Fuzzy következtetési modellek és a fuzzy igazságértékeken alapuló logika

Doktori értekezés tézisei

Gera Zsolt

Témavezető:
Dr. Dombi József

Szegedi Tudományegyetem
Szeged, 2009

1. Bevezetés

Az értekezés fő eredményei az alábbi három pontban foglalhatóak össze. Először, bemutat egy olyan új, hibrid fuzzy szabálytanuló modellt, amely klasszikus fuzzy következtetési szabályok alkalmazásával állít elő egyszerű fuzzy szabályokat, amelyek amellett, hogy elegendően jól leírják az input adathalmazt, egyszerűségük miatt emberek számára is könnyen értelmezhetőek. Másodszor, bemutat egy új, a fuzzy tagsági függvényeken alapuló fuzzy következtetési eljárást, amely amellett, hogy hatékonyan ötvözi több más eljárás jó tulajdonságait, használata számítástechnikailag is egyszerű. Harmadszor, felülvizsgálja az ún. fuzzy igazságértékeken alapuló következtetési eljárásokat, új eljárásokat mutat a különféle összetett fuzzy igazságértékek számítására és megvizsgálja az ún. type-2 fuzzy implikációkat tartalmazó fuzzy logikák algebrai tulajdonságait.

2. A Squashing függvény

Az ún. szigmoid függvényt az alábbiak szerint definiáljuk

$$\sigma_d^{(\beta)}(x) = \frac{1}{1+e^{-\beta(x-d)}}.$$

Az ún. vágófüggvény (cut function) az alábbi:

$$[x]_{a,\delta} = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x \leq a-\delta/2 \\ \frac{x-(a-\delta/2)}{\delta}, & \text{if} \quad a-\delta/2 < x < a+\delta/2 \\ 1, & \text{if} \quad a+\delta/2 \leq x \end{cases}$$

Ez utóbbi approximációjához két szigmoid függvény különbségét integráltam, ennek eredménye az ún squashing függvény [1, 2]:

$$S_{a,\delta}^{(\beta)}(x) = \frac{1}{2\delta} \ln \left(\frac{\sigma_{a+\delta}^{(-\beta)}(x)}{\sigma_{a-\delta}^{(-\beta)}(x)} \right)^{1/\beta},$$

ahol $a \in \mathbb{R}$ és $\delta \in \mathbb{R}^+$.

2.1. Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\delta, \beta \in \mathbb{R}^+$. Ekkor $\lim_{\beta\to\infty} S_{a,\delta}^{(\beta)}(x) = [x]_{a,b}$ és $S_{a,\delta}^{(\beta)}(x)$ folytonos az x, a, δ és β változókban.*

A squashing függvény tehát a vágófüggvény approximációja, ennek hibáját az alábbiak szerint definiáltam:

$$\varepsilon_\beta = S_{0,\delta}^{(\beta)}(-\delta) = \frac{1}{2\delta} \ln \left(\frac{\sigma_{\delta}^{(-\beta)}(-\delta)}{\sigma_{-\delta}^{(-\beta)}(-\delta)} \right)^{1/\beta},$$

ahol $\beta > 0$. Az approximáció hibájára vonatkozóan az alábbi lemmát bizonyítottam.

2.2. Lemma. *Rögzítsük δ értékét. Ekkor $\varepsilon_\beta < c \cdot \frac{1}{\beta}$, ahol $c = \frac{\ln 2}{2\delta}$ konstans.*

A squashing függvény alábbi deriváltjai folytonosak. A formulákban a szigmoid és a squashing függvények maguk is előfordulnak.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S_{a,\delta}^{(\beta)}(x)}{\partial x} &= \frac{1}{2\delta}\left(\sigma_{a-\delta}^{(\beta)}(x) - \sigma_{a+\delta}^{(\beta)}(x)\right), \\
\frac{\partial S_{a,\delta}^{(\beta)}(x)}{\partial a} &= \frac{1}{2\delta}\left(\sigma_{a+\delta}^{(\beta)}(x) - \sigma_{a-\delta}^{(\beta)}(x)\right), \\
\frac{\partial S_{a,\delta}^{(\beta)}(x)}{\partial \delta} &= \frac{1}{2\delta}\left(\sigma_{a+\delta}^{(\beta)}(x) + \sigma_{a-\delta}^{(\beta)}(x)\right) - \frac{1}{\delta} S_{a,\delta}^{(\beta)}(x).
\end{aligned}$$

2.1. Szakaszonként lineáris tagsági függvények approximációja

A vágófüggvény használatával szakaszonként lineáris fuzzy tagsági függvények alkothatók, így a squashing függvénnyel ezen tagsági függvények approximációjára is lehetőség nyílik. Egy trapéz alakú tagsági függvény konstruálásához két vágófüggvény konjunkciója szükséges. Ehhez a Łukasiewicz operátort választottuk, mivel így maga a konjunkciós operátor is közelíthető squashing függvénnyel. Egy trapéz alakú fuzzy tagsági függvény approximációja tehát az alábbi módon állítható elő:

$$A\Pi(x, a_l, \delta_l, a_r, \delta_r, \beta) = S_{1/2,1/2}^{(\beta)}\left(S_{a_l,\delta_l}^{(\beta)}(x) + S_{a_r,\delta_r}^{(-\beta)}(x) - 1\right).$$

