1. Bevezetés

A kémiában, biológiában, ipari alkalmazásokban gyakran felmerül olyan probléma, amelyben bizonyos „nyersanyagok” és „műveleti egységek” rendelkezésünkre állnak és előírt anyagokat kívánunk előállítani az adott műveleti egységek összekapcsolásával. A probléma egy lehetséges modellezése a „Process Network Synthesis” (PNS), melyben minden műveleti egység az anyagok egy részhalmazát inputként igényli és anyagok egy másik részhalmazát állítja elő. A gráfelméleti megközelítésben egy anyagtól irányított él vezet azokhoz a műveleti egységekhez, amelyek azt input anyagként felhasználják, illetve egy műveleti egységet irányított éllel kötünk össze azokkal az anyagokkal, amelyeket output anyagként termel. Így egy kétrészes (anyagok; műveleti egységek) irányított gráfot kapunk, a folyamat gráfját. Egy ilyen hálózatban az előírt anyagok legyártása általában többféleképpen, a rendelkezésre álló gépek különbző részhalmazaival is megvalósítható. Statikusan képzelve a termelési folyamatot, a műveleti egységek egy részrendszerének működésével a kívánt anyagokat bizonyos alapvető feltételek teljesülése esetén kaphatjuk meg. Ily módon a lehetséges megoldásoknak rendelkezniük kell bizonyos strukturális tulajdonságokkal ([15]), ami miatt ezeket megoldás struktúráknak is szokás nevezni. Ezek között kitűntetett szerepe van a maximális struktúrának, mely a lehetséges megoldás struktúrák uniója. A maximális struktúra meghatározása azért hasznos, mert ily módon a hálózatból töröljük azokat a műveleti egységeket, melyek úgysem szerepelnének egyetlen lehetséges megoldásban sem, és ily módon csökkentjük a probléma méretét. Mivel a maximális struktúra generálására polinomiális idejű algoritmus adható ([11]), ezért célszerűnek tűnik a PNS problémák megoldását ezzel kezdeni. A legtöbb esetben azonban minket nem a legtöbb műveleti egységet igénybe vevő, hanem ellenkezőleg, valamilyen szempontból leggazdaságosabb megoldások érdekelnek, tehát nem elégedhetünk meg a maximális struktúra meghatározásával.

A dolgozatban tárgyalt PNS modell csak strukturális szempontból tekinti a problémát, mivel annak leírása anyagmennyiségekre vonatkozó előírásokat nem tartalmaz. A rendelkezésre álló műveleti egységek viszont rendelkeznek bizonyos költséggel és az anyagelőállítás során használt műveleti egységek összköltségét szeretnénk optimalizálni: keressük a műveleti egységek azon legkisebb összköltségű részhalmazát, mely a rendelkezésre álló nyersanyagokból képes előállítani a kívánt végtermékeket. Mivel a minimum meghatározása még ebben a legegyszerűbb strukturális esetben is a halmazlefedési problémával ekvivalens ([2, 17, 27]), így a halmazlefedési probléma NP teljességéből ([32, 1]) következően a struktúrális PNS-probléma is sajnos NP-teljes. Nem várható tehát hatékony megoldás rá. Ezért indokolt exponenciális idejű algoritmusok és azok különböző heurisztikákkal kombinált, korlátozás és szétválasztás módszerére alapuló változatainak kidolgozása ([13, 24, 21, 23]).

A Branch-and-Bound jellegű módszerek felépítésében fontos szerepet játszik az úgynevezett döntési leképezés fogalma ([12]), mely lényegében meghatározza adott anyagra az őt gyártó műveleti egységek halmazát. Gyakorlati szempontból nyilván nagyon komoly előny, hogy csak bizonyos úgynevezett ”konzisztens” döntési leképezéseket kell figyelembe venni, ami abból az észrevételből származik, hogy egy műveleti egység, ha működik, nem teheti meg, hogy bizonyos kimeneti anyagait gyártja, másokat pedig nem. Ezen belül további szűkítést eredményez az az észrevétel, hogy nem működhet olyan műveleti egység, amelyik valamelyik input anyagát egyetlen működő műveleti egységtől sem nyeri. A konzisztens döntési leképezések és a lehetséges megoldás strukltúrák közötti kapcsolatot felhasználva, a konzisztens döntési leképezések megszámlálásával, a szitaformula segítségével, felső korlát adható a lehetséges megoldás struktúrák számára ([3]). Mivel a korlát tényleges kiszámítása a probléma struktúrájától függ és általában, tetszőleges folyamat gráf esetén, meglehetősen bonyolult, ezért megvizsgálunk két speciális PNS problémaosztályt is, melyre ténylegesen kiszámítható képleteket tudunk adni, miközben szép kombinatorikus azonosságokat is kapunk ([4, 5]).

A továbbiakban észrevesszük, hogy bizonyos műveleti egységek, nevezetesen azok, amelyek egyszerre vannak jelen vagy egyikük sem szerepel a lehetséges megoldásokban, együtt kezelhetők. Ebből kiindulva definiáljuk az összevonás műveletét, mely a maximális struktúrához képest is általában kb. 7%-os további méretcsökkenést eredményez ([20]). Ugyanakkor az öszszevonás következtében megjelenő új műveleti egységek az eltávolítottaknál több bemeneti és kimeneti anyaghalmazzal rendelkeznek (bár a be- és kimeneti anyagok száma összességében megmarad), ezért felmerül a kérdés, hogy az összevonás ötlete egyáltalán használható-e a feladat hatékonyabb megoldására. A döntési leképezések mélyebbre ható tanulmányozásának következtében kapott néhány további észrevételt is felhasználva, kidolgozunk egy új, *Előretekintő B & B (ER)* nevezetű, korlátozás és szétválasztás típusú eljárást, mely az összevonás ötletét implicit módon alkalmazva, vizsgálataink szerint az eddig ismert legjobb MABBA eljárásnál lényegesen hatékonyabban oldja meg a feladatot ([21]).

A gyakorlatban előállhatnak olyan esetek, amikor nem csak egy optimális megoldás, hanem több vagy az összes, lehetséges vagy optimális megoldás is érdekel. A [16]-ban kidolgozásra került egy eljárás, mely egy PNS probléma összes lehetséges megoldását felsorolja. Lehetnek azonban olyan esetek is, amikor csak az optimális megoldások érdekelnek, de azokat mind fel szeretnénk sorolni. A feladat megoldható a [16]-ban megadott teljes leszámlálással is, például úgy, hogy először megkeressük az optimumot, majd utána a teljes leszámlálásnál ugyan az összes lehetséges megoldást végigjárjuk, de csak az optimális megoldásokat tartjuk meg, ez a megoldás azonban egyáltalán nem hatékony, hiszen sok felesleges lehetséges, de nem optimális megoldást vizsgál meg. Ezért kidolgozunk egy ennél hatékonyabb eljárást, mely ugyan még mindig nem csak az optimális megoldásokat találja meg, viszont az általa felsorolt megoldás halmaz, mely tartalmazza az összes optimális megoldást, empirikus vizsgálataink szerint lényegesen kisebb, mint az összes lehetséges megoldások halmaza, hiszen az algoritmus a teljes leszámlálásnál sokkal hatékonyabban működik ([23]). Továbbra is nyitott kérdés marad azonban, hogy a parciális leszámlálás milyen feltételek mellett képes csak az optimális megoldásokat végigjárni.

