Fekete Árpád

TAUBER-TÍPUSÚ TÉTELEK KÖZÖNSÉGES ÉS STATISZTIKUS KONVERGENCIÁRA, STATISZTIKUS HATÁRÉRTÉKRE

Doktori (PhD) értekezés

Témavezető: Dr. Móricz Ferenc
Egyetemi tanár
Szegedi Tudományegyetem
Bolyai Intézet

Szegedi Tudományegyetem
Analízis Kutatócsoport
2006

Ezúton szeretnék köszönetet mondani **Dr. Móricz Ferenc** Professzor Úrnak azért a rengeteg segítségért és tanácsért, amit az eddigi munkáimhoz adott.

Külön köszönet illeti **Dr. Totik Vilmos** Professzor Urat a tudományos tevékenységemben nyújtott támogatásáért.
A kutatásaimat az Analízis Kutatócsoport TS44782 számú OTKA pályázata segítette.

Tartalomjegyzék

I. Szummációs módszer – Tauber–típusú tételek 2

II. Karamata egy Tauber–típusú tételének élesítése 5

1. Integrálok súlyozott közép szerinti szummálhatósága R_+ felett 5
2. Főbb eredmények 7
3. Bizonyítások 12
4. A súlyfüggvény speciális választásai 16

III. Statisztikus konvergencia és statisztikus határérték 19

IV. Schoenberg tételének nemdiszkrét változata 25

1. Schoenberg klasszikus tétele 25
2. Főbb eredmények 25
3. Segéderedmények 28
4. A 4.2.1. és a 4.2.2. Tétel bizonyítása 30
5. Észrevételek 32

V. Tauber–típusú tételek statisztikus határértékre 36

1. Főbb eredmények 36
2. Bizonyítások 41

VI. Tauber–típusú feltételek kettős sorozatok statisztikus szummálhatóságához 47

1. Bevezetés 47
2. Főbb eredmények 48
3. Bizonyítások 53
4. Megoldásra váró probléma 61

Összefoglaló 62

Summary 65

Irodalomjegyzék 68

I. SZUMMÁCIÓS MÓDSZER - TAUBER–TÍPUSÚ TÉTELEK

Bevezetésként összefoglaljuk a végtelen mátrixokkal indukált szummációs módszereket. Tekintsük az $A = (a_{nk})_{n,k=0}^{\infty}$ mátrixot. Az s_k sorozatot A-*szummálhatónak* nevezzük az s számhoz, ha a

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k, \ n = 0, 1, 2, ...$$

minden n-re s-hez konvergál. A σ_n-t az s_k *lineáris közepeinek* nevezzük. Például az

$$a_{nk} := \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{ha } k \leq m, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

választás a jól ismert Cesàro-közepeket adja vissza, mivel ekkor

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} s_k.$$

Speciálisan ebben az esetben az A-szummálhatóság a Cesàro $(C, 1)$ szummálhatóság definícióját adja. A szummációelméletben alapvető szerepet játszik a Silverman-Toeplitz tétel, mely szerint annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az A mátrix-szummációs módszer megőrizze az s határértéket minden s-hez konvergáló s_k sorozat esetén, a következő:

$$\begin{aligned} &i, \ \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \quad k = 0, 1, 2, ... \\ &ii, \ \sup_n \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |a_n k| \right\} < \infty \\ &iii, \ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} = 1. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Azokat a szummációs módszereket, melyekre (1.1.1) teljesül *rendszerisnak* nevezzük. Az olyan tételeket, melyekben kiderül, hogy egy szummációs módszer reguláris, N. Abel után Abel-típusú tételeknek nevezzük. Abel 1820 körül kapta meg klasszikus tételét.

1.1. Tétel (Abel). *Ha az s_k sorozat konvergál valamely s számhoz, akkor az s_k sorozat Abel-szummálható is s-hez, azaz* $\lim_{x\to 1-}(1-x)\sum_{k=0}^{\infty} s_k x^k = s$.

Tehát az Abel-szummálhatóság reguláris szummációs módszer, ugyanúgy, mint a Cesàro-szummálhatóság. Valójában az Abel-szummálhatóság példa egy nemdiszkrét szummációs eljárásra. Természetesen tekinthetjük azt a speciális esetet, amikor $x = x_n := \frac{n}{n+1}$, $n = 0, 1, 2, ...$ Ekkor $A = \left\{n^k/(n+1)^{k+1}\right\}_{n,k=0}^{\infty}$. Ha Abel tételének megfordítását nézzük, könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a megfordítás általában nem igaz. Jó példa erre az egyszerű $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ sor, amely ugyan Abel-szummálható 1/2-hez, de nyilván divergens. Sokkal érdekesebbek tehát az Abel-típusú tételek megfordítottjai, azaz amikor azt keressük, hogy egy sorozat szummálhatóságából milyen feltétel hozzávételével következik a konvergencia. Ezeket nevezzük Tauber-típusú tételeknek, mivel 1897-ben Alfred Tauber (1866-1942) adott először ilyen tételt [29].

1.1.2. Tétel (Tauber). *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummálható és*

$$na_n = o(1),$$

akkor a sor konvergens is.

1910-ben J. E. Littlewood az $na_n = o(1)$ feltételt a sokkal általánosabb $na_n = O(1)$ feltétellel helyettesítette, majd 1914-ben G. Hardyval még tovább élesítették. Littlewood erős "kétoldali" Tauber-feltételét a sokkal gyengébb "egyoldali" feltételre cserélték. E tétel a matematikai analízis egy új ágát nyitotta meg és ők használták először a Tauber-típusú tétel elnevezést.

1.1.3. Tétel (Hardy-Littlewood). *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummálható és*

$$na_n \geq -H \ \ (H \text{ pozitív konstans}),$$

akkor a sor konvergens is.

Speciálisan, ha $a_n \geq 0$ minden n-re akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor Abel-szummálhatósága ekvivalens a konvergenciájával. A Hardy-Littlewood tételnek egyébként nagy szerepe van annak az érdekes ténynek a bizonyításában, miszerint a

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

Riemann zéta függvény, mely Re$z > 1$ esetén abszolút konvergens, nem Abel-szummálható a $z = 1 + it$ egyenes mentén.

Bár történetileg a Tauber-típusú tételeket az Abel-szummálhatósághoz kapcsolódóan vizsgálták, az 1.1.2. és 1.1.3. Tétel igaz a Cesàro-szummálhatóság esetén is.

Wiener nagy jelentőségű értekezése 1932-ben jelent meg, melyben a Tauber-típusú tételek olyan általános elméletét adta meg, amely a Banach algebrák elméletének módszereit használja fel a Fourier-analízisben. Wiener tételéből speciális esetként visszakapjuk a Hardy-Littlewood tételt is.

A Tauber-típusú tételek nagy szerepet játszanak a prímszámtétel több bizonyításában is. Ikehara 1931-ben adott Tauber-típusú tételével egyszerűen bizonyítható , hogy $\Pi(x) \sim x/\ln x$, ha $x \to \infty$, ahol $\Pi(x)$ jelöli az x-nél kisebb prímek számát.

A Tauber-típusú tételek terén még Jovan Karamata (1902-1967) munkássága emelhető ki, eredményeivel és egyik tételének élesítésével a következő fejezetben foglalkozunk.