3. Fuzzy szabályalapú osztályozás squashing függvényekkel

A publikált háromlépcsős, fuzzy szabály konstrukciós algoritmus az alábbi lépésekből áll [3]:

- Először a tanítóadatok fuzzifikálása történik trapéz alakú tagsági függvények közelítéseivel.
- A második lépésben egy genetikus algoritmus alakítja ki a fuzzy szabályokat.
- Végül egy gradiens alapú lokális optimalizációs eljárás finomhangolja a fuzzy tagsági függvényeket.

Annak érdekében, hogy elkerüljük a túlzottan komplex szabályokat, a modellben csak a diszjunktív normálformának megfelelő fuzzy szabályok alakíthatóak ki. Szabályok egy adott halmazát egy olyan mesterséges neurális hálóval reprezentáljuk, amelyben a rejtett neuronok mind konjunktívak, azaz működésükben egy konjunktív operátornak felelnek meg. Hasonlóan, a kimeneti neuronok típusa diszjunktív. Minden kimeneti neuron pontosan egy osztálynak felel meg, így a többosztályos feladatokban több kimeneti neuron szerepel. Egy vizsgált input elem abba az osztályba kerül, amelyhez tartozó kimeneti neuron aktivációs szintje a legmagasabb. A második lépésben történik e szabálystruktúra kialakítása egy genetikus algoritmus segítségével. A harmadik lépés szükséges feltétele, hogy a fuzzy tagsági függvények deriváltjai folytonosak legyenek, ezért használtuk a squashing függvényt a tagsági függvények közelítésére.

3.1. Alkalmazások

Használjuk az alábbi jelölést a trapéz alakú tagsági függvények tömör leírására:

$$[a_1 <_{\delta_1} x <_{\delta_2} a_2]\,,$$

ahol a_i-k és a δ_i-k trapéz bal és jobb oldalainak közepét és szélességét jelölik. Ha a trapéz egyik oldala kívül esik a vizsgált intervallumon, jelöléseit elhagyjuk.

A vizsgált feladatok a UCI gépi tanulás adatbázistárból származnak. Eredményeink az Iris adatbázison:

- Iris Setosa: $[x_3 <_{1.7} 3.8]$
- Iris Virginica: $[1.5 <_{0.5} x_4]$
- Iris Versicolor: $[0.35 <_{3.76} x_3 <_{1.55} 6.6]$ ÉS $[0.27 <_{1.28} x_4 <_{0.32} 1.9]$

Ezen szabályok 96%-os pontossággal írják le az adatokat, 5 hibásan osztályozott példával, 98%, 92% és 96%-os bizonyossági szintekkel, mindössze két tulajdonság figyelembevételével.

Eredményeink a Wine adatbázison:

- Wine 1: $[435 <_{683} x_{13}]$
- Wine 2: $[x_{10} <_{3.36} 5.9]$
- Wine 3: $[x_7 <_{1.26} 1.74]$

Ezen szabályok 95%-os pontossággal írják le az adatokat, 6 hibásan osztályozott és 3 osztályozatlan példával, 88%, 85% és 85%-os bizonyossági szintekkel, három tulajdonság figyelembevételével.

Eredményeink a Ionosphere adatbázison:

$$[0.69 <_{0.5} x_1] \text{ ÉS } [-0.19 <_{0.013} x_5]$$

Ez az egy szabály 1/2-es küszöbértékkel 88%-os pontosságot ad.

Eredményeink a Thyroid adatbázison:

- Normal: $[4.92 <_{2.46} x_2 <_{6.95} 14.57]$
- Hypo: $[x_2 <_{3.75} 6.2]$
- Hyper: $[10.95 <_{4.31} x_2 <_{12.77} 36.8]$

Ezen szabályok $94,8$%-os pontossággal írják le az adatokat, 11 hibásan osztályozott példával, 95%, 88% és 94%-os bizonyossági szintekkel, mindössze egy tulajdonság figyelembevételével.

4. Következtetés approximált fuzzy intervallumokkal

Legyen $A, A^* \in \mathscr{F}(X)$ és $B \in \mathscr{F}(Y)$ fuzzy halmaz az X ill. Y univerzumokon, ahol $\mathscr{F}$ jelöli a fuzzy halmazok halmazát. Az ún. "compositional rule of inference (CRI)" szerint - amelyet Zadeh vezetett be [7] - az A^* input fuzzy halmaz és a "HA A AKKOR B" szabály ismeretében, a $B^* \in \mathscr{F}(Y)$ konklúziót az alábbi módon kapjuk:

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in X} \left\{ A^*(x) \wedge R(A(x), B(y)) \right\},$$

ahol $R \subset \mathcal{I}^X \times \mathcal{I}^Y$ egy fuzzy reláció.

