Késleltetett differenciálegyenletek periodikus pályái és globális dinamikája

Doktori értekezés tézisei

Vas Gabriella

Témavezető:

Dr. Krisztin Tibor

egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája

Bolyai Intézet

Szegedi Tudományegyetem

2011

Szeged

Bevezetés

A disszertáció az

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1)) \tag{1.1}$$

alakú skaláris funkcionál-differenciálegyenletet vizsgálja, ahol $\mu > 0$ paraméter, és f nemlineáris visszacsatolási függvény. Folytonosan differenciálható és nemsima, monoton növő és monoton csökkenő nemlinearitásokat is tekintünk. Ilyen egyenletek mesterséges neuronhálózatok tanulmányozásánál fordulnak elő [17].

A dolgozat célja a globális attraktor minél teljesebb leírása speciális visszacsatolási függvényekre. A globális attraktor, ha létezik, a végtelen dimenziós $C = C([-1,0], \mathbb{R})$ állapottér azon részhalmaza, amely minden korlátos megoldást vonz, és így meghatározza azok aszimptotikus viselkedését. Vizsgálata magában foglalja az egyensúlyi helyzetek tanulmányozását, a periodikus pályák pontos számának és stabilitási tulajdonságainak meghatározását, és ha lehetséges, az ún. összekötő pályák leírását. Az ilyen típusú eredmények jelentőségét a szigorúan monoton nemlinearitásokra igazolt Poincaré−Bendixson-tétel támasztja alá, amely szerint minden korlátos megoldás ω-limeszhalmaza vagy egyetlen periodikus pálya, vagy az egyensúlyi helyzetek és a köztük futó összekötő pályák egy részhalmaza.

A disszertáció szándéka egyrészt megmutatni, hogy folytonosan differenciálható nemlinearitások esetén periodikus pályák létezése igazolható úgy, hogy először lépcsős visszacsatolási függvényeket tekintünk, majd perturbációs eredményeket alkalmazunk. Könnyű kezelni azokat az egyenleteket, amelyekben a visszacsatolási függvény lépcsős, mert ezen egyenletekkel kapcsolatos bizonyos végtelen dimenziós problémákat (például periodikus megoldások konstrukcióját) véges dimenziós problémák megoldására vezethetjük vissza. A lépcsős függvényekre kapott eredmények kiterjesztése sima nemlinearitásokra azonban messzemenően nemtriviális feladat. A kiterjesztés során kulcsfontosságú tulajdonság, hogy a kérdéses periodikus pályák hiperbolikusak. A dolgozat további célja olyan nemlinearitások kezelése, amelyek lépcsős függvények és folytonosan differenciálható függvények „között" helyezkednek el, azaz folytonosak, de nem folytonosan differenciálhatóak.

E kutatás Krisztin, Walther és Wu pozitív visszacsatolást elemző [4, 6, 7, 8] korábbi eredményeire, Walther és Yebdri negatív visszacsatolást vizsgáló [14, 15, 16] munkáira, illetve Győri és Hartung [1] publikációjára épül. Legfontosabb analitikai eszközeink a Mallet-Paret és Sell által bevezetett diszkrét Ljapunov-funkcionál és a Poincaré-leképezések elmélete (különösen Lani-Wayda [9] munkája).

A dolgozat részletesen tárgyalja az alábbi, [5, 12, 13]-ban publikált eredményeket.

Nagy amplitúdójú periodikus megoldások pozitív monoton visszacsatolás esetén

A 3. fejezet az (1.1) egyenletet pozitív visszacsatolás esetén vizsgálja, azaz amikor f folytonos és $xf(x) > 0$ minden nullától különböző valós x-\small . A következőt tesszük fel:

(H1) $\mu > 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f'(\xi) > 0$ minden $\xi \in \mathbb{R}$-re, továbbá a $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto -\mu\xi + f(\xi) \in \mathbb{R}$ függvénynek öt egymást követő

$$\xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 = 0 < \xi_1 < \xi_2$$

zérushelye van, és $f'(\xi_j) < \mu < f'(\xi_k)$ minden $j \in \{-2, 0, 2\}$ és $k \in \{-1, 1\}$ esetén.

A (H1) feltétel mellett a $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$ fázistér $\hat{\xi}_j : [-1, 0] \ni s \mapsto \xi_j$ eleme egyensúlyi helyzet minden $j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$-re. Mivel f monoton nő, a fázistér

$$C_{i,j} = \{\varphi \in C : \xi_i \leq \varphi(s) \leq \xi_j \text{ minden } s \in [-1, 0] \text{-ra}\}, \quad i \in \{-2, 0\}, j \in \{0, 2\},$$

részhalmazai pozitívan invariánsak a

$$\Phi : \mathbb{R}^+ \times C \ni (t, \varphi) \mapsto x_t^{\varphi} \in C$$

szemidinamikai rendszerben. A $\Phi|_{[0,\infty)\times C_{-2,0}}$ és a $\Phi|_{[0,\infty)\times C_{0,2}}$ megszorítások $\mathcal{A}_{-2,0}$ és $\mathcal{A}_{0,2}$ globális attraktorainak szerkezetét (legalább is részben) jól ismerjük [3, 4, 6, 7, 8]. Bizonyos nemlinearitásokra $\mathcal{A}_{-2,0}$ és $\mathcal{A}_{0,2}$ szerkezete orsószerű [3, 6, 7, 8].

