és az általánosított Lipschitz osztályok fogalmát. Könnyen használható tulajdonságokkal adjuk meg Móricz W_α függvényosztályát és ezen függvények segítségével bevezetjük a kiterjesztett Lipschitz és Zygmund osztályokat.

1.1. Definiciók, jelölések

Fourier sorok

Legyen $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\}$ komplex számoknak tetszőleges olyan sorozata – jelben: $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$, amelyre a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty \tag{1.1}$$

összefüggés teljesül. Ekkor a $\sum c_k e^{ikx}$ sor egyenletesen konvergens, jelöljük az összegét $f(x)$-szel:

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{1.2}$$

1.1.1. Definició (Fourier sor). A 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény (komplex) Fourier sora az (1.2)-ben definiált trigonometrikus sor.

Mivel a trigonometrikus függvények 2π szerint periodikusak, ezért az egyszerűség kedvéért a továbbiakban tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény is 2π szerint periodikus.

Függvényosztályok

1.1.2. Definició (Lipschitz osztály). Egy f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ osztályba (vagy másképp kifejezve akkor tesz eleget az α-rendű Lipschitz feltételnek), ha van olyan csak a függvénytől függő $C = C(f)$ állandó, amelyre

$$|\Delta^1 f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \le Ch^\alpha =: O(h^\alpha) \quad \text{minden } x \in \mathbb{T} := [-\pi,\pi)\text{-re és } h > 0\text{-ra.}$$

A $\mathrm{lip}(\alpha)$ osztályt azon f függvények összessége alkotja, amelyekre a

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}|\Delta^1 f(x,h)| = 0$$

határérték egyenletesen teljesül $x \in \mathbb{T}$-ben, vagy rövidebb jelöléssel

$$|\Delta^1 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{egyenletesen teljesül } x \in \mathbb{T}\text{-ben.}$$

1.1.3. Definició (Zygmund osztály). Egy folytonos f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ osztályba, ha

$$|\Delta^2 f(x,h)| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = O(h^\alpha) \quad \text{minden } x \in \mathbb{T}\text{-re és } h > 0\text{-ra.}$$

A $\mathrm{zyg}(\alpha)$ osztály olyan folytonos függvényekből áll, amelyekre

$$|\Delta^2 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{egyenletesen } x \in \mathbb{T}\text{-ben.}$$

Megjegyzés. A $\mathrm{zyg}(1)$ azon folytonos függvényekből áll, amelyek egyenletesen simák a $\mathbb{T}$ tóruszon.

A $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ és $\mathrm{zyg}(\alpha)$ függvényosztályok definiciójában nem hagyható el a folytonossági feltétel; ismert olyan (Lebesgue értelemben) nem mérhető f függvény, amelyre

$$\Delta^2 f(x,h) = 0 \quad \text{minden } x \in \mathbb{T}\text{-re és } h > 0\text{-ra teljesül}$$

(lásd pl. [19, 43-44. old.]-ben).

Ismertek még a következő relációk is:

$$\mathrm{Zyg}(\alpha) = \mathrm{Lip}(\alpha), \qquad \mathrm{zyg}(\alpha) = \mathrm{lip}(\alpha), \qquad 0 < \alpha < 1,$$
$$\mathrm{Zyg}(1) \supset \mathrm{Lip}(1), \qquad \mathrm{zyg}(1) \supset \mathrm{lip}(1).$$

Végül nyilvánvaló, hogy ha $f \in \mathrm{lip}(1)$, vagy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $\alpha > 1$-re, akkor f konstans függvény, ezért a továbbiakban α-ról feltesszük, hogy $0 < \alpha \leq 1$ a Lipschitz függvényosztályok vizsgálatakor.

Hasonlóan, ha $f \in \mathrm{zyg}(2)$, vagy $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$ valamely $\alpha > 2$-re, akkor f lineáris függvény és a korábban feltett periodikusság miatt csak konstans függvény lehet, ezért a továbbiakban α-ról feltesszük, hogy $0 < \alpha \leq 2$ a Zygmund függvényosztályok tárgyalásánál.

Egy pozitív, az $[a, \infty)$ ($a > 0$ tetszőleges) intervallumon mérhető L függvényt Karatama értelemben *lassú változású függvény*nek nevezünk (lásd [2, 6. old.]-ben), ha

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1, \quad \text{amint} \quad x \to \infty, \quad \text{minden} \quad \lambda > 0\text{-ra.}$$

Ekkor L kiterjeszthető az egész pozitív félegyenesre úgy, hogy továbbra is lassú változású maradjon, például $L(x) := L(a)$ minden $0 < x < a$ pontban.

Ha L nemcsökkenő függvény, akkor a fenti határérték teljesülését elegendő csak a $\lambda = 2$ esetre megkövetelni.

1.1.4. Definició (Általánosított Lipschitz osztályok). Adott $\alpha > 0$ szám és tetszőleges, a fenti értelemben lassú változású L függvény esetén azt mondjuk, hogy az f függvény eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha; L)$ általánosított Lipschitz osztálynak, ha folytonossági modulusára teljesül az

$$\omega(f;\delta) := \sup_{0<h\leq\delta} ||\Delta^1 f(x,h)|| = O\Big(\delta^\alpha L\Big(\frac{1}{\delta}\Big)\Big)$$

egyenlőség, ahol $\delta > 0$ tetszőleges és $||\cdot||$ a szokásos maximum norma.

Adott $\alpha \geq 0$ szám és tetszőleges lassú változású L függvény esetén azt mondjuk, hogy az f függvény eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha; 1/L)$ általánosított Lipschitz osztálynak, ha folytonossági modulusára teljesül az

$$\omega(f;\delta) = O\Big(\frac{\delta^\alpha}{L(1/\delta)}\Big)$$

egyenlőség, ahol $\delta > 0$ tetszőleges.

Ismét nyilvánvaló, hogy ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; L)$ valamely $\alpha > 0$, vagy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; 1/L)$ valamely $\alpha \geq 0$, akkor f folytonos. Továbbá ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; L)$ valamely $\alpha > 1$, vagy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; 1/L)$ valamely $\alpha \geq 1$, akkor f konstans függvény (lásd [19]).

A következőkben ismertetjük Móricz (lásd [12]-ben) W_α függvényosztályát, amely azon w_α függvények összessége, amelyek a 0 valamely jobb oldali környezetében (pl. $[0,1]$-ben) értelmezettek, ott nemnegatívak és nemcsökkenőek, és teljesítik a következő feltételeket:

$$w_\alpha(0) = 0, \qquad \sup_{0<\delta\leq 1} \frac{w_\alpha(2\delta)}{w_\alpha(\delta)} =: c_\alpha < \infty,$$

továbbá minden $\alpha' > \alpha$ számra

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{w_\alpha(2^{-n-1})}{w_\alpha(2^{-n})} > 2^{-\alpha'},$$

és

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{w_\alpha(2^{-n-1})}{w_\alpha(2^{-n})} \leq 2^{-\alpha}.$$

Megjegyzés. A feltételekből következik, hogy $\lim_{\delta\to 0} w_\alpha(\delta) = 0$.

Ha L lassú változású függvény, akkor ezen feltételeket a

$$w_\alpha(\delta) := \delta^\alpha \quad \text{vagy} \quad \delta^\alpha L\Big(\frac{1}{\delta}\Big),\ \alpha > 0, \quad \text{vagy} \quad \delta^\alpha/L(1/\delta),\ \alpha \geq 0$$

függvények nyilván teljesítik, így lehetőségünk van az általánosított Lipschitz osztályok további kiterjesztésére.

1.1.5. Definició (Kiterjesztett Lipschitz osztályok). Adott $\alpha \geq 0$ számra legyen

$$\mathrm{Lip}(w_\alpha) := \{f : \omega(f;\delta) = O(w_\alpha(\delta))\}$$

a kiterjesztett Lipschitz osztály.

A megfelelő Zygmund osztály definiciójához szükségünk lesz az f függvény simasági modulusára, amit az

$$\omega_2(f;\delta) := \sup_{0<h\leq\delta} ||\Delta^2 f(x,h)||$$

összefüggéssel adunk meg.

1.1.6. Definició (Kiterjesztett Zygmund osztályok). Adott $\alpha \geq 0$ számra legyen

$$\mathrm{Zyg}(w_\alpha) := \{f : \omega_2(f;\delta) = O(w_\alpha(\delta))\}$$

a kiterjesztett Zygmund osztály.

Megjegyzés. A folytonossági modulust definiálhatjuk a következőképpen is (lásd [9]): Legyen $\omega(\delta)$ nemnegatív függvény a $[0, 2\pi)$ intervallumon, amelyre teljesül az alábbi két feltétel:

$$\omega(0) = 0, \quad \text{és} \quad \omega(\delta_1 + \delta_2) \le \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2) \quad \text{minden} \quad 0 < \delta_1, \delta_2 \le \pi.$$

Azt mondjuk, hogy az ω_α folytonossági modulusok ($0 \le \alpha \le 1$) az Ω_α Leindler függvényosztályba tartoznak, ha

(i) minden $\alpha' > \alpha$ számhoz létezik olyan természetes $\mu = \mu(\alpha')$, hogy

$$2^{\mu\alpha'}\omega_\alpha(2^{-n-\mu}) > 2\omega_\alpha(2^{-n})$$

minden $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$-re;

(ii) minden $\nu \in \mathbb{N}$ értékhez megadható olyan $N = N(\nu) \in \mathbb{N}$ szám, hogy minden $n \ge N$ esetében

$$2^{\nu\alpha}\omega_\alpha(2^{-n-\nu}) \le 2\omega_\alpha(2^{-n}).$$

Ezen függvények segítségével általánosíthatjuk a "klasszikus" Lipschitz és Zygmund függvényosztályokat:

$$H^{\omega_\alpha} := \{f : \sup_{0<h\le\delta} ||\Delta^1 f(x,h)|| = O(\omega_\alpha(\delta))\},$$

illetve

$$(H^{\omega_1})^* := \{f : \sup_{0<h\le\delta} ||\Delta^2 f(x,h)|| = O(\omega_\alpha(\delta))\}.$$

Németh [16] a nemnegatív együtthatójú abszolút konvergens szinusz- és koszinuszsor fenti függvényosztályokba tartozására adott szükséges és elegendő feltételt, amelyek Boas [3] megfelelő állításainak általánosításai.

1.2. Ismert egyváltozós tételek

Ebben a szakaszban bemutatjuk azokat a tételeket, amelyeket a következő fejezetekben általánosítunk. Az állítások bizonyítását mellőzzük, mert azok a [10], [11] és [12] cikkekben részletesen megtalálhatóak.

A továbbiakban is legyen $\{c_k\}$ a komplex számoknak egy olyan sorozata, melyre az (1.1) feltétel teljesül, és definiáljuk az f függvényt az (1.2) szerint.

1.2.1. Tétel. (i) *Ha valamely* $0 < \alpha \le 1$ *számra*

$$\sum_{|k|\le n} |kc_k| = O(n^{1-\alpha}), \tag{1.3}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy* $\{c_k\}$ *valós számok egy sorozata – jelben:* $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ *– és* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ *valamely* $0 < \alpha \le 1$ *számra. Ha a* $kc_k \ge 0$ *egyenlőtlenség minden* k *indexre teljesül, akkor az* (1.3) *egyenlőtlenség is fennáll minden* $0 < \alpha \le 1$ *számra; ha* $c_k \ge 0$ *igaz minden* k*-ra, akkor az* (1.3) *csak a* $0 < \alpha < 1$ *esetben marad érvényes.*

Megjegyzés. Megmutatható, hogy az (1.3) feltétel a $0 < \alpha < 1$ esetben ekvivalens a következő egyenlőséggel:

$$\sum_{|k|\ge n} |c_k| = O(n^{-\alpha}). \tag{1.4}$$

1.2.2. Tétel. *Minden* $0 < \alpha < 1$ *esetében az* 1.2.1. *Tétel mindkét állítása igaz marad, ha az* (1.3) *feltételben a 'O' jelölést a 'o'-val, a* $\mathrm{Lip}(\alpha)$ *függvényosztályt pedig* $\mathrm{lip}(\alpha)$*-val helyettesítjük.*

A következő két állítás az 1.2.1. és az 1.2.2. Tételek megfelelője abban az esetben, amikor az (1.3) és az (1.4) feltételek nem feltétlenül ekvivalensek, vagyis amikor az $\alpha \geq 1$ értéket is felvehet.

1.2.3. Tétel. *Legyen* $0 < \alpha \leq 2$.
(i) *Ha az* (1.4) *teljesül, akkor* $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$.
(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ *és* $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$. *Ha a* $kc_k \geq 0$ *vagy* $c_k \geq 0$ *feltételek valamelyike teljesül minden indexre, akkor* (1.4) *fennáll.*

1.2.4. Tétel. *A* $0 < \alpha < 2$ *esetben az* 1.2.3. *Tétel mindkét állítása igaz marad, ha az* (1.4) *feltételben a 'O' jelölést a 'o'-val, a* $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ *függvényosztályt pedig* $\mathrm{zyg}(\alpha)$*-val helyettesítjük.*

A következő tételben egy trigonometrikus sor összegfüggvényének a differenciálhatóságát vizsgáljuk; szükségünk lesz a következő feltételre:

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = o(n^{-1}). \tag{1.5}$$

1.2.5. Tétel. *Ha az* (1.5) *feltétel teljesül, akkor az* (1.2) *formulával definiált trigonometrikus sor formális deriváltja akkor és csak akkor konvergens valamely* $x \in \mathbb{T}$ *pontban, ha az* f*-fel jelölt összegfüggvény differenciálható ezen a helyen, és ekkor*

$$f'(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ikc_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{T}. \tag{1.6}$$

Továbbá, az f' *deriváltfüggvény akkor és csak akkor folytonos a* $\mathbb{T}$ *tóruszon, ha az* (1.6) *sor egyenletesen konvergens* $\mathbb{T}$*-n.*

Az 1.2.1. Tétel igaz marad abban az esetben is, ha az együtthatók nagyságrendjét nem csak hatvánnyal, hanem annak egy lassú változású függvényszeresével helyettesítjük, továbbá a "klasszikus" Lipschitz osztályt az általánosított Lipschitz osztályra cseréljük:

1.2.6. Tétel. *Legyen* L *lassú változású függvény.*
(i) *Ha valamely* $0 < \alpha \leq 1$ *számra*

$$\sum_{|k|\leq n} |kc_k| = O(n^{1-\alpha}L(n)), \tag{1.7}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; L)$.
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\}$ *valós számok olyan sorozata, melyre* $kc_k \geq 0$ *minden* k*-ra, és* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; L)$ *valamely* $0 < \alpha \leq 1$ *számra, akkor* (1.7) *fennáll.*

Megjegyzés. Megmutatható, hogy a $0 < \alpha < 1$ esetben (1.7) ekvivalens a

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = O(n^{-\alpha}L(n))$$

egyenlőséggel.

A következő állításban pedig jobban korlátozzuk az együtthatók növekedésének ütemét, cserébe ezekkel az együtthatókkal definiált függvény a másik általánosított Lipschitz osztályba fog tartozni. Itt azonban már nem az (1.3) hanem az (1.4) feltétellel dolgozunk:

1.2.7. Tétel. *Legyen L lassú változású függvény.*

(i) *Ha valamely $0 \le \alpha < 1$ számra*

$$\sum_{|k|\ge n} |c_k| = O\Big(\frac{n^{-\alpha}}{L(n)}\Big), \tag{1.8}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; 1/L)$.

(ii) *Megfordítva, ha $\{c_k\}$ nemnegatív valós számok sorozata és $f \in \mathrm{Lip}(\alpha; 1/L)$ valamely $0 \le \alpha < 1$ számra, akkor (1.8) fennáll.*

A kiterjesztett Lipschitz és Zygmund osztályok definiciói lehetőséget adnak még további általánosításokra. Emlékeztetünk arra, hogy w_α alkalmas választásával megkapjuk az általánosított Lipschitz osztályokat.

1.2.8. Tétel. *Legyen $w_\alpha \in W_\alpha$.*

(i) *Ha valamely $0 < \alpha \le 1$ számra és $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatra*

$$\sum_{|k|\le n} |kc_k| = O(nw_\alpha(n^{-1})), \tag{1.9}$$

akkor (1.1) teljesül, és $f \in \mathrm{Lip}(w_\alpha)$.

(ii) *Megfordítva, ha $\{c_k\} \subset \mathbb{R}$ olyan számsorozat, melyre $kc_k \ge 0$ teljesül minden k indexre, fennáll (1.1) és $f \in \mathrm{Lip}(w_\alpha)$ valamely $0 \le \alpha \le 1$ számra, akkor (1.9) fennáll.*

1.2.9. Tétel. *Legyen $w_\alpha \in W_\alpha$.*

(i) *Ha valamely $0 \le \alpha \le 2$ számra és $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatra*

$$\sum_{|k|\le n} k^2|c_k| = O(n^2 w_\alpha(n^{-1})), \tag{1.10}$$

akkor (1.1) teljesül, és $f \in \mathrm{Zyg}(w_\alpha)$.

(ii) *Megfordítva, ha a $\{c_k\}$ nemnegatív valós számok olyan sorozata, amelyre (1.1) fennáll és $f \in \mathrm{Zyg}(w_\alpha)$ valamely $0 \le \alpha \le 2$ számra, akkor (1.10) fennáll.*

Végül az 1.2.8. Tétel (i) részének megfelelője és az 1.2.9. Tétel (ii) része az $\alpha = 0$ esetben a következő alakot ölti:

1.2.10. Tétel. *Legyen $w_0 \in W_0$ és $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ olyan sorozat, amelyre (1.1) fennáll.*

(i) *Ha a $\{c_k\}$ sorozatra*

$$\sum_{|k|\ge n} |c_k| = O(w_0(n^{-1})), \tag{1.11}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(w_0)$.

(ii) *Megfordítva, ha $c_k \ge 0$ minden indexre, amelyre (1.1) fennáll és az (1.2) összefüggéssel definiált függvényre $f \in \mathrm{Zyg}(w_0)$, akkor (1.11) fennáll.*

2. fejezet

Új eredmények trigonometrikus sorok differenciálhatóságára

2.1. Magasabb rendű deriváltak és függvényosztályok

Ebben a fejezetben a korábban felsorolt 1.2.1 - 1.2.5. Tételeket fogjuk általánosítani magasabb rendű deriváltakra. Megvizsgáljuk, hogy ezek a deriváltfüggvények milyen feltételek teljesülése esetén tartoznak valamelyik "klasszikus" Lipschitz vagy Zygmund osztályba.

2.1.1. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész számra a*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = o(n^{-r})$$

összefüggés teljesül, akkor az (1.2) sor r-szeres formális deriváltja pontosan akkor konvergens valamely $x \in \mathbb{T}$ pontban, ha az f összegfüggvény r-szer differenciálható x-ben, és ekkor

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^r c_k e^{ikx}. \tag{2.1}$$

Továbbá az $f^{(r)}$ deriváltfüggvény akkor és csak akkor folytonos $\mathbb{T}$-n, ha a (2.1)-ben szereplő trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $\mathbb{T}$-n.

2.1.2. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész és $0 < \alpha \leq 1$ számokra*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = O(n^{-r-\alpha}), \tag{2.2}$$

akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n, a $0 < \alpha < 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ és az $\alpha = 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$.

2.1.3. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész és $0 < \alpha \leq 1$ számokra*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = o(n^{-r-\alpha}), \tag{2.3}$$

akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n, a $0 < \alpha < 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{lip}(\alpha)$ és az $\alpha = 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{zyg}(1)$.