Vizsgálataink tárgya az általánosított CRI következtetés zártsági tulajdonságai szigmoid alakú tagsági függvényeken, az alapvető folytonos t-normákat és azok reziduálisaikat tekintve.

4.1. Az általánosított CRI zártsági tulajdonságai

4.1. Tétel (Klasszikus CRI). *Legyenek A, A^*, B szigmoid alakú fuzzy tagsági függvények, és tekintsük a klasszikus CRI következtetést. Ekkor B^* az alábbi módon számolható.*

Ha A és A^* monotonitása megegyező, azaz vagy mindkettő szig. mon. nő vagy csökken, akkor

$$B^*(y) = B(y) \vee A^*(A^{-1}(B(y)))$$

ahol A^{-1} az (egyedi) inverzfüggvénye A-nak. Ekkor B^* szintén szigmoid alakú.

Ha $A^*(x) = A'(x)$ egy $'$ negációra, azaz a függvények monotonitása különböző, akkor $B^*(y) = 1$, azaz ekkor a konklúzió értelmezése: "ismeretlen".

4.2. Következmény. *A fenti tétel három speciális esete:*

- *Ha $A^*(x) > A(x)$ minden $x \in X$-re, akkor $A^*(A^{-1}(x)) > x$ és így $B^*(y) = A^*(A^{-1}(B(y)))$ minden $y \in Y$-ra.*
- *Ha $A^*(x) \leq A(x)$ minden $x \in X$-re, akkor $A^*(A^{-1}(x)) \leq x$ és így $B^*(y) = B(y)$ minden $y \in Y$-ra.*
- *Ha A^* megfelel A egy élesítésének (ν mértékben), akkor $B^*(y)$ két részre osztható $A^{-1}(\nu)$ értéke alapján, és hasonlóan számolható az előző két esethez.*

4.3. Tétel (Szorzat alapú CRI). *Legyenek A, A^*, B szigmoid alakú fuzzy tagsági függvények, és tekintsük az általánosított CRI következtetést a szorzat t-normával és Goguen implikációval. Ekkor B^* az alábbi módon számolható. Ha A és A^* monotonitása megegyező, akkor*

$$B^*(y) = B(y) \cdot \bigvee_{x:A(x)\geq B(y)} \{A^*(x)/A(x)\},$$

ahol B^* szintén szigmoid alakú.

Ha $A^*(x) = A'(x)$ egy $'$ negációra, akkor $B^*(y) = 1$.

4.4. Tétel (Nilpotens CRI). *Legyenek A, A^*, B szigmoid alakú fuzzy tagsági függvények, és tekintsük az általánosított CRI következtetést a Łukasiewicz t-normával és a hozzá tartozó reziduális implikációval. Ekkor B^* az alábbi módon számolható. Ha A és A^* monotonitása megegyező, akkor*

$$B^*(y) = B(y) + \bigvee_{x:A(x)\geq B(y)} \{A^*(x) - A(x)\}.$$

Ekkor B^* akkor és csak akkor szigmoid alakú, ha $A^* \subseteq A$.

Ha $A^*(x) = A'(x)$ egy $'$ negációra, akkor $B^*(y) = 1$.

Ezen tételek a fenti három alapvető t-normával izomorf t-normákra is igazak. A minimum t-norma esetében, mivel az csak önmagával izomorf, ez triviális. Tetszőleges folytonos Arkhimédeszi t-normák esetén, a generátorfüggvény izomorfizmus szerinti transzformációja nem befolyásolja a bizonyítások lépéseit. Összetett, ún. "ordinal sum" t-normák esetén a fenti tételek külön alkalmazhatóak az egyes összetevőkre:

4.5. Tétel. *Legyen $\triangle$ folytonos t-normák egy tetszőleges rendezési összege (ordinal sum), jelölje $\triangleright$ ennek reziduálisát. Legyen A,A^* és B szigmoid alakú tagsági függvény, és*

$$B^*(y) = \bigvee_{x \in X} \{A^*(x) \triangle (A(x) \triangleright B(y))\}.$$

Ha A és A^* azonos monotonitású, akkor B^* szigmoid alakú amennyiben $\triangle$ minden összetevője vagy a minimum vagy szigorúan monoton. Ha ráadásul $A^* \subseteq A$, akkor B^* szigmoid alakú minden $\triangle$-ra. Abban az esetben, ha A és A^* különböző monotonitású, akkor $B^* \equiv 1$.

A Łukasiewicz t-normán alapuló altalánosított CRI csak akkor zárt szigmoid alakú függvényekre, ha $A^* \subseteq A$, mivel ebben az esetben $B^* \equiv B$. Általános esetben a konklúzió nem szigmoid alakú, mivel a tagsági függvény minimumértéke pozitív. A szorzat t-norma használata mellett, a konklúzió szigmoid alakú. A klasszikus CRI szintén zárt szigmoid alakú függvényekre.