Legyen $\mathcal{A}$ a $\Phi|_{[0,\infty)\times C_{-2,2}}$ megszorítás globális attraktora. A kérdés, hogy $\mathcal{A}$ előáll-e

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2}$$

alakban, már [7]-ben felmerült. A disszertáció első fő eredménye azt állítja, hogy speciális nemlineáris függvényekre $\mathcal{A}$ szerkezete összetetebb, és az $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$ halmazban periodikus pályák vannak.

Ezek a periodikus megoldások lassan oszcillálnak és nagy amplitúdóval rendelkeznek a következő értelemben. Tegyük fel, hogy $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f'(\xi) \geq 0$ minden $\xi \in \mathbb{R}$ esetén, és a $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto -\mu\xi + f(\xi) \in \mathbb{R}$ függvénynek öt egymást követő $\xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 = 0 < \xi_1 < \xi_2$ zérushelye van. Ekkor az (1.1) egyenlet $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus megoldásának nagy az amplitúdója, ha $x(\mathbb{R}) \supset (\xi_{-1}, \xi_1)$. Egy $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ megoldás lassan oszcillál, ha minden $t \in \mathbb{R}$-re $x|_{[t-1,t]}$-nek egy vagy két előjelváltása van. A nagy amplitúdóval rendelkező, lassan oszcilláló periodikus megoldásokat ezentúl – angol elnevezésükre utalva – LSOP megoldásoknak hívjuk. Egy $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LSOP megoldás normalizált, ha $x(-1) = 0$, és valamely $\eta > 0$-val $x(s) > 0$ minden $s \in (-1, -1 + \eta)$ esetén.

3.1.1. Tétel. *Létezik olyan, a (H1) hipotézist kielégítő μ és f, amelyre az* (1.1) *egyenletnek pontosan két, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ normalizált LSOP megoldása van. Értékkészletükre a $p(\mathbb{R}) \subsetneq q(\mathbb{R})$ összefüggés teljesül. Az*

$$\mathcal{O}_p = \{p_t : t \in \mathbb{R}\} \text{ és } \mathcal{O}_q = \{q_t : t \in \mathbb{R}\}$$

periodikus pályák hiperbolikusak és instabilak, rendre kettő és egy Floquet-együtthatóval az egységkörön kívül.

Ilyen periodikus pályák létezésének igazolása azért érdekes feladat, mert nem lokális bifurkáció révén jönnek létre.

A 3.1.1. tételben f „közel" van az

$$f^{K,0}(x) = \begin{cases} -K, & \text{ha } x < -1, \\ 0, & \text{ha } |x| \le 1, \\ K, & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

lépcsős függvényhez, ezért az LSOP megoldás fogalmát kiterjesztjük az $f^{K,0}$ visszacsatolási függvényre is. Tegyük fel, hogy f páratlan, kielégíti (H1)-et, és $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LSOP megoldás $\omega > 0$ minimális periódussal. Ekkor [11]-ból következnek az alábbi állítások:

(i) Az ω minimális periódus az $(1, 2)$ intervallumba esik.
(ii) Az x megoldás speciális szimmetriájú: $x(t + \omega/2) = -x(t)$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén.
(iii) Az x megoldás monoton típusú: ha $t_0 < t_1 < t_0 + \omega$-t úgy választjuk, hogy

$$x(t_0) = \min_{t \in \mathbb{R}} x(t) \quad \text{és} \quad x(t_1) = \max_{t \in \mathbb{R}} x(t),$$

akkor x nemcsökkenő $[t_0, t_1]$-en és nemnövekvő $[t_1, t_0 + \omega]$-n.

Ezek a tulajdonságok motiválják a következő definíciót: $K > 0$ és $f = f^{K,0}$ esetén az (1.1) egyenlet $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus megoldása LSOP megoldás, ha (i), (ii) és (iii) teljesül x-re.

A 3. fejezet az alábbi módon igazolja a 3.1.1. tételt.

Rögzítjük $\mu = 1$-et. A következő érvelés könnyen módosítható bármely $\mu > 0$-ra. Kezdő lépésként a 3.2. szakaszban az $f^{K,0}$ visszacsatolási függvényt tekintjük $K > 0$-ra, illetve a $f^{K,\varepsilon}$ függvényt $K > 0$ és $\varepsilon \in (0, 1)$ esetén, ahol $f^{K,\varepsilon} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $K > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, az $f^{K,0}$

egy közelítése úgy, hogy $\left(f^{K,\varepsilon}\right)'(\xi) \geq 0$ minden $\xi \in \mathbb{R}$-re és

$$f^{K,\varepsilon}(x) = \begin{cases} -K, & \text{ha } x < -1-\varepsilon, \\ 0, & \text{ha } |x| \leq 1, \\ K, & \text{ha } x > 1+\varepsilon. \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto -\mu\xi + f^{K,\varepsilon}(\xi) \in \mathbb{R}$-nek pontosan öt zérushelye van.