2.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az együtthatókra a következő két feltétel egyike fennáll:* $kc_k \geq 0$ *minden* k*-ra vagy* $c_k \geq 0$ *minden* k*-ra. Legyen* f r*-szer differenciálható* $\mathbb{T}$*-n. Ha* $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$*, akkor a* (2.2) *fennáll ezzel az* α*-val valamely* $0 < \alpha < 1$ *számra; hasonlóan, ha* $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$*, akkor* (2.2) *fennáll az* $\alpha = 1$ *esetben.*

2.1.5. Tétel. *A* 2.1.4. *Tétel mindkét állítása igaz marad, ha a* $\mathrm{Lip}(\alpha)$ *és* $\mathrm{Zyg}(1)$ *osztályokat* $\mathrm{lip}(\alpha)$ *és* $\mathrm{zyg}(1)$ *osztályokra, illetve* a (2.2) *feltételt* a (2.3)*-ra cseréljük.*

2.1.1. Következmény. (i) *Ha valamely* $r \geq 1$*-re*

$$\sum_{|k| \leq n} |k^{r+1} c_k| = O(1), \tag{2.4}$$

akkor f r*-szer differenciálható a tóruszon és* $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$.

(ii) *Tegyük fel, hogy* $k^{r+1} c_k \geq 0$ *minden* k *indexre és* f r*-szer differenciálható* $\mathbb{T}$*-n, valamely* $r \geq 1$ *számra. Ha* $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$, *akkor* (2.4) *fennáll.*

2.2. Segédtételek

Ahhoz, hogy a fenti eredményeket átláthatóan bizonyítsuk, szükségünk van öt egyszerű állításra.

2.2.1. Lemma. *Legyen* $\{a_k : k = 1, 2, \dots\}$ *nemnegatív valós számok egy sorozata, jelben:* $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$.

(i) *Ha valamely* $\delta > \beta \geq 0$ *számokra*

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\delta} a_k = O(n^{\beta}), \tag{2.5}$$

akkor a $\sum a_k$ *sor konvergens és*

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(n^{\beta-\delta}). \tag{2.6}$$

(ii) *Megfordítva, ha valamely* $\delta \geq \beta > 0$ *számokra a* (2.6) *összefüggés teljesül, akkor a* (2.5) is.

Megjegyzés. Tehát $\delta > \beta > 0$ esetben a (2.5) és a (2.6) egyszerre teljesülnek, vagy nem teljesülnek. A végpontokban azonban már csak az egyirányú következtetés igaz, a visszairányra adható ellenpélda:

Ha $\delta = \beta > 0$, akkor az $a_k = k^{-1}$ együtthatók kielégítik a (2.5) feltételt, de a (2.6)-ot nem. Másfelől, ha $a_k = k^{-1-\delta}$, akkor (2.6) fennáll, de (2.5) nem.

Bizonyítás. A továbbiakban jelölje

$$I_p := \{2^p, 2^p + 1, \dots, 2^{p+1} - 1\}$$

a természetes számok diadikus blokkjait, ahol $p = 0, 1, 2, \dots$.

(i) Az állításunkat nyilván elegendő abban az esetben belátni, amikor n a 2 valamely nemnegatív egész kitevős hatványa. Legyen például $n = 2^N$, ahol $N \in \mathbb{N}$. Ekkor a (2.5) feltevés szerint létezik olyan C konstans, amellyel

$$2^{N\delta} \sum_{k \in I_N} a_k \leq \sum_{k \in I_N} k^\delta a_k \leq C 2^{(N+1)\beta}$$

fennáll, tehát

$$\sum_{k \in I_N} a_k \leq 2^\beta C 2^{N(\beta-\delta)}.$$

Mivel feltevés szerint $\delta > \beta$, ezért írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=2^N}^{\infty} a_k = \sum_{p=N}^{\infty} \sum_{k \in I_p} a_k \leq 2^\beta C \sum_{p=N}^{\infty} 2^{p(\beta-\delta)} = O(2^{N(\beta-\delta)}).$$

(ii) Most a (2.6) feltevés alapján létezik egy másik C konstans, hogy

$$\sum_{k=2^N}^{\infty} a_k \leq C 2^{N(\beta-\delta)}.$$

Nyilván minden p természetes számra igaz a következő becslés:

$$\sum_{k \in I_p} k^\delta a_k \leq 2^{p+1} \sum_{k \in I_p} a_k \leq 2^\delta C 2^{p\beta},$$

következésképpen

$$\sum_{k=1}^{2^N} k^\delta a_k \leq \sum_{p=0}^{N} \sum_{k \in I_p} k^\delta a_k \leq 2^\delta C \sum_{p=0}^{N} 2^{p\beta} = O(2^{N\beta}).$$

□

Bizonyítás nélkül ismertetjük a fenti állításunk megfelelőjét, amikor nem csak n-ben való korlátosságot, hanem konvergenciát is megkövetelünk a soroktól.

2.2.2. Lemma. *A $\delta > \beta > 0$ esetben a 2.2.1. Lemma mindkét állítása igaz marad, ha a (2.5) és a (2.6) feltételekben a 'O'-t 'o'-val helyettesítjük.*

2.2.3. Lemma. *Legyen $\{a_k\} \subset \mathbb{R}_+$ olyan sorozat, melyre $\sum a_k < \infty$. Ha valamely $\alpha > 0$-ra*

$$\sum_{k=n}^{\infty} a_k = O(n^{-\alpha}), \tag{2.7}$$

akkor minden a $(0, \alpha)$ intervallumban lévő γ-ra a $\sum k^\gamma a_k$ sor konvergens és

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^\gamma a_k = O(n^{\gamma-\alpha}). \tag{2.8}$$

Megjegyzés. A $\gamma = \alpha$ esetben a 2.2.3. Lemma már nem igaz.

Az állítás bizonyítása a 2.2.1. Lemmához hasonlóan diadikus intervallumokra bontással történik.

2.2.4. Lemma. *A 2.2.3. Lemma érvényes marad abban az esetben is, ha a (2.7) és a (2.8) összefüggésekben a 'O'-t 'o'-ra cseréljük.*

Az utolsó segédállításunk pedig közismert.

2.2.5. Lemma. *Legyen $\{g_n(x) : n = 1, 2, \dots\}$ differenciálható függvények egy sorozata $\mathbb{T}$-n. Ha a $\sum g_n(x)$ függvénysor konvergens valamely $x \in \mathbb{T}$ pontban, és a formális deriválással nyert $\sum g_n'(x)$ sor egyenletesen konvergens a tóruszon, akkor a $\sum g_n(x)$ sor is egyenletesen konvergens $\mathbb{T}$-n, a $g(x)$-szel jelölt összegfüggvénye differenciálható minden $x \in \mathbb{T}$ pontban és*

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n'(x).$$

2.3. A 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4. és 2.1.5. Tételek bizonyítása

A 2.1.1. Tétel bizonyítása

Az állítást teljes indukcióval igazoljuk. Ha $r = 1$, akkor az állításunk megegyezik a 1.2.5. Tétel állításával, így ebben az esetben készen vagyunk.

A továbbiakban tegyük fel, hogy $r \geq 2$. Ekkor a 2.2.4. Lemma alkalmazásával (az $\alpha = r$ és $\gamma = r - 1$ esetben) kapjuk, hogy $\sum |k^{r-1} c_k|$ sor konvergens és

$$\sum_{|k| \geq n} |k^{r-1} c_k| = o(n^{-1}). \tag{2.9}$$

Következésképpen az (1.2) trigonometrikus sor $(r-1)$-edik formális deriváltja abszolút konvergens $\mathbb{T}$-n. A 2.2.5. Lemma $(r-1)$-szer történő alkalmazásával adódik az

$$f^{(r-1)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^{r-1} c_k e^{ikx}, \quad x \in \mathbb{T} \tag{2.10}$$

összefüggés. Most a (2.9) miatt alkalmazhatjuk az 1.2.5. Tételt a (2.10) sorra, amivel be is fejeztük az állításunk bizonyítását. □

A 2.1.2. Tétel bizonyítása

A (2.2) feltétel és a 2.2.3. Lemma alapján világos, hogy a $\sum |k^r c_k|$ sor konvergens. Következésképpen az (1.2) Fourier sor r-szeres formális deriváltja abszolút konvergens $\mathbb{T}$-n. A 2.2.5. Lemma ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n és a (2.1) egyenlőség is teljesül.

A 2.2.3. Lemmából azt is kapjuk, hogy

$$\sum_{|k| \geq n} |k^r c_k| = O(n^{-\alpha}), \tag{2.11}$$

és ez az összefüggés a $0 < \alpha < 1$ esetben a 2.2.1. Lemma (ii) része (a $\delta = 1$ és $\beta = 1 - \alpha$) miatt ekvivalens a

$$\sum_{|k| \leq n} |k(k^r c_k)| = O(n^{1-\alpha})$$

feltétellel, így az 1.2.1. Tétel (i) állítása szerint $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$.

Ha $\alpha = 1$, akkor a (2.11) egyenlőség jobb oldalán $O(n^{-1})$ áll. Most az 1.2.3. Tétel (i) részének segítségével nyerjük, hogy $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$. □

Megjegyzés. A 2.1.3. Tétel bizonyítása teljesen hasonlóan történik mint a 2.1.2. Tételé, csak az itt használt *'O'* állításokat kell kicserélni a megfelelő *'o'* állításokra.

A 2.1.4. Tétel bizonyítása

A feltevésekből következik, hogy az $f^{(r)}$ deriváltfüggvény folytonos $\mathbb{T}$-n, ezért $f^{(r-1)} \in \mathrm{zyg}(1)$. Mivel

$$\mathrm{zyg}(1) \subset \mathrm{Zyg}(\alpha) = \mathrm{Lip}(\alpha) \quad \text{minden} \quad \alpha < 1\text{-re},$$

ezért Bernstein tételéből (lásd [19, 240. oldal]-t), az $f^{(r-1)}$ (2.10)-ben adott Fourier sora abszolút konvergens, azaz $\sum |k^{r-1}c_k| < \infty$.

Ismét a feltevések miatt vagy $k(k^{r-1}c_k) \geq 0$ minden k indexre, vagy $k^{r-1}c_k \geq 0$ minden k indexre. Mivel $f^{(r-1)} \in \mathrm{zyg}(1)$, alkalmazhatjuk az 1.2.4. Tétel (ii) részét, amiből adódik a

$$\sum_{|k|\geq n} |k^{r-1}c_k| = o(n^{-1})$$

összefüggés. Ez lehetővé teszi, hogy az 1.2.5. Tétel segítségével eljussunk a következő megállapításunkhoz: a (2.1) sor pontosan akkor konvergens egyenletesen, ha $(f^{(r-1)})' = f^{(r)}$ folytonos $\mathbb{T}$-n. Feltevésünk szerint $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $\alpha > 0$-ra vagy $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$, így az előbbi esettel állunk szemben, vagyis a (2.1) sor egyenletesen konvergens.

Ezek után négy különböző esetet fogunk megkülönböztetni aszerint, hogy az f együtthatóinak milyen az előjele, illetve aszerint, hogy az $f^{(r)}$ függvény melyik Lipschitz, vagy Zygmund osztályba esik.

(i) Először tekintsük azt az esetet, amikor $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $0 < \alpha < 1$-re és $k^{r-1}c_k \geq 0$ minden indexre. Ekkor létezik olyan csak f-től függő C konstans, amelyre

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(0)| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^r c_k (e^{ikx} - 1)\Big| = \tag{2.12}$$

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^r c_k (e^{ikx} - 1)\Big| \leq C x^\alpha \quad \text{minden } x > 0\text{-ra}.$$

Az abszolútérték-jelen belül vegyük csak a képzetes részt, ezzel biztos, hogy nem növeljük a bal oldalon lévő mennyiséget:

$$\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^r c_k \sin kx\Big| \leq C x^\alpha, \quad x > 0.$$

A $\sum k^r c_k \sin kx$ sor x-ben való egyenletes konvergenciája következtében integrálhatunk tagonként bármely véges $(0,h)$ intervallumon, így az

$$\Big|\sum_{|k|\geq 1} k^r c_k \frac{1-\cos kh}{k}\Big| \leq C \frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad h > 0$$

összefüggéshez jutunk. Az előjelek választása ($k^{r-1}c_k \geq 0$ feltétel) miatt írhatjuk, hogy

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{r-1}c_k(1-\cos kh) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{r-1}c_k \sin^2\frac{kh}{2} \leq C\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Legyen n a h reciprokának egészrésze, vagyis

$$n := \Big[\frac{1}{h}\Big], \quad \text{ahol} \quad 0 < h \leq 1. \tag{2.13}$$

Használjuk a

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \tag{2.14}$$

egyenlőtlenséget és az n iménti definicióját, ekkor az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$2\sum_{|k|\le n} k^{r-1}c_k\frac{k^2h^2}{\pi^2}\le C\frac{h^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Átrendezéssel látjuk, hogy

$$\sum_{|k|\le n} k^{r+1}c_k\le \frac{C\pi^2}{2(\alpha+1)}h^{\alpha-1}=O(n^{1-\alpha}).$$

Most a 2.2.1. Lemma (i) részének alkalmazásával (a $\delta=r+1$ és $\beta=1-\alpha$ esetben) nyerjük, hogy

$$\sum_{|k|\ge n}|c_k|=O(n^{-r-\alpha}),$$

tehát az első eset bizonyításával készen vagyunk.

(ii) Másodszor vizsgáljuk azt az esetet, amikor $f^{(r)}\in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $0<\alpha<1$ számra és $k^rc_k\ge 0$. Ebben az esetben vegyük a (2.12) valós részét, használjuk a (2.13) és (2.14) összefüggéseket. Most az együtthatók előjelének választása miatt az abszolútérték-jel elhagyható; ismét alkalmazzuk a 2.2.1. Lemmát és ebben az esetben is beláttuk az állításunkat.

(iii) Most tegyük fel, hogy $f^{(r)}\in \mathrm{Zyg}(1)$ és $k^{r-1}c_k\ge 0$ minden k indexre. Ekkor létezik olyan csak f-től függő C konstans, hogy minden $x>0$ és $h>0$ esetén

$$|f^{(r)}(x+h)-2f^{(r)}(x)+f^{(r)}(x-h)|=\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}(ik)^rc_k\sin kx(2\cos kh-2)\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^rc_k\sin kx(2\cos kh-2)\Big|\le Ch. \tag{2.15}$$

Az (i) rész bizonyításához hasonlóan ismét vegyük az abszolútérték-jelen belüli kifejezés képzetes részét, és az egyenletes konvergencia miatt intgráljunk tagonként az x változó szerint a $(0,h)$ intervallumon. Eredményül kapjuk az

$$\Big|\sum_{|k|\ge 1}k^rc_k\frac{1-\cos kh}{k}(2\cos kh-2)\Big|\le Ch^2,\quad h>0$$

egyenlőtlenséget. Az együtthatókra tett feltevésünk szerint $k^{r-1}c_k\ge 0$, ezért írhatjuk, hogy

$$2\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^{r-1}c_k(1-\cos kh)^2=8\sum_{k\in\mathbb{Z}}k^{r-1}c_k\sin^4\frac{kh}{2}\le Ch^2.$$

Válasszuk n-et ismét a (2.13) szerint, használjuk a (2.14) egyenlőtlenséget és a konstansokat vigyük át a jobb oldalra. Ekkor becslésünk a

$$\sum_{|k|\le n}k^{r+3}c_k\le\frac{C\pi^4}{8}h^{-2}=O(n^2)$$

alakot ölti. Alkalmazzuk a 2.2.1. Lemmát, és ezzel beláttuk az állításunkat ebben az esetben is, hiszen

$$\sum_{|k|\ge n}|c_k|=O(n^{2-(r+3)})=O(n^{-r-1}).$$

(iv) Befejezésül tekintsük azt az esetet, amikor $f^{(r)}\in\mathrm{Zyg}(1)$ és $k^rc_k\ge 0$. A (2.15) egyenlőtlenséget írjuk fel az $x=0$ helyettesítéssel, amelyben az együtthatók választása miatt az abszolútérték-jel elhagyható. A (2.13) definició, (2.14) egyenlőtlenség és a 2.2.1. Lemma alkalmazásával készen vagyunk ebben az esetben is. Így a 2.1.4. Tétel bizonyításával is. □

A 2.1.5. Tétel bizonyítása

Nem részletezzük, mert teljesen hasonló az előző bizonyításhoz, az esetek végén a 2.2.1. Lemma helyett a 2.2.2. Lemmát kell használnunk. $\square$

3. fejezet

Ismert állítások kettős trigonometrikus sorokra

Ebben a fejezetben bemutatjuk az 1.1.1-1.1.3. Definiciók olyan kiterjesztését a kétváltozós esetre, amelyet könnyen tudunk kezelni. Majd (bizonyítás nélkül) bemutatjuk Móricz [13] "klasszikus" függvényosztályokra vonatkozó kétváltozós tételeit.

3.1. Definiciók, jelölések

Kettős Fourier sorok

A komplex értékű, mindkét változójában 2π szerint periodikus $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$ függvény kettős Fourier-sorát az

$$f(x,y) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)}$$

kettős sorral értelmezzük, ahol

$$c_{kl} := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{T}^2} f(u,v) e^{-i(ku+lv)} \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \quad (k,l) \in \mathbb{Z}^2,$$

az f függvény Fourier-együtthatói.

A Riemann-Lebesgue lemma alapján, ha $f \in L^1(\mathbb{T}^2)$, akkor

$$|c_{kl}| \to 0, \quad \max\{|k|,|l|\} \to \infty.$$

A vizsgálataink során fel fogjuk tenni, hogy az együtthatókból képzett kettős numerikus sor abszolút konvergens, azaz

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{kl}| < \infty. \tag{3.1}$$

Ebben az esetben a fenti kettős trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, és így az összegfüggvényének Fourier sora, amely így folytonos a $\mathbb{T}^2$ tóruszon,

$$f(x,y) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)}. \tag{3.2}$$

A konvergenciát mindig Pringsheim értelemben tekintjük, azaz

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{|k|\le m} \sum_{|l|\le n} c_{kl} e^{i(kx+ly)} = f(x,y),$$

ahol m és n egymástól függetlenül tartanak végtelenbe.

Mivel a trigonometrikus függvények 2π szerint periodikusak, ezért az egyszerűség kedvéért a továbbiakban tegyük fel, hogy az $f(x,y)$ függvény mindkét változójában 2π szerint periodikus.

Függvényosztályok

Ebben a részben ismertetjük Móricz Ferenc által bevezetett multiplikatív Lipschitz (lásd [6]) és multiplikatív Zygmund (lásd [5]) osztályok definicióját, amelyek természetes kiterjesztései az egyváltozós megfelelő függvényosztályoknak.

3.1.1. Definició (Multiplikatív Lipschitz osztályok). Legyen $\alpha, \beta > 0$ két tetszőleges valós szám és

$$\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2) = f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y) - f(x, y+h_2) + f(x,y) \tag{3.3}$$

az elsőrendű differencia $(x,y) \in \mathbb{T}^2$-ben.

Egy folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik bele a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ Lipschitz osztályba, ha az

$$|\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta)$$

azonosság minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre teljesül.

Egy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ függvény a $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ függvényosztálynak is eleme, ha

$$\lim_{h_1,h_2\to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = 0 \quad \text{egyenletesen} \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2\text{-ben.}$$

3.1.2. Definició (Multiplikatív Zygmund osztályok). Teljesen hasonlóan, legyen $\alpha, \beta > 0$ két tetszőleges valós szám és

$$\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2) = \tag{3.4}$$

$$= f(x+h_1, y+h_2) + f(x+h_1, y-h_2) + f(x-h_1, y+h_2) + f(x-h_1, y-h_2) -$$

$$-2f(x, y+h_2) - 2f(x+h_1, y) - 2f(x, y-h_2) - 2f(x-h_1, y) + 4f(x,y)$$

a másodrendű differencia $(x,y) \in \mathbb{T}^2$-ben.