II. KARAMATA EGY TAUBER-TÍPUSÚ TÉTELÉNEK ÉLESÍTÉSE

J. Karamata 1930-ban publikálta Littlewood klasszikus tételének viszonylag rövid (2 oldalas), elegáns bizonyítását, amellyel hatalmas elismerést váltott ki. E bizonyításban már figyelembe vette a Schmidt által bevezetett ún. lassan változó függvényeket, de Karamata adott pontos definíciót e függvényekre, felfedezte szerkezetüket, vizsgálta alapvető tulajdonságaikat: az $L(x)$, $x \geq 0$ függvényt *lassan változónak* nevezzük, ha pozitív, folytonos és teljesül, hogy

$$\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1, \ x \to \infty,$$

minden rögzített $\lambda > 0$-ra. Az $r(x) = x^\alpha L(x)$ függvényt *regulárisan változónak* nevezzük, ahol α a reguláris változás indexe. Például a pozitív konstansok, a $\log x$ vagy a $\log\log x$ függvények lassan változók, míg az x^2 és az $x^2 \log x$ függvények 2 indexű regulárisan változók. A lassan és regulárisan változó függvényeket később az analízis több ágában alkalmazták, mint például a komplex analízisben (egész függvények vizsgálatában), a Mercer-típusú tételek elméletében, de számos felhasználási területük van a valószínűségelméletben is [1].

Karamata 1937-ben publikálta egyik híresebb Tauber-típusú tételét [13, Theorem 5, 36.o], melyben elegendő feltételt adott arra vonatkozólag, hogy lokálisan integrálható függvények súlyozott közép szerinti szummálhatóságából következzen az integrálok konvergenciája is. Mi erre az implikációra szükséges és elegendő feltételeket adunk, amelyek speciális esetként tartalmazzák Karamata tételét.

II.1. Integrálok súlyozott közép szerinti szummálhatósága R_+ felett

Legyen P az $R_+ := [0, \infty)$ intervallumon értelmezett függvény olyan, hogy

$$P \quad \text{nemcsökkenő az} \quad R_+\text{-on}, \quad P(0) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = \infty. \tag{2.1.1}$$

P-t *súlyfüggvénynek* nevezzük, figyelembe véve, hogy pozitív Borel mértéket indukál R_+-on.

Minden komplex értékű $f : R_+ \to C$ függvényre, mely Lebesgue integrálható minden véges $(0,t)$ intervallumon, $0 < t < \infty$, szimbólummal: $f \in L^1_{\text{loc}}(R)$, tekintsük az

$$s(x) := \int_0^x f(y)dy \quad \text{és} \quad \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x), \quad t > 0, \tag{2.1.2}$$

integrálokat, feltéve, hogy $P(t) > 0$. $\sigma(t)$ definíciójában az integrál Riemann-Stieltjes értelemben létezik.

σ-t az s függvény súlyozott közepének nevezzük és az

$$\int_0^\infty f(x)dx \tag{2.1.3}$$

integrált a *súlyozott közép szerint szummálhatónak* nevezzük a P súlyfüggvénnyel, röviden: (W,P) *szummálható*, ha a következő véges határérték létezik:

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = L. \tag{2.1.4}$$

Könnyen ellenőrizhető, ha a véges

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = L \tag{2.1.5}$$

határérték létezik (másszóval az $\int_0^{\to\infty} f(x)dx$ improprius integrál konvergens), akkor a (2.1.4) határérték is létezik ugyanazon L-lel. Ennek megfordítása azonban általában nem igaz.

Azonban, ha a valós értékű $f \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$ függvény nemnegatív R_+-on, akkor a (2.1.4) és (2.1.5) határértékek létezése ekvivalens. Valóban, az állítás következik a

$$\sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t \Big\{ \int_0^x f(y)dy \Big\} dP(x) = \int_0^t f(y) \Big\{ 1 - \frac{P(y)}{P(t)} \Big\} dy \tag{2.1.6}$$

egyenlőségből, ahol felhasználtuk (2.1.2)-t és alkalmaztuk Fubini tételét. Nevezetesen, ekkor $\sigma(t) \le s(t)$ minden $t > 0$-ra. Sőt még az is fennáll, hogy ha $\lim_{t\to\infty} s(t) = \infty$, akkor (2.1.1) és (2.1.6) miatt szükségszerűen $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \infty$. Ez bizonyítja a (2.1.4) és (2.1.5) ekvivalenciáját.

Az is világos, hogy a (2.1.3) integrál (W, P) szummálhatósága nem függ az $f(x)$ értékétől semmilyen $(0, x_0)$ véges intervallumon, ahol $0 < x_0 < \infty$ rögzített. A (2.1.4)-ben az L határérték (ha létezik) azonban már függ f értékétől az R_+-on.

Ha $P(x)$-nek x-et választjuk, $P(x) := x$, akkor a Hardy [11, 11.o] és Titchmarsh [30, 26.o] által vizsgált $(C, 1)$ Cesàro szummálhatóságot kapjuk. Karamata a P-t szigorúan monoton növő és folytonos függvénynek választotta a (2.1.1) feltétellel és erre kapott figyelemreméltó elegendő Tauber feltételeket, melyek teljesülése esetén a (2.1.4) $\Rightarrow$ (2.1.5) implikáció következik. Ennek élesítésével foglalkozik a következő alfejezet.

II.2. Főbb eredmények

Célunk tehát olyan szükséges és elegendő feltételek létrehozása, amelyek segítségével az adott súlyozott közép szerinti szummálhatóságból, vagyis (2.1.4)-ből következik a (2.1.3) integrál konvergenciája.

Vezessük be a felső és alsó megengedett függvények fogalmát a P súlyfüggvényre vonatkozóan. Legyen $\rho : R_+ \to R_+$ szigorúan növekvő, folytonos függvény, amelyre $\rho(t) \to \infty$, $t \to \infty$. ρ-t *felső megengedett függvénynek* nevezzük P-re vonatkozóan, ha

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} > 1. \tag{2.2.1}$$

Hasonlóan ρ-t *alsó megengedett függvénynek* nevezzük P-re vonatkozóan, ha

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t))} > 1. \tag{2.2.2}$$

Jelölje Λ_u és Λ_ℓ a felső és alsó megengedett függvények osztályát.

Valós értékű f függvényre igaz a következő egyoldali Tauber-típusú tétel.

2.2.1. Tétel (Fekete-Móricz [7]). *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (2.1.1)*, továbbá $f : R_+ \to R$ és $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a (W, P) szummálhatóságból, azaz* (2.1.4)*-ből következzen a* (2.1.3) *integrál konvergenciája ugyanazzal a határértékkel az, hogy teljesüljön az alábbi két feltétel:*

$$\sup_{\rho\in\Lambda_u} \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \geq 0 \tag{2.2.3}$$

és

$$\sup_{\rho\in\Lambda_\ell}\ \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{P(t)-P(\rho(t))}\int_{\rho(t)}^{t}\{s(t)-s(x)\}dP(x)\geq 0. \tag{2.2.4}$$

Elegendő a (2.2.3) és (2.2.4) feltételeket valamely alkalmas $\widetilde{\Lambda}_u\subset\Lambda_u$ és $\widetilde{\Lambda}_\ell\subset\Lambda_\ell$ részosztályokra ellenőrizni. Nézzünk meg alkalmas részosztályokat a következő három fontos speciális esetben.

(i) Karamata cikke [13] alapján tegyük fel, hogy

(2.2.5) P szigorúan növő és folytonos függvény valamely $[t_0,\infty]$ intervallumon,

ahol $P(t_0)=0$, $0\leq t_0<\infty$. Ekkor P inverz függvénye – jelöljük P^{-1}-gyel – létezik és szintén monoton növő és folytonos R_+-on.