4.2. A tagsági függvény alapú következtetés

A tagsági függvény alapú következtetés [4] (Membership Driven Inference, MDI) az alábbi

$$B^* = A^* \circ A^{-1} \circ B,$$

ahol A és B egy szabály premisszája és következménye, A^* az input és B^* az output.

Ez a következtetési eljárás egyszerű, és csak az A, A^* és B szigmoid alakú tagsági függvényektől függ. Nem tartalmaz explicit módon semmilyen konjunktív, implikatív vagy más műveletet, sem bármilyen hasonlósági vagy távolságmértéket. Bár az MDI a klasszikus CRI-ből eredeztethető, maga az eljárás értelmezhető egy módosított, a fuzzy igazságértékeken (fuzzy truth value, FTV) elvégzett következtetésként is, ahol a fuzzy igazsgértékek halmazán alkalmazott módosító leképezés az identitás. Kiemelendő, hogy nem létezik olyan t-norma, amelyre az FTV módosító leképezése az identitás lenne, emiatt az MDI nem speciális esete az FTV-ken alapuló következtetésnek. Az MDI fő tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze.

4.6. Tétel. *A tagsági függvény alapú következtetés szigmoid alakú tagsági függvényeken az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:*

i) *Ha $A^* = A$, akkor $B^* = B$ (általánosított modus ponens)*

ii) *Ha $B^* = \ ' \circ B$, akkor $A^* = \ ' \circ A$ minden $'$ negációra (általánosított modus tollens)*

iii) *Ha $C^* = B^* \circ B^{-1} \circ C$, akkor $C^* = A^* \circ A^{-1} \circ C$ (általánosított lánc-szabály)*

Az alábbi általánosabb tulajdonság is fennáll, lefedve az első két esetet:

iv) *Bármely f unáris operátorra, $A^* = f \circ A$ akkor és csak akkor, ha $B^* = f \circ B$. A megfelelő f operátorral ez magában foglalja az A ν-élesítését is.*

Továbbá, bármely A és B tagsági függvényre (nem csak szigmoid alakúra) $A^* \equiv 0$, azaz meghatározatlan akkor és csak akkor, ha $B^* \equiv 0$, és $A^* \equiv 1$ azaz ismeretlen akkor és csak akkor, ha $B^* \equiv 1$.

Az ún. fuzzy abdukció feltételeit is teljesíti az MDI: amennyiben B^* adott és A^* ismeretlen, akkor $A^* = B^* \circ B^{-1} \circ A$.

Az MDI következtetés nem azonos sem Zadeh általánosított CRI-jével, hiszen más axiomákat teljesít, sem a hasonlóságon alapuló következtetéssel, mivel nem használ semmilyen hasonlósági mértéket. Mégis, mivel $A^* \circ A^{-1}$ értelmezhető akár egy fuzzy igazságértékként (truth-function), vagy az A és A^* közötti hasonlatosságként (similitude), az MDI a fuzzy következtetések sorában a CRI és a hasonlóságon alapuló következtetés "között" helyezkedik el.

4.3. Az MDI hatékony számítása

4.7. Tétel. *Ha minden alkalmazott tagsági függvény squashing alakú, azaz ha*

$$A(x) = \langle a <_{\delta_a} x \rangle_\beta$$
$$A^*(x) = \langle a^* <_{\delta_{a^*}} x \rangle_\beta$$
$$B(x) = \langle b <_{\delta_b} x \rangle_\beta$$

akkor $B^*(x) = \langle b^* <_{\delta_{b^*}} x \rangle_\beta$, ahol

$$b^* = b + \frac{\delta_b}{\delta_a}(a^* - a) \qquad \delta_{b^*} = \frac{\delta_b \delta_{a^*}}{\delta_a}$$

4.8. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\beta > 0$ véges. Ha minden alkalmazott tagsági függvény egy trapéz alakú függvény közelítése squashing függvényekkel, azaz ha*

$$\begin{aligned} A(x) &= A\Pi(x;\beta, a_L, \delta_a^L, a_R, \delta_a^R), \\ A^*(x) &= A\Pi(x;\beta, a_L^*, \delta_{a^*}^L, a_R^*, \delta_{a^*}^R), \\ B(x) &= A\Pi(x;\beta, b_L, \delta_b^L, b_R, \delta_b^R), \end{aligned}$$

akkor $B^*(x) = A\Pi(x;\beta, b_L^*, \delta_{b^*}^L, b_R^*, \delta_{b^*}^R)$, *ahol*

$$\begin{aligned} b_L^* &= b_L + \frac{\delta_b^L}{\delta_a^L}(a_L^* - a_L), & \delta_{b^*}^L &= \frac{\delta_b^L \delta_{a^*}^L}{\delta_a^L}, \\ b_R^* &= b_R + \frac{\delta_b^R}{\delta_a^R}(a_R^* - a_R), & \delta_{b^*}^R &= \frac{\delta_b^R \delta_{a^*}^R}{\delta_a^R}. \end{aligned}$$

5. Fuzzy igazságértékeken végzett műveletek számításai

Általában, a fuzzy igazságértékeken végzendő műveletek alapjait képező konvolúció számítása nagyon számításigényes. Ha vizsgálatainkat leszűkítjük folytonos Arkhimédeszi t-normákra és t-konormákra, a komplexitás nagymértékben csökkenthető [5].