Egy folytonos $f(x,y)$ függvény akkor tartozik bele a $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ Zygmund osztályba, ha az

$$|\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta)$$

egyenlőség minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre teljesül.

Egy $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ függvény a $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ függvényosztálynak is eleme, ha

$$\lim_{h_1,h_2\to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)| = 0 \quad \text{egyenletesen} \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2\text{-ben.}$$

Megjegyzés. A fenti definiciók azért használhatóak nagyon jól, mert ha $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ szorzat alakban áll elő, akkor

$$\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2) = \Delta^1 f_1(x,h_1) \Delta^1 f_2(y,h_2),$$

és ha az

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2) = \omega_1(f;\delta_1,\delta_2) := \sup_{0<h_j\le\delta_j, j=1,2} ||\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)||$$

összefüggéssel definiáljuk f *folytonossági modulusát* (δ_1, δ_2 tetszőleges pozitív számok esetén), akkor látható, hogy

$$\omega(f;\delta_1,\delta_2) = \omega(f_1;\delta_1)\omega(f_2;\delta_2), \quad \delta_1,\delta_2 > 0,$$

ahol

$$\omega(f_j;\delta_j) = \sup_{0<h_j\le\delta_j} ||\Delta^1 f_j(t,h_j)||, \quad j=1,2;\ t=x,y$$

a szokásos folytonossági modulus és $||\cdot||$ a szokásos maximum norma.

Hasonlóan definiálhatjuk az f *simasági modulusát* is:

$$\omega_2(f;\delta_1,\delta_2) := \sup_{0<h_j\le\delta_j, j=1,2} ||\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)||.$$

Ha f előáll két egyváltozós függvény szorzataként, akkor

$$\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2) = \Delta^2 f_1(x,h_1)\Delta^2 f_2(y,h_2),$$

és így

$$\omega_2(f;\delta_1,\delta_2) = \omega_2(f_1;\delta_1)\omega_2(f_2;\delta_2), \quad \delta_1,\delta_2 > 0,$$

ahol $\omega_2(f_j;\delta_j)$ a szokásos egyváltozós simasági modulus:

$$\omega_2(f_j;\delta_j) = \sup_{0<h_j\le\delta_j} ||\Delta^2 f_j(t,h_j)||, \quad j=1,2;\ t=x,y.$$

Megjegyzés. Itt meg kell jegyezni, hogy egyváltozós függvényekre Leindler (lásd [9]) már bevezette a H^{ω_α} általánosított Lipschitz és $(H^{\omega_1})^*$ általánosított Zygmund osztályok definicióját.

Bary és Stečkin [1] másképp vezette be egy a $[0,\pi]$ intervallumon értelmezett függvény folytonossági modulusát, majd Dyachenko [4] kiterjesztette azt többváltozós függvényekre is. A következőképpen definiálták a folytonossági modulust:
Legyen $0\le t\le\pi$ és $\varphi(t)\in\Phi$, ha

- φ folytonos $[0,\pi]$-n, bár ezt nem használták ki,
- φ nemcsökkenő,
- $\varphi\ne 0,\ 0<t\le\pi$,
- $\varphi\to 0$, ha $t\to 0$.

3.2. Ismert kétváltozós tételek

Ebben a részben ismertetjük Móricz kétváltozós tételeit, amelyeket általánosítani fogunk. Ezek az állítások a 1.2.1. és 1.2.2. Tételek kiterjesztései két dimenzióra. A bizonyításuk részletesen megtalálható a [13] cikkben.

3.2.1. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\}$ *komplex számoknak olyan sorozata, mely teljesíti a* (3.1) *feltételt és definiáljuk* f*-et a* (3.2) *képlettel.*

(i) *Ha*

$$\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} |klc_{kl}| = O(m^{1-\alpha}n^{1-\beta}), \quad m,n=1,2,\dots, \tag{3.5}$$

valamely $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra, akkor* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\}$ *valós számoknak olyan sorozata, amelyre*

$$c_{kl} \geq 0 \quad \textit{minden} \quad k, l \geq 1 \tag{3.6}$$

és

$$c_{kl} = -c_{-k,l} = -c_{k,-l} = c_{-k,-l} \quad |k|, |l| \geq 1 \tag{3.7}$$

teljesül. Ha $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra, akkor* (3.5) *is fennáll.*

3.2.2. Tétel. *Legyen* $0 < \alpha, \beta < 1$. *Az előző tételünk mindkét állítása igaz marad, ha a 'O'-t 'o'-ra cseréljük, amint* $m, n \to \infty$ *egymástól függetlenül és az* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ *feltételt az* $f \in \mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ *feltétellel helyettesítjük.*

4. fejezet

Új eredmények kettős trigonometrikus sorokra

Ebben a fejezetben kiterjesztjük kétváltozós függvényekre a korábbi egyváltozós általánosított, illetve kiterjesztett Lipschitz és Zygmund osztályok fogalmát. Majd a hozzájuk kapcsolódó 1.2.6-1.2.10. Tételeket is.

4.1. Definiciók, jelölések

Függvényosztályok

A továbbiakban az előző fejezetekben ismertetett függvényosztályokat általánosítjuk két lépésben. Az első lépéshez szükségünk lesz az első fejezetben definiált lassú változású függvényekre.

Legyen L_1 és L_2 pozitív, nemcsökkenő függvények a $(0, \infty)$ intervallumon. Továbbá legyen

$$L(x,y) = L_1(x)L_2(y), \quad \text{ahol} \quad L_k(t) \to \infty \quad \text{és} \quad \frac{L_k(2t)}{L_k(t)} \to 1 \quad \text{amint} \quad t \to \infty. \tag{4.1}$$

4.1.1. Definició (Általánosított kétváltozós Lipschitz osztályok). Legyenek $\alpha, \beta > 0$ adott számok és tegyük fel, hogy az $L(x,y)$ függvény teljesíti a (4.1) feltételt. Egy folytonos f függvény eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ általánosított kétváltozós Lipschitz osztálynak, ha a (3.3)-ban definiált elsőrendű differenciaoperátorra fennáll az

$$|\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = O\Big(h_1^\alpha h_2^\beta L\Big(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\Big)\Big)$$

egyenlőség minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre.

Adott $\alpha, \beta \geq 0$ számok és a (4.1)-et teljesítő L függvény esetén azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ osztály egy eleme, ha

$$|\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = O\Big(\frac{h_1^\alpha h_2^\beta}{L(1/h_1, 1/h_2)}\Big)$$

fennáll minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre.

Általánosítsuk még tovább a meglévő függvényosztályokat. Ehhez újabb segédfüggvényekre lesz szükségünk, amelyek Móricz [12] által definiált w_α függvények kiterjesztései kétváltozós esetre.

Legyen $\alpha, \beta \geq 0$ és jelöljük $W_{\alpha\beta}$-val azon mindkét változójában nemcsökkenő $w_{\alpha\beta} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ függvények összességét, amelyekre

$$w_{\alpha\beta}(0, \delta_2) = w_{\alpha\beta}(\delta_1, 0) = 0 \quad \text{minden} \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0\text{-ra}; \tag{4.2}$$

$$\sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(2\delta_1, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\alpha < \infty, \quad \sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2\delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\beta < \infty, \tag{4.3}$$

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} > 2^{-\alpha'}, \ \limsup_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} \leq 2^{-\alpha} \tag{4.4}$$

minden $\alpha' > \alpha$ és $0 < \delta_2 \leq 1$ számra, és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} > 2^{-\beta'}, \ \limsup_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} \leq 2^{-\beta} \tag{4.5}$$

minden $\beta' > \beta$ és $0 < \delta_1 \leq 1$ számra.
Megjegyzés. Az $\alpha, \beta > 0$ esetben a '$\limsup$' feltételek biztosítják, hogy

$$\lim_{\delta_1\to 0} w_{\alpha\beta}(\delta_1, \cdot) = \lim_{\delta_2\to 0} w_{\alpha\beta}(\cdot, \delta_2) = 0.$$

Azonban a (4.2) - (4.5) feltételeknek eleget tevő $w_{\alpha\beta}$ függvények nem feltétlenül valamely függvény folytonossági modulusai, mert a szubadditívitás feltételét nem teljesítik.

Ezen előkészületek után definiálhatjuk a kiterjesztett Lipschitz és Zygmund osztályokat.

4.1.2. Definició (Kiterjesztett kétváltozós Lipschitz osztályok). Legyen $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$ valamely $\alpha, \beta \geq 0$ számokra, f pedig folytonos és (mindkét változójában 2π szerint) periodikus függvény. Ekkor

$$\text{Lip}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega(f; \delta_1, \delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2))\}.$$

Hasonló feltételek mellett:

4.1.3. Definició (Kiterjesztett kétváltozós Zygmund osztályok).

$$\text{Zyg}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega_2(f; \delta_1, \delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2))\}.$$

Megjegyzés. Mivel minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ számra

$$\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2) = \Delta^{1,1}[\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)]$$

$$= \Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2) - \Delta^{1,1} f(x-h_1, y; h_1, h_2) - \Delta^{1,1} f(x, y-h_2; h_1, h_2) + \Delta^{1,1} f(x-h_1, y-h_2; h_1, h_2),$$

ezért

$$\text{Lip}(w_{\alpha\beta}) \subset \text{Zyg}(w_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

4.2. Fourier sorok és a kiterjesztett Lipschitz és Zygmund osztályok

A címben jelzett függvényosztályokba tartozás szükséges és elegendő feltételei a következő alakot öltik:

4.2.1. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ *tetszőleges számsorozat, amelyre*

$$\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} |klc_{kl}| = O(mnw_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.6}$$

fennáll valamely $0 < \alpha, \beta \le 1$ *esetén, akkor* (3.1) *teljesül, és a* (3.2) *összefüggéssel definiált* f *függvény eleme a* $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ *osztálynak.*

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyre* (3.1), (3.6) *és* (3.7) *teljesül. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \le \alpha, \beta \le 1$ *számokra, akkor a* (4.6) *egyenlőség is fennáll.*

4.2.2. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ *tetszőleges olyan sorozat, amelyre a*

$$\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} k^2l^2|c_{kl}| = O(m^2n^2w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.7}$$

egyenlőség fennáll valamely $0 < \alpha, \beta \le 2$ *esetén, akkor* (3.1) *teljesül, és a* (3.2) *összefüggéssel definiált* f *függvény eleme a* $\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *osztálynak.*

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyre a* (3.1) *feltétel fennáll és*

$$c_{kl} \ge 0 \quad \textit{minden} \quad |k|, |l| \ge 1 \quad \textit{indexre.} \tag{4.8}$$

Ha $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \le \alpha, \beta \le 2$ *számokra, akkor a* (4.7) *egyenlőség is fennáll.*

4.2.3. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *amelyre a*

$$\sum_{|k|\ge m}\sum_{|l|\ge n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.9}$$

azonosság valamely $0 \le \alpha, \beta < 1$ *számokra fennáll, akkor a* (3.2)*-ben definiált függvényre* $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan számsorozat, amelyre* (3.1) *és* (4.8) *feltételek teljesülnek. Ha* $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \le \alpha, \beta \le 2$ *számokra, akkor* (4.9) *is fennáll.*

Megjegyzés. Az alábbi 4.4.1. Lemma következtében a 4.2.1. és 4.2.3. Tételek (i) állítása a $0 < \alpha, \beta < 1$ esetben ekvivalens.

Hasonlóan a 4.2.2. és 4.2.3. Tételek (ii) állítása ekvivalens a $0 < \alpha, \beta < 2$ esetben.

A 4.2.1. és 4.2.3. Tételek (ii) állítása viszont nem hasonlítható össze.

Megjegyzés. A fenti tételeket beláthatjuk úgy is a $0 < \alpha, \beta < 1$ esetben, ha használjuk Bary és Stečkin [1] tételeit. Az alábbi bizonyításainkban mi Lipschitz osztály esetében a $0 \le \alpha, \beta \le 1$, Zygmundnál pedig a $0 \le \alpha, \beta \le 2$ intervallumon dolgozunk. További különbség, hogy az alábbi lemmákban szereplő $\{a_{kl}\}$ sorozatról semmilyen monotonitást nem teszünk fel, míg a $\varphi \in \Phi$ függvények nemcsökkenőek. Továbbá a γ és δ kitevők tetszőleges valós számok lehetnek, amelyekre csak a $\gamma > \alpha \ge 0$ és $\delta > \beta \ge 0$ feltételeknek kell teljesülni. Végül a legfontosabb eltérés, hogy a $\gamma > \alpha > 0$ és $\delta > \beta > 0$ esetben bizonyítani tudjuk az állításaink (i) és (ii) részének ekvivalenciáját.

4.3. Fourier sorok és az általánosított Lipschitz osztályok

A következő két állítást speciális esetként kapjuk a kiterjesztett függvényosztályokra vonatkozó tételekből. Azonban ezen állítások szükségesek voltak az általánosabb tételek megfogalmazásához. A bizonyítást nem részletezzük, mert részletesen megtalálható a [17] cikkben.

4.3.1. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\}$ *komplex számok olyan sorozata, amelyre* (3.1) *fennáll, az* f *függvényt definiálja a* (3.2) *összefüggés és tegyük fel, hogy az* L *függvény eleget tesz a* (4.1) *határértékeknek.*

(i) *Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra*

$$\sum_{|k|\le m} \sum_{|l|\le n} |klc_{kl}| = O(m^{1-\alpha} n^{1-\beta} L(m,n)), \tag{4.10}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyben minden elem előjele megegyezik az indexei szorzatának előjelével, vagyis teljesítik a* (3.6) *és* (3.7) *feltételeket. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra, akkor* (4.10) *fennáll.*

4.3.2. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *amelyre* (3.1) *fennáll, az* f *függvényt definiálja a* (3.2) *összefüggés és tegyük fel, hogy az* L *függvény eleget tesz a* (4.1) *határértékeknek.*

(i) *Ha valamely* $0 \le \alpha, \beta < 1$ *számokra*

$$\sum_{|k|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{kl}| = O\Big(\frac{m^{-\alpha} n^{-\beta}}{L(m,n)}\Big), \tag{4.11}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\}$ *olyan valós számsorozat, amelyre* (3.6) *és* (3.7) *teljesül. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *számokra, akkor a* (4.11) *azonosság is fennáll.*

Probléma. A fenti tételet Móricz [11] bizonyításainak két változóra történő kiterjesztésével látjuk be, azonban a 4.3.2. Tétel (ii) állításában csak $0 < \alpha, \beta < 1$ szigorú egyenlőtlenség esetében tudjuk igazolni az állítást. Ha $\min\{\alpha, \beta\} = 0$, akkor a bizonyítás nem látható be ezen az úton.

A problémát további általánosítás oldja meg, vagyis a kiterjesztett Lipschitz osztályokra vonatkozó állítás. Sőt, ennél többet is látunk, mert nem csak a Lipschitz osztályba tartozó függvényekre, hanem – mint láttuk a 4.2.3. Tétel (ii) részében – a megfelelő Zygmund osztályba tartozókra is igaz az állítás.

Megjegyzés. A 4.2.1. Tétel valóban a 4.3.1. Tétel általánosítása, ami a

$$w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2) := \delta_1^\alpha \delta_2^\beta L\Big(\frac{1}{\delta_1}, \frac{1}{\delta_2}\Big)$$

választással könnyen adódik.

Hasonlóan a 4.2.3. Tétel a 4.3.2. Tétel általánosítása a $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta}) \subset \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ reláció miatt és a

$$w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2) := \frac{\delta_1^\alpha \delta_2^\beta}{L(1/\delta_1, 1/\delta_2)}$$

választással.

4.4. Segédtételek

A következő állítások alapvető fontosságúak a kiterjesztett függvényosztályokra vonatkozó tételek (könnyen áttekinthető) bizonyításában.

4.4.1. Lemma. *Legyen* $\{a_{kl} : k, l = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}_+$ *és* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha valamely* $\gamma \geq \alpha > 0$ *és* $\delta \geq \beta > 0$ *számokra*

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} k^\gamma l^\delta a_{kl} = O(m^\gamma n^\delta w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})), \tag{4.12}$$

akkor $\sum\sum a_{kl} < \infty$ *és*

$$\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} a_{kl} = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})). \tag{4.13}$$

(ii) *Megfordítva, ha* (4.13) *fennáll valamely* $\gamma > \alpha \geq 0$ *és* $\delta > \beta \geq 0$ *számokra, akkor* (4.12) *is.*

Megjegyzés. Az állítások élesek abból a szempontból, hogy a szigorú egyenlőtlenségeknél nem engedhetünk meg egyenlőséget. Például, ha $\gamma > \alpha = 0$ és $\delta > \beta > 0$, akkor

$$a_{kl} := (k\log(k+1))^{-1} l^{-\beta-1} \quad \text{és} \quad w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2) := (\log(2/\delta_1))^{-1}\delta_2^\beta$$

választással (4.12) fennáll, de (4.13) nem. Másfelől, ha $\gamma = \alpha > 0$ és $\delta > \beta > 0$,

$$a_{kl} := k^{-\alpha-1} l^{-\beta-1} \quad \text{és} \quad w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2) = \delta_1^\alpha \delta_2^\beta,$$

akkor (4.13) fennáll, de (4.12) nem.

Bizonyítás. (i) Először tegyük fel, hogy $m = 2^M$ és $n = 2^N$, ahol M és N nemnegatív egész számok. A (4.12) összefüggés miatt létezik olyan C konstans, hogy

$$2^{p\gamma+q\delta}\sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} a_{kl} \leq \sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} k^\gamma l^\delta a_{kl}$$

$$\leq C2^{(p+1)\gamma+(q+1)\delta} w_{\alpha\beta}\Big(\frac{1}{2^{p+1}-1}, \frac{1}{2^{q+1}-1}\Big), \quad p, q = 0, 1, 2, \dots,$$

ezért

$$\sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} a_{kl} \leq C2^{\gamma+\delta} c_\alpha c_\beta w_{\alpha\beta}(2^{-p-1}, 2^{-q-1}),$$

ahol a c_α és c_β konstansok a (4.3) pontban definiáltak. Nyilván

$$\sum_{k=2^M}^{\infty}\sum_{l=2^N}^{\infty} a_{kl} = \sum_{p=M}^{\infty}\sum_{q=N}^{\infty}\sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} a_{kl} \tag{4.14}$$

$$\leq C_1 \sum_{p=M}^{\infty}\sum_{q=N}^{\infty} w_{\alpha\beta}(2^{-p-1}, 2^{-q-1}), \quad C_1 := C2^{\gamma+\delta} c_\alpha c_\beta.$$

Most használjuk a 'lim sup' részeit a (4.4) és (4.5) feltételeknek, amelyek alapján minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ pozitív egész szám, hogy minden $p, q \geq K$-ra

$$w_{\alpha\beta}(2^{-p-1}, 2^{-q-1}) < (1+\varepsilon)2^{-\alpha} w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q-1}) < (1+\varepsilon)^2 2^{-\alpha-\beta} w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q}).$$

Ezt a becslést ismételten alkalmazhatjuk minden $p \geq M \geq K$ és $q \geq N \geq K$ szám esetén:

$$w_{\alpha\beta}(2^{-p-1}, 2^{-q-1}) < [(1+\varepsilon)2^{-\alpha}]^{p-M+1}[(1+\varepsilon)2^{-\beta}]^{q-N+1} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}). \tag{4.15}$$

A (4.14) és (4.15) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=2^N}^{\infty} a_{kl} \leq C_1 w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}) \sum_{r=1}^{\infty} [(1+\varepsilon)2^{-\alpha}]^r \sum_{s=1}^{\infty} [(1+\varepsilon)2^{-\beta}]^s \tag{4.16}$$

$$=: C_2 w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}), \quad M, N \geq K,$$

ahol C_2 konstans, mivel $\varepsilon > 0$ választható olyan kicsinek, hogy

$$1 + \varepsilon < 2^{\min\{\alpha,\beta\}} \tag{4.17}$$

($\alpha, \beta > 0$ feltevés szerint).