Legyen $K > 3$. Definiálunk egy $U^1 \subset (0,1)^3 \times [0,1)$ nyitott halmazt és egy $\Sigma : U^1 \to C$ folytonos leképezést úgy, hogy minden $\varepsilon \in (0,1)$-re az $U^1_\varepsilon \ni a \mapsto \Sigma(a,\varepsilon) \in C$ leképezés sima és injektív, ahol U^1_ε az $\left\{a \in (0,1)^3 : (a,\varepsilon) \in U^1\right\}$ halmazt jelöli (3.2.2. propozíció). Következésképpen $\Sigma(U^1_\varepsilon \times \{\varepsilon\})$ a C tér 3 dimenziós részsokasága bármely $\varepsilon \in (0,1)$ esetén.

A 3.2.1. alszakasz célja olyan LSOP megoldás konstruálása, melynek kezdeti szegmense $\Sigma(U^1)$-be esik. U^1-nek van olyan U^3 részhalmaza, hogy ha $f = f^{K,\varepsilon}$ az $\varepsilon \in [0,1)$ paraméterrel, akkor minden $(a,\varepsilon) \in U^3$-ra az (1.1) egyenlet $x^{\Sigma(a,\varepsilon)} : [-1,\infty) \to \mathbb{R}$ megoldása visszatér $\Sigma(U^1)$-be. Pontosabban fogalmazva, ha $x^{\Sigma(a,\varepsilon)}$ legkisebb pozitív zérushelye τ, akkor $x^{\Sigma(a,\varepsilon)}_{\tau+1} \in \Sigma(U^1)$ (3.2.5. propozíció). Ez egy $F : U^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható leképezést indukál: $(a,\varepsilon) \in U^3$-ra $F(a,\varepsilon) = b$ pontosan akkor, ha $x^{\Sigma(a,\varepsilon)}_{\tau+1} = \Sigma(b,\varepsilon)$. Ha valamely $(a,\varepsilon) \in U^3$-ra $F(a,\varepsilon) = a$, akkor az (1.1) egyenlet $x^{\Sigma(a,\varepsilon)}$ megoldása LSOP megoldás $\mu = 1$ és $f = f^{K,\varepsilon}$ esetén. Tehát az LSOP megoldás keresésének problémáját visszavezetjük egy 3 dimenziós, ε paramétertől függő fixpontegyenletre. Legyen $K^* \approx 6.8653$ a $(K-1)(K+1)^3 = e\left(K^2 - 2K - 1\right)^2$ egyenlet egyetlen megoldása $(3,\infty)$-en. Igaz az alábbi állítás.

3.2.8. Propozíció. *$K \in (3, K^*]$ esetén az $F(a,0) = a$ egyenletnek nincs megoldása az $U^3_0 = \left\{a \in \mathbb{R}^3 : (a,0) \in U^3\right\}$ halmazban. $K > K^*$ esetén létezik pontosan egy $a^* \in U^3_0$, amelyre $F(a^*,0) = a^*$.*

Az a^* fixpont hiperbolikus, ezt $K = 7$-re megbízható numerikus módszerrel ellenőrizzük. Így az implicitfüggvény-tétel adja a következő eredményt.

3.2.11. Propozíció. *Legyen $K = 7$. Megadható $\varepsilon_0 > 0$ úgy, hogy bármely $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0)$ esetén az $F(a,\varepsilon) = a$ egyenletnek van $a^*(\varepsilon)$ megoldása $U^3_\varepsilon = \left\{a \in \mathbb{R}^3 : (a,\varepsilon) \in U^3\right\}$-ban, és $x^{\Sigma(a^*(\varepsilon),\varepsilon)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ LSOP megoldása az (1.1)-nek $f = f^{7,\varepsilon}$ nemlinearitás esetén.*

A fenti konstrukcióhoz hasonló módon a 3.2.2. alszakasz megad egy második LSOP megoldást a $\mu = 1$, $f = f^{7,\varepsilon}$, $\varepsilon \in [0,\widetilde{\varepsilon}_0)$ esetre, ahol $\widetilde{\varepsilon}_0 > 0$ kicsi. Az LSOP megoldás kezdeti függvényét

$\widetilde{\Sigma}(\widetilde{a}(\varepsilon),\varepsilon)$-nal jelöljük, és egy $\widetilde{F}(\cdot,\varepsilon)$ véges dimenziós leképezés $\widetilde{a}(\varepsilon)$ hiperbolikus fixpontjaként nyerjük.