A dolgozat befejező részében a PNS egy teljesen újszerű, automataelméleti megközelítését vizsgáljuk meg. A [28] cikk alapján láttuk, hogy a lehetséges megoldások [18] és [15] munkákban meghatározott feltételei nem biztosítják a végrehajthatóságot, ezért a [28]-ban kidolgozásra került egy úgynevezett színező eljárás, mely meghatározza a végrahajtható folyamatokat, melyeket módosított lehetséges megoldásoknak neveztünk. Ugyancsak a [28]-ban meg lett adva egy eljárás a módosított lehetséges optimális megoldás meghatározására, melynek alapötlete az, hogy a módosított PNS probléma adott példányához hozzárendelhető egy automata, melyre teljesül az, hogy az eredeti feladat megoldása visszavezethető az automata átmeneti gráfjában egy legrövidebb út megtalálására. A disszertáció ezen részének tulajdonképpeni célja ezen eljárás továbbfejlesztése. Definiálunk egy ekvivalencia relációt a műveleti egységek halmazán, egy részben rendezést az ekvivalencia osztályokon, melyeknek segítségével, néhány további észrevétel felhasználásával, az átmeneti gráfnak csak egy részét generáljuk és így egy hatékonyabb eljárást kapunk az optiomális módosított lehetséges megoldás meghatározására ([22]).

A fentiek alapján elmondhatjuk, hogy a PNS nem az egyetlen, de egy lehetséges és hasznosnak bizonyult modellje a hálózati folyamatoknak, mely lehetővé teszi strukturális összefüggések feltárását és a folyamatok bonyolultságához képest valamivel hatékonyabb megoldások megtalálását.

2. A PNS probléma

Jelölje $\varphi(H)$ egy tetszőleges H halmaz összes részhalmazát, $\varphi'(H)$ pedig a H halmaz összes nemüres részhalmazát. Legyenek M és $O \subseteq \varphi'(M) \times \varphi'(M)$ véges, nemüres, és diszjunkt halmazok. Az M elemei az anyagok, míg az O elemei a műveleti egységek, melyek segítségével bizonyos bemenő anyagokból nyerünk előírt módon egy kimeneti anyaghalmazt. Hogy mi megy végbe a műveleti egységekben, azzal nem foglalkozunk. Figyelmen kívül hagyjuk továbbá azt is, hogy miként kezdett a rendszer működni, csak statikus „termeléssel” foglalkozunk. Formálisan bármely $u \in O$ műveleti egységre $u = (\alpha, \beta)$, ahol az α a bemeneti (nem üres) anyaghalmaz, β pedig a kimeneti (nem üres) anyaghalmaz. Azt fogjuk mondani, hogy az u műveleti egység az α anyaghalmazból a β anyaghalmazt gyártja.

Az (M, O) párhoz egyérelműen hozzárendelhető egy gráf, amit a ***folyamat gráfjának*** nevezünk: $PG(M, O) = (M \cup O, A_1 \cup A_2)$, ahol az élhalmaz kétféle típusú élből áll, $A_1 = \{(X, Y) : Y = (\alpha, \beta) \in O$ és $X \in \alpha\}$, $A_2 = \{(Y, X) : Y = (\alpha, \beta) \in O$ és $X \in \beta\}$. Egy (V', E') gráf egy $PG(M, O)$ folyamat gráf ***részgráfja***, ha $V' = M' \cup O'$, $M' \subseteq M$, $O' \subseteq O$, $O' \subseteq \varphi'(M') \times \varphi'(M')$ és $E' = A'_1 \cup A'_2$, ahol $A'_1 = \{(X, Y) : Y = (\alpha, \beta) \in O'$ és $X \in \alpha\}$, $A'_2 = \{(Y, X) : Y = (\alpha, \beta) \in O'$ és $X \in \beta\}$. Adott (M, O) pár és a hozzá rendelt folyamat gráf kölcsönösen egyértelműen meghatározzák egymást. Ezért a továbbiakban az (M, O) párokat azonosítani fogjuk a hozzájuk rendelt folyamat gráfokkal. Egy $X \in M$ anyag ***forrás*** (M, O)-ban, ha nem létezik (Y, X) él a folyamat gráfban. Ha léteznek $X_1, X_2, ..., X_n$ csúcspontok a gráfban, melyekre $(X_1, X_2), (X_2, X_3), \ldots, (X_{n-1}, X_n)$ élek az (M, O) folyamat gráfban, akkor az ezen csúcspontok által meghatározott ***utat*** $[X_1, X_n]$-el fogjuk jelölni.

Legyen most $P \subseteq M$ és $R \subseteq M$ az ***előállítandó anyagok*** és a ***felhasználható nyersanyagok*** egymástól diszjunkt halmaza. Akkor az $\mathbf{M}$=(P, R, O) hármast a tekintett PNS-probléma ***strukturális modelljének*** nevezzük. Legyen adott egy $\mathbf{M} = (P, R, O)$ strukturális modell és legyen $o \subseteq O$ műveleti egységek egy halmaza. Ekkor egy (m, o) részgráfot az $\mathbf{M}$ strukturális modell egy ***lehetséges megoldás struktúrájának*** nevezünk, ha teljesülnek a következő tulajdonságok:

($\mathcal{A}1$) $P \subseteq m$,

($\mathcal{A}2$) $\forall X \in m$, $X \in R \Leftrightarrow$ nem létezik (Y, X) él (m, o)-ban,

($\mathcal{A}3$) $\forall Y_0 \in o$, $\exists$ $[Y_o, Y_n]$ út, amelyre $Y_n \in P$,

($\mathcal{A}4$) $\forall X \in m$, $\exists(\alpha, \beta) \in o$ úgy, hogy $X \in \alpha \cup \beta$.

Jelölje $S(\mathbf{M})$ az $\mathbf{M}$ strukturális modell lehetséges megoldás struktúráinak halmazát. $\mathbf{M}$ ***maximális struktúrája*** alatt a $\mu(\mathbf{M}) = \{\bigcup(m, o) \ : \ (m, o) \in S(\mathbf{M})\}$ megoldás struktúrát értjük. A műveleti egységek egy $o \subseteq O$ halmazára definiáljuk a $mat^{in}, mat^{out}, mat : \varphi'(O) \to \varphi'(M)$, $mat^{in}(o) = \{ \bigcup \alpha \ : \ (\alpha, \beta) \in o \}$, $mat^{out}(o) = \{ \bigcup \beta \ : \ (\alpha, \beta) \in o \}$ és $mat(o) = mat^{in}(o) \cup mat^{out}(o)$ leképezéseket. Ekkor, ha $(m, o) \in S(\mathbf{M})$, akkor $m = mat(o)$ ([15]).