Most vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor $\min\{M, N\} < K$, például legyen $0 \leq M < K$ és $N \geq K$. A $w_{\alpha\beta}(\gamma, \delta)$ nemcsökkenő tulajdonságából és (4.16), (4.17) összefüggésekből,

$$\sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=2^N}^{\infty} a_{kl} = \Big\{ \sum_{k=2^M}^{2^K-1} \sum_{l=2^N}^{\infty} + \sum_{k=2^K}^{\infty} \sum_{l=2^N}^{\infty} \Big\} a_{kl} \tag{4.18}$$

$$\leq \Big\{ C_1(K-M) \sum_{s=1}^{\infty} [(1+\varepsilon)2^{-\beta}]^s + C_2 \Big\} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N})$$

$$\leq C_3 w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}), \quad C_3 := C_1 K \sum_{s=1}^{\infty} [(1+\varepsilon)2^{-\beta}]^s + C_2.$$

Az $M \geq K$ és $0 \leq N < K$ eset bizonyítása teljesen hasonló az előbbi gondolatmenethez, használjuk a (4.18) szimmetrikus megfelelőjét, ekkor

$$\sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=2^N}^{\infty} a_{kl} \leq C_4 w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}), \quad C_4 := C_1 K \sum_{r=1}^{\infty} [(1+\varepsilon)2^{-\alpha}]^r + C_2. \tag{4.19}$$

Végül, a $0 \leq M, N < K$ esetben a $w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)$ nemcsökkenő tulajdonsága, valamint a (4.18), (4.19) összefüggések következtében

$$\sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=2^N}^{\infty} a_{kl} \leq \Big\{ \sum_{k=2^M}^{2^K-1} \sum_{l=2^N}^{2^K-1} + \sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=2^K}^{\infty} + \sum_{l=2^K}^{\infty} \sum_{l=2^N}^{\infty} \Big\} a_{kl} \tag{4.20}$$

$$\leq \{C_1(K-M)(K-N) + C_3 + C_4\} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N})$$

$$\leq C_5 w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}), \quad C_5 := C_1 K^2 + C_3 + C_4.$$

Ha összevetjük a (4.16) és (4.18)-(4.20) sorokat, akkor megkapjuk a (4.13) állításunkat abban a speciális esetben, amikor $m = 2^M$ és $n = 2^N$, ahol $M, N \geq 0$.

Általános esetben

$$2^M \le m < 2^{M+1} \quad \text{és} \quad 2^N \le n < 2^{N+1}; \tag{4.21}$$

(4.13) könnyen adódik a fenti speciális esetből. Használjuk a (4.3) jelöléseit, és becsüljünk a következőképpen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=n}^{\infty} a_{kl} \le \sum_{k=2^M}^{\infty}\sum_{l=2^N}^{\infty} a_{kl} &\le C_5 w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}) \\ &\le C_5 c_\alpha c_\beta w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1}), \quad m, n \ge 1,\end{aligned}$$

amivel (4.13)-at beláttuk.

(ii) Először ismét tegyük fel, hogy $m = 2^M$ és $n = 2^N$, ahol M és N nemnegatív egészek. A (4.13) egyenlőség miatt létezik egy olyan C konstans, amelyre

$$\sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} a_{kl} \le C w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q}), \quad p, q \ge 0,$$

amiből

$$\sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le 2^{(p+1)\gamma+(q+1)\delta} \sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} a_{kl} \le C_1 2^{p\gamma+q\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q}), \quad C_1 := 2^{\gamma+\delta} C.$$

Legyen μ és ν két tetszőleges nemnegatív egész, $\mu < M$ és $\nu < N$, ekkor

$$\sum_{k=2^\mu}^{2^M-1}\sum_{l=2^\nu}^{2^N-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} = \sum_{p=\mu}^{M-1}\sum_{q=\nu}^{N-1}\sum_{k\in I_p}\sum_{l\in I_q} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le C_1 \sum_{p=\mu}^{M-1}\sum_{q=\nu}^{N-1} 2^{p\gamma+q\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q}). \tag{4.22}$$

Most használjuk a (4.4) és (4.5) feltételek 'lim inf' részét, amelyek alapján minden $\alpha' > \alpha$ és $\beta' > \beta$ számokhoz létezik olyan pozitív $K = K(\alpha', \beta')$ konstans, hogy minden $p, q \ge K$-ra

$$w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q}) < 2^{\alpha'} w_{\alpha\beta}(2^{-p-1}, 2^{-q}) < 2^{\alpha'+\beta'} w_{\alpha\beta}(2^{-p-1}, 2^{-q-1}). \tag{4.23}$$

Ha $K \le p < M$ és $K \le q < N$, akkor az előbbi egyenlőtlenség ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$w_{\alpha\beta}(2^{-p}, 2^{-q}) < 2^{(M-p)\alpha'+(N-q)\beta'} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}).$$

Ezt a becslést a (4.22) összefüggésbe helyettesítve kapjuk a

$$\begin{aligned}\sum_{k=2^K}^{2^M-1}\sum_{l=2^K}^{2^N-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} &\le C_1 \sum_{p=K}^{M-1}\sum_{q=K}^{N-1} 2^{p\gamma+q\delta} 2^{(M-p)\alpha'+(N-q)\beta'} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}) \\ &= C_1 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}) \sum_{p=K}^{M-1}\sum_{q=K}^{N-1} 2^{(M-p)(\alpha'-\gamma)+(N-q)(\beta'-\delta)} \\ &\le C_1 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M}, 2^{-N}) \sum_{r=1}^{\infty} 2^{r(\alpha'-\gamma)} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{s(\beta'-\delta)}\end{aligned}$$

egyenlőtlenséget. A feltevésünk szerint $\gamma > \alpha$ és $\delta > \beta$, így α' és β' választható úgy, hogy az $\alpha < \alpha' < \gamma$ és $\beta < \beta' < \delta$ egyenlőtlenségek teljesüljenek. Ekkor a fenti két geometrikus sor konvergens a $2^{\alpha'-\gamma}$ és $2^{\beta'-\delta}$ hányadosokkal, és így

$$\sum_{k=2^K}^{2^M-1}\sum_{l=2^K}^{2^N-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le C_2 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}), \quad M,N>K, \tag{4.24}$$

ahol C_2 egy konstans.

A $K \le p < M$ és $0 \le q < K \le N$ esetben a (4.23) összefüggés így módosul:

$$w_{\alpha\beta}(2^{-p},2^{-q}) < 2^{\alpha'} c_\beta w_{\alpha\beta}(2^{-p-1},2^{-q-1}),$$

ahol c_β a (4.3)-ban definiált. Ismételt alkalmazással kapjuk a

$$w_{\alpha\beta}(2^{-p},2^{-q}) < 2^{(M-p)\alpha'+(N-K)\beta'} c_\beta^{K-q} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N})$$

egyenlőtlenséget. Hasonlóan mint (4.24)-ben,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2^K}^{2^M-1}\sum_{l=1}^{2^K-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} &\le C_1 \sum_{p=K}^{M-1}\sum_{q=0}^{K-1} 2^{p\gamma+q\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-p},2^{-q}) \\
&\le C_1 \sum_{p=K}^{M-1}\sum_{q=0}^{K-1} 2^{p\gamma+q\delta} 2^{(M-p)\alpha'+(N-K)\beta'} c_\beta^{K-q} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}) \\
&\le C_1 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}) \sum_{p=K}^{M-1} 2^{(M-p)(\alpha'-\gamma)} \sum_{q=0}^{K-1} c_\beta^{K-q} 2^{(N-q)(\beta'-\delta)} \\
&\le C_1 c_\beta^K 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}) \sum_{r=0}^{\infty} 2^{r(\alpha'-\gamma)} \sum_{s=0}^{K-1} 2^{s(\beta'-\delta)} \\
&\le C_3 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}), \quad M>K, \quad 0\le N\le K;
\end{aligned} \tag{4.25}$$

ahol C_3 konstans, mivel $\alpha < \alpha' < \gamma$ és $\beta < \beta' < \delta$.

A (4.25) szimmetrikus megfelelője:

$$\sum_{k=1}^{2^K-1}\sum_{l=2^K}^{2^N-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le C_4 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}), \quad 0\le M\le K, \quad N>K. \tag{4.26}$$

Végül az eddigiekhez hasonlóan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^K-1}\sum_{l=1}^{2^K-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} &\le C_1 \sum_{p=0}^{K-1}\sum_{q=0}^{K-1} 2^{p\gamma+q\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-p},2^{-q}) \\
&\le C_1 \sum_{p=0}^{K-1}\sum_{q=0}^{K-1} 2^{p\gamma+q\delta} c_\alpha^{K-p} 2^{(M-K)\alpha'} c_\beta^{K-q} 2^{(N-K)\beta'} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}) \\
&\le C_1 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}) \sum_{p=0}^{K-1} c_\alpha^{K-p} 2^{(M-p)(\alpha'-\gamma)} \sum_{q=0}^{K-1} c_\beta^{K-q} 2^{(N-q)(\beta'-\delta)}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\le C_1 c_\alpha^K c_\beta^K 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}) \sum_{r=0}^{K-1} 2^{r(\alpha'-\gamma)} \sum_{s=0}^{K-1} 2^{s(\beta'-\delta)}$$
$$\le C_5 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N});$$

ahol C_4 és C_5 konstansok, mivel $\alpha' < \gamma$ és $\beta' < \delta$.

A (4.24)-(4.27) sorokból már adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{2^M-1} \sum_{l=1}^{2^N-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le C_6 2^{M\gamma+N\delta} w_{\alpha\beta}(2^{-M},2^{-N}), \quad M,N > K, \tag{4.28}$$

ahol $C_6 := \max\{C_2, C_3, C_4, C_5\}$.

Részletezések nélkül állítjuk, hogy (4.28)-at hasonlóan tudjuk bizonyítani a másik három esetben is, amikor $M \le K$ és $N > K$, vagy $M > K$ és $N \le K$, vagy $M, N \le K$. A négy eset együttesen bizonyítja a (4.12) állításunkat az $m = 2^M$ és $n = 2^N$ speciális esetben, ahol $M, N \ge 0$.

A (4.21) általános esetben az (i) rész bizonyításához hasonlóan járunk el:

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le \sum_{k=1}^{2^{M+1}-1} \sum_{l=1}^{2^{N+1}-1} k^\gamma l^\delta a_{kl} \le C_6 2^{(M+1)\gamma+(N+1)\delta} w_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{2^{M+1}-1}, \frac{1}{2^{N+1}-1}\right)$$
$$\le C_6 2^{\gamma+\delta} m^\gamma n^\delta w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1}), \quad m,n = 1,2,\ldots;$$

amivel a (4.12) állítást beláttuk. □

4.4.2. Lemma. *Legyen* $\{a_{kl}\} \subset \mathbb{R}_+$ *és* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* (4.12) *fennáll valamely* $\delta \ge \beta > 0$, *és tetszőleges* γ, α *számokra, akkor*

$$\sum_{k=m}^{\infty}\sum_{l=1}^{n} l^\delta a_{kl} = O(n^\delta w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})). \tag{4.29}$$

(ii) *Ha* (4.13) *fennáll valamely* $\delta > \beta \ge 0$ *és tetszőleges* γ, α *számokra, akkor* (4.29) *is.*

Megjegyzés. A $\beta = 0$ esetben az (i) $\Rightarrow$ (ii) rész nem igaz; míg a $\delta = \beta$ esetben az (ii) $\Rightarrow$ (i) rész nem igaz, amit a 4.4.1. Lemma utáni ellenpéldák is mutatnak. A bizonyítás nagyon hasonlít a 4.4.1. Lemma igazolására, ezért csak vázoljuk azt.

Bizonyítás. (i) Először tegyük fel, hogy $m = 2^M$, ahol $M \ge 0$. A (4.12) feltétel miatt létezik olyan C állandó, hogy minden $p \ge 0$ számra

$$2^{p\gamma} \sum_{k\in I_p} \sum_{l=1}^{n} l^\delta a_{kl} \le C 2^\gamma 2^{p\gamma} n^\delta w_{\alpha\beta}(2^{-p}, n^{-1}), \quad n \ge 1$$

fennáll, vagyis

$$\sum_{k\in I_p} \sum_{l=1}^{n} l^\delta a_{kl} \le C_1 n^\delta w_{\alpha\beta}(2^{-p}, n^{-1}), \quad C_1 := C2^\gamma.$$

Most használjuk a (4.4) feltétel 'limsup' részét, ekkor

$$\sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} l^\delta a_{kl} = \sum_{p=M}^{\infty} \sum_{k\in I_p} \sum_{l=1}^{n} l^\delta a_{kl} \le C_2 n^\delta w_{\alpha\beta}(2^{-M}, n^{-1}), \tag{4.30}$$

ahol $C_2 := C_1 \sum[(1+\varepsilon)2^{-\alpha}]^r$, $1+\varepsilon < 2^\alpha$, $M \geq K$.

A $0 \leq M < K$ esetben kihasználjuk $w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)$ nemcsökkenő tulajdonságát és az előbb igazolt (4.30) becslést:

$$\sum_{k=2^M}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} l^\delta a_{kl} = \Big\{ \sum_{k=2^M}^{2^K-1} \sum_{l=1}^{n} + \sum_{k=2^K}^{\infty} \sum_{l=1}^{n} \Big\} l^\delta a_{kl} \leq C_3 n^\delta w_{\alpha\beta}(2^{-M}, n^{-1}), \quad C_3 := C_1 K + C_2; n \geq 1.$$

Általános esetben, amikor $2^M \leq m < 2^{M+1}$, az állításunk könnyen jön az előbbi speciális esetből a (4.3) első definiciójának felhasználásával.

(ii) Most tegyük fel, hogy $n = 2^N - 1$, ahol N természetes szám. A (4.13) feltétel miatt létezik olyan C konstans, hogy

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l \in I_q} l^\delta a_{kl} \leq C_1 2^{q\delta} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, 2^{-q}), \quad C_1 := 2^\delta C$$

fennáll minden $m \geq 1$ és $q \geq 0$ számra.

Legyen $0 \leq \nu < N$, ekkor

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=2^\nu}^{2^N-1} l^\delta a_{kl} = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{q=\nu}^{N-1} \sum_{l \in I_q} l^\delta a_{kl} \leq C_1 \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{q=\nu}^{N-1} 2^{q\delta} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, 2^{-q}).$$

Ezután alkalmazzuk (4.5) 'liminf' részét, ekkor a (4.23) első egyenlőtlenségének szimmetrikus megfelelője alapján, a $K \leq q < N$ esetben

$$w_{\alpha\beta}(m^{-1}, 2^{-q}) \leq 2^{(N-q)\beta'} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, 2^{-N}).$$

Teljesen hasonló becslésekkel mint ahogy a (4.24) egyenlőtleséget kihoztuk, most a

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=2^K}^{2^N-1} l^\delta a_{kl} \leq C_2 2^{N\delta} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, 2^{-N}) \tag{4.31}$$

összefüggést kapjuk, ahol $C_2 := C_1 \sum 2^{s(\beta'-\delta)}$, $\beta < \beta' < \delta$.

A $0 \leq q < K \leq N$ esetben a (4.27) becslésre támaszkodva írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^K-1} l^\delta a_{kl} \leq C_3 2^{N\delta} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, 2^{-N}), \tag{4.32}$$

ahol $C_3 := C_1 \sum_{s=0}^{K-1} 2^{s(\beta'-\delta)}$, $\beta < \beta' < \delta$.

A (4.31) és (4.32) becslésekből adódik az állításunk a speciális esetben, ha $N \geq K$.

Amikor $0 \leq N < K$, akkor a (4.32) következtetést vonhatjuk le a

$$\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^\nu-1} l^\delta a_{kl} \quad \text{kettős összegre a} \quad \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^K-1} l^\delta a_{kl}$$

helyett, minden $0 \leq \nu < K$ esetében.

Az általános esetet a (4.3) második definiciójának segítségével azonnal kapjuk a fenti speciális esetből. □

Végül megfogalmazzuk a 4.4.2. Lemma szimmetrikus megfelelőjét, amely hasonlóképpen bizonyítható.

4.4.3. Lemma. *Legyen* $\{a_{kl}\} \subset \mathbb{R}_+$ *és* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* (4.12) *fennáll valamely* $\gamma \geq \alpha > 0$, *és tetszőleges* δ, β *számokra, akkor*

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=n}^{\infty} k^{\gamma} a_{kl} = O(m^{\gamma} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})). \tag{4.33}$$

(ii) *Ha* (4.13) *fennáll valamely* $\gamma > \alpha \geq 0$ *és tetszőleges* δ, β *számokra, akkor* (4.33) *is.*

4.5. A 4.2.1, 4.2.2. és 4.2.3. Tételek bizonyítása

Az alábbi bizonyítások során többször élni fogunk a következő megállapodással. Legyen $h_1, h_2 > 0$ két tetszőlegesen adott szám. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy ezek a számok "kicsik", például $0 < h_1, h_2 \leq 1$. Definiáljuk az

$$m := \left[\frac{1}{h_1}\right] \quad \text{és} \quad n := \left[\frac{1}{h_2}\right] \tag{4.34}$$

számokat, ahol $[\cdot]$ az egészrészt jelöli.

A következőkben szeretnénk majd használni az

$$|e^{it} - 1| = \left|2 \sin \frac{t}{2}\right| \leq \min\{|t|, 2\}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.35}$$

egyenlőtlenségeket.

A 4.2.1. Tétel bizonyítása

(i) Legyen $\{c_{kl} : (k,l) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{C}$ olyan sorozat, amelyre teljesül a (4.6) feltétel valamely $0 < \alpha, \beta \leq 1$ számokra. A 4.4.1. Lemma szerint ekkor (3.1) is fennáll. Azt állítjuk, hogy a (3.2) képlettel definiált függvényre $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$.

A (3.2) definició miatt becsülhetünk a következőképpen:

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = \Big| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)} (e^{ikh_1} - 1)(e^{ilh_2} - 1) \Big| \tag{4.36}$$

$$\leq \Big\{ \sum_{|k|\leq m} \sum_{|l|\leq n} + \sum_{|k|>m} \sum_{|l|\leq n} + \sum_{|k|\leq m} \sum_{|l|>n} + \sum_{|k|>m} \sum_{|l|>n} \Big\} |c_{kl}||e^{ikh_1} - 1||e^{ilh_2} - 1|$$

$$=: A_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(2)} + A_{mn}^{(3)} + A_{mn}^{(4)},$$

ahol az m és n számok a (4.34)-ben definiáltak.