A 3.3. szakaszban a véges dimenziós leképezések fixpontjainak hiperbolicitásából következik:

3.3.4. Propozíció. *Az $x^{\Sigma(a^*(\varepsilon),\varepsilon)}$ illetve $x^{\widetilde{\Sigma}(\widetilde{a}(\varepsilon),\varepsilon)}$ LSOP megoldások által definiált pályák hiperbolikusak, kettő illetve egy Floquet-együtthatóval az egységkörön kívül.*

A propozíció bizonyításának kulcslépése az, hogy egy alkalmasan választott Poincaré-leképezés a $\Sigma(a^*(\varepsilon),\varepsilon)$ fixpontjának egy kis környezetét a C tér 3 dimenziós $\Sigma(U^3_\varepsilon\times\{\varepsilon\})$ részsokaságába viszi (3.3.1. propozíció), hasonlóan $\widetilde{\Sigma}(\widetilde{a}(\varepsilon),\varepsilon)$ egy kis környezetére.

Lani-Wayda [9]-ben publikált eredménye és a 3.3.4. propozíció garantálja az LSOP megoldások létezését olyan f függvéynekre, amelyek kielégítik (H1)-et, és C^1-normában közel vannak $f^{7,\varepsilon}$-hoz.

3.3.5. Propozíció. *Legyen $\mu=1$ és $K=7$. Ekkor minden $\varepsilon\in(0,\min(\varepsilon_0,\widetilde{\varepsilon}_0))$-hoz megadható $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)>0$ úgy, hogy ha $f\in C^1_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kielégíti (H1)-et, és $\|f-f^{7,\varepsilon}\|_{C^1_b}<\delta_0$, akkor az (1.1) egyenletnek két $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és $q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ normalizált LSOP megoldása van, és $p(\mathbb{R})\subsetneq q(\mathbb{R})$. A hozzájuk tartozó*

$$\mathcal{O}_p=\{p_t:\,t\in\mathbb{R}\}\ \text{ és }\ \mathcal{O}_q=\{q_t:\,t\in\mathbb{R}\}$$

periodikus pályák hiperbolikusak, rendre kettő illetve egy Floquet-együtthatóval az egységkörön kívül.

A 3.4. szakaszbeli előkészületek után a 3.5. szakasz az LSOP megoldások pontos számát vizsgálja először $f^{K,0}$ lépcsős függvényre $K>0$ esetén, aztán $f^{7,\varepsilon}$-ra kis $\varepsilon>0$ esetén, végül olyan f függvényekre, amelyek közel vannak $f^{7,\varepsilon}$-hoz. Az alábbi, egymásra épülő állításokat igazoljuk.

3.5.5. Tétel. *Ha $\mu=1$ és $f=f^{K,0}$, akkor (1.1)-nek nincs LSOP megoldása $K\in(0,K^*)$ esetén, és pontosan két normalizált LSOP megoldása van $K>K^*$ esetén.*

3.5.6. Propozíció. *Legyen $\mu=1$. Megadható olyan $\varepsilon_*\in(0,\min(\varepsilon_0,\widetilde{\varepsilon}_0))$ küszöbszám, hogy $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$-ra és $f=f^{7,\varepsilon}$ esetén az (1.1) egyenletnek nincs normalizált LSOP megoldása az $x^{\Sigma(a^*(\varepsilon),\varepsilon)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ és az $x^{\widetilde{\Sigma}(\widetilde{a}(\varepsilon),\varepsilon)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ megoldásokon kívül.*

3.5.7. Propozíció. *Legyen $\mu=1$. Minden $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*)$-hoz megadható $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)\in(0,\delta_0(\varepsilon))$ úgy, hogy ha $f\in C^1_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kielégíti (H1)-et és $\|f-f^{7,\varepsilon}\|_{C^1_b}<\delta_1$, akkor (1.1)-nek legfeljebb két normalizált LSOP megoldása van.*

A fenti eredmények összegzéseként adódik a 3.1.1. tétel.

A globális attraktor

A globális attraktor teljes leírása csak bizonyos végtelen dimenziós rendszerek, például parabolikus egyenletek esetén ismert. A 4. fejezet a megoldások szerkezetét vizsgálja és a globális attraktort jellemzi a 3.1.1. tétel által adott visszacsatolási függvényre.

Egy $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus megoldás lassan oszcillál ξ_*, $* \in \{-1, 1\}$, körül, ha minden $t \in \mathbb{R}$-re $x - \xi_*$-nak legfeljebb két előjelváltása van $[t-1, t]$-ben. A 3.1.1. tételben szereplő f és μ olyan, hogy az (1.1) egyenletnek létezik ξ_{-1} illetve ξ_1 körül lassan oszcilláló periodikus megoldása, melyek értékkészlete rendre $(\xi_{-2}, 0)$ illetve $(0, \xi_2)$ részhalmaza [7]. Nincs információnk ezen periodikus pályák unicitásáról, de igaz a következő propozíció.