Legyen $w : O \to R_+$ egy költségfüggvény a műveleti egységeken. Egy lehetséges megoldás struktúra költségét a benne levő műveleti egységek összköltségeként fogjuk definiálni. Így a PNS probléma:

(PNS-2) $$\min\{\textstyle\sum_{u \in o} w(u) \ : \ (m, o) \in S(\mathbf{M})\}.$$

Bizonyítást nyert, hogy a PNS-2 probléma NP teljes ([2, 17, 27]. Ez indokolja exponenciális idejű, Branch and Bound típusú megoldások kidolgozását. Fontos szerepet játszik a PNS-problémának a korlátozás és szétválasztás módszerével történő, különböző ([24, 21]) megoldásaiban a ([13, 14])-ban bevezetett döntési leképezés fogalma. Legyen o a műveleti egységek egy halmaza. Definiáljuk a $\Delta : \ M \setminus R \longrightarrow \wp(o)$, függvényt a következő módon. Minden $X \in M \setminus R$-re legyen $\Delta(X) = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in o \,\&\, X \in \beta\}$. Legyen $m \subseteq M \setminus R$ és $\delta : \ M \setminus R \longrightarrow \wp(o)$ úgy, hogy $\delta(X) \subseteq \Delta(X)$, minden $X \in m$-re. A $\delta[m] = \{(X, \delta(X)) : X \in m\}$ leképezést ***reguláris döntési leképezésnek***, vagy egyszerűen csak ***döntési leképezésnek*** nevezzük. Egy döntési leképezés ***konzisztens***, ha $\delta(X) \cap \Delta(Y) \subseteq \delta(Y)$, bármely $X, Y \in m$-re. Az $\mathbf{M}$ strukturális modell konzisztens döntési leképezéseinek halmazát $\Omega_{\mathbf{M}}$-el fogjuk jelölni. Most tegyük fel, hogy egy $\delta[m]$ döntési leképezés által leszögeztük a műveleti egységek egy részhalmazát abból a célból, hogy az m-beli anyagokat közvetlenül gyártsa. Ha veszünk egy további $Y \in M \setminus (m \cup R)$ anyagot és ennek közvetlen gyártására konzisztens módon hozzárendeljük az $u'_1, \ldots, u'_r$ $\Delta(Y)$-beli műveleti egységeket, akkor egy nagyobb részfolyamatot kapunk. Az ennek megfelelő

$$\delta'[m \cup \{Y\}] = \delta[m] \cup \{(Y, \{u'_1, \ldots, u'_r\})\}$$

döntési leképezésre azt mondjuk, hogy a $\delta[m]$ ***reguláris kiterjesztése*** vagy egyszerűen csak a $\delta[m]$ ***kiterjesztése***. A kiterjeszés függvény $\Omega_{\mathbf{M}}$-en egy részben rendezés relációt határoz meg. Jelöljük a részben rendezett halmazt $(\Omega_{\mathbf{M}}, \leq)$-el. A kiterjesztés relációt általánosíthatjuk úgy, hogy azt mondjuk, hogy $\delta_2[m_2]$ ***(reguláris) kiterjesztése*** $\delta_1[m_1]$-nek és ezt ugyancsak $\delta_1[m_1] \leq \delta_2[m_2]$ -vel jelöljük, ha $m_1 \subseteq m_2$, $\delta_1[m_1]$ és $\delta_2[m_2]$ konzisztens döntési leképezések, valamint $\delta_1(X) = \delta_2(X)$ minden $X \in m_1$-re. Az $(\Omega_{\mathbf{M}}, \leq)$ halmaz maximális elemeit **maximális döntési leképezéseknek** fogjuk nevezni és ezek halmazát $\Omega_{\mathbf{M}}^{\max}$-val fogjuk jelölni. Legyen továbbá $op(\delta[m]) = \cup\{\delta(X) : X \in m\}$ és $\rho : S(\mathbf{M}) \longrightarrow \Omega_{\mathbf{M}}^{\max}$ egy függvény, melyre $\rho(m,o) = \delta$ úgy, hogy $\delta(X) = \{u : u = (\alpha, \beta) \in o \,\&\, X \in \beta\}$, ha $X \in m \setminus R$, és $\delta(X) = \emptyset$, ha $X \notin M \setminus (R \cup m)$.

2.1. Lemma. ([21]) *ρ egy injektív leképezés $S(\mathbf{M})$-ről $\Omega_{\mathbf{M}}^{\max}$-ba, továbbá*

$$\rho^{-1}(\delta) = (mat(op(\delta)), op(\delta))$$

igaz minden olyan δ-ra, mely egy $S(\mathbf{M})$-beli elem ρ általi leképezése.

3. A döntési leképezések száma

1. Téziscsoport

3.1. Tétel. ([3]) *Minden $\emptyset \neq m \subseteq M \setminus R$-re, az m-en definiálható döntési leképezések száma* $2^{\sum_{X \in m} |\Delta(X)|}$.

Jelöljük $\tau(m)$-el az m anyaghalmaz felett definiálható konzisztens döntési leképezések számát.

3.2. Tétel. ([3]) *Minden $\emptyset \neq m \subseteq M \setminus R$-re, $\tau(m) = 2^{|\cup\{\Delta(X): X \in m\}|}$.*

Legyen $(m,o) \in S(\mathbf{M})$ egy tetszőleges lehetséges megoldás struktúra és $\rho(m,o) = \delta$. Ha $X \in mat^{in}(op(\delta))$, akkor létezik $u = (\alpha, \beta) \in op(\delta)$ úgy, hogy $X \in \alpha$. A δ definíciója szerint $u \in o$, és így $X \in m$. $(\mathcal{A}2)$ alapján $X \in mat^{out}(op(\delta)) \cup R$, tehát felírhatjuk, hogy:

$$(\mathcal{A}'2) \qquad mat^{in}(op(\delta)) \subseteq mat^{out}(op(\delta)) \cup R.$$

Az $(\mathcal{A}'2)$-nek megfelelő maximális konzisztens döntési leképezések száma nyilván nem kevesebb, mint a lehetséges megoldás struktúrák száma, így felülről becsülünk, ha az előbbit meghatározzuk. Ennek érdekében legyen (M,O) egy PNS probléma folyamat gráfja, $M = \{X_1, \ldots, X_k\}$ és $O = \{u_1, \ldots, u_n\}$. Legyen továbbá $O(X_j) = \{u : u = (\alpha, \beta) \in O \,\&\, X_j \in \alpha\}$ minden $X_j \in M$-re. Tetszőleges $j \in \{1, \ldots, k\}$-ra legyen

$$A_j = \{\delta : \delta \in \Omega_{\mathbf{M}}^{\max} \;\&\; X_j \in mat^{in}(op(\delta)) \setminus (mat^{out}(op(\delta)) \cup R)\}.$$

Minden $\emptyset \neq I = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq \{1, ..., k\}$-ra legyen $A_\emptyset = \Omega_{\mathbf{M}}^{\max}$ és $A_I = \cap_{i \in I} A_i$. Akkor

$$A_I = \left\{\delta : \delta \in \Omega_{\mathbf{M}}^{\max} \;\&\, \{X_{i_1}, \ldots, X_{i_l}\} \subseteq mat^{in}(op(\delta)) \setminus (mat^{out}(op(\delta)) \cup R)\right\}.$$

Legyen $\tau'(m)$ az $(\mathcal{A}'2)$ feltételt kielégítő m felett definiálható konzisztens döntési leképezések száma.

3.3. Tétel. ([3]) $\tau'(m) = |\Omega^{\max}_{\mathbf{M}} \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k)| = \Sigma_{I\subseteq\{1,...k\}}(-1)^{|I|} \cdot |A_I|$.

Az $|A_I|$ meghatározása általában, tetszőleges folyamat gráf esetén, rendkívül bonyolult, bizonyos sajátos esetekben azonban egyszerűsödhet. A továbbiakban azt a speciális esetet fogjuk megvizsgálni, amikor egyetlen input anyaggal működő, ún. szeparátor típusú műveleti egységeink vannak, melyekre $|\alpha| = 1$, bármely $u = (\alpha, \beta) \in O$ műveleti egységre. Legyen ismételten $I = \{i_1, \ldots, i_l\}$ és $O^*(X_{i_j}) = O(X_{i_j}) \setminus (\cup_{i\in I}\Delta(X_i))$.