A (4.3), (4.6), (4.34) és (4.35) összefüggésekből azonnal kapjuk, hogy

$$A_{mn}^{(1)} \leq h_1 h_2 \sum_{|k|\leq m} \sum_{|l|\leq n} |klc_{kl}| = h_1 h_2 O(mn w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)). \tag{4.37}$$

Teljesen hasonlóan, a 4.4.2. Lemma (i) részének segítségével (a $0 < \beta \leq 1$ és $\delta = 1$ esetben) kapjuk az

$$A_{mn}^{(2)} \leq 2h_2 \sum_{|k|>m} \sum_{|l|\leq n} |lc_{kl}| = h_2 O(n w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)) \tag{4.38}$$

becslést. Szimmetrikusan, ha most a 4.4.3. Lemma (i) részét alkalmazzuk (a $0 < \alpha \leq 1$ és $\gamma = 1$ esetben), akkor

$$A_{mn}^{(3)} \leq 2h_1 \sum_{|k|\leq m} \sum_{|l|>n} |kc_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)). \tag{4.39}$$

Végül, használjuk a (4.35) egyenlőtlenséget és a 4.4.1. Lemma (i) részét (a $\gamma = \delta = 1$ és $0 < \alpha, \beta \leq 1$ esetben). Ekkor az

$$A_{mn}^{(4)} \leq 4 \sum_{|k|>n} \sum_{|l|>n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)) \tag{4.40}$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Tekintsük együtt a (4.36) és (4.37) - (4.40) képleteket. A következtetésünk, hogy

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)),$$

ami már bizonyítja az $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ állítást, mivel $0 < h_1, h_2 \leq 1$ tetszőleges számok voltak.

(ii) Tegyük fel, hogy $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ eleget tesz a (3.1), (3.6) és (3.7) feltételeknek, továbbá $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ valamely $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ számokra, ahol f a (3.2) képlettel definiált. Ekkor feltevés szerint minden $0 < x, y \leq 1$-re

$$|\Delta^{1,1} f(0, 0; x, y)| \leq C w_{\alpha\beta}(x, y), \tag{4.41}$$

ahol C egy csak f-től függő konstans. A (3.6), (3.7) együttható-választás miatt a (4.36)-hoz hasonlóan

$$\Delta^{1,1} f(0, 0; x, y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl}(e^{ikx} - 1)(e^{ily} - 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl}(e^{ikx} - e^{-ikx})(e^{ily} - e^{-ily}) = -4 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} \sin kx \sin ly.$$

Most a (4.41) összefüggésből kapjuk a

$$4 \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} \sin kx \sin ly \Big| \leq C w_{\alpha\beta}(x, y)$$

becslést.

A (3.1) sor egyenletes konvergenciája következtében, az abszolútérték-jelen belüli kettős szinusz sort integrálhatjuk tagonként. Először integráljunk x-re vonatkozólag a $(0, h_1)$ intervallumon, majd y szerint a $(0, h_2)$ intervallumon, ahol $0 < h_1, h_2 \leq 1$ tetszőleges számok. Eredményül a

$$4 \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{kl}}{kl}(1 - \cos kh_1)(1 - \cos lh_2) \Big| = 16 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{kl}}{kl} \sin^2 \frac{kh_1}{2} \sin^2 \frac{lh_2}{2} \leq C h_1 h_2 w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)$$

egyenlőtleneget kapjuk, ahol használtuk a (3.6) feltételt is. A következő lépésben a szinuszfüggvény alsó becslésére korábban már alkalmazott (2.14) egyenlőtlenséget fogjuk használni; ekkor a (3.6) és (4.34) választás miatt kapjuk a

$$16 \sum_{1\leq k\leq m} \sum_{1\leq l\leq n} \frac{c_{kl}}{kl} \frac{k^2 h_1^2}{\pi^2} \frac{l^2 h_2^2}{\pi^2} \leq C h_1 h_2 w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)$$

becslést, ami a (4.3) és (4.34) miatt ekvivalens a következővel:

$$\sum_{1\le k\le m}\sum_{1\le l\le n} klc_{kl} \le \frac{C\pi^4}{16} h_1^{-1}h_2^{-1} w_{\alpha\beta}(h_1,h_2) = O(mnw_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})).$$

Ismét a (3.6) és (3.7) miatt írhatjuk, hogy

$$\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} |klc_{kl}| = O(mnw_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})),$$

amivel a tétel állítását beláttuk. □

A 4.2.2. Tétel bizonyítása

(i) Tegyük fel, hogy $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ eleget tesz a (4.7) egyenlőségnek valamely $0 < \alpha, \beta \le 2$ számokra. A 4.4.1. Lemma alapján a (3.1) egyenlőtlenség fennáll. Célunk annak a bizonyítása, hogy az $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ reláció is fennáll.

Ehhez ismét legyenek $0 < h_1, h_2 < 1$ adott számok. A (3.2) definició alapján írhatjuk a következőt:

$$(4.42)\qquad |\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)}(e^{ikh_1}+e^{-ikh_1}-2)(e^{ilh_2}+e^{-ilh_2}-2)\Big|$$

$$\le \Big\{\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} + \sum_{|k|>m}\sum_{|l|\le n} + \sum_{|k|\le m}\sum_{|l|>n} + \sum_{|k|>m}\sum_{|l|>n}\Big\}|c_{kl}|4|\cos kh_1 - 1|\cdot|\cos lh_2 - 1|$$

$$=: B_{mn}^{(1)} + B_{mn}^{(2)} + B_{mn}^{(3)} + B_{mn}^{(4)},$$

ahol az m és n természetes számok a (4.34) képlettel definiáltak.

A következőkben használni fogjuk az

$$1 - \cos t = 2\sin^2\frac{t}{2} \le \min\Big\{2, \frac{t^2}{2}\Big\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

egyenlőtlenséget. A (4.3), (4.11) és (4.34) összefüggésekből kapjuk, hogy

$$(4.43)\qquad B_{mn}^{(1)} \le h_1^2h_2^2 \sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} k^2l^2|c_{kl}| = h_1^2h_2^2 O(m^2n^2 w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2)).$$

Most a 4.4.2. Lemma (i) részének alkalmazásával (a $0 < \beta \le 2$ és $\delta = 2$ esetben) kapjuk a

$$(4.44)\qquad B_{mn}^{(2)} \le 4h_2^2 \sum_{|k|>m}\sum_{|l|\le n} l^2|c_{kl}| = h_2^2 O(n^2 w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2))$$

becslést. Hasonlóan, ha a 4.4.3. Lemma (i) részét alkalmazzuk (a $0 < \alpha \le 2$ és $\gamma = 2$ esetben), akkor kapjuk a

$$(4.45)\qquad B_{mn}^{(3)} \le 4h_1^2 \sum_{|k|\le m}\sum_{|l|>n} k^2|c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2))$$

egyenlőtlenséget. Végül, a 4.4.1. Lemma (i) állítása miatt (a $\gamma = \delta = 2$ és $0 < \alpha, \beta \le 2$ esetben) írhatjuk, hogy

$$(4.46)\qquad B_{mn}^{(4)} \le 16 \sum_{|k|>m}\sum_{|l|>n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2)).$$

A (4.42) - (4.46) összefüggésekből kapjuk az

$$|\Delta^{2,2} f(x,y;h_1,h_2)| = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2))$$

egyenlőséget. Mivel $0 < h_1, h_2 \le 1$ tetszőleges számok voltak, ezért beláttuk, hogy $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$.

(ii) Tegyük fel, hogy $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ eleget tesz a (3.1), (4.8) feltételeknek és $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ valamely $0 \le \alpha, \beta \le 2$-re, ahol f a (3.2) összefüggéssel definiált. Ekkor az $x = y = 0$ és $0 < h_1, h_2 \le 1$ számokra (lásd (4.42))

$$|\Delta^{2,2} f(0,0;h_1,h_2)| = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl}(e^{ikh_1} + e^{-ikh_1} - 2)(e^{ilh_2} + e^{-ilh_2} - 2)\Big|$$

$$= 4\Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl}(\cos kh_1 - 1)(\cos lh_2 - 1)\Big| \le C w_{\alpha\beta}(h_1,h_2),$$

ahol a C konstans nem függ h_1, h_2 értékektől. A (4.8) miatt írhatjuk, hogy

$$4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl}(1-\cos kh_1)(1-\cos lh_2) = 16\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl}\sin^2\frac{kh_1}{2}\sin^2\frac{lh_2}{2} \le C w_{\alpha\beta}(h_1,h_2).$$

Alkalmazzuk a (2.14) egyenlőtlenséget és a (4.34) definiciót. Ekkor

$$16\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} c_{kl}\frac{k^2h_1^2}{\pi^2}\frac{l^2h_2^2}{\pi^2} \le C w_{\alpha\beta}(h_1,h_2),$$

ami a (4.3) miatt ekvivalens a

$$\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|\le n} k^2 l^2 c_{kl} \le \frac{C\pi^4}{16} h_1^{-2}h_2^{-2} w_{\alpha\beta}(h_1,h_2) = O(m^2n^2 w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})),$$

fennállásával, ezzel befejeztük a bizonyítást. □

A 4.2.3. Tétel bizonyítása

(i) Hasonlóan az első állításunk bizonyításához, most is igaz a (4.36) egyenlőtlenség, ahol m és n a (4.34)-ben adottak. A (4.3), (4.9), (4.34) és (4.35) miatt írhatjuk, hogy

$$A_{mn}^{(4)} \le 4\sum_{|k|>m}\sum_{|l|>n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2)). \tag{4.47}$$

A (4.3), (4.34) és (4.35) összefüggésekkel és a 4.4.2. Lemma (ii) részének alkalmazásával (a $\delta = 1$ és $0 \le \beta < 1$ esetben) kapjuk az

$$A_{mn}^{(2)} \le 2h_2\sum_{|k|>m}\sum_{|l|\le n} |lc_{kl}| = h_2 O(n w_{\alpha\beta}(m^{-1},n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2)) \tag{4.48}$$

becslést. Ha a 4.4.3. Lemma (ii) részét tekintjük (a $\gamma = 1$ és $0 \le \alpha < 1$ esetben), akkor könnyen látjuk, hogy

$$A_{mn}^{(3)} \le 2h_1\sum_{|k|\le m}\sum_{|l|>n} |kc_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(h_1,h_2)). \tag{4.49}$$

Végül a 4.4.1. Lemma (ii) része (a $\gamma = \delta = 1$ és $0 \le \alpha, \beta < 1$ esetben) szolgáltatja az

$$A_{mn}^{(1)} \le h_1 h_2 \sum_{|k|\le m} \sum_{|l|\le n} |klc_{kl}| = h_1 h_2 O(mn w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)) \tag{4.50}$$

azonosságot. A (4.36) és (4.47) - (4.50) képletek együttesen adják az

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O(w_{\alpha\beta}(h_1, h_2))$$

egyenlőséget. Mivel $0 < h_1, h_2 \le 1$ tetszőleges számok voltak, így beláttuk, hogy $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$.

(ii) Tegyük fel, hogy $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$, amely eleget tesz a (3.1) és (4.8) feltételeknek, továbbá $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ valamely $0 \le \alpha, \beta \le 2$ számokra, ahol f a (3.2) összefüggéssel definiált. Hasonlóan a (4.42)-höz, írhatjuk, hogy

$$4 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl}(1 - \cos kx)(1 - \cos ly) = \Delta^{2,2} f(0, 0; x, y) \le C w_{\alpha,\beta}(x, y), \quad 0 < x, y \le 1.$$

A kettős szinuszsor egyenletes konvergenciája következtében integrálhatunk tagonként tetszőleges $(0, h_1)$ intervallumon x szerint, majd ezután y szerint bármely $(0, h_2)$ intervallumon, ahol $0 < h_1, h_2 \le 1$. Mivel $w_{\alpha\beta}(x, y)$ nemcsökkenő függvény x-ben és y-ban is, kapjuk a

$$4 \sum_{|k|\ge 1} \sum_{|l|\ge 1} c_{kl} \Big(h_1 - \frac{\sin kh_1}{k}\Big) \Big(h_2 - \frac{\sin lh_2}{l}\Big) \le C h_1 h_2 w_{\alpha\beta}(h_1, h_2)$$

becslést.

Hajtsuk végre a következő helyettesítéseket: $h_1 = 1/m$ és $h_2 = 1/n$, ahol m és n nemnegatív egész számok. Ekkor az előző egyenlőtlenségünk a következő alakot ölti:

$$\sum_{|k|\ge 2m} \sum_{|l|\ge 2n} c_{kl} \Big(\frac{1}{m} - \frac{\sin(k/m)}{k}\Big)\Big(\frac{1}{n} - \frac{\sin(l/n)}{l}\Big) = O(m^{-1} n^{-1} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})).$$

Használjuk az

$$\frac{1}{p} - \frac{\sin(j/p)}{j} \ge \frac{1}{2p}, \quad |j| \ge 2p,$$

egyenlőtlenségeket, ekkor az

$$\frac{1}{4mn} \sum_{|k|\ge 2m} \sum_{|l|\ge 2n} c_{kl} = O(m^{-1} n^{-1} w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1}))$$

azonossághoz jutunk. A (4.3) feltétel miatt ez az utolsó kifejezés ekvivalens a (4.9) fennállásával, amit bizonyítani akartunk. $\square$

5. fejezet

Ismert egyváltozós eredmények Fourier integrálokra

Ebben a fejezetben ismertetjük a továbbiakban használt jelöléseket, definiciókat, bemutatjuk az egyváltozós esetre vonatkozó tételeket, majd a fejezet végén igazolunk egy segédállítást, amely a következő fejezet tételeinek bizonyításában alapvető fontosságú.

5.1. Definiciók, jelölések

A fejezetben f mindig egy komplex értékű, a valós számegyenesen Lebesgue értelemben mérhető függvényt jelöl.

Az f függvény *Fourier transzformált*ját az

$$\hat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} \mathrm{d}x$$

összefüggéssel definiáljuk. Mint ismert (lásd [18, 1. fejezet]), $\hat{f}$ folytonos függvény, és

$$\lim_{t\to\infty} |\hat{f}(t)| = 0.$$

Egy f függvényt *lokálisan integrálható*nak nevezünk az $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ számegyenesen, ha annak bármely véges intervallumán integrálható, jelben: $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

5.2. Ismert egyváltozós tételek

A következő két állítást Móricz [14] bizonyította. Ezek igazolását mellőzzük, mivel az idézett cikkben részletesen megtalálhatóak.

5.2.1. Tétel. (i) *Tegyük fel, hogy* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *olyan, hogy* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. *Ha valamely* $0 < \alpha \leq 1$ *számra*

$$\int_{|x|<y} |xf(x)| \mathrm{d}x = O(y^{1-\alpha}) \tag{5.1}$$

minden $y > 0$*-ra fennáll, akkor* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *és* $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *és* $xf(x) \geq 0$ *majdnem minden* $x \in \mathbb{R}$*-re. Ha* $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ *valamely* $0 < \alpha \leq 1$ *számra, akkor* (5.1) *fennáll.*

5.2.2. Tétel. (i) *Tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ olyan, hogy $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Ha valamely $0 < \alpha \leq 2$ számra*

$$\int_{|x|<y} x^2 |f(x)| \mathrm{d}x = O(y^{2-\alpha}) \tag{5.2}$$

minden $y > 0$-ra fennáll, akkor $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$.

(ii) *Megfordítva, legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$ és $f(x) \geq 0$ majdnem minden $x \in \mathbb{R}$-re. Ha $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$ valamely $0 < \alpha \leq 2$ számra, akkor (5.2) fennáll.*

Megjegyzés. Mindkét állításban a 'O' 'o'-ra, a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ és $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ függvényosztályok a megfelelő $\mathrm{lip}(\alpha)$ és $\mathrm{zyg}(\alpha)$ osztályokra cserélhetőek.

5.3. Segédtétel

Mivel a következő fejezet tételeinek bizonyításában meghatározó szerepe van egy segédállításnak, ezért itt kimondjuk és bemutatjuk, hogyan igazolható. Részletes bizonyítás Móricz [14] cikkben található.

5.3.1. Lemma. *Legyen g nemnegatív, mérhető függvény a pozitív félegyenesen.*

(i) *Ha a $\gamma > \mu \geq 0$ számokhoz létezik olyan C konstans, hogy*

$$\int_0^s x^\gamma g(x) \mathrm{d}x \leq C s^\mu, \quad s > 0, \tag{5.3}$$

akkor $g \in L^1(s, \infty)$ és

$$\int_s^\infty g(x) \mathrm{d}x \leq C_1 s^{\mu-\gamma}, \tag{5.4}$$

ahol

$$C_1 := 2^\mu C \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m(\mu-\gamma)}. \tag{5.5}$$

(ii) *Megfordítva, ha $\gamma \geq \mu > 0$ és létezik olyan C_1 konstans, hogy (5.4) fennáll, akkor (5.3) is a*

$$C := 2^{\gamma-\mu} C_1 \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{m\mu} \tag{5.6}$$

állandóval.

Megjegyzés. Ha $\gamma = \mu > 0$, akkor az (i) $\Rightarrow$ (ii) már nem igaz például a $g(x) = x^{-1}$ függvény esetében. Hasonlóan, ha $\gamma > \mu = 0$, akkor az (ii) $\Rightarrow$ (i) már nem igaz, ahogy azt a $g(x) = x^{-1-\gamma}$ függvény alapján látjuk.

Figyeljük meg, hogy az (5.5) és (5.6) összefüggésekben definiált konstansok függetlenek az adott g függvénytől.

Bizonyítás. (i) Az (5.3) feltétel szerint létezik olyan $C = C(g)$ konstans, hogy minden $s > 0$-ra

$$s^\gamma \int_s^{2s} g(x) \mathrm{d}x \leq \int_s^{2s} x^\gamma g(x) \mathrm{d}x \leq C (2s)^\mu,$$

ezért

$$\int_s^{2s} g(x)\mathrm{d}x \le 2^\mu C s^{\mu-\gamma},$$

és mivel $\mu < \gamma$, így

$$\int_s^\infty g(x)\mathrm{d}x = \sum_{m=0}^\infty \int_{2^m s}^{2^{m+1}s} g(x)\mathrm{d}x \le 2^\mu C s^{\mu-\gamma} \sum_{m=0}^\infty 2^{m(\mu-\gamma)} =: C_1 s^{\mu-\gamma}, \quad y > 0.$$

(ii) Most az (5.4) feltétel szerint létezik egy $C_1 = C_1(g)$ konstans, hogy minden $s > 0$-ra

$$\int_{s/2}^{s} x^\gamma g(x)\mathrm{d}x \le s^\gamma \int_{s/2}^{s} g(x)\mathrm{d}x \le 2^{\gamma-\mu} C_1 s^\mu,$$

és mivel $s > 0$, írhatjuk, hogy

$$\int_0^s x^\gamma g(x)\mathrm{d}x = \sum_{m=-\infty}^{0} \int_{2^{m-1}s}^{2^m s} x^\gamma g(x)\mathrm{d}x \le 2^{\gamma-\mu} C_1 s^\mu \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{m\mu} =: C s^\mu, \; s > 0.$$

□

6. fejezet

Új eredmények kettős Fourier integrálokra

Ebben a fejezetben a korábban ismertetett 5.1. és 5.2. Tételeket fogjuk általánosítani kétváltozós esetre. Ehhez azonban be kell vezetnünk a kettős Fourier transzformált fogalmát.

6.1. Definiciók, jelölések

Ettől a ponttól kezdve jelöljön f egy komplex értékű, $\mathbb{R}^2$-en Lebesgue értelemben mérhető függvényt.