4.2.1. Propozíció. *A 3.1.1. tétel által adott f függvényre az* (1.1) *egyenletnek van olyan ξ_1 körül lassan oszcilláló $x^1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és ξ_{-1} körül lassan oszcilláló $x^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus megoldása, amelyek értékkészletei rendre $(0, \xi_2)$ illetve $(\xi_{-2}, 0)$ részhalmazai, és amelyek maximálisak abban az értelemben, hogy $x^1(\mathbb{R}) \supset x(\mathbb{R})$ illetve $x^{-1}(\mathbb{R}) \supset x(\mathbb{R})$ minden olyan ξ_1 illetve ξ_{-1} körül lassan oszcilláló periodikus megoldásra, melynek értékkészlete $(0, \xi_2)$ illetve $(\xi_{-2}, 0)$ részhalmaza.*

Legyen $\mathcal{O}_1 = \{x_t^1 : t \in \mathbb{R}\}$ és $\mathcal{O}_{-1} = \left\{x_t^{-1} : t \in \mathbb{R}\right\}$. Jelölje $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$ és $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$ rendre az $\mathcal{O}_p$ és $\mathcal{O}_q$ LSOP pályák instabil halmazát. A következő tétel a dolgozat második fő állítása.

4.1.1. Tétel. *A μ konstans és az f függvény választható úgy, hogy kielégítsék a (H1) hipotézist, a 3.1.1. tétel állítása igaz legyen, és az $\mathcal{A}$ globális attraktorra az*

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2} \cup \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p) \cup \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$$

egyenlőség teljesüljön. A $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$, $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$ halmazokon a dinamika a következő.
Minden $\varphi \in \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q) \setminus \mathcal{O}_q$-ra az $\omega(\varphi)$ határhalmaz vagy $\left\{\hat{\xi}_{-2}\right\}$, vagy $\left\{\hat{\xi}_2\right\}$, és léteznek heteroklinikus kapcsolatok $\mathcal{O}_q$-ból $\left\{\hat{\xi}_{-2}\right\}$-hoz illetve $\left\{\hat{\xi}_2\right\}$-hoz.
Minden $\varphi \in \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p) \setminus \mathcal{O}_p$-re $\omega(\varphi)$ a $\left\{\hat{\xi}_{-2}\right\}$, $\left\{\hat{0}\right\}$ $\left\{\hat{\xi}_2\right\}$, $\mathcal{O}_q$, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_{-1}$ halmazok valamelyike, és léteznek heteroklinikus kapcsolatok $\mathcal{O}_p$-ből a $\left\{\hat{\xi}_{-2}\right\}$, $\left\{\hat{0}\right\}$ $\left\{\hat{\xi}_2\right\}$, $\mathcal{O}_q$, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_{-1}$ halmazokhoz.

Az világos, hogy $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p) \cup \mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q) \subseteq \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$. A fordított irányú tartalmazás részben a 4.3.3. propozíció folyománya, mely szerint minden $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$-hoz megadható $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ úgy, hogy ha $\mu = 1$, $f \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kielégíti (H1)-et és $\|f - f^{7,\varepsilon}\|_{C_b^1} < \delta_2$, akkor az (1.1) egyenletnek nincs gyorsan oszcilláló periodikus megoldása. Egy megoldást gyorsan oszcillálónak hívunk, ha legalább három előjelváltása van minden 1 hosszú intervallumon.

$\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_p)$ pozitív irányú kiterjesztése $\mathcal{W}^u(p_0)$-nak, amely egy alkalmasan választott Poincaré-leképezés lokális instabil sokasága a p_0 fixpontban. Hasonló állítás igaz $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}_q)$-ra. Az

$\mathcal{O}_p$ periodikus pályától induló heteroklinikus pályák létezése azon múlik, hogy $\mathcal{W}^u(p_0)$ 2 dimenziós, és az 1 dimenziós $\mathcal{W}_1^u(p_0)$ gyors instabil részsokaság két részre bontja. Az eredmény igazolásához $\xi_{-1}, 0, \xi_1$ körül vett diszkrét Ljapunov-függvényeket, az invariáns sokaságok elméletét, a Poincaré–Bendixson-tételt, a szemidinamikai rendszer monotonitásást és elemi topológiai meggondolásokat használunk.

Lassan oszcilláló periodikus megoldások negatív visszacsatolás esetén

A 3.1.1. tétel alapján felvetődik a kérdés, hogy a visszacsatolási függvény megfelelő választásával elérhető-e az, hogy az (1.1) egyenletnek tetszőleges számú lassan oszcilláló periodikus megoldása legyen. Az 5. fejezetben megoldjuk a problémát a negatív visszacsatolás esetére, azaz arra az esetre, amikor f folytonos és $xf(x) < 0$ minden nullától különböző valós x-re.