3.4. Tétel. ([3]) *Szeparátor típusú műveleti egységek esetén*

$$|A_I| = \left(\prod_{t=1}^{l}\left(2^{|O^*(X_{i_t})|} - 1\right)\right) \cdot 2^{|O\setminus(\cup_{i\in I}\Delta(X_i))\setminus(\cup_{i\in I}O(X_i))|}.$$

A továbbiakban két speciális szeparátor típusú műveleti egységeket tartalmazó PNS problémaosztály esetén a lehetséges megoldás struktúrák számára explicit módon kiszámolható képleteket fogunk adni. Mindkét esetben legyen $M = \{X_1, \ldots, X_k\}$ az anyagok halmaza és $O = \{u_1, \ldots, u_k\}$ a műveleti egységek halmaza. Az első, az ún. *Egyenes* modellben $u_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ ahol $\alpha_1 = X_1$ és $\beta_1 = X_2$, $u_k = (\alpha_k, \beta_k)$ ahol $\alpha_k = X_k$ és $\beta_k = X_{k-1}$ és általában $u_i = (\alpha_i, \beta_i)$ ahol $\alpha_i = X_i$ és $\beta_i = \{X_{i-1}, X_{i+1}\}, (2 \le i \le k-1)$, míg a második, *Lánc* modellben $\beta_1 = \{X_2, X_k\}$ és $\beta_k = \{X_{k-1}, X_1\}$.

3.5. Tétel. ([4]) *Az Egyenes modellben* $|S(\mathbf{M})| \le L^{(1)}$ *ahol*

$$L^{(1)} = 2^k + \sum_{1\le j\le \frac{k+1}{2}} (-1)^j \cdot \left[\sum_{\substack{0\le r\le j-1\\ k-3j+r+2\ge 0}} \binom{j-1}{r} \cdot \binom{k-2j}{j-r-2} \cdot 2^{k-3j+r+2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{0\le r\le j-1\\ k-3j+r+1\ge 0}} \binom{j-1}{r} \cdot \binom{k-2j}{j-r-1} \cdot 2^{k-3j+r+1} + \sum_{\substack{0\le r\le j-1\\ k-3j+r\ge 0}} \binom{j-1}{r} \cdot \binom{k-2j}{j-r} \cdot 2^{k-3j+r}\right]$$

$$= 1 + \sum_{2\le t\le k} \sum_{1\le q\le \min\{\frac{t}{2};k-t+1\}} \binom{t-q-1}{q-1} \cdot \binom{k-t+1}{q}.$$

3.6. Tétel. ([4]) *A Lánc modellben* $|S(\mathbf{M})| \le C^{(1)}$ *ahol*

$$C^{(1)} = 2^k + \sum_{1\le j<\frac{k}{2}} (-1)^j \cdot \sum_{\substack{0\le r\le j-1\\ k-3j+r\ge 0}} \frac{k}{j} \cdot \binom{j}{r} \cdot \binom{k-2j-1}{j-r-1} \cdot 2^{k-3j+r} + e_k =$$

$$= 1 + \sum_{2\le t\le k}\left[\sum_{1\le q\le \min\{\frac{t}{2};k-t\}}\binom{t-q-1}{q-1}\cdot\binom{k-t-1}{q-1} + \right.$$

$$+\sum_{2\le i\le t}\sum_{1\le q\le \frac{t-i}{2}+1}\binom{t-i-q+1}{q-1}\cdot\binom{k-t-1}{q-1} +$$

$$\left. + \sum_{1\le i\le k-t}\sum_{1\le q\le \min\{\frac{t}{2};k-t-i+1\}}\binom{t-q-1}{q-1}\cdot\binom{k-t-i}{q-1}\right] + 1,$$

ahol

$$e_k = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}\cdot 2 & \text{, ha } k \text{ páros,} \\ 0 & \text{, ha } k \text{ páratlan.} \end{cases}$$

4. Összevonásos redukció

2. Téziscsoport

Két $u_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ és $u_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ műveleti egység ***összevonásán*** azok helyettesítését értjük egy új, $u = (\alpha_1 \cup \alpha_2, \beta_1 \cup \beta_2)$ műveleti egységgel. Az $u_1, u_2 \in O$ műveleti egységeket ***összevonhatók***nak nevezzük, ha $u_1 \in (m, o) \Longleftrightarrow u_2 \in (m, o)$, $\forall (m, o) \in S(\mathbf{M})$. Belátható, hogy ez a reláció ekvivalencia reláció az O halmazon, melyet $\equiv$-val fogunk jelölni. Tetszőleges $u \in O$-ra jelölje $C(u)$ az u műveleti egység ekvivalencia osztályát. Definiáljuk az $\mathbf{M}/\equiv\, = (P, R, O^*)$ strukturális modellt úgy, hogy

$$O^* = \{(\cup\{\alpha_t : u_t = (\alpha_t, \beta_t) \in C(u)\}, \cup\{\beta_t : u_t = (\alpha_t, \beta_t) \in C(u)\}) : u \in O\}$$

Definiáljuk a $\Psi : M \cup O \longrightarrow M \cup O^*$ leképezést a következőképpen:

$$\begin{cases} \Psi(X) = X & \text{, ha } X \in M, \\ \Psi(u_s) = (\cup\{\alpha_t : u_t \in C(u)\}, \cup\{\beta_t : u_t \in C(u)\}) & \text{, ha } u_s \in C(u), \\ \Psi(m) = \{\Psi(X) : X \in m\} & \text{, ha } m \subseteq M, \text{ és} \\ \Psi(o) = \{\Psi(u) : u \in o\} & \text{, ha } o \subseteq O \end{cases}$$

4.1. Tétel. ([20]) *A* $\Psi : S(\mathbf{M}) \longrightarrow S(\mathbf{M}/\equiv)$ *egy bijektív leképezés.*

Definiálunk az $\mathbf{M}/\equiv$ modellben egy $\bar{w}$ súlyfüggvényt a következőképpen:

$$\bar{w}(u) = \sum_{\substack{u_t \in C(u') \\ \Psi(u') = u}} w(u_t), \text{ minden } u \in O^*\text{-ra}$$

Legyen a PNS következő modellje:

(PNS-6) $$\min\left\{\sum_{u\in o}\bar{w}(u) : (m,o)\in S(\mathbf{M}/\equiv)\right\}.$$

4.2. Tétel. ([20]) *A PNS-2 feladat tetszőleges optimális megoldásának Ψ melletti képe optimális megoldása a PNS-6 feladatnak és fordítva, PNS-6 bármely optimális megoldásának Ψ melletti őse optimális megoldása PNS-2-nek.*

Legyen $\mathbf{M} = (P, R, O)$ egy PNS probléma strukturális modellje, melyre $S(\mathbf{M}) \neq \emptyset$, továbbá legyen $u_j \in O$ egy tetszőleges műveleti egység. Felépíthetünk egy új PNS strukturális modellt a következőképpen: $\mathbf{M}(u_j) = (P, R, O \setminus \{u_j\})$. Jelöljük az $\mathbf{M}(u_j)$ maximális struktúráját (M_j, O_j)-vel, feltéve hogy létezik, ellenkező esetben $M_j = O_j = \emptyset$.