Ekkor elegendő (2.2.3)-at és (2.2.4)-et a

$$\widetilde{\Lambda}_u:=\{\rho_\lambda(t):=P^{-1}(\lambda P(t)):\lambda>1\}\quad\text{és}\quad\widetilde{\Lambda}_\ell:=\{\rho_\lambda(t):=P^{-1}(\lambda P(t)):0<\lambda<1\}$$

részosztályokon ellenőrizni.

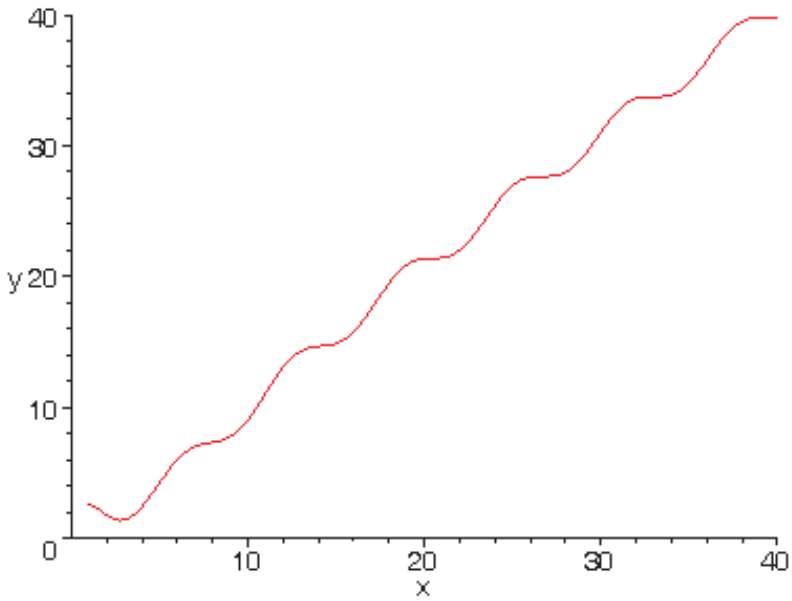
Az $s:R_+\to R$ függvényt *lassan csökkenőnek* nevezzük P-re vonatkozóan, ha

$$\lim_{\lambda\to 1+}\ \liminf_{t\to\infty}\ \min_{t\leq x\leq T}\{s(x)-s(t)\}\geq 0, \tag{2.2.6}$$

ahol

$$T:=P^{-1}(\lambda P(t)),\quad t>0. \tag{2.2.7}$$

Lassan csökkenő függvény tetszőleges gyorsan növekedhet, a lényeg az, hogy a csökkenés, ha van, csak lassú lehet. Lassan csökkenő függvény például az $f(x)=x+\cos x+\cos(a\ln x)$, amint azt a 2.2.1. ábra mutatja.



2.2.1. ábra

A "lassan csökkenő" kifejezést Schmidt [10] vezette be valós számok sorozataira. Valós értékű függvényekre a (2.2.6) definíció Karamatának [13, Theorem 5, 36.o] köszönhető. Nyilvánvaló, hogy a (2.2.3) feltétel egyszerű következménye (2.2.6)-nak.

Érdekes tény, hogy a (2.2.6) ekvivalens a

$$\lim_{\lambda\to 1-} \liminf_{t\to\infty} \min_{T\le x\le t} \{s(t)-s(x)\} \ge 0 \tag{2.2.8}$$

feltétellel, ahol T-t a (2.2.7)-ben definiáltuk. Ezt az állítást a II.3. részben bizonyítjuk.

Másrészt a (2.2.3) és (2.2.4) feltételek általában függetlenek egymástól, amint a II.3. részben egy illusztrált példa mutatja.

A 2.2.1. Tétel a 2.3.1. Lemmával Karamata [13, 36.o] tételéhez vezet, mely a 2.2.1. Tétel közvetlen következménye.

2.2.1. Korollárium (Karamata). *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (2.2.5), $f : R_+ \to R$ *és* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$. *Ha a* (2.1.2)*-ben definiált s függvény lassan csökkenő P-re vonatkozóan, akkor a* (2.1.3) *integrál* (W, P) *szummálhatóságból következik annak konvergenciája is ugyanazzal a határértékkel.*

(ii) Ha a P súlyfüggvényre teljesül (2.2.1) és

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\lambda t)}{P(t)} > 1 \quad \text{minden} \quad \lambda > 1\text{-re}, \tag{2.2.9}$$

akkor a

$$\widetilde{\Lambda}_u := \{\rho_\lambda(t) := \lambda t : \lambda > 1\} \quad \text{és} \quad \widetilde{\Lambda}_\ell := \{\rho_\lambda(t) := \lambda t : 0 < \lambda < 1\}$$

részosztályok alkalmasak (2.2.3) és (2.2.4) ellenőrzésére. Ezt az esetet tanulmányozza [17] részletesen.

(iii) A harmadik eset, mikor P-re teljesül (2.1.1) és

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{P(t^\lambda)}{P(t)} > 1 \quad \text{minden} \quad \lambda > 1\text{-re.} \tag{2.2.10}$$

Ekkor a

$$\widetilde{\Lambda}_u := \{\rho_\lambda(t) := t^\lambda : \lambda > 1\} \quad \text{és} \quad \widetilde{\Lambda}_\ell := \{\rho_\lambda(t) := t^\lambda : 0 < \lambda < 1\}$$

részosztályok alkalmasak (2.2.3) és (2.2.4) ellenőrzésére.

A 2.2.1. Tétel bizonyítását megvizsgálva (II.3. rész) kiderül, hogy a 2.2.1. Tétel érvényes marad, ha a (2.2.3) és a (2.2.4) feltételt a

$$\inf_{\rho\in\Lambda_u} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \le 0$$

és

$$\inf_{\rho\in\Lambda_\ell} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \le 0$$

feltételekkel helyettesítjük.

Abban a speciális esetben, mikor a P súlyfüggvényre (2.2.1) teljesül azt állítjuk, hogy az előbbi két feltétel közvetlenül következik a

$$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le T} \{s(x) - s(t)\} \le 0, \tag{2.2.11}$$

tulajdonságból, ahol T-t a (2.2.7)-ben definiáltuk. Az $s : R_+ \to R$ függvényt a (2.2.11) tulajdonsággal *lassan növőnek* nevezzük a P-re vonatkozóan.

Ez az állítás könnyen következik abból a tényből, hogy a (2.2.11) feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha $-s$ lassan csökkenő. Így ebből valamint a 2.3.1. Lemmából következik, hogy (2.2.11) ekvivalens a

$$\lim_{\lambda\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \max_{T\le x\le t} \{s(t) - s(x)\} \le 0$$

feltétellel.

Komplex értékű f függvényre bebizonyítjuk a következő kétoldali Tauber-típusú tételt.