5.1. Tétel. *Ha $\triangle_1 = \wedge$, $\triangledown = \vee$ és $\triangle_2 = \triangle$ tetszőleges folytonos, Arkhimédeszi t-norma, akkor az alábbiak igazak minden $f, g \in \mathcal{F}$ fuzzy igazságértékre.*

$$\begin{aligned} (f \blacktriangle_\wedge g)(z) &= \bigvee_{z = x \wedge y} (f(x) \triangle g(y)) &= \left(\left(f^R \triangle g\right) \vee \left(f \triangle g^R\right)\right)(z), \\ (f \blacktriangledown_\vee g)(z) &= \bigvee_{z = x \vee y} (f(x) \triangle g(y)) &= \left(\left(f^L \triangle g\right) \vee \left(f \triangle g^L\right)\right)(z). \end{aligned}$$

5.2. Tétel. *Ha $\triangle_1$ és $\triangle_2$ t-normák, $\triangle_1$ folytonos és Arkhimédeszi, akkor alábbiak igazak minden $f, g \in \mathcal{F}$-re. Ha $z > 0$,*

$$(f \blacktriangle g)(z) = \bigvee_{x \geq z} (f(x) \triangle_2 g(x \triangleright_1 z)) = \bigvee_{y \geq z} (f(y \triangleright_1 z) \triangle_2 g(y)).$$

Ha $\triangle_1$ szigorúan monoton, akkor $z = 0$-ra

$$(f \blacktriangle g)(0) = \left(f(0) \triangle_2 g^R(0)\right) \vee \left(f^R(0) \triangle_2 g(0)\right),$$

és ha $\triangle_1$ nilpotens, akkor $z = 0$-ra

$$(f \blacktriangle g)(0) = \bigvee_x \left(f(x) \triangle_2 g^L(x')\right) = \bigvee_y \left(f^L(y') \triangle_2 g(y)\right),$$

ahol $\rhd_1$ a $\triangle_1$ reziduális implikációja, és $x' = (x \rhd_1 0)$ a $\rhd_1$-hez tartozó negáció.

Hasonló tétel igaz kiterjesztett, folytonos Arkhimédeszi t-konormákra.

5.3. Tétel. *Ha $\triangle$ tetszőleges t-norma, $\bigtriangledown$ egy folytonos és Arkhimédeszi t-konorma, akkor az alábbiak igazak minden $f, g \in \mathcal{F}$-re. Ha $z < 1$,*

$$(f \blacktriangledown g)(z) = \bigvee_{x \le z} (f(x) \triangle g(x \lhd z)) = \bigvee_{y \le z} (f(y \lhd z) \triangle g(y)).$$

ahol $\lhd$ a reziduális koimplikációja $\bigtriangledown$-nek. Ha $\bigtriangledown$ szigorúan monoton, akkor $z = 1$-re

$$(f \blacktriangledown g)(1) = \left(f^L(1) \triangle g(1)\right) \vee \left(f(1) \triangle g^L(1)\right),$$

és ha $\bigtriangledown$ nilpotens, akkor $z = 1$-re

$$(f \blacktriangledown g)(1) = \bigvee_x \left(f(x) \triangle g^R(x')\right) = \bigvee_y \left(f^R(y') \triangle g(y)\right),$$

ahol $x' = (x \lhd 1)$.

5.1. Bal- és jobbmaximális, illetve monoton fuzzy igazságértékek

Az előző tételek általában nem csökkentik számottevően a kiterjesztett műveletek számítási komplexitását. Az alábbiakban fuzzy igazságértékek egy-egy jól meghatározott részhalmazaira elért eredményeket mutatjuk be. Jelölje $\mathcal{F}^+$ és $\mathcal{F}^-$ a monoton növekvő illetve csökkenő fuzzy igazsáértékek halmazát. Egy f fuzzy igazságérték balmaximális ha $f^L = f^{LR}$, jobbmaximális ha $f^R = f^{LR}$ és normál ha $f^{LR} = 1$, ahol

$$f^R(x) = \bigvee_{y \ge x} f(y) \quad \text{and} \quad f^L(x) = \bigvee_{y \le x} f(y).$$

5.4. Következmény. *Ha f jobbmaximális és $g \in \mathcal{F}^-$, akkor*

$$(f \blacktriangle g)(x) = f^{LR}(x) \triangle_2 g(x),$$

és $f \blacktriangle g \in \mathcal{F}^-$. Továbbá, ha f normál, akkor $f \blacktriangle g = g$, azaz f egységelem.