4.3. Tétel. ([20]) *Bármely $u_i, u_j \in O$ műveleti egységekre $u_i \equiv u_j$ akkor és csakis akkor, ha $u_i \in O \setminus O_j$ és $u_j \in O \setminus O_i$ egyidejűleg teljesülnek vagy egyidejűleg nem teljesülnek.*

Összevonásos ekvivalencia relációt meghatározó eljárás (ER) ([20])

1. Legyen $i := 1$, $k := 1$, $N = \{1, \ldots, n\}$.
2. Határozzuk meg az $\mathbf{M}(u_i)$ maximális struktúráját az MSG maximális struktúra generáló algoritmussal.
3. Ha $O_i = O \setminus \{u_i\}$, akkor legyen $V_k = \{u_i\}$, $N = N \setminus \{i\}$, és $k = k + 1$.
4. Ha $i \neq n$, akkor $i = i + 1$ és térjünk a 2. lépésre.
5. Ha $N = \emptyset$, akkor VÉGE.

   Egyébként jelölje i az N legkisebb elemét és legyen

   $J = \{t : t \in N,\ u_t \in O \setminus O_i\}$, illetve $V = \emptyset$.
6. Ha $J = \emptyset$, akkor legyen $N = N \setminus \{i\}$, $V_k = V \cup \{u_i\}$, $k = k+1$, és térjünk az 5. lépésre.
7. Válasszunk egy j elemet J-ből. Legyen $J = J \setminus \{j\}$. Ha $u_i \in O \setminus O_j$, akkor legyen $V = V \cup \{u_j\}$, $N = N \setminus \{j\}$, és térjünk a 6. lépésre.

Az eljárás futásának eredményeképpen megkapjuk az $\equiv$ reláció $V_1, \ldots, V_k$ ekvivalencia osztályait.

5. Előretekintő B&B algoritmus

3. Téziscsoport

Minden $(m, o) \in S(\mathbf{M})$-re legyen $\rho((m, o)) = \delta[M \setminus R]$, ahol $\delta(X) = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in o$ és $X \in \beta\}$ ha $X \in m \setminus R$, és $\delta(X) = \emptyset$ ha $X \in M \setminus (R \cup m)$. Legyen $S'(\mathbf{M}) = \{\rho((m, o)) : (m, o) \in S(\mathbf{M})\}$. Akkor a PNS-2 helyett megoldhatjuk az alábbi feladatot:

$$(PNS\text{-}5) \qquad \min \left\{ \sum_{u \in op(\delta)} w(u) : \delta \in S'(\mathbf{M}) \right\}.$$

Minden $\delta[m] \in \Omega_{\mathbf{M}}$-re legyen $O_{\delta[m]} = op(\delta[m]) \cup (\bigcup\{C(u) : u \in op(\delta[m])\})$. Ha $|m| < |M \setminus R|$;, akkor legyen Y egy anyag, melyre $Y \in (mat^{in}(O_{\delta[m]}) \cup P) \setminus (mat^{out}(O_{\delta[m]}) \cup R)$, feltéve, hogy az utóbbi nem üres halmaz. Jelölje $K_1, \ldots, K_r$ a $\Delta(Y)$-nek az $\equiv$ reláció $\Delta(Y)$-re való szűkítése szerinti ekvivalencia osztályait. Minden $J \subseteq \{K_1, \ldots, K_r\}$ nem üres részhalmazra legyen $K_J = \cup\{K_t : K_t \in J\}$. Akkor a $\delta_t[m \cup \{Y\}] = \delta[m] \cup \{(Y, K_J)\}$, $J \subseteq \wp'(\{K_1, \ldots, K_r\})$ alakú konzisztens döntési leképezéseket a $\delta[m]$ Y szerinti ***irreguláris kiterjesztés***ének nevezzük, ha $O_{\delta(A)} \cap \Delta(B) \subseteq \delta(B), \forall A, B \in m \cup \{Y\}$. Nyilvánvalóan minden irreguláris kiterjesztés egy kiterjesztés is. Tekintsük az irreguláris kiterjesztés reflexív és tranzitív lezártját az $\Omega_{\mathbf{M}}$ halmazon. A kapott reláció részben rendezés, melyet $\preceq$ -vel fogunk jelölni. Legyen δ_0 az a döntési leképezés, melyre $\delta_0[\emptyset] = \emptyset$. Definiáljuk a $\Sigma_{\mathbf{M}}$ ***irreguláris döntési leképezések*** halmazát: $\Sigma_{\mathbf{M}} = \{\delta[m] : \delta[m] \in \Omega_{\mathbf{M}} \;\&\; \delta_0[\emptyset] \preceq \delta[m]\}$. Legyen $\delta[m] \in \Sigma_{\mathbf{M}}$, melyre

$$(mat^{in}(O_{\delta[m]}) \cup P) \setminus (mat^{out}(O_{\delta[m]}) \cup R) = \emptyset.$$

Definiálunk egy δ' döntési leképezést a következőképpen:

$$\delta'(X) = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) \in O_{\delta[m]} \;\&\; X \in \beta\}, \; \forall X \in M \setminus R.$$

Akkor δ'-t $\delta[m]$ ***irreguláris lezárásá***nak nevezzük és $\mathrm{icl}(\delta[\mathbf{m}])$-el jelöljük. Legyen

$$S^*(\mathbf{M}) = \{\mathrm{icl}(\delta[m]) : \delta[m] \in \Sigma_{\mathbf{M}} \,\&\, (mat^{in}(O_{\delta[m]}) \cup P) \setminus (mat^{out}(O_{\delta[m]}) \cup R) = \emptyset\}.$$

5.1. Lemma. ([21]) $S^*(\mathbf{M}) \subseteq S'(\mathbf{M})$.

5.2. Lemma. ([21]) *Legyen $\mathbf{M} = (P, R, O)$ egy PNS probléma strukturális modellje. Ha (m, o) a PNS-2 probléma egy optimális megoldása, akkor $\rho((m, o)) \in S^*(\mathbf{M})$.*

5.1. Tétel. ([21]) *A PNS-5 probléma helyett megoldhatjuk az alábbi feladatot:*

$$(PNS\text{-}7) \qquad \min \left\{ \sum_{u \in op(\delta)} w(u) : \delta \in S^*(\mathbf{M}) \right\}.$$

Definiáljuk a $\vartheta(\delta[m])$ függvényt minden $\delta[m] \in \Sigma_{\mathbf{M}}$-re a következőképpen:

$$\vartheta(\delta[m]) = \{\delta' : \delta' \in S^*(\mathbf{M}) \,\&\, (\exists \bar{\delta}[\bar{m}] \in \Sigma_{\mathbf{M}})(\delta[m] \preceq \bar{\delta}[\bar{m}] \,\&\, \mathrm{icl}(\bar{\delta}[\bar{m}]) = \delta')\}.$$

Legyen továbbá

$$g^*(\delta[m]) = \sum_{u \in O_{\delta[m])}} w(u).$$

Előretekintő B&B algoritmus (LABBA, Look Ahead B&B Algorithm) ([21])

Inicializálás Határozzuk meg az összevonásos ekvivalencia relációt. Legyen $L := \{\vartheta(\delta_0[\emptyset])\}$, $z^* := \infty$, $s := \emptyset$, és $r := 0$. Határozzuk meg $g^*(\delta_0[\emptyset])$-t.

Iteráció (r. iteráció)

1. *Befejezés*

   Ha $L = \emptyset$, akkor VÉGE: az s tartalmazza az optimális megoldást és z^* tartalmazza az optimum értéket. Egyébként térjünk a 2. lépésre.