Az f függvény *kettős Fourier transzformált*ját definiáljuk az

$$\hat{f}(u,v) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

összefüggéssel. Mint ismert (lásd [18, 1. fejezet]), $\hat{f}(u,v)$ egyenletesen folytonos $\mathbb{R}^2$-en és

$$|\hat{f}(u,v)| \to 0, \quad \text{amint} \quad \max\{u,v\} \to \infty.$$

6.2. Fourier integrálok és a klasszikius Lipschitz és Zygmund osztályok

6.2.1. Tétel. (i) *Tegyük fel, hogy az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *függvényre* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *és létezik olyan* s_0 *és* t_0 *pozitív konstans, amelyre*

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \textit{vagy } |x| > s_0 \textit{ és } |y| < t_0, \ \textit{vagy } |x| < s_0 \textit{ és } |y| > t_0\}). \tag{6.1}$$

Ha valamely $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra*

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t} |xyf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{1-\alpha} t^{1-\beta}), \quad s,t > 0, \tag{6.2}$$

akkor $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *és* $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *és mindkét változójában páratlan, vagyis majdnem minden* $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ *számpárra*

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y) \ge 0. \tag{6.3}$$

Ha $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra, akkor* (6.2) *fennáll.*

Megjegyzés. Az alábbi 6.3.1. Lemmából kapjuk, hogy a (6.2) formulában szereplő egyenlőség ekvivalens a következővel:

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > s \text{ és } |y| > t\}), \quad s,t > 0. \tag{6.4}$$

Ahhoz, hogy az $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ feltevésből következtetni tudjunk az $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ állításra, mindenképpen szükség van a (6.1) feltevésre.

A 6.3.2. Lemma állítása szerint ha léteznek olyan $t_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t_0} |xf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} s^{1-\alpha}, \quad s > 0, \tag{6.5}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > s \text{ és } |y| < t_0\}).$$

Hasonlóan, ha léteznek olyan $s_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s_0} \int_{|y|<t} |yf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} t^{1-\beta}, \quad t > 0, \tag{6.6}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < s_0 \text{ és } |y| > t\}).$$

Tehát a (6.5) és (6.6) feltételekből következik a (6.1) összefüggés.

6.2.2. Tétel. (i) *Legyen $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ és tegyük fel, hogy* (6.1) *fennáll. Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 2$ *számokra*

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t} x^2 y^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{2-\alpha} t^{2-\beta}), \quad s,t > 0, \tag{6.7}$$

akkor $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ és $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$.

(ii) *Megfordítva, legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ és $f(x,y) \geq 0$ majdnem minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ számpárra. Ha $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ valamely $0 < \alpha, \beta \leq 2$ számokra, akkor* (6.7) *fennáll.*

Megjegyzés. A 6.3.1. Lemma alapján a (6.7) feltételből most is csak (6.4) következik. Ahhoz, hogy az $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ állítást is be tudjuk látni, szükségünk van a (6.1) relációra is.

A 6.3.2. Lemma állítása alapján ha léteznek olyan $t_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t_0} x^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} s^{2-\alpha}, \quad s > 0, \tag{6.8}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > s \text{ és } |y| < t_0\}).$$

Hasonlóan, ha léteznek olyan $s_0 > 0$ és $\widetilde{C}$ konstansok, hogy

$$\int_{|x|<s_0} \int_{|y|<t} y^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C} t^{2-\beta}, \quad t > 0, \tag{6.9}$$

akkor

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < s_0 \text{ és } |y| > t\}).$$

Tehát a (6.8) és (6.9) feltételekből következik a (6.1) összefüggés.

6.3. Segédtételek

A következő két állítás alapvető fontosságú a fenti tételek bizonyításában. Az igazolásuk történhet direkt úton, ami az 5.3.1. Lemma bizonyításának kiterjesztését jelentené a kétváltozós esetre. Az alábbi bizonyításban azonban a kétváltozós esetet visszevezethetjük az egyváltozós esetre, amit azért tehetünk meg, mert az (5.5) és (5.6) konstansok függetlenek az adott függvénytől.

6.3.1. Lemma. *Legyen $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ Lebesgue értelemben mérhető függvény.*

(i) *Ha valamely $\gamma > \mu \geq 0$ és $\delta > \nu \geq 0$ számokra létezik olyan C konstans, amellyel az*

$$\int_0^s \int_0^t x^\gamma y^\delta g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C s^\mu t^\nu, \quad s,t > 0 \tag{6.10}$$

egyenlőtlenség fennáll, akkor

$$\int_s^\infty \int_t^\infty g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C_{11} s^{\mu-\gamma} t^{\nu-\delta} \tag{6.11}$$

is fennáll, ahol

$$C_{11} = 2^{\mu+\nu} C \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty 2^{m(\mu-\gamma)+n(\nu-\delta)}.$$

(ii) *Megfordítva, ha valamely $\gamma \geq \mu > 0$ és $\delta \geq \nu > 0$ számokra létezik olyan C_{11} konstans, amellyel a* (6.11) *egyenlőtlenség fennáll, akkor a* (6.10) *is fennáll a*

$$C = 2^{\gamma-\mu+\delta-\nu} C_{11} \sum_{m=-\infty}^{0} \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{m\mu+n\nu}$$

állandóval.

Bizonyítás. Mivel az integrandus nemnegatív az összes integrálban, ezért használhatjuk Fubini szukcesszív integrálásról szóló tételét.

(i) A (6.10) feltétel alapján

$$\int_0^s \int_0^t x^\gamma y^\delta g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^s x^\gamma \Big(\int_0^t y^\delta g(x,y)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x \leq C s^\mu t^\nu$$

minden $s,t > 0$-ra.

Most alkalmazzuk az 5.3.1. Lemma (i) állítását az x változóra. Ekkor kapjuk, hogy

$$\int_s^\infty \Big(\int_0^t y^\delta g(x,y)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x \leq C_1(\gamma,\mu) C s^{\mu-\gamma} t^\nu, \tag{6.12}$$

ahol (lásd (5.5))

$$C_1(\gamma,\mu) = 2^\mu \sum_{m=0}^\infty 2^{m(\mu-\gamma)}.$$

A (6.12) egyenlőtlenséget átírhatjuk az

$$\int_0^t y^\delta \Big(\int_s^\infty g(x,y)\mathrm{d}x \Big)\mathrm{d}y \leq C_1(\gamma,\mu) C s^{\mu-\gamma} t^\nu$$

alakba, és újra alkalmazhatjuk az egyváltozós állításunkat (most az y változóra), eredményül az

$$\int_s^\infty \int_t^\infty g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_t^\infty \Big(\int_s^\infty g(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \le C_1(\gamma,\mu)C_1(\delta,\nu)Cs^{\mu-\gamma}t^{\nu-\delta}$$

egyenlőtlenséget kapjuk minden $s,t>0$-ra, ahol

$$C_1(\delta,\nu) = 2^\nu \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n(\nu-\delta)},$$

és

$$C_{11} := C_1(\gamma,\mu)C_1(\delta,\nu)C.$$

(ii) Most a (6.11) szerint

$$\int_s^\infty \int_t^\infty g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_s^\infty \Big(\int_t^\infty g(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \le C_{11}s^{\mu-\gamma}t^{\nu-\delta}$$

minden $s,t>0$-ra.

Alkalmazzuk az 5.3.1. Lemma (ii) állítását az x változóra. Ekkor kapjuk, hogy

$$\int_0^s x^\gamma \Big(\int_t^\infty g(x,y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x \le C(\gamma,\mu)C_{11}s^\mu t^{\nu-\delta}, \tag{6.13}$$

ahol (lásd (5.6))

$$C(\gamma,\mu) = 2^{\gamma-\mu} \sum_{m=-\infty}^{0} 2^{m\mu}.$$

Most a (6.13) egyenlőtlenséget átírhatjuk az

$$\int_t^\infty \Big(\int_0^s x^\gamma g(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \le C(\gamma,\mu)C_{11}s^\mu t^{\nu-\delta}$$

alakba, és újra alkalmazhatjuk az egyváltozós állításunkat (most az y változóra), eredményül az

$$\int_0^s \int_0^t x^\gamma y^\delta g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^t y^\delta\Big(\int_0^s x^\gamma g(x,y)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \le C(\gamma,\mu)C(\delta,\nu)C_{11}s^\mu t^\nu$$

egyenlőtlenséget kapjuk minden $s,t>0$-ra, ahol

$$C_1(\delta,\nu) = 2^{\delta-\nu} \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{n\nu},$$

és

$$C := C(\gamma,\mu)C(\delta,\nu)C_{11}.$$

$\square$

A következő állításban külön megfogalmazzuk, ahogy a levezetés során a (6.12) összefüggéshez jutottunk a (6.10) egyenlőtlenségből, és annak szimmetrikus megfelelőjét is, amikor az x és y változókat felcseréljük.

6.3.2. Lemma. *Legyen $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ Lebesgue értelemben mérhető függvény.*

(i) *Ha valamely $\gamma > \mu \geq 0$ és $t_0 > 0$ számokra létezik olyan $\widetilde{C}$ konstans, amellyel az*

$$\int_0^s \int_0^{t_0} x^\gamma g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C}s^\mu, \quad s > 0 \tag{6.14}$$

egyenlőtlenség fennáll, akkor

$$\int_s^\infty \int_0^{t_0} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2^\mu \widetilde{C} \sum_{m=0}^\infty 2^{m(\mu-\gamma)} s^{\mu-\gamma}$$

is fennáll.

(ii) *Hasonlóan, ha valamely $\delta > \nu \geq 0$ és $s_0 > 0$ számokra létezik olyan $\widetilde{C}$ konstans, amellyel az*

$$\int_0^{s_0} \int_0^{t} y^\delta g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \widetilde{C}t^\nu, \quad t > 0 \tag{6.15}$$

egyenlőtlenség fennáll, akkor

$$\int_0^{s_0} \int_t^{\infty} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2^\nu \widetilde{C} \sum_{n=0}^\infty 2^{n(\nu-\delta)} t^{\nu-\delta}$$

is fennáll.

Megjegyzés. A 6.3.1. Lemmából következik, hogy ha $x^\gamma y^\delta g(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$ és a (6.10) egyenlőtlenség fennáll, akkor $g(x,y) \in L^1((s,\infty)\times(t,\infty))$ minden $s,t > 0$-ra. Ha még azt is feltesszük, hogy $g(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$ és léteznek olyan $s_0, t_0 > 0$ konstansok, amelyekre

$$g(x,y) \in L^1((s_0,\infty)\times(0,t_0) \cup (0,s_0)\times(t_0,\infty)) \tag{6.16}$$

fennáll, akkor $g(x,y) \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$.

Továbbá az is következik a 6.3.1. Lemmából, hogy ha $g(x,y) \in L^1((s,\infty)\times(t,\infty))$ és (6.11) fennáll minden $s,t > 0$-ra, akkor $x^\gamma y^\delta g(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$. Speciálisan, ha $g(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$ és (6.16) érvényes valamely $s_0, t_0 > 0$ konstansokkal, akkor $g(x,y) \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$.

Hasonlóan a 6.3.2. Lemmából nyerjük, hogy ha $x^\gamma g(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times (0,t_0))$ valamely $t_0 > 0$ állandóval és (6.14) fennáll, akkor $g(x,y) \in L^1((s,\infty)\times(0,t_0))$ is minden $s > 0$-ra. Ugyanígy, ha $y^\delta g(x,y) \in L^1_{\mathrm{loc}}((0,s_0)\times\mathbb{R}_+)$ valamely $s_0 > 0$ állandóval és (6.15) fennáll, akkor $g(x,y) \in L^1((0,s_0)\times(t,\infty))$ is minden $t > 0$-ra.

6.4. A 6.2.1. és 6.2.2. tételek bizonyítása

A 6.2.1. Tétel bizonyítása

(i) Feltevés szerint $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$, (6.1), (6.2) feltételekből és a 6.3.1. Lemma (i) állításának alkalmazásával kapjuk, hogy $f \in L^1(\mathbb{R}_+^2)$. Így a korábban definiált $\hat{f}$ Fourier transzformált létezik és folytonos. Azt szeretnénk bizonyítani, hogy ez a függvény teljesíti a Lipschitz feltételt, vagyis $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

Legyen $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ és $h_1, h_2 > 0$ tetszőlegesen adott értékek. A Fourier transzformált definíciója és (3.3) miatt becsülhetünk a következő módon:

$$2\pi|\Delta^{1,1}\hat{f}(u,v;h_1,h_2)| = \Big| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-i(ux+vy)}(e^{-ih_1x}-1)(e^{-ih_2y}-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big|$$

$$\leq 4 \iint_{\mathbb{R}^2} \Big| f(x,y) \sin \frac{h_1 x}{2} \sin \frac{h_2 y}{2} \Big| \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Ezt az integrált felbontjuk négy részre:

$$2\pi |\Delta^{1,1} \hat{f}(u,v;h_1,h_2)|$$

$$\leq 4 \Big\{ \int_{|x|<1/h_1} \int_{|y|<1/h_2} + \int_{|x|>1/h_1} \int_{|y|<1/h_2} + \int_{|x|<1/h_1} \int_{|y|>1/h_2} + \tag{6.17}$$

$$+ \int_{|x|>1/h_1} \int_{|y|>1/h_2} \Big\} \Big| f(x,y) \sin \frac{h_1 x}{2} \sin \frac{h_2 y}{2} \Big| \mathrm{d}x\mathrm{d}y =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Először használjuk a (4.35)-ben lévő triviális becslést a szinusz függvényre és a (6.2) feltevésünket. Ezekből kapjuk, hogy

$$I_1 \leq h_1 h_2 \int_{|x|<1/h_1} \int_{|y|<1/h_2} |xyf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C h_1 h_2 \Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{1-\alpha} \Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{1-\beta} = C h_1^\alpha h_2^\beta. \tag{6.18}$$

A következőkben alkalmazzuk a 6.3.1. Lemma (i) részét (a (6.2) esetben), ekkor kapjuk az

$$I_4 \leq 4 \int_{|x|>1/h_1} \int_{|y|>1/h_2} |f(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 4C_{11} \Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{-\alpha} \Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{-\beta} = 4C_{11} h_1^\alpha h_2^\beta \tag{6.19}$$

becslést, ahol C_{11} megegyezik a 6.3.1. Lemmában szereplő konstanssal.

Harmadszor, alkalmazzuk (6.6)-ot (a (6.2) esetben felhasználva a (4.35) egyenlőtlenséget is), majd 6.3.2. Lemma (i) részének segítségével kapjuk az

$$I_2 \leq 2h_2 \int_{|x|>1/h_1} \int_{|y|<1/h_2} |yf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6.20}$$

$$\leq 2h_2 C_1(1, 1-\alpha) C \Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{-\alpha} \Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{1-\beta} \leq 2C_1(1,1-\alpha) C h_1^\alpha h_2^\beta$$

becslést.

Végül, használjuk a 6.3.2. Lemma (ii) részét, amivel kapjuk a (6.20) szimmetrikus megfelelőjét:

$$I_3 \leq 2h_1 \int_{|x|<1/h_1} \int_{|y|>1/h_2} |xf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq 2C_1(1,1-\beta) C h_1^\alpha h_2^\beta. \tag{6.21}$$

Mivel $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ és $h_1, h_2 > 0$ tetszőlegesek voltak, ezért (6.17) - (6.21) egyenlőtlenségből következik az állításunk, vagyis $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

(ii) Legyen $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, amelyre a (6.3) teljesül. Ekkor az f függvény előjelének váltakozása miatt írhatjuk, hogy

$$2\pi \Delta^{1,1} \hat{f}(0,0;u,v) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)(e^{-iux}-1)(e^{-ivy}-1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \sin ux \sin vy \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad u,v > 0.$$

Most $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ miatt létezik olyan C konstans, hogy

$$2\pi |\Delta^{1,1} \hat{f}(0,0;u,v)| = \Big| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \sin ux \sin vy \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big| \leq C u^\alpha v^\beta. \tag{6.22}$$

Az abszolútérték-jelek közötti kettős integrált fogjuk integrálni az u változó szerint valamely $(0, h_1)$ intervallumon, ahol $h_1 > 0$ adott szám. Mivel a

$$\lim_{\xi\to\infty} \int_0^{\xi} \int_0^{\infty} f(x,y) \sin ux \sin vy \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \sin ux \sin vy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

konvergencia egyenletes $u, v > 0$-ban, ezért az x és u szerinti integrálás sorrendjét felcserélhetjük. Ekkor a (6.22) egyenlőtlenségből kapjuk az

$$\Big| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \frac{1-\cos h_1 x}{x} \sin vy \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big| \le C \frac{h_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} v^{\beta}$$

összefüggést minden $h_1, v > 0$-ra. Hasonlóan, most integrálhatunk az y változó szerint valamely $(0, h_2)$ intervallumon, ahol $h_2 > 0$ adott. A trigonometrikus azonosságoknak köszönhetően egyenlőtlenségünk az

$$\Big| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \frac{1-\cos h_1 x}{x} \frac{1-\cos h_2 y}{y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big|$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x,y)}{xy} \sin^2 \frac{h_1 x}{2} \sin^2 \frac{h_2 y}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le C \frac{h_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{h_2^{\beta+1}}{\beta+1}$$

alakot ölti minden $h_1, h_2 > 0$-ra, ahol kihasználtuk azt is, hogy f előjele megegyezik az argumentumai szorzatának előjelével.

Az utolsó egyenlőtlenségre alkalmazzuk a (2.14) egyenlőtlenséget mindkét változóban, eredményünk a

$$\frac{4h_1^2 h_2^2}{\pi^4} \int_{|x|<1/h_1} \int_{|y|<1/h_2} xy f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le C \frac{h_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \frac{h_2^{\beta+1}}{\beta+1}, \quad h_1, h_2 > 0$$

becslés, vagy ekvivalens formában

$$\int_{|x|<1/h_1} \int_{|y|<1/h_2} xy f(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \frac{C\pi^4}{4(\alpha+1)(\beta+1)} h_1^{\alpha-1} h_2^{\beta-1} = O\Big(\Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{1-\alpha} \Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{1-\beta}\Big).$$

Ezzel beláttuk állításunkat az $s = 1/h_1$ és $t = 1/h_2$ esetben, ahol $h_1, h_2 > 0$ tetszőleges számok. □

A 6.2.2. Tétel bizonyítása

(i) Az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, (6.1) és (6.7) feltevésekből, valamint a 6.3.1. Lemma (i) segítségével nyerjük, hogy $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Így az f függvény $\hat{f}$ Fourier transzformáltja létezik és folytonos. Az $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ tartalmazást szeretnénk bizonyítani. Ezen cél eléréséhez legyenek $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ és $h_1, h_2 > 0$ tetszőlegesen adott értékek. Az $\hat{f}$ definiciója és a (3.4) jelölés miatt írhatjuk, hogy

$$2\pi |\Delta^{2,2} \hat{f}(u, v; h_1, h_2)|$$

$$= \Big| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} (e^{-ih_1 x} - 2 + e^{ih_1 x})(e^{-ih_2 y} - 2 + e^{ih_2 y}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big|$$

$$= 4 \Big| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} (\cos h_1 x - 1)(\cos h_2 y - 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big|$$

$$\le 4 \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| (1 - \cos h_1 x)(1 - \cos h_2 y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16 \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)| \sin^2 \frac{h_1 x}{2} \sin^2 \frac{h_2 y}{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Hasonlóan (6.17)-hez most is bontsuk fel az utolsó integrált a következő négy részre:

$$2\pi|\Delta^{2,2}\hat{f}(u,v;h_1,h_2)| \le 16\Big\{\int_{|x|<1/h_1}\int_{|y|<1/h_2} + \int_{|x|>1/h_1}\int_{|y|<1/h_2} +$$

$$+\int_{|x|<1/h_1}\int_{|y|>1/h_2} + \int_{|x|>1/h_1}\int_{|y|>1/h_2}\Big\}|f(x,y)|\sin^2\frac{h_1x}{2}\sin^2\frac{h_2y}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \tag{6.23}$$

Először használjuk a (4.35) és (6.7) egyenlőtlenségeket, amelyekből kapjuk a

$$J_1 \le h_1^2h_2^2\int_{|x|<1/h_1}\int_{|y|<1/h_2} x^2y^2|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le h_1^2h_2^2C\Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{2-\alpha}\Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{2-\beta} = Ch_1^\alpha h_2^\beta \tag{6.24}$$

becslést.