Negatív visszacsatolás esetén $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lassan oszcillál, ha x előjelváltásainak távolsága nagyobb 1-nél. A lassan oszcilláló periodikus megoldásokra SOP megoldásként utalunk. Walther megadta Lipschitz-folytonos függvények egy olyan osztályát, amelyre (1.1)-nek van SOP megoldása. A disszertáció harmadik fő tétele ezt az eredményt javítja.

5.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\mu > 0$. Megadható olyan lokálisan Lipschitz-folytonos páratlan f nemlinearitás, amelyre $xf(x) > 0$ bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén, és amelyre az*

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) - f(x(t-1)) \tag{5.1}$$

egyenletnek végtelen sok SOP megoldása van. Az SOP megoldások $(p^n)_{n=1}^{\infty}$ sorozatára $p^n(\mathbb{R}) \subsetneq p^{n+1}(\mathbb{R})$ teljesül minden $n \geq 0$ esetén. Ha f folytonosan differenciálható, akkor a periodikus pályák hiperbolikusak és stabilak.

Az 5.1.1. tételt az alábbi módon igazoljuk.

Legyen $\mu > 0$ és legyen $K > 0$ nagy. Az 5.2. szakasz $u^R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus megoldást ad a speciális

$$f^R(x) = \begin{cases} -KR, & \text{ha } x < -R, \\ 0, & \text{ha } |x| \leq R, \\ KR, & \text{ha } x > R \end{cases} \tag{5.2}$$

lépcsős függvényre minden $R > 0$ esetén.

Az 5.3. szakasz ezután bevezeti az N függvényosztályt. Rögzítsünk egy $M > K$ konstanst. Legyen $r > 1$, $\varepsilon \in (0, r-1)$ és $\eta \in (0, M-K)$ esetén $N = N(r, \varepsilon, \eta)$ azon folytonos páratlan

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények halmaza, amelyekre

$$|f(x)| < \eta, \text{ ha } x \in [0, 1],$$

$$\left|\frac{f(x)}{r^n}\right| < M \text{ minden } x \in (r^n, r^n(1+\varepsilon)) \text{ és } n \geq 0 \text{ esetén}$$

és

$$\left|\frac{f(x)}{r^n} - K\right| < \eta \text{ bármely } x \in \left[r^n(1+\varepsilon), r^{n+1}\right] \text{ és } n \geq 0 \text{ esetén.}$$

N elemeinek $[-r^n, r^n]$-re vett megszorításait az (5.2) által definiált $f^{r^{n-1}}$ függvény perturbáltjainak tekintjük minden $n \geq 0$ esetén.

Olyan SOP megoldásokat keresünk az $f \in N$ visszacsatolási függvényre, amelyek kezdeti függvényei a nemüres, konvex, zárt $A_n = A_n(r, \varepsilon)$ halmazokba esnek, ahol

$$A_n = \left\{\varphi \in C : \; r^n(1+\varepsilon) \leq \varphi(s) \leq r^{n+1} \text{ minden } s \in [-1, 0)\text{-re, és } \varphi(0) = r^n(1+\varepsilon)\right\}$$

minden $n \geq 0$-ra. Ha $f \in N(r, \varepsilon, \eta)$, akkor az 5.3.1. propozíció szerint az (5.1) egyenlet $A_n(r, \varepsilon)$-ből induló megoldásai konvergálnak u^{r^n}-hez a $[0, 2]$ intervallumon abban az értelemben, hogy

$$\sup_{f \in N(r,\varepsilon,\eta),\, n \geq 0,\, \varphi \in A_n(r,\varepsilon),\, t \in [0,2]} \frac{\left|x^{\varphi}(t) - u^{r^n}(t)\right|}{r^n} \to 0,$$

ha $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0+$ és $\eta \to 0+$. Ebből a tulajdonságból kiindulva igazolható, hogy ha ε és η elég kicsi, illetve r elég nagy, akkor bármely $\varphi \in A_n(r, \varepsilon)$-hoz megadható $q = q(\varphi, f) \in (1, 2)$, amelyre $x_q^{\varphi} \in -A_n(r, \varepsilon)$ (5.3.2. propozíció). Az 5.4. szakasz Walthert [14]-ben követve definiálja az

$$R_f^n : A_n(r, \varepsilon) \ni \varphi \mapsto -\Phi(q(\varphi, f), \varphi) \in A_n(r, \varepsilon)$$

visszatérési leképezést minden $f \in N(r, \varepsilon, \eta)$ és $n \geq 0$ esetén. Ha az R_f^n, $n \geq 0$, leképezésnek van fixpontja, akkor a fixpont az (5.1) egyenlet egy $2q$ minimális periódusú p^n SOP megoldásának a kezdeti szegmense.

Így az 5.1.1. tétel igazolásához elegendő megmutatni, hogy megfelelő $f \in N$-re R_f^n szigorú kontrakció minden $n \geq 0$ esetén. Meghatározunk egy (f-től függő) Lipschitz-konstanst R_f^n-re bármely $n \geq 0$ esetén. Ezután rekurzív módon definiálunk egy f visszacsatolási függvényt a $[-r^n, r^n]$, $n \geq 1$, intervallumokon úgy, hogy $f \in N$ és R_f^n szigorú kontrakció legyen minden $n \geq 0$-ra. A periodikus pályák stabilitása és hiperbolicitása [14] 4. szakaszából következik.