2.2.2. Tétel (Fekete-Móricz [7]). *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (2.1.1), $f : R_+ \to C$ *és* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$. *Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy a* (2.1.3) *integrál* (W, P) *szummálhatóságból következzen annak konvergenciája is ugyanazzal a határértékkel az, hogy az alábbi két feltétel egyike teljesüljön:*

$$\inf_{\rho\in\Lambda_u} \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \right| = 0 \tag{2.2.12}$$

vagy

$$\inf_{\rho\in\Lambda_\ell} \limsup_{t\to\infty} \left| \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \right| = 0. \tag{2.2.13}$$

Ugyanúgy, mint a 2.2.1. Tétel esetén, itt is elegendő a (2.2.12) vagy (2.2.13) feltételeket valamely alkalmas $\widetilde{\Lambda}_u \subset \Lambda_u$ vagy $\widetilde{\Lambda}_\ell \subset \Lambda_\ell$ részosztályokra ellenőrizni.

Példaként tegyük fel, hogy a P súlyfüggvény teljesíti a (2.2.5) feltételt. Ebben az esetben az $s : R_+ \to C$ függvényt *lassan oszcillálónak* nevezzük a P-re vonatkozóan, ha

$$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{t\le x\le T} |s(x) - s(t)| = 0, \tag{2.2.14}$$

teljesül, ahol T-t a (2.2.7)-ben definiáltuk. A "lassan oszcilláló" kifejezést Hardy [10] vezette be számsorozatokra. Függvények esetében a (2.2.14) feltétel Karamatánál [13, Theorem 3, 28.o] fordul elő.

Az alábbi korollárium közvetlen következménye a 2.2.2. Tételnek.

2.2.2. Korollárium. *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (2.2.5), $f : R_+ \to C$ *és* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$. *Ha a* (2.1.2)*-ben definiált s függvény lassan oszcilláló a P-re vonatkozóan, akkor a* (2.1.3) *integrál* (W, P) *szummálhatóságból következik annak konvergenciája is ugyanazzal a határértékkel.*

Megjegyezzük, hogy a (2.2.14) ekvivalens a

$$\lim_{\lambda\to 1-} \limsup_{t\to\infty} \max_{T\le x\le t} |s(t)-s(x)| = 0$$

feltétellel, mely hasonlóan bizonyítható, mint a 2.3.1. Lemma a következő részben.

II.3. Bizonyítások

A következő lemma fontos szerepet játszik a 2.2.1. Korollárium bizonyításában.

2.3.1. Lemma. *Bármely* $s : R_+ \to R$ *függvény esetén* (2.2.6) *és* (2.2.8) *ekvivalensek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (2.2.6) teljesül, azaz bármely $\epsilon > 0$-hoz létezik $\lambda_1 = \lambda_1(\epsilon) > 1$ és $t_1 = t_1(\epsilon) > 0$, amelyre

$$s(x) - s(t) \ge -\epsilon, \quad \text{ha} \quad t_1 \le t \le x \le P^{-1}(\lambda_1 P(t)). \tag{2.3.1}$$

Célunk az $s(t) - s(x)$ különbség minimumának alulról való becslése a

$$P^{-1}(\lambda_1^{-1} P(t)) \le x \le t \quad \text{és} \quad t \ge t_2 \tag{2.3.2}$$

feltételekkel, ahol t_2-t olyan nagyra választjuk, hogy $P^{-1}(\lambda_1^{-1}P(t_2)) \ge t_1$. (2.3.2)-ből következik, hogy

$$t_1 \le x \quad \text{és} \quad t \le P^{-1}(\lambda_1 P(x)).$$

Így (2.3.1) szerint

$$s(t) - s(x) \ge \min_{x\le\tau\le t} \{s(\tau) - s(x)\} \ge \min_{x\le\tau\le P^{-1}(\lambda_1 P(x))} \{s(\tau) - s(x)\} \ge -\epsilon.$$

Ez bármely t-re és x-re igaz (2.3.2)-ben. Ezért

$$\min_{P^{-1}(\lambda_1^{-1}P(t))\le x\le t} \{s(t) - s(x)\} \ge -\epsilon, \quad \text{ha} \quad t \ge t_2.$$

Mivel $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi, (2.2.8) adódik.

Másrészt tegyük fel, hogy (2.2.8) teljesül. A fentihez hasonló gondolatmenettel kapjuk (2.2.6)-ot. $\diamond$

A következő lemmában megmutatjuk, hogy ha a (2.1.3) integrál (W, P) szummálható egy véges határértékhez, akkor a P súlyfüggvénnyel képezett ún. *mozgó súlyozott közepei* is ugyanahhoz a határértékhez konvergálnak. A mozgó közepeknek számtalan alkalmazási területe van, többek közt az idősorok analízisében használják, de a befektetési és biztosításmatematika területén is gyakran előfordulnak.

2.3.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy P-re teljesül* (2.1.1)*, továbbá az $f : R_+ \to C$ függvényre $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$ és* (2.1.4)*-ben létezik a véges L határérték. Ha $\rho \in \Lambda_u$, akkor*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} s(x)dP(x) = L; \tag{2.3.3}$$

ha viszont $\rho \in \Lambda_\ell$, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} s(x)dP(x) = L. \tag{2.3.4}$$

Bizonyítás. (i) Tegyük fel, hogy $\rho \in \Lambda_u$. A (2.1.2) miatt,

$$\frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} s(x)dP(x)$$

$$= \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \{P(\rho(t))\sigma(\rho(t)) - P(t)\sigma(t)\} \tag{2.3.5}$$

$$= \sigma(\rho(t)) - \frac{P(t)}{P(\rho(t)) - P(t)} \{\sigma(\rho(t)) - \sigma(t)\}.$$

(2.2.1)-et felhasználva,

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t)) - P(t)} = \left\{\liminf_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t)} - 1\right\}^{-1} < \infty.$$

Így a (2.1.1)-ből és (2.3.5)-ből (2.3.3) következik.

(ii) Tegyük fel, hogy $\rho \in \Lambda_\ell$. A (2.1.2) alapján,

$$\frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} s(x)dP(x) = \sigma(t) + \frac{P(\rho(t))}{P(t) - P(\rho(t))} \{\sigma(t) - \sigma(\rho(t))\}. \tag{2.3.6}$$

(2.2.2) miatt,

$$0 < \limsup_{t\to\infty} \frac{P(\rho(t))}{P(t) - P(\rho(t))} = \left\{\liminf_{t\to\infty} \frac{P(t)}{P(\rho(t))} - 1\right\}^{-1} < \infty,$$

és (2.1.1)-ből valamint (2.3.6)-ból adódik (2.3.4). $\diamond$

Példa. A $(C,1)$ szummálhatóság esetében egy egyszerű példát adunk arra, hogy a 2.2.1. Tételben a (2.2.3) és a (2.2.4) feltételek függetlenek egymástól. Tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 2^n \le x < 2^n + 1, \\ 0 & \text{ha} \quad 2^n + 1 \le x < 2^n + 2, \\ -1 & \text{ha} \quad 2^n + 2 \le x < 2^n + 3; \ n = 2, 3, \ldots; \\ 0 & \text{különben} \quad R_+\text{-on.} \end{cases}$$

függvényt. Egyszerű számolással igazolható, hogy a (2.1.5) határérték nem létezik, de a (2.1.4) létezik és 0-val egyenlő. Ezért a 2.3.2. Lemma alkalmazható. Ekkor $P(x) := x$, így a (2.2.9) feltétel kielégül, $\rho_\lambda(t) := \lambda t$ alkalmas választás $1 \neq \lambda > 0$-ra. Ezért bármely $\lambda > 1$-re

$$\text{(2.2.3}'\text{)} \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{(\lambda-1)t} \int_t^{\lambda t} \{s(x) - s(t)\} dx$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(\lambda-1)t} \int_t^{\lambda t} s(x)dx - \limsup_{t\to\infty} s(t) = 0 - 1 = -1;$$

míg bármely $0 < \lambda < 1$-re

$$\text{(2.2.4}'\text{)} \qquad \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{(1-\lambda)t} \int_{\lambda t}^{t} \{s(t) - s(x)\} dx$$

$$= \liminf_{t\to\infty} s(t) - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{(1-\lambda)t} \int_{\lambda t}^{t} s(x)dx = 0 - 0 = 0.$$

A 2.2.1. *Tétel bizonyítása. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy a (2.1.3) integál konvergens, azaz a (2.1.5) feltétel teljesül. Ekkor (2.1.4) is teljesül.