Másodsorban, alkalmazzuk a 6.3.1. Lemma (i) részét (a (6.7) esetben). Ekkor kapjuk, hogy (lásd (6.11))

$$J_4 \le 16\int_{|x|>1/h_1}\int_{|y|>1/h_2}|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le 16C_{11}\Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{-\alpha}\Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{-\beta} = 16C_{11}h_1^\alpha h_2^\beta. \tag{6.25}$$

A következő becslésben használjuk (6.12)-t (a (6.7) esetre felhasználva a (4.35) egyenlőtlenséget is), majd a 6.3.2. Lemma (ii) részéből nyerjük a

$$J_2 \le 4h_2^2\int_{|x|>1/h_1}\int_{|y|<1/h_2} y^2|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le 4h_2^2C_1(2,2-\alpha)C\Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{-\alpha}\Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{2-\beta} = 4C_1(2,2-\alpha)Ch_1^\alpha h_2^\beta \tag{6.26}$$

egyenlőtlenséget.

Végül, a 6.3.2. Lemmából kapjuk a (6.26) szimmetrikus megfelelőjét:

$$J_3 \le 4h_1^2\int_{|x|<1/h_1}\int_{|y|>1/h_2} x^2|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le 4h_1^2C_1(2,2-\beta)C\Big(\frac{1}{h_1}\Big)^{2-\alpha}\Big(\frac{1}{h_2}\Big)^{-\beta} = 4C_1(2,2-\beta)Ch_1^\alpha h_2^\beta. \tag{6.27}$$

Ha összevetjük a (6.23) - (6.27) egyenlőtlenségeket, akkor látjuk, hogy

$$|\Delta^{2,2}\hat{f}(u,v;h_1,h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta),$$

és mivel $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, illetve $h_1,h_2>0$ tetszőlegesek voltak, ezért $\hat{f}\in \mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$.

(ii) Legyen $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$. A Fourier transzformált és a (3.4) definiciókból, valamint f nemnegatívitása következtében

$$2\pi\Delta^{2,2}\hat{f}(0,0;h_1,h_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)(e^{ih_1x}+e^{-ih_1x}-2)(e^{ih_2y}+e^{-ih_2y}-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)(\cos h_1x-1)(\cos h_2y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\sin^2\frac{h_1x}{2}\sin^2\frac{h_2y}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Alkalmazzuk a (2.14) egyenlőtlenséget mindkét változóra, eredményül a

$$\frac{16h_1^2h_2^2}{\pi^4}\int_{|x|<1/h_1}\int_{|y|<1/h_2} x^2y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le Ch_1^\alpha h_2^\beta$$

becslést kapjuk minden $h_1,h_2>0$-ra. Ez pedig már ekvivalens a (6.7)-tel az $s=1/h_1, t=1/h_2$ esetben, ahol $h_1,h_2>0$ tetszőleges számok. $\square$

Irodalomjegyzék

[1] N. K. Bary, and S. B. Stečkin, Best approximation and differential properties of two conjugate functions, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **5** (1956), 483-522 (in Russian).

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular Variation,* Cambridge Univ. Press, 1987.

[3] R. P. Boas, Jr., Fourier series with positive coefficients, *J. Math. Anal. Appl.,* **17** (1967), 463-483.

[4] D. M. Dyachenko, On two-sided estimates of sums of absolute values of the Fourier coefficients of functions in $H^\omega(T^m)$, *Vestnik Moskov. Univ.* Ser. I. Mat., Mech., **3** (2008), 19-26 (in Russian).

[5] V. Fülöp, Double cosine series with nonnegative coefficients, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **70** (2004), 91-100.

[6] V. Fülöp, Double sine series with nonnegative coefficients and Lipschitz classes, *Colloq. Math.,* **105** (2006), 25-34.

[7] V. Fülöp, F. Móricz and Z. Sáfár, Double Fourier transforms, Lipschitz and Zygmund classes of functions on the plane, *East J. Approx.,* **17** (2011), 111-124.

[8] G. Brown, F. Móricz and Z. Sáfár, Formal differentiation of absolutely convergent Fourier series and classical function classes, *Acta. Sci. Math. (Szeged),* **75** (2009), 161-173.

[9] L. Leindler, *Strong approximation by Fourier series,* Akadémiai Kiadó, Budapest, 1985.

[10] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series, classical function classes and Paley's theorem, *Analysis Math.,* **34** (2008), 261-276.

[11] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series and generalized Lipschitz classes of functions, *Colloq. Math.,* **113** (2008), 105-117.

[12] F. Móricz, Absolutely convergent Fourier series, enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions, *East J. Approx.,* **15** (2009), 71-85.

[13] F. Móricz, Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions, *Acta Math. Hungar.,* **121** (2008), 1-19.

[14] F. Móricz, Best possible sufficient conditions for the Fourier transform to satisfy the Lipschitz or Zygmund condition, *Studia Math.,* **199** (2010), 199-205.

[15] F. Móricz and Z. Sáfár, Absolutely convergent double Fourier series, enlarged Lipschitz and Zygmund classes of functions of two variables, *East J. Approx.,* **16** (2010), 1-24.

[16] J. Németh, Fourier series with positive coefficients and generalized Lipschitz classes, *Acta Sci. Math. (Szeged),* **54** (1990), 291-304.

[17] Z. Sáfár,Absolutely convergent double Fourier series and generalized multiplicative Lipschitz classes of functions, *Acta. Sci. Math. (Szeged),* **75** (2009), 617-633.

[18] E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces,* Princeton Univ. Press, 1971.

[19] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Vol. *I,* Cambridge Univ. Press, 1959.

Összefoglaló

A disszertációban vizsgált kutatási problémák három nagy csoportba sorolhatók. Az első terület az egyváltozós Fourier sorok tagonkénti differenciálhatóságát, illetve az így kapott sor valamely Lipschitz osztályba tartozását fedi le. A következő részben a kétváltozós Fourier sorok együtthatóinak nagyságrendje és a megfelelő függvény általánosított Lipschitz illetve Zygmund osztályba tartozásának kapcsolatát vizsgáltuk. Végül szükséges és elegendő feltételt adtunk arra, hogy egy kétváltozós függvény Fourier transzformáltja eleget tegyen valamely "klasszikus" Lipschitz vagy Zygmund feltételnek.

Az értekezés a szerző következő négy publikációján alapszik: [7], [8], [15] és [17].

Fourier sorok differenciálása és függvényosztályok

Ebben a részben a 2. fejezet eredményeit foglaljuk össze. Ezek az állítások általánosításai Boas [3] és Németh [16] megfelelő tételeinek.

Jelölések

Legyen $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ tetszőleges sorozat, amelyre a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty \tag{1.1}$$

összefüggés teljesül. Ekkor a $\sum c_k e^{ikx}$ trigonometrikus sor egyenletesen konvergens, és az összegfüggvényt jelöltük $f(x)$-szel,

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}. \tag{1.2}$$

Függvényosztályok

1.1.2. Definició (Lipschitz osztály). Egy f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ osztályba (vagy másképp kifejezve akkor tesz eleget az α-rendű Lipschitz feltételnek), ha van olyan csak a függvénytől függő $C = C(f)$ állandó, amelyre

$$|\Delta^1 f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \le Ch^\alpha =: O(h^\alpha) \quad \text{minden } x \in \mathbb{T}\text{-re és } h > 0\text{-ra.}$$

A $\mathrm{lip}(\alpha)$ osztályt azon f függvények összessége alkotja, amelyekre a

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}|\Delta^1 f(x,h)| = 0$$

határérték egyenletesen teljesül $x \in \mathbb{T}$-ben, vagy rövidebb jelöléssel

$$|\Delta^1 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{egyenletesen teljesül } x \in \mathbb{T}\text{-ben.}$$

1.1.3 Definició (Zygmund osztály). Egy folytonos f függvény akkor tartozik a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ osztályba, ha

$$|\Delta^2 f(x,h)| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = O(h^\alpha) \quad \text{minden } x \in \mathbb{T}\text{-re és } h > 0\text{-ra.}$$

A $\mathrm{zyg}(\alpha)$ osztályt azon folytonos f függvények összessége alkotja, amelyekre az

$$|\Delta^2 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{egyenletesen teljesül } x \in \mathbb{T}\text{-ben.}$$

Új eredmények

2.1.1. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész számra a*

$$\sum_{|k| \geq n} |c_k| = o(n^{-r})$$

összefüggés teljesül, akkor az (1.2) sor r-szeres formális deriváltja pontosan akkor konvergens valamely $x \in \mathbb{T}$ pontban, ha az f összegfüggvény r-szer differenciálható x-ben, és ekkor

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (ik)^r c_k e^{ikx}. \tag{2.1}$$

Továbbá az $f^{(r)}$ deriváltfüggvény akkor és csak akkor folytonos $\mathbb{T}$-n, ha a (2.1)-ben szereplő trigonometrikus sor egyenletesen konvergens $\mathbb{T}$-n.

2.1.2. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész és $0 < \alpha \leq 1$ számokra*

$$\sum_{|k| \geq n} |c_k| = O(n^{-r-\alpha}), \tag{2.2}$$

akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n, a $0 < \alpha < 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ és az $\alpha = 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$.

2.1.3. Tétel. *Ha valamely $r \geq 1$ egész és $0 < \alpha \leq 1$ számokra*

$$\sum_{|k| \geq n} |c_k| = o(n^{-r-\alpha}), \tag{2.3}$$

akkor f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n, a $0 < \alpha < 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{lip}(\alpha)$ és az $\alpha = 1$ esetben $f^{(r)} \in \mathrm{zyg}(1)$.

2.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az együtthatókra a következő két feltétel egyike fennáll: $kc_k \geq 0$ minden k-ra vagy $c_k \geq 0$ minden k-ra. Legyen f r-szer differenciálható $\mathbb{T}$-n. Ha $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $0 < \alpha < 1$ számra, akkor a (2.2) fennáll ezzel az α-val; hasonlóan, ha $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$, akkor (2.2) fennáll az $\alpha = 1$ esetben.*

2.1.5. Tétel. *A 2.1.4. Tétel mindkét állítása igaz marad, ha a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ és $\mathrm{Zyg}(1)$ osztályokat a $\mathrm{lip}(\alpha)$ és $\mathrm{zyg}(1)$ osztályokra, illetve a (2.2) feltételt a (2.3)-ra cseréljük.*

2.1.1. Következmény. (i) *Ha valamely* $r \geq 1$*-re*

$$\sum_{|k|\leq n} |k^{r+1}c_k| = O(1), \tag{2.4}$$

akkor f r*-szer differenciálható a tóruszon és* $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$.

(ii) *Tegyük fel, hogy* $k^{r+1}c_k \geq 0$ *minden* k *indexre és* f r*-szer differenciálható* $\mathbb{T}$*-n, valamely* $r \geq 1$ *számra. Ha* $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$, *akkor* (2.4) *fennáll.*

Kétváltozós Fourier sorok és függvényosztályok

Ebben a részben a 4. fejezet eredményeit foglaljuk össze. Itt egyszerre több általánosítást is elvégeztünk. Egyfelől Móricz Ferenc [11] és [12] egyváltozós tételeit ültettük át kétváltozós esetre, másfelől [13] cikkének állításait terjesztettük ki bővebb függvényosztályra.

Jelölések

A 2. fejezethez hasonlóan itt is feltettük a $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ együtthatók abszolút konvergenciáját, vagyis a

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{kl}| < \infty \tag{3.1}$$

fennállását. Ezért vizsgálhattuk az

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)} \tag{3.2}$$

összefüggvényt.

Egy pozitív, az $[a,\infty)$ ($a > 0$ tetszőleges) intervallumon mérhető L függvényt Karatama értelemben *lassú változású függvény*nek nevezünk, ha

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1, \quad \text{amint} \quad x \to \infty, \quad \text{minden} \quad \lambda > 0\text{-ra.}$$

Ekkor L kiterjeszthető az egész pozitív félegyenesre úgy, hogy továbbra is lassú változású maradjon, például $L(x) := L(a)$ minden $0 < x < a$ pontban.

Ha L nemcsökkenő függvény, akkor a fenti határérték teljesülését elegendő csak a $\lambda = 2$ esetre megkövetelni.

Mostantól legyen L kétváltozós függvény, amely teljesíti a következő tulajdonságokat:

$$L(x,y) = L_1(x)L_2(y), \quad \text{ahol} \quad L_k(t) \to \infty \quad \text{és} \quad \frac{L_k(2t)}{L_k(t)} \to 1 \quad \text{amint} \quad t \to \infty. \tag{4.1}$$

Használni fogjuk a

$$c_{kl} \geq 0 \quad \text{minden} \quad k,l \geq 1 \tag{3.6}$$

és

$$c_{kl} = -c_{-k,l} = -c_{k,-l} = c_{-k,-l} \quad |k|,|l| \geq 1 \tag{3.7}$$

speciális sorozatokat.

Függvényosztályok

3.1.1. Definició (Multiplikatív Lipschitz osztályok). Legyen $\alpha, \beta > 0$ két tetszőleges valós szám és

$$\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - f(x, y + h_2) + f(x, y) \tag{3.3}$$

az elsőrendű differencia $(x, y) \in \mathbb{T}^2$-ben.

Egy folytonos $f(x, y)$ függvény akkor tartozik bele a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ multiplikatív Lipschitz osztályba, ha az

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta)$$

azonosság minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre teljesül.

Egy $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ függvény a $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ függvényosztálynak is eleme, ha

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = 0 \quad \text{egyenletesen} \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2\text{-ben.}$$

3.1.2. Definició (Multiplikatív Zygmund osztályok). Teljesen hasonlóan, legyen $\alpha, \beta > 0$ két tetszőleges valós szám és

$$\begin{gathered} \Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2) \\ = f(x + h_1, y + h_2) + f(x + h_1, y - h_2) + f(x - h_1, y + h_2) + f(x - h_1, y - h_2) - \\ -2f(x, y + h_2) - 2f(x + h_1, y) - 2f(x, y - h_2) - 2f(x - h_1, y) + 4f(x, y) \end{gathered}$$

a másodrendű differencia $(x, y) \in \mathbb{T}^2$-ben.

Egy folytonos $f(x, y)$ függvény akkor tartozik bele a $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ multiplikatív Zygmund osztályba, ha az

$$|\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta)$$

egyenlőség minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre teljesül.

A $\mathrm{zyg}(\alpha, \beta)$ multiplikatív Zygmund osztályt azon $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ függvények alkotják, amelyekre a

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2)| = 0$$

határérték egyenletesen fennáll $(x, y) \in \mathbb{T}^2$-ben.

4.1.1. Definició (Általánosított kétváltozós Lipschitz osztályok). Legyenek $\alpha, \beta > 0$ adott számok és tegyük fel, hogy az $L(x, y)$ függvény teljesíti a (4.1) feltételt. Egy folytonos f függvény eleme a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ általánosított kétváltozós Lipschitz osztálynak, ha a (3.3)-ban definiált elsőrendű differenciaoperátorra fennáll az

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O\Big(h_1^\alpha h_2^\beta L\Big(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\Big)\Big)$$

egyenlőség minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre.

Adott $\alpha, \beta \geq 0$ számok és a (4.1)-et teljesítő L függvény esetén azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ osztály egy eleme, ha

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O\Big(\frac{h_1^\alpha h_2^\beta}{L(1/h_1, 1/h_2)}\Big)$$

fennáll minden $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$ értékre.

Legyen $\alpha, \beta \geq 0$ és jelöljük $W_{\alpha\beta}$-val azon mindkét változójában nemcsökkenő $w_{\alpha\beta} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ függvények összességét, amelyekre

$$w_{\alpha\beta}(0, \delta_2) = w_{\alpha\beta}(\delta_1, 0) = 0 \quad \text{minden} \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0\text{-ra}; \tag{4.2}$$

$$\sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(2\delta_1, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\alpha < \infty, \quad \sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2\delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\beta < \infty, \tag{4.3}$$

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} > 2^{-\alpha'}, \quad \limsup_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} \leq 2^{-\alpha} \tag{4.4}$$

minden $\alpha' > \alpha$ és $0 < \delta_2 \leq 1$ számra, és

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} > 2^{-\beta'}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} \leq 2^{-\beta} \tag{4.5}$$

minden $\beta' > \beta$ és $0 < \delta_1 \leq 1$ számra.

4.1.2. Definició (Kiterjesztett kétváltozós Lipschitz osztályok). Legyen $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$ valamely $\alpha, \beta \geq 0$ számokra, f pedig folytonos függvény. Ekkor

$$\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega(f; \delta_1, \delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2))\},$$

ahol $\omega(f; \delta_1, \delta_2)$ az f függvény folytonossági modulusa.

4.1.3. Definició (Kiterjesztett kétváltozós Zygmund osztályok).

$$\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega_2(f; \delta_1, \delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2))\},$$

ahol $\omega_2(f; \delta_1, \delta_2)$ az f függvény simasági modulusa.

Új eredmények

4.2.1. Tétel. *Legyen $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.*

(i) *Ha $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ tetszőleges számsorozat, amelyre*

$$\sum_{|k|\leq m} \sum_{|l|\leq n} |klc_{kl}| = O(mnw_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.6}$$

fennáll valamely $0 < \alpha, \beta \leq 1$ esetén, akkor (3.1) *teljesül, és a* (3.2) *összefüggéssel definiált f függvény eleme a* $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ *osztálynak.*

(ii) *Megfordítva, legyen $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ olyan sorozat, amelyre* (3.1), (3.6) *és* (3.7) *teljesül. Ha $f \in$* $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ *valamely $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ számokra, akkor a* (4.6) *egyenlőség is fennáll.*

4.2.2. Tétel. *Legyen $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.*

(i) *Ha $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ tetszőleges olyan sorozat, amelyre a*

$$\sum_{|k|\leq m} \sum_{|l|\leq n} k^2 l^2 |c_{kl}| = O(m^2 n^2 w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.7}$$

egyenlőség fennáll valamely $0 < \alpha, \beta \leq 2$ *esetén, akkor* (3.1) *teljesül, és a* (3.2) *összefüggéssel definiált* f *függvény eleme a* $\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *osztálynak.*

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyre a* (3.1) *feltétel fennáll és*

$$c_{kl} \geq 0 \quad \textit{minden} \quad |k|, |l| \geq 1 \quad \textit{indexre.} \tag{4.8}$$

Ha $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$ *számokra, akkor a* (4.7) *egyenlőség is fennáll.*

4.2.3. Tétel. *Legyen* $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.

(i) *Ha* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *amelyre a*

$$\sum_{|k| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})) \tag{4.9}$$

azonosság valamely $0 \leq \alpha, \beta < 1$ *számokra fennáll, akkor a* (3.2)*-ben definiált függvényre* $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan számsorozat, amelyre* (3.1) *és* (4.8) *feltételek teljesülnek. Ha* $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ *valamely* $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$ *számokra, akkor* (4.9) *is fennáll.*

4.3.1. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\}$ *komplex számok olyan sorozata, amelyre* (3.1) *fennáll, az* f *függvényt definiálja a* (3.2) *összefüggés és tegyük fel, hogy az* L *függvény eleget tesz a* (4.1) *határértékeknek.*

(i) *Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra*

$$\sum_{|k| \leq m} \sum_{|l| \leq n} |klc_{kl}| = O(m^{1-\alpha} n^{1-\beta} L(m, n)), \tag{4.10}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *olyan sorozat, amelyben minden elem előjele megegyezik az indexei szorzatának előjelével, vagyis teljesítik a* (3.6) *és* (3.7) *feltételeket. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta \leq 1$ *számokra, akkor* (4.10) *fennáll.*

4.3.2. Tétel. *Legyen* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *amelyre* (3.1) *fennáll, az* f *függvényt definiálja a* (3.2) *összefüggés és tegyük fel, hogy az* L *függvény eleget tesz a* (4.1) *határértékeknek.*

(i) *Ha valamely* $0 \leq \alpha, \beta < 1$ *számokra*

$$\sum_{|k| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{kl}| = O\Big(\frac{m^{-\alpha} n^{-\beta}}{L(m, n)}\Big), \tag{4.11}$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$.