5.5. Következmény. *Ha f balmaximális és $g \in \mathcal{F}^+$, akkor*

$$(f \blacktriangledown g)(x) = f^{LR}(x) \bigtriangledown g(x),$$

és $f \blacktriangledown g \in \mathcal{F}^+$. Továbbá, ha f normál, akkor $f \blacktriangledown g = g$.

5.2. Fuzzy igazságértékeken végzett műveletek folytonossága

Az alábbi elégséges feltételeket bizonyítottuk az $f \blacktriangle g$ és $f \blacktriangledown g$ összetett fuzzy igazságértékek folytonosságára vonatkozóan, feltéve f és g folytonosságát. Jelölje $\mathcal{F}_c$ a folytonos fuzzy igazságértékek halmazát.

5.6. Állítás. *Az $f, g \in \mathcal{F}_c$ fuzzy igazságértékek $f \blacktriangle g$ szigorúan monoton konjunkciója folytonos, ha f vagy g bal- vagy jobbmaximális.*

5.7. Állítás. *Az $f, g \in \mathcal{F}_c$ fuzzy igazságértékek $f \blacktriangle g$ nilpotens konjunkciója folytonos, ha $f \in \mathcal{F}_c^+$ vagy $g \in \mathcal{F}_c^+$.*

5.8. Állítás. *Az $f, g \in \mathcal{F}_c$ fuzzy igazságértékek $f \blacktriangledown g$ szigorúan monoton diszjunkciója folytonos, ha f vagy g bal- vagy jobbmaximális.*

5.9. Állítás. *Az $f, g \in \mathcal{F}_c$ fuzzy igazságértékek $f \blacktriangledown g$ nilpotens diszjunkciója folytonos, ha $f \in \mathcal{F}_c^-$ vagy $g \in \mathcal{F}_c^-$.*

5.3. Kiterjesztett Łukasiewicz műveletek lináris fuzzy igazságértékeken

A kiterjesztett Łukasiewicz konjunciót és diszjunkciót fuzzy igazságértékeken az alábbi konvolúciókkal definiáljuk:

$$(f \blacktriangle_W g)(z) = \bigvee_{z=(x+y-1)\vee 0} ((f(x) + g(y) - 1) \vee 0)$$

$$(f \blacktriangledown_W g)(z) = \bigvee_{z=(x+y)\wedge 1} ((f(x) + g(y) - 1) \vee 0)$$

Legyen $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_c$ a lineáris fuzzy igazságértékek halmaza, melyre

$$f_{a,b} \in \mathcal{L} \quad \Longleftrightarrow \quad f_{a,b}(x) = \left\{ \frac{x-a}{b-a} \right\}_0^1,$$

ahol $a \neq b$, $x \in [0,1]$ és $\{t\}_a^b = a \vee t \wedge b$. Jelölje $\mathcal{L}^+ \subset \mathcal{F}_c^+$ a nemcsökkenő, és $\mathcal{L}^- \subset \mathcal{F}_c^-$ a nemnövekvő lineáris fuzzy igazságértékek halmazát. A normál, nemcsökkenő (nemnövekvő) lineáris fuzzy igazságértékek halmazát jelölje $\mathcal{L}_1^+$ ($\mathcal{L}_1^-$).

5.10. Tétel. *Minden $f_i = f_{a_i,b_i} \in \mathcal{L}^+$-re $(i = 1,2)$:*

$$(f_1 \blacktriangle_W f_2)(z) = \begin{aligned}[t] &(f_1(1) \triangle_W f_2(\{b_1\}_z \rhd_W z)) \\ &\vee (f_2(1) \triangle_W f_1(\{b_2\}_z \rhd_W z)), \end{aligned}$$

ahol $\{x\}_z = z \vee x \wedge 1$.

Monoton növekvő lineáris fuzzy igazságértékek Łukasiewicz konjunkciója minden esetben folytonos, a linearitást csak normál fuzzy igazságértékek esetén őrzi meg.

5.11. Következmény. *Minden $f_i = f_{a_i,b_i} \in \mathcal{L}_1^+$-re $(i = 1,2)$:*

$$(f_1 \blacktriangle_W f_2)(z) = f_1(b_2 \rhd_W z) \vee f_2(b_1 \rhd_W z).$$

Továbbá, $f_1 \blacktriangle_W f_2$ szintén lineáris, paraméterei:

$$\begin{aligned} a_{\blacktriangle_W} &= (a_1 + b_2 - 1) \wedge (a_2 + b_1 - 1), \\ b_{\blacktriangle_W} &= b_1 + b_2 - 1. \end{aligned}$$

5.12. Tétel. *Minden $f_i = f_{a_i,b_i} \in \mathcal{L}^-$-re $(i = 1,2)$, ha $z > 0$:*

$$(f_1 \blacktriangle_W f_2)(z) = \begin{aligned}[t] &(f_1(z) \triangle_W f_2(\{b_1\}_z \rhd_W z)) \\ &\vee (f_2(z) \triangle_W f_1(\{b_2\}_z \rhd_W z)), \end{aligned}$$