Dinamika a Hopfield-féle aktiválási függvény esetén

A 6. fejezet a szakaszonként lineáris

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{1}{2}\left(|x+1| - |x-1|\right) = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ x, & -1 \le x \le 1, \\ -1, & x < -1 \end{cases} \tag{6.1}$$

Hopfield-féle aktiválási függvényt és az

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + af(x(t)) + bf(x(t-1)) + I \tag{6.2}$$

egyenletet vizsgálja a

$$a, b, \mu, I \in \mathbb{R},\ \mu > 0 \text{ és } b \neq 0 \tag{6.3}$$

paraméterekkel.

Alkalmazások motiválják (1.1) ebben a kicsit általánosabb formában való vizsgálatát [2].

Győri és Hartung bizonyos paraméterválasztások mellett jellemezték a dinamikát [1]-ben. Megfogalmazták azt a sejtést, miszerint $b > 0$-ra minden megoldás egyensúlyi helyzethez konvergál, ha $t \to \infty$. A 6. fejezet a sejtés igazságtartalmát vizsgálja azokban az esetekben, amelyeket az ő eredményeik nem fednek le, azaz ha

$$b > 0 \text{ és } 0 < \mu = a + b - |I|\,, \tag{6.4}$$

vagy ha

$$b > 0 \text{ és } 0 < \mu < a + b - |I|\,. \tag{6.5}$$

Az analízis nehézsége abban rejlik, hogy a Hopfield-féle aktiválási függvény sem szigorúan monoton növő, sem folytonosan differenciálható, így a megoldásoperátor sem injektív, sem mindenhol differenciálható. Következésképpen számos, szigorúan monoton és sima nemlinearitásokra kifejlesztett technikát nem alkalmazhatunk. Például nem tudjuk, hogy egy Poincaré–Bendixson típusú tétel igaz-e (6.2)-ra.

A (6.4) speciális esetben a sejtés könnyen igazolható.

6.3.1. Tétel. *Tekintsük a (6.1)–(6.3) problémát. Ha (6.4) teljesül, akkor az (6.2) egyenlet minden megoldása egyensúlyi helyzethez tart, ha $t \to \infty$.*

A fejezet nagyobb része a (6.5) feltétellel foglalkozik. Ebben az esetben (6.2)-nek három $\hat{\xi}_+, \hat{\xi}_-, \hat{\xi}_0$ egyensúlyi helyzete van, $\hat{\xi}_+$ és $\hat{\xi}_-$ stabil, $\hat{\xi}_0$ instabil.

Az

$$S = \left\{\varphi \in C : \, x^{\varphi} - \hat{\xi}_0 \text{ zérushelyeinek halmaza felülről nem korlátos}\right\}$$

halmazt szeparatrixnak hívjuk. S 1-kodimenziós Lipschitz-részsokasága C-nek (6.5.2. propozíció), és kulcsszerepet játszik a megoldások hosszú távú viselkedésének megértésében.

A $\hat{\xi}_0$ körül vett linearizált egyenlet által indukált megoldásoperátorok erősen folytonos félcsoportot alkotnak. Jól ismert, hogy a félcsoport generátorának spektruma sajátértékekből áll. Egy valós λ_0 sajátérték van, a többi komplex konjugált párok $\left(\lambda_k, \overline{\lambda_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ sorozata.

Ha $\mu \neq a$, akkor legyen $L(a,\mu) = (\mu - a)/\cos\theta$, ahol $\theta \in (\pi, 2\pi)$ a $\theta = (a-\mu)\tan\theta$ egyenlet megoldása, egyébként legyen $L(a,\mu) = 3\pi/2$. A $b > L(a,\mu)$ feltételre összpontosítunk, ami a $0 < \mathrm{Re}\lambda_1 < \lambda_0$ egyenlőtlenséggel ekvivalens.

Könnyű látni, hogy a $b = L(a,\mu)$ eset ellenpéldát szolgáltat a sejtésre, mivel ekkor $\mathrm{Re}\lambda_1 = 0$, és kontinuum számú periodikus pálya jelenik meg.

6.3.2. Tétel. *Tekintsük a (6.1)–(6.3) problémát a (6.5) feltétellel.*
(i) A megoldások többsége konvergens, azaz $\varphi \in C \setminus S$ esetén $x_t^{\varphi} \to \hat{\xi}_+$ vagy $x_t^{\varphi} \to \hat{\xi}_-$, amint $t \to \infty$.
(ii) A $b > L(a,\mu)$ feltétel maga után vonja egy olyan $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodikus megoldás létezését, amelynek ω minimális periódusa $(1,2)$-be esik.