2. *Levélkiválasztás*

   Ha L egyelemű, akkor válasszuk ki az egyetlen elemét. Egyébként válasszunk egy olyan $\vartheta(\delta[m])$ levelet L-ből, melyre a $g^*(\delta[m])/|m|$ érték minimális; ha több ilyen érték van, akkor válasszunk egyet tetszőlegesen közülük.

3. *Megoldástesztelés*

   Ha $T = (mat^{in}(O_{\delta[m]}) \cup P) \setminus (mat^{out}(O_{\delta[m]}) \cup R) \neq \emptyset$, akkor térjünk a 4. lépésre. Egyébként alkossuk meg a $\delta[m]$ irreguláris lezárását, jelölje ezt δ', továbbá ha $w(\delta') < z^*$, akkor aktualizáljuk a z^* és s értékeket: $z^* := w(\delta')$ és $s := \{\delta'\}$; ellenkező esetben z^* és s értékei nem változnak. Legyen $\Phi := \emptyset$ és térjünk a 6. lépésre.

4. *Szétválasztás*

   Válasszunk egy $X \in T$ anyagot, melyre $|(mat^{out}(\Delta(X)) \cap T|$ maximális, és alkossuk meg a $\delta[m]$ X szerinti irreguláris kiterjesztéseit.
   Ha nem létezik $\delta[m]$-nek ilyen kiterjesztése, akkor legyen $L := L \setminus \{\vartheta(\delta[m])\}$ és térjünk az 1. lépésre.
   Egyébként legyenek $\delta_i[m_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k$ a $\delta[m]$ X szerinti irreguláris kiterjesztései. Akkor legyen $\Phi = \{\vartheta(\delta_i[m_i]) : 1 \le i \le k\}$, és térjünk az 5. lépésre.

5. *Korlátozás*

   Számoljuk ki a $g^*(\delta_i[m_i])$ értékeket $i = 1, 2, \ldots, k$-ra, és térjünk a 6. lépésre.

6. *Felderítés*

   Definiáljuk újra az L halmazt a következőképpen:

   $$L := \{\vartheta(\bar{\delta}[\bar{m}]) : \vartheta(\bar{\delta}[\bar{m}]) \in (L \setminus \{\vartheta(\delta[m])\}) \cup \Phi,\ g^*(\bar{\delta}[\bar{m}]) < z^*\}.$$

   Legyen $r := r + 1$ és kezdjünk egy új iterációt (térjünk az 1. lépésre).

6. Parciális leszámlálási eljárás

4. Téziscsoport

Az alábbi eljárás nem sorolja fel az összes lehetséges megoldást, viszont felsorolja az összes optimális megoldást. Előnye, hogy kevesebb döntési leképezés vizsgálatát igényli, mint a teljes leszámlálás, és ennélfogva hatékonyabban dolgozik.

Parciális leszámlálás (Partial Enumeration, [23])

Inicializálás Határozzuk meg az összevonásos ekvivalenciát. Legyen o_0 azon műveleti egységek halmaza, melyeknek minden lehetséges megoldás struktúrában szerepelniük kell. Legyen $m_0 = \emptyset$ és $i = 0$.

Iteráció

1. Legyen $\delta_i[m_i]$ az $\hat{m}_i =< A_{j_1}, \ldots, A_{j_k} >$ rendezett tartománnyal rendelkező aktuális irreguláris döntési leképezés. és legyen $T_i = (mat^{in}(O_{\delta_i[m_i]}) \cup P) \setminus (mat^{out}(O_{\delta_i[m_i]}) \cup R)$. Térjünk a 2. lépésre.

2. Ha $T_i = \emptyset$, akkor alkossuk meg a $\delta_i[m_i]$ irreguláris lezárását, melyet jelöljünk δ_i'-val. Aktualizáljuk S értékét: $S = S \cup \{\delta_i'\}$, és térjünk a 4. lépésre. Egyébként térjünk a 3. lépésre.

3. Válasszunk egy legkisebb indexű X anyagot T_i-ből, melyre $|mat^{out}(\Delta(X)) \cap T_i|$ maximális. Vizsgáljuk meg a $\delta_i[m_i]$ döntési leképezés $\Delta(X) \setminus o_0$ megfelelő részhalmazaira való irreguláris kiterjesztéseit a $\models$ lineáris rendezés figyelembe vételével.

   Válasszuk az első olyan $K_J \subseteq \Delta(X) \setminus o_0$ részhalmazt, melyre $\delta_i[m_i] \cup \{(X, K_J')\}$ a $\delta_i[m_i]$ egy irreguláris kiterjesztése, ahol $K_J' = K_J \cup (\Delta(X) \cap o_0)$, feltételezve, hogy létezik ilyen K_J'. Legyen $\hat{m}_{i+1} = \hat{m}_i \bigvee \{X\}$ és $\delta_{i+1}[m_{i+1}] = \delta_i[m_i] \cup \{(X, K_J')\}$.
   Legyen $i = i + 1$, és térjünk a következő iterációs lépésre.

   Ha $\Delta(X)$ egyetlen megfelelő részhalmaza sem lehet a $\delta_i[m_i]$ irreguláris kiterjesztése, akkor térjünk a 4. lépésre.

4. Ha $\delta_i(A_{j_k}) \subset \Delta(A_{j_k})$ és van olyan $K_J \subseteq \Delta(A_{j_k}) \setminus o_0$ részhalmaz, melyre $\delta_i(A_{j_k}) \neq K_J'$, $\delta_i(A_{j_k}) \leq K_J'$, ahol
$$K_J' = K_j \cup (\Delta(X) \cap o_0)$$
   és a
$$\{(A_{j_1}, \delta_i(A_{j_1})\} \cup \cdots \cup \{(A_{j_{k-1}}, \delta_i(A_{j_{k-1}})\} \cup \{(A_{j_k}, K_J')\}$$
   döntési leképezés a $\{(A_{j_1}, \delta_i(A_{j_1})\} \cup \cdots \cup \{(A_{j_{k-1}}, \delta_i(A_{j_{k-1}})\}$-nak egy irreguláris kiterjesztése, akkor térjünk a 5. lépésre. Egyébként térjünk a 6. lépésre.

5. Válasszuk a $\Delta(A_{j_k}) \setminus o_0 \models$ szerinti első 4. pontbeli feltételt kielégítő részhalmazát és jelöljük K_J-vel. Legyen

$$\hat{m}_{i+1} =< A_{j_1}, \ldots, A_{j_k} >, \text{ és}$$

$$\delta_{i+1}[m_{i+1}] = \{(A_{j_1}, \delta_i(A_{j_1})\} \cup \cdots \cup \{(A_{j_{k-1}}, \delta_i(A_{j_{k-1}})\}) \cup \{(A_{j_k}, K'_J)\},$$

ahol

$$K'_J = K_j \cup (\Delta(X) \cap o_0).$$

Legyen $i := i + 1$, és térjünk a következő iterációs lépésre.

6. Legyen $k = k - 1$. Ha $k = 0$, akkor VÉGE. Egyébként térjünk a 4. lépésre.

S pontosan az $S^*(\mathbf{M})$ elemeit fogja tartalmazni, így tartalmazni fogja a PNS-2 összes optimális megoldásait is.