Legyen $\rho \in \Lambda_u$ tetszőleges. A 2.3.2. Lemma alapján

$$\text{(2.3.7)} \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho(t)) - P(t)} \int_t^{\rho(t)} s(x)dP(x) - \lim_{t\to\infty} s(t) = L - L = 0.$$

Ez (2.2.3)-at még erősebb formában bizonyítja.

Tetszőleges $\rho \in \Lambda_\ell$ esetén hasonló módon kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho(t))} \int_{\rho(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) = 0, \tag{2.3.8}$$

amely erősebb, mint (2.2.4).

Elegendőség. Tegyük fel, hogy a (2.1.3) integrál (W, P) szummálható, azaz a (2.1.4) feltétel teljesül és fennállnak a (2.2.3) és (2.2.4) feltételek is. Igazolnunk kell (2.1.5) érvényességét.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. (2.2.3) és (2.2.4) miatt létezik olyan $\rho_1 \in \Lambda_u$ és $\rho_2 \in \Lambda_\ell$, amelyre teljesül

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho_1(t)) - P(t)} \int_{t}^{\rho_1(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \geq -\epsilon \tag{2.3.9}$$

és

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho_2(t))} \int_{\rho_2(t)}^{t} \{s(t) - s(x)\} dP(x) \geq -\epsilon. \tag{2.3.10}$$

A (2.1.4), (2.3.9) feltételekből és a 2.3.2. Lemmából következik, hogy

$$-\epsilon \leq \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(\rho_1(t)) - P(t)} \int_{t}^{\rho_1(t)} s(x) dP(x) - \limsup_{t\to\infty} s(t) = L - \limsup_{t\to\infty} s(t);$$

míg a (2.1.4), (2.3.10) feltételekből és a 2.3.2. Lemma alapján

$$-\epsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t) - \lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t) - P(\rho_2(t))} \int_{\rho_2(t)}^{t} s(x) dP(x) = \liminf_{t\to\infty} s(t) - L.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenséget egybevetve azt kapjuk, hogy

$$L - \epsilon \leq \liminf_{t\to\infty} s(t) \leq \limsup_{t\to\infty} s(t) \leq L + \epsilon.$$

Mivel $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi volt, ezért (2.1.5) következik. $\diamond$

A 2.2.2. Tétel bizonyítása. Szükségesség. Tegyük fel, hogy a (2.1.3) integrál konvergens. Teljesen hasonló módon, mint a 2.2.1 Tétel bizonyításának szükségesség részében, ha $\rho \in \Lambda_u$, akkor (2.3.7) és ha $\rho \in \Lambda_\ell$, akkor (2.3.8) következik.

Elegendőség. (i) Tegyük fel, hogy a (2.1.3) integrál (W, P) szummálható egy véges L értékhez és teljesül (2.2.12). Célunk (2.1.5) bizonyítása.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. (2.2.12) szerint létezik olyan $\rho_1 \in \Lambda_u$ amelyre

$$L_1 := \limsup_{t\to\infty} \Big| \frac{1}{P(\rho_1(t)) - P(t)} \int_t^{\rho_1(t)} \{s(x) - s(t)\} dP(x) \Big| \le \epsilon. \tag{2.3.11}$$

A (2.1.4), (2.3.11) és a 2.3.2. Lemma szerint a következő becslés érvényes:

$$\limsup_{t\to\infty} |L - s(t)| \le \lim_{t\to\infty} \Big| L - \frac{1}{P(\rho_1(t)) - P(t)} \int_t^{\rho_1(t)} s(x) dP(x) \Big| + L_1 \le \epsilon.$$

Mivel $\epsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi volt, így (2.1.5) teljesül.

(ii) A (2.2.13) feltétel érvényessége esetén (2.1.5) bizonyítása hasonló a fenti (i) esethez. $\diamond$

II.4. A súlyfüggvény speciális választásai

(i) Ha $P(x) := x$ bármely $x \in R_+$-ra, akkor a (W, P) súlyozott közép szerinti szummálhatóság éppen a $(C, 1)$ szummálhatóság. Ezt az esetet tanulmányozza [17].

Megemlítjük, hogy a lassú csökkenés (2.2.6) feltétele teljesül, ha létezik olyan $H \ge 0$ konstans és $x_0 \ge 0$, amelyre

$$xf(x) \ge -H \quad \text{majdnem minden} \quad x > x_0 \text{ -ra.}$$

Valós számok sorozataira analóg feltételt vezetett be Landau [16]. Komplex esetben a következő

$$|xf(x)| \le H \quad \text{majdnem minden} \quad x > x_0 \text{ -ra}$$

klasszikus Tauber feltétel igaz, amely elvezet a lassan oszcillálás (2.2.14) feltételéhez. Hardy [10] vezette be az ezzel analóg feltételt valós számok sorozataira. Részletesebben ad erről leírást [17].

(ii) Ha

$$P(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le x < 1, \\ \log x & \text{ha} \quad x \ge 1, \end{cases}$$

akkor a súlyozott közép szerinti (W, P) szummálhatóság a *harmonikus közép* szerinti szummálhatóság (elsőrendű). Megfigyelhetjük, hogy a [17]-ban szereplő eredmények

nem alkalmazhatóak, mivel ekkor a (2.2.9) feltétel nem teljesül. Viszont ez (2.2.10) tipikus esete.

Ezúttal a lassú csökkenés (2.2.6) feltétele

$$\lim_{\lambda\to 1+}\liminf_{t\to\infty}\min_{\log t\le\log x\le\lambda\log t}\{s(x)-s(t)\}\ge 0 \tag{2.4.1}$$

alakú. Továbbá a lassú oszcillálás (2.2.14) feltétele

$$\lim_{\lambda\to 1+}\limsup_{t\to\infty}\max_{\log t\le\log x\le\lambda\log t}|s(x)-s(t)|=0 \tag{2.4.2}$$

alakú. Ez utóbbi két feltétel következik a

$$(x\log x)f(x)\ge -H \quad \text{majdnem minden} \quad x>x_0 \text{ -ra} \tag{2.4.3}$$

és

$$(x\log x)|f(x)|\le H \quad \text{majdnem minden} \quad x>x_0 \text{ -ra} \tag{2.4.4}$$

feltételekből, ahol $H\ge 0$ és $x_0\ge 1$ konstansok.

(2.4.1) igazolásához legyen $\lambda>1$ és $1<t\le x\le t^\lambda$. (2.4.3) miatt

$$s(x)-s(t)=\int_t^x f(y)dy\ge -H\int_t^x\frac{dy}{y\log y}=-H\log\Big(\frac{\log x}{\log t}\Big)\ge -H\log\lambda.$$

$\lambda\to 1+$ adja (2.4.1) egyenlőtlenséget. Megjegyezzük, hogy ezzel analóg feltételt vezetett be Kwee [15] valós számok sorozataira.