Legyen $b > L(a,\mu)$. A 6.3.2. (ii) állítás bizonyításában jelölje $\mathcal{W}$ a $\hat{\xi}_0$ egyensúlyi helyzet 3 dimenziós lokális gyors instabil sokaságának pozitív irányban való kiterjesztését. Ekkor $\overline{\mathcal{W} \cap S}$, a $\mathcal{W} \cap S$ halmaz lezártja kompakt és invariáns.

6.5.5. Propozíció. *Ha $\varphi \in \overline{\mathcal{W} \cap S} \setminus \left\{\hat{\xi}_0\right\}$, és $x = x^{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olyan megoldás, amelyre $x_t \in \overline{\mathcal{W} \cap S}$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $\varphi - \hat{\xi}_0$-nek legfeljebb két előjelváltása van, és létezik egy $(t_n)_{-\infty}^{\infty}$ sorozat úgy, hogy minden $n \in \mathbb{Z}$-re*

$$t_{n+1} - t_n < 1, \quad t_{n+2} - t_n > 1,$$

$$x(t_n) = \hat{\xi}_0, \quad \dot{x}(t_{2n}) > 0, \quad \dot{x}(t_{2n+1}) < 0,$$

$$x(t) > \hat{\xi}_0, \; \text{ha } t \in (t_{2n}, t_{2n+1}), \quad \text{és} \quad x(t) < \hat{\xi}_0, \; \text{ha } t \in (t_{2n-1}, t_{2n}).$$

A 6.6. fejezet bevezeti a $\pi_2 : C \ni \varphi \mapsto \left(\varphi(0) - \hat{\xi}_0, \varphi(-1) - \hat{\xi}_0\right) \in \mathbb{R}^2$ folytonos leképezést, és a 6.5.5. propozíció segítségével tanulmányozza a $\pi_2\left(\overline{\mathcal{W} \cap S}\right)$ képhalmazt. A 6.3.2. (ii) állítás igazolásához Poincaré-leképezést definiálunk $\pi_2\left(\overline{\mathcal{W} \cap S}\right)$ egy részhalmazán. A Poincaré-leképezés fixpontja garantálja, hogy $\overline{\mathcal{W} \cap S}$-ben van periodikus pálya.

Hivatkozások

[1] Győri, I., Hartung, F., Stability analysis of a single neuron model with delay, *J. Computational and Applied Mathematics* **157** (2003), no. 1, 73–92.

[2] an der Heiden, U., Mackey, M. C., and Walther H.-O., Complex oscillations in a simple deterministic neuronal network, *Lectures in Appl. Math.* **19** (1981), 355–360.

[3] Krisztin, T., Global dynamics of delay differential equations. *Period. Math. Hungar.* **56** (2008), no. 1, 83–95.

[4] Krisztin, T., Unstable sets of periodic orbits and the global attractor for delayed feedback, in: *Topics in functional differential and difference equations,* Fields Institute Communications 29 (2001), 267–296.

[5] Krisztin, T., Vas, G., Large-amplitude periodic solutions for differential equations with delayed monotone positive feedback, beküldve a *Journal of Dynamics and Differential Equations* folyóirathoz.

[6] Krisztin, T., Walther, H.-O., Unique periodic orbits for delayed positive feedback and the global attractor, *J. Dynam. Differential Equations* **13** (2001), no. 1, 1–57.

[7] Krisztin, T., Walther, H.-O., Wu, J., *Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[8] Krisztin, T., Wu J., The global structure of an attracting set, előkészületben.

[9] Lani-Wayda, B., Persistence of Poincaré mappings in functional differential equations (with application to structural stability of complicated behavior), *J. Dynam. Differential Equations* **7** (1995), no. 1, 1–71.

[10] Mallet-Paret, J., Sell, G. R., Systems of differential delay equations: Floquet multipliers and discrete Lyapunov Functions, *J. Differential Equations* **125** (1996), no. 2, 385–440.

[11] Mallet-Paret, J., Sell, G. R., The Poincaré–Bendixson theorem for monotone cyclic feedback systems with delay, *J. Differential Equations* **125** (1996), no. 2, 441–489.

[12] Vas, G., Asymptotic constancy and periodicity for a single neuron model with delay, *Nonlinear Anal.* **71** (2009), no. 5-6, 2268–2277.

[13] Vas, G., Infinite number of stable periodic solutions for an equation with negative feedback, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ.*, **18** (2011), 1–20.

[14] Walther, H.-O., Contracting return maps for some delay differential equations, *in: Topics in functional differential and difference equations,* Fields Institute Communications 29 (2001) , 349–360.

[15] Walther, H.-O., The 2-dimensional attractor of $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$, *Mem. Amer. Math. Soc.* **113** (1995), no. 544.

[16] Walther, H.-O., Yebdri, M., Smoothness of the attractor of almost all solutions of a delay differential equation, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **368** (1997), 1–72.

[17] Wu, J., *Introduction to neural dynamics and signal transmission delay*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2001.