és ha $z = 0$:

$$(f_1 \blacktriangle_W f_2)(0) = f_1(0) \triangle_W f_2(0).$$

5.13. Következmény. *Minden $f_i = f_{a_i,b_i} \in \mathcal{L}^-$-re, az $f_1 \blacktriangle_W f_2$ Łukasiewicz konjunkció akkor és csak akkor folytonos, ha $b_1 + b_2 \geq 1$.*

6. Implikációk fuzzy igazságértékeken

Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \sqsubseteq, \preccurlyeq)$, ahol $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$. Egy $\bullet : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ függvény type-2 fuzzy implikáció $\mathbf{A}$ felett, ha teljesíti az alábbi peremfeltételeket

$$\mathbf{0} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0} \bullet \mathbf{1} = \mathbf{1} \bullet \mathbf{1} = \mathbf{1};\ \mathbf{1} \bullet \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

illetve monoton csökkenő az első, és monoton növekvő a második argumentumában a $\sqsubseteq$ vagy a $\preccurlyeq$ részbenrendezések egyikére.

6.1. Kiterjesztett S-implikációk és S-koimplikációk

Az S-implikációkat egy $\bigtriangledown$ t-konorma és egy $'$ negáció alkotja a $x' \bigtriangledown y$ képlet alapján. Az S-koimplikációk az S-implikációk duálisai, definíciójuk $x' \bigtriangleup y$, ahol $\bigtriangleup$ egy t-norma. Ezen műveletek type-2 kiterjesztései a $\blacktriangleright$ és a $\blacktriangleleft$ műveletek, amelyek fuzzy igazságértékeken értelmezettek [6].

6.1. Állítás. *A $\blacktriangleright$ és $\blacktriangleleft$ műveletek zártak $\mathcal{F}_C$-n, a konvex fuzzy igazságértékek halmazán.*

6.2. Állítás. *A $\blacktriangleright$ és $\blacktriangleleft$ műveletek zártak $\mathcal{F}_N$-en, a normál fuzzy igazságértékek halmazán. Továbbá, $f \blacktriangleright g$ és $f \blacktriangleleft g$ akkor és csak akkor normál, ha $f, g \in \mathcal{F}_N$.*

6.3. Tétel. *A $\blacktriangleright$ művelet akkor és csak akkor type-2 fuzzy implikáció $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{F}$ felett, ha $\mathbf{A}$ részalgebrája az $\mathbf{F}_{CN}$ konvex, normál fuzzy igazságértékeket tartalmazó algebrának.*

6.2. A $\wedge$ és $\vee$ műveletek kiterjesztett reziduálisai

Hasonlóan a minimum ($\wedge$) és a maximum ($\vee$) fuzzy operátorokhoz, ezek type-2 kiterjesztései, az ún. meet ($\sqcap$) és join ($\sqcup$) műveletek széles körben használtak. A $\wedge$ és $\vee$ műveletek reziduálisai a jól ismert

$$x \rhd_\wedge y = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq y, \\ y & \text{különben,} \end{cases} \qquad \text{and} \qquad x \lhd_\vee y = \begin{cases} 0 & \text{if } y \leq x, \\ y & \text{különben.} \end{cases}$$

Ezen műveletek kiterjesztéseit jelölje $\sqsubset$ és $\sqsupset$. Jelölje továbbá minden $f \in \mathcal{F}$-re

$$f^r(x) = \begin{cases} \bigvee_{y>x} f(y), & \text{if } x < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \qquad f^l(x) = \begin{cases} \bigvee_{y<x} f(y), & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ismert, hogy bármely reziduális implikációra $x \rhd y = 1$ akkor és csak akkor, ha $x \leq y$. Ennek kiterjesztett megfelelője a $f \blacktriangleright g = \mathbf{1} \leftrightarrow f \preceq g$ egy $\preceq$ részbenrendezésre $\mathcal{F}$-en. A szükséges és elégséges feltételeket az $\blacktriangleright = \sqsubset$ esetben az alábbi tétel foglalja össze.

6.4. Tétel. *Minden $f, g \in \mathcal{F}$-re, $f \sqsubset g = \mathbf{1}$ akkor és csak akkor, ha*

1. *$f, g \in \mathcal{F}_N$, és*
2. *$g^l(x_0) = 0$, ahol $x_0 = \sup\{x \mid f(x) > 0\}$.*

6.3. A $\sqsubset$ és a $\sqsupset$ műveletek disztributív tulajdonságai

6.5. Állítás. *Az alábbi disztributív szabályok igazak minden $f, g, h \in \mathcal{F}$-re.*

1. $f \sqsubset (g \vee h) = (f \sqsubset g) \vee (f \sqsubset h)$, $\quad f \sqsupset (g \vee h) = (f \sqsupset g) \vee (f \sqsupset h)$,
2. $(f \vee g) \sqsubset h = (f \sqsubset h) \vee (g \sqsubset h)$, $\quad (f \vee g) \sqsupset h = (f \sqsupset h) \vee (g \sqsupset h)$.