A (2.4.4) $\Rightarrow$ (2.4.2) következtetés hasonlóan megmutatható.

(iii) Ha

$$P(x):=\begin{cases}0 & \text{ha} \quad 0\le x<e,\\ \log\log x & \text{ha} \quad x\ge e,\end{cases}$$

akkor a (W,P) súlyozott közép szerinti szummálhatóság a másodrendű harmonikus közép szerinti szummálhatóság. Ebben az esetben tekinthetjük a Λ_u és Λ_ℓ

$$\widetilde{\Lambda}_u:=\{\rho_\lambda(t):=\exp(\log t)^\lambda : t\ge e \quad \text{és} \quad \lambda>1\}$$

és

$$\widetilde{\Lambda}_\ell:=\{\rho_\lambda(t):=\exp(\log t)^\lambda : t\ge e \quad \text{és} \quad 0<\lambda<1\}$$

részosztályait.

Ekkor a lassú csökkenés (2.2.6) feltétele

$$\lim_{\lambda\to 1+} \liminf_{t\to\infty} \min_{\log\log t\le \log\log x\le \lambda\log\log t} \{s(x)-s(t)\} \ge 0$$

szerint adott, ami következik az

$$x(\log x)(\log\log x)f(x) \ge -H \quad \text{majdnem minden} \quad x > x_0 \text{ -ra}$$

feltételből, ahol $H \ge 0$ és $x_0 \ge e$ konstansok. Továbbá a lassú oszcillálás (2.2.14) feltétele a

$$\lim_{\lambda\to 1+} \limsup_{t\to\infty} \max_{\log\log t\le \log\log x\le \lambda\log\log t} |s(x)-s(t)| = 0$$

szerint adott, ami következik a

$$x(\log x)(\log\log x)|f(x)| \le H \quad \text{majdnem minden} \quad x > x_0 \text{ -ra}$$

feltételből.

(iv) Harmadrendű harmonikus közép szerinti módszer esetén a súlyfüggvényt a

$$P(x) := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0 \le x < e^e, \\ \log\log\log x & \text{ha} \quad x \ge e^e \end{cases}$$

szerint választjuk és hasonlóan az m.-ik rendű is megválasztható a fent mutatott esetekhez hasonlóan, ahol $m = 4, 5, \ldots$.

III. STATISZTIKUS KONVERGENCIA ÉS STATISZTIKUS HATÁRÉRTÉK

H. Fast [2] volt az első matematikus, aki 1951-ben sorozatok határértékének egy új kiterjesztését vezette be, amelyet statisztikus konvergenciának nevezett el. Schönberg [25] bizonyította a statisztikus konvergencia elemi tulajdonságait és szummációs eljárásként tanulmányozta. Ez utóbbi két matematikus észrevette, ha egy korlátos sorozat statisztikusan konvergál valamely L számhoz, akkor az Cesàro-szummálható is L-hez.

Az évek folyamán a statisztikus konvergencia fogalma hasznosnak bizonyult a számelméletben, valószínűségszámításban, mértékelméletben és szummációelméletben. Mielőtt a definíciót megadjuk, emlékeztetünk egy pozitív számokból álló K halmaz természetes sűrűségének fogalmára:

$$\sigma(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : k \in K\}|, \tag{3.1.1}$$

ahol $|\{k \le n : k \in K\}|$ jelöli K azon elemeinek számát, amelyek nem haladják meg n-et. Ha x olyan sorozat, hogy x_k kielégít valamely P tulajdonságot minden k-ra, kivéve egy 0 természetes sűrűségű halmazt, akkor azt mondjuk, hogy x_k kielégíti P-t "majdnem minden" k-ra és a.a.-val rövidítjük (almost all).

3.1.1. Definíció: Az x_k számsorozat *statisztikusan konvergál* L-hez, jelben:

$$\text{st}-\lim_{k\to\infty} x_k = L,$$

ha bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : |x_k - L| \ge \epsilon\}| = 0, \tag{3.1.2}$$

vagy másképpen $|x_k - L| < \epsilon$ a.a. k.

Példaként legyen

$$x_k := \begin{cases} 1, & \text{ha } k \text{ négyzetszám} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Nyilván hagyományos értelemben x_k divergens számsorozat, de mivel

$$|\{k \le n : x_k \ne 0\}| \le \sqrt{n},$$

így definíció szerint st$-\lim x_k = 0$.

Nyilvánvaló, hogy ha az x_k számsorozat konvergens, akkor statisztikusan is konvergál ugyanahhoz a határértékhez. Ha az x_k számsorozat statisztikusan konvergens, akkor *statisztikusan korlátos* is. Ez utóbbin azt értjük, hogy létezik olyan $K > 0$ szám, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : |x_k| \ge K\}| = 0.$$

Ugyanis, ha tetszőleges $\epsilon > 0$ esetén a K-t $(L+\epsilon)$-nak választjuk és

$$|x_k| \ge K \quad \text{valamely } k\text{–ra},$$

akkor

$$|x_k - L| \ge |x_k| - L \ge K - L = (L+\epsilon) - L = \epsilon.$$

Lényeges tény, hogy statisztikusan konvergens sorozatokra igaz a felbontási tétel, azaz ha az x_k számsorozat statisztikusan konvergens, akkor az x_k felbontható olyan y_k és h_k számsorozatok összegére, amelyekre igaz, hogy

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \text{st}-\lim_{k\to\infty} x_k$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\{k \le n : h_k \ne 0\}| = 0.$$

Érdekes kérdésként merült fel, hogy egy számsorozat statisztikus konvergenciájából milyen kiegészítő Tauber-feltétel mellett következik annak közönséges konvergenciája. David Borwein megsejtette az $x_k - x_{k+1} = \mathrm{O}(\frac{1}{k})$ feltételt, de csak 1984-ben bizonyította be Fridy, aki a statisztikus konvergencia sok más tulajdonságát is vizsgálta [3].

A statisztikus konvergencia fogalmának ismeretében vezessük be mérhető függvények statisztikus határértékének definícióját a ∞-ben. A függvények legyenek valós (esetenként komplex) értékűek, melyek Lebesgue mérhetők a $(0,\infty)$ intervallumon.

3.1.2. Definíció: Az f függvénynek a ∞-ben *statisztikus határértéke* van, ha létezik olyan l szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{x \in (0,a) : |f(x) - l| > \epsilon\}| = 0, \tag{3.1.3}$$

ahol az abszolútérték jel a halmaz Lebesgue mértékét jelöli. A következő jelölést használjuk:

$$\text{st}-\lim_{x\to\infty} f(x) = l. \tag{3.1.4}$$

A következő példa jól illusztrálja a definíciót:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \in [2^n, 2^n+1], \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy $\text{st}-\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Meg kell említenünk a statisztikus alsó és felső határ definícióját is, amelyeket szintén Móricz Ferenc vezetett be [19]. Tegyük fel, hogy $f(x)$ valós értékű függvény, amely mérhető a $(0,\infty)$ intervallumon. Jelölje $A(f)$ azon $u \in R$ számok halmazát, amelyekre

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{x \in (0,a) : f(x) < u\}| \neq 0. \tag{3.1.5}$$

Ez azt jelenti, hogy ez a határérték vagy egyáltalán nem létezik, vagy létezik, de pozitív.