7. Automataelméleti megközelítés

Legyen $(\bar{M}, \bar{O})$ egy folyamat gráf és R egy anyaghalmaz. Azt mondjuk, hogy $(\bar{M}, \bar{O})$ az R által ***színezhető***, ha az $(\bar{M}, \bar{O})$ minden csúcspontja beszínezhető az alábbi eljárással.

Színező eljárás ([28]

1. Színezzük be $\bar{M} \cap R$ minden anyagát.

2. Mindaddig, amíg van olyan műveleti egység, melynek minden bemenete színezve van, válasszunk egy ilyen műveleti egységet és színezzük be annak kimeneti anyagait. Ha nincs ilyen műveleti egység, akkor VÉGE.

Megjegyzendő, hogy a színezhetőség tulajdonképpen a végrehajthatóságot jelenti. Egy PNS probléma azon lehetséges megoldás struktúráit, amelyek az $(\mathcal{A}1)$ - $(\mathcal{A}4)$ feltétel mellett még az

$(\mathcal{A}5)$ $(\bar{M}, \bar{O})$ az R által színezhető

feltételt is teljesítik, ***módosított lehetséges megoldás struktúráknak*** nevezzük. Ha $\mathbf{M} = (P, R, O)$ egy PNS probléma strukturális modellje, akkor jelöljük $\overline{S}(\mathbf{M})$-el a módosított lehetséges megoldás struktúrák halmazát. Most megadhatjuk a megoldás struktúrákhoz rendelt optimalizációs problémát:

$$\text{(PNS-8)} \qquad \min\left\{\sum_{u\in\bar{O}} w(u) : (\bar{M},\bar{O}) \in \overline{S}(\mathbf{M})\right\}.$$

A továbbiakban ***módosított PNS problémán*** a (*PNS-8*) problémát értjük. A módosított PNS problémához rendelt $\mathbf{B} = (B, O')$ automatát a következőképpen definiáljuk. Legyen $B = B' \cup \{\diamond\}$, melyre $B' = \varphi'(M)$ és $\diamond \notin B'$, és legyen $O' = \{u : u = (C, D) \in O$ és $R \cap D = \emptyset\}$. Az automata egy állapota megfelel egy adott pillanatban rendelkezésre álló anyagok halmazának. Az $\diamond$ állapot a sikertelen átmenetek jelölésére szolgál. Az átmeneteket a következőképpen definiáljuk. Minden $Q \in B'$ és $u = (C, D) \in O'$-re legyen

$$Qu^{\mathbf{B}} = \begin{cases} Q \cup D & \text{ha } C \subseteq Q \\ \diamond & \text{egyébként,} \end{cases}$$

továbbá $\diamond u^{\mathbf{B}} = \diamond$. A $\mathcal{G}_{\mathbf{B}}$ átmeneti gráf súlyozását a következőképpen definiáljuk. Ha (Q, Q') egy él $\mathcal{G}_{\mathbf{B}}$-ben, melynek címkéi $u_{j_1}, \ldots, u_{j_t}$, akkor az él súlya $w = \min\{w(u_{j_1}), \ldots, w(u_{j_t})\}$ lesz, továbbá egyetlen olyan u_{j_l}, $1 \le l \le t$, címkét tartunk meg, melyre $w = w(u_{j_l})$, a többi címkéket töröljük. Jelöljük az így kapott súlyozott, címkézett gráfot $(\mathcal{G}_{\mathbf{B}}, w)$-vel. Definiálunk továbbá egy olyan $\mathcal{B} = (\mathbf{B}, R, F)$ felismerőt, melyre $F = \{Q : Q \in B' \quad \text{és} \quad P \subseteq Q\}$.

5. *Téziscsoport*

Minden $u, v \in O'$-re legyen $v \ll u$ ha $u = v$ vagy $mat^{out}(v) \cap mat^{in}(u) \neq \emptyset$. Ez a reláció reflexív és tranzitív. Jelölje $\overset{*}{\ll}$ a $\ll$ tranizitív lezárását. Azt mondjuk, hogy két $u, v \in O'$ műveleti egység ***egymást kölcsönösen eléri***, ha $u \overset{*}{\ll} v$ és $v \overset{*}{\ll} u$. Belátható, hogy a kölcsönös elérhetőség ekvivalencia reláció O'-n, melyet $\bowtie$-nel, az ekvivalencia osztályt pedig $\mathcal{C}$-vel fogjuk jelölni. Báremely $C, C' \in O'/\bowtie$-ra legyen $C \lll C'$ ha $C = C'$ vagy léteznek $u \in C$ és $v \in C'$ műveleti egységek úgy, hogy $u \overset{*}{\ll} v$. A $\lll$ reláció részben rendezés $\mathcal{C}$-n, mely kiegészíthető lineáris rendezésre. Így, az általánosság megszorátása nélkül feltételezhetjük, hogy $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_h\}$ valamely $1 \le h \le |O'|$-ra úgy, hogy bármely $i, j \in \{1, \ldots, h\}$-re $C_i \lll C_j$-ből következik $i \le j$. Definiáljuk az $\ell : (O')^* \to \{1, \ldots, h\}$ függvényt a következőképpen:

$$\ell(p) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } p = \lambda, \\ m & \text{, ha } p \in O',\ p \in C_m \\ \max\{\ell(u_t) : 1 \le t \le l\} & \text{, ha } p = u_1 \ldots u_l \in (O')^+. \end{cases}$$

Bármely $p = u_1 \ldots u_l \in O'$-re legyen $w(p) = \sum_{i=1}^{l} u_i$. ***Kiterjesztett állapoton*** egy $(Rp, p, w(p))$ hármast értünk, ahol p egy olyan szó, mely az automatát az R-ből egy F-beli állapotba viszi át. Azt mondjuk, hogy $(Rp, p, w(p))$ egy ***optimális kiterjesztett állapot***, ha egy kiterjesztett állapot és $w(p) \le w(p')$ bármely $(Rp', p', w(p'))$ kiterjesztett állapotra.

PAT algoritmus a PNS-8 optimális megoldásainak meghatározására ([22])

Inicializálás. $i := 0,\ L_0 := \{(R, \lambda, 0)\}$.

Iteráció

1. $M_i = \{(Rp, p, w(p)) \in L_i : w(p) \leq w(q),\ \forall (Rq, q, w(q)) \in L_i\}$.
$S_i = \{(Rp, p, w(p)) \in M_i : P \subseteq Rp\}$.
Ha $S_i \neq \emptyset$, akkor VÉGE; az S_i elemei optimális kiterjesztett állapotok.

2. Válasszunk egy tetszőleges $(Rt, t, w(t)) \in M_i$ elemet, és legyen $t = u_1 \dots u_n$.

3. Legyen $i = i + 1,\ L_i = L_{i-1}$.

4. $L_i = L_i \setminus \{(Rt, t, w(t))\}$.

5. Legyen $V_i = \{v \in O' \setminus \{u_1, \dots, u_n\} : mat^{in}(v) \subseteq Rt$ és $\ell(v) \geq \ell(t)\}$.
Ha $V_i = \emptyset$, akkor térjünk az *1.* lépésre.
Egyébként legyen $V_i = \{v_1, \dots, v_m\}$.