Általános esetben $\sqsubset$ nem disztributív a $\sqcap$ és a $\sqcup$ műveleteken, csak az alábbi egyenlőtlenségek igazak.

6.6. Tétel. *Minden $f, g, h \in \mathcal{F}$-re*

$$f \sqsubset (g \sqcap h) \leq (f \sqsubset g) \sqcap (f \sqsubset h), \quad f \sqsubset (g \sqcup h) \leq (f \sqsubset g) \sqcup (f \sqsubset h).$$

6.4. Algebrák konvex és normál fuzzy igazságértékeken

Egy fontos részalgebrája $\mathbf{F}$-nek az $\mathbf{F}_I$ intervallum fuzzy igazságértékek algebrája. Ez bizonyítottan izomorf az $(I^{[2]}, \wedge, \vee, ', 0, 1)$ algebrával, ahol $I^{[2]}$ az I-n zárt intervallumok halmazát jelöli. Beláttunk két negatív eredményt.

6.7. Tétel. *Az intervallum fuzzy igazságértékek $\mathcal{F}_I$ halmaza nem zárt a $\sqsubset$ és a $\sqsupset$ műveletekre.*

6.8. Következmény. *A konvex fuzzy igazságértékek $\mathcal{F}_C$ halmaza nem zárt a $\sqsubset$ és a $\sqsupset$ műveletekre.*

Pozitív eredményt bizonyítottunk normál fuzzy igazságértékekre.

6.9. Tétel. *A normál fuzzy igazságértékek $\mathcal{F}_N$ halmaza zárt a $\sqsubset$ és a $\sqsupset$ műveletekre. Továbbá, $f \sqsubset g \in \mathcal{F}_N$ (illetve $f \sqsupset g \in \mathcal{F}_N$) akkor és csak akkor, ha $f, g \in \mathcal{F}_N$.*

Bizonyítottuk továbbá, hogy a bal- vagy jobbmaximális fuzzy igazságértékek algebrája valódi részalgebrája $\mathcal{F}$-nek [6].

6.10. Tétel. *Az $\mathbf{F}_M = (\mathcal{F}_{LM} \cup \mathcal{F}_{RM}, \sqcap, \sqcup, ^*, \sqsubset, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ azaz a bal- vagy jobbmaximális fuzzy igazságértékek algebrája valódi részalgebrája $(\mathcal{F}, \sqcap, \sqcup, ^*, \sqsubset, \mathbf{0}, \mathbf{1})$-nek.*

Hivatkozások

[1] J. Dombi and Zs. Gera. The approximation of piecewise linear membership functions and łukasiewicz operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 154:275–286, 2005.

[2] J. Dombi and Zs. Gera. Approximation of the continuous nilpotent operator class. *Acta Polytechnica Hungarica*, 2:45–58, 2005.

[3] J. Dombi and Zs. Gera. Fuzzy rule based classifier construction using squashing functions. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 19(1):3–8, 2008.

[4] Zs. Gera. Computationally efficient reasoning using approximated fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(7):689–703, 2007.

[5] Zs. Gera and J. Dombi. Exact calculations of extended logical operations on fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:1309–1326, 2008.

[6] Zs. Gera and J. Dombi. Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:3014–3032, 2008.

[7] L. A. Zadeh. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet.*, 3:28–44, 1973.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem

Gera Zsolt: *Fuzzy reasoning models and fuzzy truth value based inference*

című disszertációját. A disszertációban szereplő közös eredményekre vonatkozóan kijelentem, hogy a

[1] József Dombi, Zsolt Gera. Approximation of the continuous nilpotent operator class. Acta Polytechnica Hungarica 2 (2005) 45–58.

[2] József Dombi, Zsolt Gera. The approximation of piecewise linear membership functions and Lukasiewicz operators. Fuzzy Sets and Systems 154 (2005) 275–286.

[3] József Dombi, Zsolt Gera. Fuzzy rule based classifier construction using squashing functions. Journal of Intelligent and Fuzzy Systems 19/1 (2008) 3–8.

[4] Zsolt Gera, József Dombi. Exact calculations of extended logical operations on fuzzy truth values. Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1309–1326.

[5] Zsolt Gera, József Dombi. Type-2 implications on non-interactive fuzzy truth values. Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 3014–3032.

közleményekben megjelent eredményekkel kapcsolatban a pályázó hozzájárulása volt a meghatározó. Az eredmények matematikailag korrekt közlése oszthatatlan eredmény.

Végül kijelentem, hogy a fenti eredményeket nem használtam, illetve nem tervezem azok felhasználását semmilyen fokozatszerző eljárásban.

2009. január 19.

....

Dr. Dombi József