3.1.3. Definíció: Az f függvény ∞-ben vett *statisztikus alsó határa*

$$\text{st}-\liminf_{x\to\infty} f(x) := \inf A(f), \tag{3.1.6}$$

feltéve, hogy $A(f)$ nem üres, különben $\text{st}-\liminf_{x\to\infty} f(x) := \infty$.
Az f függvény *statisztikus felső határát* a ∞-ben ($\text{st}-\limsup_{x\to\infty} f(x)$) hasonló módon definiáljuk, most $B(f)$ tartalmazza azon $v \in R$ számokat, amelyekre

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{x \in (0,a) : f(x) > v\}| \neq 0. \tag{3.1.7}$$

Az f függvény *statisztikusan korlátos*, ha létezik olyan $K \in R$, hogy

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{x \in (0,a) : |f(x)| > K\}| = 0.$$

Legyen f statisztikusan korlátos. Ekkor a $\text{st}-\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ akkor és csak akkor létezik, ha

$$\text{st}-\liminf_{x\to\infty} f(x) = \text{st}-\limsup_{x\to\infty} f(x) = l.$$

Nevezzük az f függvényt *Cauchynak a ∞ környezetében*, ha bármely $\epsilon > 0$–hoz létezik egy $x_0 = x_0(\epsilon)$, amelyre

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{x \in (0,a) : |f(x) - f(x_0)| > \epsilon\}| = 0. \tag{3.1.8}$$

Utóbbi definíció bevezetésével megállapíthatjuk, hogy ha f-nek statisztikus határértéke van a ∞–ben, akkor f Cauchy a ∞ környezetében. Valóban, adott $\epsilon > 0$-hoz (3.1.3) szerint $|f(x) - l| < \epsilon/2$ a $(0,\infty)$-ben majdnem minden x-re. Válasszunk ki belőlük egyet és jelöljük x_0-lal. Ekkor minden $x \in (0,a)$-ra

$$|f(x) - f(x_0)| < |f(x) - l| + |l - f(x_0)| < |f(x) - l| + \frac{\epsilon}{2}.$$

Ebből adódóan

$$\{x \in (0,a) : |f(x) - f(x_0)| > \epsilon\} \subseteq \{x \in (0,a) : |f(x) - l| > \frac{\epsilon}{2}\},$$

amiből (3.1.8) következik.

A statisztikusan konvergens sorozatokhoz hasonlóan a statisztikus határértékre is igaz a felbontási tétel. Eszerint, ha f-nek létezik statisztikus határértéke a ∞-ben, akkor f felbontható g és h mérhető függvények összegére, amelyekre igaz, hogy

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \text{st–}\lim_{x\to\infty} f(x) \tag{3.1.9}$$

és

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{x \in (0,a) : h(x) \neq 0\}| = 0. \tag{3.1.10}$$

Függvények statisztikus határértékének bevezetésével több említésre méltó eredményt is fel lehetett mutatni. Összefüggés mutatkozott például egy Lebesgue mérhető függvény erősen p-Césaro szummálhatósága és statisztikus határértéke közt a ∞-ben.

3.1.4. Definíció: Legyen f Lebesgue–mérhető függvény a $(0,\infty)$ intervallumon. Az *f erősen p-Cesàro szummálható a ∞-ben*, ha létezik olyan $l \in C$ szám, hogy

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}\int_0^a |f(x) - l|^p dx = 0.$$

3.1.1. Tétel (Móricz [19]). (α) *Ha f erősen p–Césaro szummálható a ∞–ben $l \in C$–hez valamely $0 < p < \infty$–re, akkor f–nek létezik statisztikus határértéke a ∞–ben és ez éppen az l.*

(β) *Ha f-nek létezik a ∞-ben statisztikus határértéke, mondjuk $l \in C$ és f korlátos, akkor f erősen p-Cesàro szummálható ugyanahhoz az l-hez a ∞-ben minden $0 < p < \infty$-re.*

Szép tétel adódott a Fourier transzformáltakhoz kapcsolódóan is. Emlékeztetőül az $f \in L^1(R)$ függvény Fourier transzformáltja:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-itx} dx, \quad t \in R. \tag{3.1.11}$$

Ha $f \in L^1(R)$ és $\hat{f} \in L^1(R)$, akkor érvényes az inverziós formula:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{ixt} dt, \quad x \in R, \tag{3.1.12}$$

kivéve esetleg egy 0 mértékű halmaztól eltekintve.
Sajnos általában $\hat{f} \notin L^1(R)$, így (3.1.12) nem érvényes. Ez motiválja az f *Dirichlet integráljának* bevezetését:

$$s_\nu(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\nu}^{\nu} \hat{f}(t) e^{ixt} dt, \ \nu > 0, \ x \in R.$$

(3.1.11) és a Fubini-tétel alapján könnyen adódik, hogy

$$s_\nu(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t) \frac{\sin \nu t}{t} dt. \tag{3.1.13}$$

Világos, hogy ha $f \in L^1(R)$, akkor $s_\nu(f, x)$ minden $\nu > 0$–ra és $x \in R$–re létezik. Ezért tehát elvárnánk, hogy talán (3.1.12) is igaz lehet, ha az $s_\nu(f, x)$, $\nu \to \infty$, határérték jobb oldalát helyettesítjük az egyetlen $f \in L^1(R)$ feltétel mellett. Azonban mégsincs ez így. Létezik olyan $f \in L^1(R)$ függvény, amelyre

$$\limsup_{\nu \to \infty} |s_\nu(f, x)| = \infty, \quad x \in R,$$

kivéve esetleg egy 0 mértékű halmazt. Viszont igaz lesz a következő tétel.

3.1.2. Tétel. (Móricz [19]) (α) *Ha* $f \in L^1(R)$, *akkor* R *azon részhalmaza, amelyre*

$$\text{st–}\lim_{\nu\to\infty} s_\nu(f,x) = f(x) \tag{3.1.14}$$

nem teljesül Lebesgue szerint 0 mértékű.

(β) *Ha* $f \in L^1(R)$ *és* f *folytonos és korlátos függvény, akkor* (3.1.14) *minden* $x \in R$*–re teljesül.*

(γ) *Ha* $f \in L^1(R)$ *és* f *olyan folytonos függvény* R*–en, amelyre* $f(x) \to 0$, *ha* $|x| \to \infty$, *akkor* (3.1.14) *egyenletesen is teljesül* $x \in R$*–ben.*

IV. SCHOENBERG TÉTELÉNEK NEMDISZKRÉT VÁLTOZATA

IV.1. Bevezetés – Schoenberg klasszikus tétele

1959-ben I. J. Schoenberg [25] szép tételt bizonyított a statisztikus konvergencia jellemzésére, amelyet cikkében D-konvergenciának nevezett. Célunk e klasszikus tételt többszörös sorozatokra kiterjeszteni, valamint egy ezzel analóg tételt adni statisztikus határértékre. Sőt e tételeket még vektor értékű sorozatokra és függvényekre is kiterjesztjük.