6. Minden $j = 1, \dots, m$ értékre rendre hajtsuk végre az alábbi lépéseket:

- $A(v_j) := \{(Rq, q, w(q)) \in L_i : Rq \supseteq Rtv_j$ és $w(q) \leq w(tv_j)$ és $(w(q) < w(tv_j)$ vagy $\ell(q) \leq \ell(tv_j))\}$,
- $D(v_j) := \{(Rq, q, w(q)) \in L_i : Rq \subseteq Rtv_j$ és $w(q) \geq w(tv_j)$ és $(w(q) > w(tv_j)$ vagy $\ell(q) \geq \ell(tv_j))\}$,
- ha $A(v_j) = \emptyset$, akkor legyen
$$L_i := (L_i \setminus D(v_j)) \cup \{(Rtv_j, tv_j, w(tv_j))\}.$$

7. Térjünk az *1.* lépésre.

7.1. Tétel. ([22]) *A PAT algoritmus véges számú lépés után véget ér és egy optomális kiterjesztett állapotot határoz meg, mely a PNS-8 probléma optimális megoldásának felel meg.*

Hivatkozások

[1] Aho A.V., J. E. Hopcroft, J. D. Ullman, The Design and Analysis of Computer Algorithms, *Addison-Wesley, Reading Mass*, 1974.

[2] Blázsik, Z., B. Imreh, A note on connection between PNS and set covering problems, *Acta Cybernetica*, **12**, 1996, 309-312.

[3] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, On Decision-Mappings Related to Process Network Synthesis Problem, *Acta Cybernetica* **13**, 1998, 319-328.

[4] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Explicit bound for the number of feasible solutions of special PNS-problem classes, *PU.M.A*, **9**, 1998, 17-27.

[5] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Kiszámolható korlátok speciális PNS-problémaosztályok lehetséges megoldásai számára, *Új utak a magyar operációkutatásban, szerk. Komlósi, S., Szántai T., Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs,* 1999, 182-194.

[6] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács, On Bottleneck and k-sum version of the Process Network Synthesis Problem, *Novi Sad Journal Of Mathematics*, **3**, 2000, 11-19.

[7] Blázsik, Z., Cs. Holló, B. Imreh, Cs. Imreh, Z. Kovács, On a well-solvable class of the PNS problem, *Novi Sad Journal Of Mathematics*, **3**, 2000, 21-30.

[8] Blázsik, Z., Cs. Holló, Cs. Imreh, Z. Kovács, Heuristics for the Process Network Synthesis Problem, *New Trends in Equilibrium Systems, Mátraháza Optimization Days*, Kluwer Academic Publishers, 2000, 1-16.

[9] C. Croitoru, *Tehnici de bază în Optimizarea Combinatorie*, Ed. Universităţii Al. I. Cuza, Iaşi, 1992

[10] Floudas, C. A., I. E. Grossmann, Algorithmic Approaches to Process Synthesis: Logic and Global Optimization, AiChE Symposium Series No. 304, **91** (Eds: L. T. Biegler and M. F. Doherly), (1995), 198-221. .

[11] Friedler, F., K. Tarján, Y. W. Huang, and L. T. Fan, Graph-Theoretic Approach to Process Synthesis: Polynomial Algorithm for maximal structure generation, *Computer chem. Engng.* **17**, 1993, 924-942.

[12] Friedler, F., J. B. Varga, and L. T. Fan, Decision-Mappings: A Tool for Consistent and Complete Decisions in Process Synthesis, *Chem. Eng. Sci.*, **50** (11), 1995, 1755-1768.

[13] Friedler, F., J.B. Varga, E. Fehér, and L.T. Fan, Combinatorially Accerelated Branch-and-Bound Method for Solving the MIP Model of Process Network Synthesis, International Conference on State of the Art in Global Optimization: Computational Methods and Applications, Princeton, 1995.

[14] Friedler, F., J. B. Varga, E. Fehér, L. T. Fan, Combinatorially Accelerated Branch-and -Bound Method for Solving the MIP Model of Process Network Synthesis, *Nonconvex Optimization and its Applications*, (eds.: C. A. Floudas and P. M. Pardalos), Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, U.S.A., 1996, 609-626.

[15] Friedler, F., K. Tarján, Y. W. Huang, L. T. Fan, Graph-Theoretic Approach to Process Synthesis: Axioms and Theorems, *Chem. Eng. Sci.*, **47** (8), 1992, 1973-1988.

[16] Friedler, F., K. Tarján, Y. W. Huang, L. T. Fan, Combinatorial Algorithms for Process Synthesis, *Computer chem. Engng.*, **16**, 1992, 313-320.

[17] Friedler, F., J. Fulop, B. Imreh, On the reformulation of some classes of PNS-problems as set covering problems, *Acta Cybernetica*, **13**, 1998, 329-337.

[18] Friedler, F., L. T. Fan, B. Imreh, Process Network Synthesis: Problem Definition, *Networks*, **28**, 1998, 119-124.

[19] Grossmann, I. E., V. T. Voudouris, O. Ghattas, Mixed-Integer Linear Programming Reformulations for Some Nonlinear Discrete Design Optimization Problems, In: Recent Advances in Global Optimization (Eds: C. A. Floudas and P. M. Pardalos) Princeton University Press, New Jersey, 1992.

[20] Holló, Cs., Z. Blázsik, Cs. Imreh, Z. Kovács, On a Merging Reduction of the Process Network Synthesis Problem, *Acta Cybernetica* **14**, 1999, 251-261.

[21] Holló, Cs., A Look Ahead Branch-and-Bound Procedure for Solving PNS Problems, *PU.M.A.*, **2**, 2000, 265-279.

[22] Holló, Cs., A Procedure Based on Automaton Theory Approach for Solving Modified PNS Problems, *PU.M.A.*, **1-2**, 2002, 159-169.

[23] Holló, Cs., A Partial Enumeration Algorithm for Solving PNS Problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **7-9**, 2003, 855-864.

[24] Imreh, B., F. Friedler, L. T. Fan, An Algorithm for Improving the Bounding Procedure in Solving Process Network Synthesis by a Branch-and-Bound Method, *Developments in Global Optimization*, ed. I. M. Bonze, T. Csendes, R. Horst, P. M. Pardalos, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1996, 301-348.

[25] Imreh, B., G. Magyar, Empirical Analysis of Some Procedures for Solving Process Network Synthesis Problem, *Journal of Computing and Information Technology*, **6**, 1998, 373-382.

[26] Imreh, B., *Kombinatorikus optimalizálás*, Novadat, 2000.

[27] Imreh, B., J. Fülöp, F. Friedler, A note on the Equivalence of the Process Network Synthesis and Set Covering problems, *Acta Cybernetica* **14**, 2000, 497-502.

[28] Imreh, B., Automaton Theory Approach for Solving PNS Problems, *Acta Cybernetica*, **15**, 2002, 327-338.

[29] Imreh, B., Z. Kovács, A note on separation-networks and automata, *Publicationes Mathematicae*, submitted for publication.

[30] Imreh, Cs., Jól megoldható PNS osztályokról, *Új utak a magyar operációkutatásban, szerk. Komlósi, S., Szántai T., Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs*, 1999, 168-181.

[31] Imreh, Cs., A new well-solvable class of PNS problems, *Computing*, **66**, 2001, 289-296.

[32] Karp R. M., Reducibility among Combinatorial Problems in Complexity of Computer Computations, *R. E. Miller and T. W. Thatcher, eds.*, Plenum Press, New York, 1972.

[33] Szpilrajn, E., Sur l'extension de l'ordre partiel, *Fund. Math.* **16** (1930), 386-389.

[34] Volpert, A. I., Differential equations on graphs, *Mat. sb.*, **88**, 1972, 578-588.