(ii) *Megfordítva, legyen* $\{c_{kl}\}$ *olyan valós számsorozat, amelyre* (3.6) *és* (3.7) *teljesül. Ha* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ *valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *számokra, akkor a* (4.11) *azonosság is fennáll.*

Probléma. A 4.3.2. Tétel szükségességi részének bizonyítása során azt az esetet nem sikerült belátni, amikor $\min\{\alpha, \beta\} = 0$.

Kétváltozós Fourier transzformáltak és függvényosztályok

Ebben a részben a 6. fejezet eredményeit foglaljuk össze. A záró részben azt vizsgáltuk, hogy egy kétváltozós függvény Fourier transzformáltja milyen feltételek mellett tartozik valamely "klasszikus" kétváltozós Lipschitz illetve Zygmund osztályba. A következő két állítás Móricz Ferenc [14] eredményeinek kiterjesztése kétváltozós esetre.

Definició. Az f függvény *kettős Fourier transzformáltját* definiáljuk az

$$\hat{f}(u,v) := \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-i(ux+vy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

összefüggéssel.

6.2.1. Tétel. (i) *Tegyük fel, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ függvényre $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ és létezik olyan s_0 és t_0 pozitív konstans, amelyre*

$$f\in L^1(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \textit{vagy } |x|>s_0 \textit{ és } |y|<t_0,\ \textit{vagy } |x|<s_0 \textit{ és } |y|>t_0\}). \tag{6.1}$$

Ha valamely $0<\alpha,\beta\le 1$ számokra

$$\int_{|x|<s}\int_{|y|<t} |xyf(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{1-\alpha}t^{1-\beta}), \quad s,t>0, \tag{6.2}$$

akkor $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$ és $\hat{f}\in\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

(ii) *Megfordítva, tegyük fel, hogy $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$ és mindkét változójában páratlan, vagyis majdnem minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2_+$ számpárra*

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y)\ge 0. \tag{6.3}$$

Ha $\hat{f}\in\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ valamely $0<\alpha,\beta\le 1$ számokra, akkor (6.2) *fennáll.*

6.2.2. Tétel. (i) *Legyen $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ és tegyük fel, hogy* (6.1) *fennáll. Ha valamely $0<\alpha,\beta\le 2$ számokra*

$$\int_{|x|<s}\int_{|y|<t} x^2y^2|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{2-\alpha}t^{2-\beta}), \quad s,t>0, \tag{6.7}$$

akkor $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$ és $\hat{f}\in\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$.

(ii) *Megfordítva, legyen $f\in L^1(\mathbb{R}^2)$ és $f(x,y)\ge 0$ majdnem minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ számpárra. Ha $\hat{f}\in\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ valamely $0<\alpha,\beta\le 2$ számokra, akkor* (6.7) *fennáll.*

Summary

Our research results are presented in three chapters. The first one is devoted to the study of the differentiability properties of a single valued function f. We give sufficient conditions under which $f^{(r)}$ belongs to one of the Lipschitz classes. In the following chapter we investigate the order of magnitude of the Fourier coefficients of a function in two variables. We give necessary and sufficient conditions in terms of the Fourier coefficients in order that f belong to one of the generalized multiplicative Lipschitz classes or to one of the generalized multiplicative Zygmund classes. Finally, we prove sufficient conditions under which the double Fourier transform belongs to one of the two-dimensional "classical" Lipschitz classes or Zygmund classes.

The disertation is based on the following paper of the author: [7], [8], [15] és [17].

Differentiation of Fourier series and function classes

In this section we summarize the results of Chapter 2. These theorems are generalizations of the corresponding theorems proved by Boas [3] and Németh [16].

Notations

Let $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ be a sequence such that

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty. \tag{1.1}$$

Then the trigonometric series

$$f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \tag{1.2}$$

converges uniformly on the torus and it is the Fourier series of its sum f.

Classes of functions

Definition 1.1.2 (Lipschitz classes). $\mathrm{Lip}(\alpha)$ consists of all functions f for which

$$|\Delta^1 f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \leq Ch^\alpha =: O(h^\alpha) \quad \text{for all } x \in \mathbb{T} \text{ and } h > 0,$$

where C is a constant depending on f, but not on x and h.

The little Lipschitz class $\mathrm{lip}(\alpha)$ consists of all functions f for which

$$|\Delta^1 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{uniformly in } x \in \mathbb{T}.$$

Definition 1.1.3 (Zygmund classes). $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ consists of all continuous functions f for which

$$|\Delta^2 f(x,h)| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = O(h^\alpha) \quad \text{for all } x \in \mathbb{T} \text{ and } h > 0.$$

The little Zygmund class $\mathrm{zyg}(\alpha)$ consists of all continuous functions f for which

$$|\Delta^2 f(x,h)| = o(h^\alpha) \quad \text{uniformly in } x \in \mathbb{T}.$$

New results

Theorem 2.1.1. *If for some $r \geq 1$,*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = o(n^{-r}),$$

then the r times formally differentiated Fourier series in (1.2) *converges at a particular point $x \in \mathbb{T}$ if and only if f is r times differentiable at x, and in this case*

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (ik)^r c_k e^{ikx}. \tag{2.1}$$

Furthermore, the rth derivative $f^{(r)}$ is continuous on $\mathbb{T}$ if and only if the series in (2.1) *converges uniformly on $\mathbb{T}$.*

Theorem 2.1.2. *If for some $r \geq 1$ and $0 < \alpha \leq 1$,*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = O(n^{-r-\alpha}), \tag{2.2}$$

then f is r times differentiable on $\mathbb{T}$, $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ in case $0 < \alpha < 1$, and $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$ in case $\alpha = 1$.

Theorem 2.1.3. *If for some $r \geq 1$ and $0 < \alpha \leq 1$,*

$$\sum_{|k|\geq n} |c_k| = o(n^{-r-\alpha}), \tag{2.3}$$

then f is r times differentiable on $\mathbb{T}$, $f^{(r)} \in \mathrm{lip}(\alpha)$ in case $0 < \alpha < 1$, and $f^{(r)} \in \mathrm{zyg}(1)$ in case $\alpha = 1$.

Theorem 2.1.4. *Suppose that either $kc_k \geq 0$ for all k or $c_k \geq 0$ for all k, and that f is r times differentiable on $\mathbb{T}$. If $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ for some $0 < \alpha < 1$, then* (2.2) *holds with this α; while if $f^{(r)} \in \mathrm{Zyg}(1)$, then* (2.2) *holds with $\alpha = 1$.*

Theorem 2.1.5. *Both statements in Theorem* 2.1.4 *remain valid if* $\mathrm{Lip}(\alpha)$ *and* $\mathrm{Zyg}(1)$ *are replaced by* $\mathrm{lip}(\alpha)$ *and* $\mathrm{zyg}(1)$*, respectively, and* (2.2) *is replaced by* (2.3).

Corollary 2.1.1. (i) *If for some $r \geq 1$,*

$$\sum_{|k|\leq n} |k^{r+1} c_k| = O(1), \tag{2.4}$$

then f is r times differentiable on $\mathbb{T}$ and $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$.

(ii) *Suppose that $k^{r+1} c_k \geq 0$ for all k and that f is r times differentiable on $\mathbb{T}$, where $r \geq 1$. If $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}(1)$, then* (2.4) *holds.*

Double Fourier series and function classes

In this section we summarize the results of Chapter 4. We generalized the single valued theorems of Ferenc Móricz [11] and [12] as well as the theorems of two variables of Ferenc Móricz [13]. Throughout this chapter, by $\{c_{kl} : (k,l) \in \mathbb{Z}\}$ we denote a sequence of complex numbers with the property

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |c_{kl}| < \infty. \tag{3.1}$$

The double trigonometric series

$$f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{kl} e^{i(kx+ly)} \tag{3.2}$$

converges uniformly. Consequently, the series in (3.2) is the Fourier series of its sum f, which is continuous on the two-dimensional torus.

We recall that a positive valued, measurable function L defined on $[a,\infty)$ ($a > 0$ is arbitrary), is said to be *slowly varying* (in Karatama's sense) if for every $\lambda > 0$,

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1, \quad \text{as} \quad x \to \infty.$$

The neighborhood $[a,\infty)$ is of little importance. One may assume that L is defined on $(0,\infty)$, for instance, by setting $L(x) := L(a)$ on $(0,a)$.

Let L a two-variable function, which possesses the properties

$$L(x,y) = L_1(x)L_2(y), \quad \text{where} \quad L_k(t) \to \infty \quad \text{and} \quad \frac{L_k(2t)}{L_k(t)} \to 1 \quad \text{as} \quad t \to \infty. \tag{4.1}$$

We will consider the following special sequences of real numbers:

$$c_{kl} \geq 0 \quad \text{for all} \quad k,l \geq 1 \tag{3.6}$$

and

$$c_{kl} = -c_{-k,l} = -c_{k,-l} = c_{-k,-l} \quad |k|,|l| \geq 1. \tag{3.7}$$

Classes of functions

Definition 3.1.1 (Multiplicative Lipschitz classes). Let $\alpha, \beta > 0$ be arbitrary and set

$$\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2) = f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1,y) - f(x,y+h_2) + f(x,y). \tag{3.3}$$

The multiplicative class $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ consists of all continuous functions $f(x,y)$ for which

$$|\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta)$$

for all $x,y \in \mathbb{T}; h_1,h_2 > 0$.

The multiplicative class $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ consists of all continuous functions $f(x,y)$ for which

$$\lim_{h_1,h_2\to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{1,1} f(x,y;h_1,h_2)| = 0 \quad \text{uniformly in} \quad (x,y) \in \mathbb{T}^2.$$

Definition 3.1.2 (Multiplicative Zygmund classes). Let $\alpha, \beta > 0$ be arbitrary and set

$$\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2)$$
$$= f(x+h_1, y+h_2) + f(x+h_1, y-h_2) + f(x-h_1, y+h_2) + f(x-h_1, y-h_2) -$$
$$-2f(x, y+h_2) - 2f(x+h_1, y) - 2f(x, y-h_2) - 2f(x-h_1, y) + 4f(x, y).$$

The multiplicative class $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ consists of all continuous functions f for which

$$|\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2)| = O(h_1^\alpha h_2^\beta)$$

for all $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$.

The multiplicative class $\mathrm{zyg}(\alpha, \beta)$ consists of all continuous functions $f(x, y)$ for which

$$\lim_{h_1, h_2 \to 0} h_1^{-\alpha} h_2^{-\beta} |\Delta^{2,2} f(x, y; h_1, h_2)| = 0 \quad \text{uniformly in} \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2.$$

Definition 4.1.1 (Generalized Lipschitz classes). Given $\alpha, \beta > 0$ and a function $L(x, y)$ satisfying condition (4.1), a continuous function f is said to belong to the generalized multiplicative Lipschitz class $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ if

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O\Big(h_1^\alpha h_2^\beta L\Big(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}\Big)\Big)$$

for all $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$.

Given $\alpha, \beta \geq 0$ and function L satisfying condition (4.1), the function f is said to belong to $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ if

$$|\Delta^{1,1} f(x, y; h_1, h_2)| = O\Big(\frac{h_1^\alpha h_2^\beta}{L(1/h_1, 1/h_2)}\Big)$$

for all $x, y \in \mathbb{T}; h_1, h_2 > 0$.

Given $\alpha, \beta \geq 0$, we denote by $W_{\alpha\beta}$ the class of all functions $w_{\alpha\beta} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ which are nondecreasing in each variable and possess the following properties:

$$w_{\alpha\beta}(0, \delta_2) = w_{\alpha\beta}(\delta_1, 0) = 0 \quad \text{for all} \quad \delta_1, \delta_2 \geq 0; \tag{4.2}$$

$$\sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(2\delta_1, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\alpha < \infty, \quad \sup_{0<\delta_1,\delta_2\leq 1} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2\delta_2)}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2)} =: c_\beta < \infty, \tag{4.3}$$

$$\liminf_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} > 2^{-\alpha'}, \ \limsup_{m\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(2^{-m-1}, \delta_2)}{w_{\alpha\beta}(2^{-m}, \delta_2)} \leq 2^{-\alpha} \tag{4.4}$$

for all $\alpha' > \alpha$ and $0 < \delta_2 \leq 1$;

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} > 2^{-\beta'}, \ \limsup_{n\to\infty} \frac{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n-1})}{w_{\alpha\beta}(\delta_1, 2^{-n})} \leq 2^{-\beta} \tag{4.5}$$

for all $\beta' > \beta$ and $0 < \delta_1 \leq 1$.

Definition 4.1.2 (Enlarged Lipschitz classes). Let $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$ for some $\alpha, \beta \geq 0$. We define the class $\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ of continuous functions as follows:

$$\mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega(f; \delta_1, \delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2))\},$$

where $\omega(f; \delta_1, \delta_2)$ is modulus of continuity of the function f.

Definition 4.1.3 (Enlarged Zygmund classes).

$$\mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta}) := \{f : \omega_2(f; \delta_1, \delta_2) = O(w_{\alpha\beta}(\delta_1, \delta_2))\},$$

where $\omega_2(f; \delta_1, \delta_2)$ is modulus of smoothness of the function f.

New results

Theorem 4.2.1. *Let $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.*

(i) *If $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ is such that for some $0 < \alpha, \beta \leq 1$ we have*

$$\sum_{|k| \leq m} \sum_{|l| \leq n} |klc_{kl}| = O(mnw_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})), \tag{4.6}$$

then (3.1) *is satisfied and $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$, where f is defined in* (3.2).

(ii) *Conversely, suppose that $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ is such that conditions* (3.1), (3.6) *and* (3.7) *satisfied. If $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$ for some $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, then condition* (4.6) *is satisfied.*

Theorem 4.2.2. *Let $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.*

(i) *If $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ is such that for some $0 < \alpha, \beta \leq 2$ we have*

$$\sum_{|k| \leq m} \sum_{|l| \leq n} k^2 l^2 |c_{kl}| = O(m^2 n^2 w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})), \tag{4.7}$$

then (3.1) *is satisfied and $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$, where f is defined in* (3.2).

(ii) *Conversely, suppose that $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ is such that condition* (3.1) *is satisfied and*

$$c_{kl} \geq 0 \quad \text{for all} \quad |k|, |l| \geq 1. \tag{4.8}$$

If $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ for some $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$, then condition (4.7) *is satisfied.*

Theorem 4.2.3. *Let $w_{\alpha\beta} \in W_{\alpha\beta}$.*

(i) *If $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ is such that for some $0 \leq \alpha, \beta < 1$ we have*

$$\sum_{|k| \geq m} \sum_{|l| \geq n} |c_{kl}| = O(w_{\alpha\beta}(m^{-1}, n^{-1})), \tag{4.9}$$

then $f \in \mathrm{Lip}(w_{\alpha\beta})$, where f is defined in (3.2).

(ii) *Conversely, suppose that $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ is such that conditions* (3.1) *and* (4.8) *are satisfied. If $f \in \mathrm{Zyg}(w_{\alpha\beta})$ for some $0 \leq \alpha, \beta \leq 2$, then condition* (4.9) *is satisfied.*

Theorem 4.3.1. *Assume $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$ with* (3.1), *f is defined in* (3.2) *and L satisfies condition* (4.1).

(i) *If for some* $0 < \alpha, \beta \le 1$,

$$\sum_{|k|\le m} \sum_{|l|\le n} |klc_{kl}| = O(m^{1-\alpha} n^{1-\beta} L(m,n)), \tag{4.10}$$

then $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$.

(ii) *Conversely, let* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{R}$ *be a sequence such that conditions* (3.6) *and* (3.7) *hold. If* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; L)$ *for some* $0 < \alpha, \beta \le 1$, *then* (4.10) *holds.*

Theorem 4.3.2. *Assume* $\{c_{kl}\} \subset \mathbb{C}$, *with* (3.1), f *is defined in* (3.2) *and* L *satisfies condition* (4.1).

(i) *If for some* $0 \le \alpha, \beta < 1$,

$$\sum_{|k|\ge m} \sum_{|l|\ge n} |c_{kl}| = O\Big(\frac{m^{-\alpha} n^{-\beta}}{L(m,n)}\Big), \tag{4.11}$$

then $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$.

(ii) *Conversely, let* $\{c_{kl}\}$ *be a sequence such that conditions* (3.6) *and* (3.7) *hold. If* $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta; 1/L)$ *for some* $0 < \alpha, \beta < 1$, *then* (4.11) *holds.*

Problem. It is an open problem whether the claim in Theorem 4.3.2 (ii) remains valid if $0 < \alpha, \beta < 1$ is replaced by $0 \le \alpha, \beta < 1$.

Double Fourier transforms and function classes

In this section we summarize the results of Chapter 6. We consider complex-valued functions $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ and prove sufficient conditions under which the double Fourier transform $\hat{f}$ belongs to one of the two-dimensinal Lipschitz classes $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ for some $0 \le \alpha, \beta \le 1$, or to one of the Zygmund classes $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ for some $0 \le \alpha, \beta \le 2$.

Definition. We recall that the *Fourier transform* of f is defined by

$$\hat{f}(u,v) := \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-i(ux+vy)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Theorem 6.2.1. (i) *Suppose* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *is such that* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ *and there exist some* $s_0, t_0 > 0$ *such that*

$$f \in L^1(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \textit{either } |x| > s_0 \textit{ and } |y| < t_0, \textit{ or } |x| < s_0 \textit{ and } |y| > t_0\}). \tag{6.1}$$

If for some $0 < \alpha, \beta \le 1$,

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t} |xyf(x,y)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(s^{1-\alpha} t^{1-\beta}), \quad s, t > 0, \tag{6.2}$$

then $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *and* $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$.

(ii) *Conversely, suppose* $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ *is such that for almost all* $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ *we have*

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y) \ge 0; \tag{6.3}$$

in particular, if $f(x,y)$ *is odd in each variable. If* $\hat{f} \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ *for some* $0 < \alpha, \beta \le 1$, *then* (6.2) *is satisfied.*

Theorem 6.2.2. (i) *Suppose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ is such that $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ and there exist some $s_0, t_0 > 0$ such that condition* (6.1) *is satisfied. If for some $0 < \alpha, \beta \leq 2$,*

$$\int_{|x|<s} \int_{|y|<t} x^2 y^2 |f(x,y)| \mathrm{d}x \mathrm{d}y = O(s^{2-\alpha} t^{2-\beta}), \quad s, t > 0, \tag{6.7}$$

then $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ and $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$.

(ii) *Conversely, suppose $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ is such that $f(x,y) \geq 0$ for almost all $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. If $\hat{f} \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ for some $0 < \alpha, \beta \leq 2$, then condition* (6.7) *holds.*