4.1.1. Tétel. (Schoenberg [25]) *Legyen* $(x_k) : N_+ \to C$. *A*

$$\text{st–}\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$$

fennállásának szükséges és elegendő feltétele az, hogy bármely $t \in R$*-re*

$$\lim_{\ell\to\infty} \ell^{-1} \sum_{k=1}^{\ell} e^{itx_k} = e^{it\xi}.$$

IV.2. Főbb eredmények

Legyen f komplex értékű függvény R_+^n-n, $R_+ := [0, \infty)$, amely az n-dimenziós Lebesgue mérték szerint mérhető, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. (3.1.3) alapján az $f(\mathbf{u}) := f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ függvénynek a ∞-ben statisztikus határértéke van, ha létezik olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} |\mathbf{b}|^{-1} |\{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} : |f(\mathbf{u}) - \xi| \geq \epsilon\}| = 0 \tag{4.2.1}$$

teljesül, ahol

$$\mathbf{b} := (b_1, b_2, \ldots, b_n) \to \infty \quad \text{azt jelenti, hogy} \quad \min_{1\leq j\leq n} b_j \to \infty, \quad |\mathbf{b}| := b_1 b_2 \ldots b_n$$

és

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} \quad \text{azt jelenti, hogy} \quad 0 \leq u_j \leq b_j \quad \text{minden} \quad j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Ekkor azt írhatjuk, hogy

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{u}\to\infty} f(\mathbf{u}) = \xi.$$

Egyszerűen belátható, hogy ξ egyértelműen meghatározott és ez a határérték reláció rendelkezik az additivitás és homogenitás tulajdonságával.

Akkor mondjuk, hogy egy f függvénynek a Pringsheim definíció értelmében létezik határértéke a ∞-ben, ha van olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-hoz megadható olyan $v_0 = v_0(\epsilon) \geq 0$ szám, hogy

$$|f(\mathbf{u}) - \xi| < \epsilon, \quad \text{ha} \quad \min_{1\leq j\leq n} u_j \geq v_0.$$

Ha $n \geq 2$, akkor az f függvény korlátossága nem következik ezen határérték létezéséből. Másrészt viszont az f függvény statisztikus korlátossága következik a statisztikus határérték létezéséből. Valóban,

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} |\mathbf{b}|^{-1}|\{\mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b} : |f(\mathbf{u})| \geq B\}| = 0$$

fennáll tetszőleges $B > |\xi|$-re (vö. (4.2.1)). Megjegyezzük, hogy kétváltozós ($n = 2$) mérhető függvények statisztikus határértékével foglalkozik [20].

Most már kimondhatjuk eredményünket.

4.2.1. Tétel (Fekete-Móricz [6]). *Legyen $f : R_+^n \to C$ mérhető függvény, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. A*

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{u}\to\infty} f(\mathbf{u}) = \xi \tag{4.2.2}$$

határérték létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden $t \in R$-re

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} e^{itf(\mathbf{u})} du_1 \dots du_n = e^{it\xi}. \tag{4.2.3}$$

A 4.1.1. Tételt komplex számok egyszeres sorozatairól kiterjesztjük többszörös sorozatokra. E célból legyen N_+^n a $\mathbf{k} := (k_1, k_2, \dots, k_n)$ pozitív egészekből álló szám n-esek halmaza a k_j koordinátákkal, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. Két szám n-es $\mathbf{k}$

és $\mathbf{l} := (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)$ különbözőek egymástól, ha $k_j \neq \ell_j$ legalább egy j-re. N_+^n parciálisan rendezett, ha

$$\mathbf{k} \leq \mathbf{l}, \quad \text{ami azt jelenti, hogy} \quad k_j \leq \ell_j \quad \text{minden} \quad j = 1, 2, \ldots, n\text{-re.}$$

Tekintsük komplex számok n-szeres sorozatait $(x_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in N_+^n)$. $(x_{\mathbf{k}})$-t statisztikusan konvergensnek nevezzük, ha létezik olyan ξ szám, hogy minden $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{\mathbf{l}\to\infty} |\mathbf{l}|^{-1} |\{\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{l} : |x_{\mathbf{k}} - \xi| \geq \epsilon\}| = 0, \tag{4.2.4}$$

ahol

$$|\mathbf{l}| = |(\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n)| = \ell_1 \ell_2 \ldots \ell_n \quad \text{és} \quad \mathbf{1} := (1, 1, \ldots, 1).$$

Ekkor írhatjuk, hogy

$$\text{st–} \lim_{\mathbf{k}\to\infty} x_{\mathbf{k}} = \xi.$$

Az $(x_{\mathbf{k}})$ sorozatot a Pringsheim definíció értelmében konvergensnek nevezzük, ha van olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-hoz megadható olyan $v_0 = v_0(\epsilon) \geq 0$ szám, amelyre

$$|x_{\mathbf{k}} - \xi| < \epsilon, \quad \text{ha} \quad \min_{1 \leq j \leq n} k_j \geq v_0.$$

Ha $n \geq 2$, akkor az $(x_{\mathbf{k}})$ sorozat korlátossága nem következik a Pringsheim-féle határérték létezéséből. Másrészt viszont az $(x_{\mathbf{k}})$ sorozat statisztikus korlátossága következik a statisztikus határérték létezéséből. Valóban,

$$\lim_{\mathbf{l}\to\infty} |\mathbf{l}|^{-1} |\{\mathbf{1} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{l} : |x_{\mathbf{k}}| \geq B\}| = 0,$$

tetszőleges $B > |\xi|$-re (vö. (4.2.4)).

Kimondhatjuk tehát a 4.1.1. Tétel kiterjesztését többszörös sorozatokra.

4.2.2. Tétel (Fekete-Móricz [6]). *Legyen $x_{\mathbf{k}} : N_+^n \to C$, ahol $n \geq 1$ rögzített egész. A*

$$\text{st–} \lim_{\mathbf{k}\to\infty} x_{\mathbf{k}} = \xi \tag{4.2.5}$$

határérték létezésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden $t \in R$-re

$$\lim_{\mathbf{l}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{l}|} \sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{l}} e^{itx_{\mathbf{k}}} = e^{it\xi}.$$

IV.3. Segéderedmények

Szükségünk lesz a következő három lemmára, amelyek alapvető szerepet játszanak a 4.2.1. Tétel bizonyításában.

4.3.1. Lemma. *Legyen $f : R_+^n \to C$ mérhető függvény, amelyre* (4.2.2) *teljesül. Ha a $g : C \to C$ függvény folytonos ξ-ben, akkor*

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{u}\to\infty} g(f(\mathbf{u})) = g(\xi). \tag{4.3.1}$$

Bizonyítás. Mivel g folytonos ξ-ben, ezért bármely $\eta > 0$-hoz létezik olyan $\epsilon = \epsilon(\eta) > 0$, amelyre

$$|g(z) - g(\xi)| < \eta, \quad \text{ha} \quad |z - \xi| < \epsilon,$$

amiből következik, hogy

$$|z - \xi| \ge \epsilon \quad \text{ha} \quad |g(z) - g(\xi)| \ge \eta.$$

Továbbá

$$|f(\mathbf{u}) - \xi| \ge \epsilon \quad \text{ha} \quad |g(f(\mathbf{u})) - g(\xi)| \ge \eta.$$

Ebből és (4.2.1)-ből kapjuk, hogy

$$|\mathbf{b}|^{-1}|\{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b} : |g(f(\mathbf{u})) - g(\xi)| \ge \eta\}|$$

$$\le |\mathbf{b}|^{-1}|\{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b} : |f(\mathbf{u}) - \xi| \ge \epsilon\}| \to 0, \quad \text{ha} \quad \mathbf{b} \to \infty.$$

Mivel $\eta > 0$ tetszőleges volt, ezzel igazoltuk (4.3.1)-et. $\diamond$

4.3.2. Lemma. *Legyen $f : R_+^n \to C$ mérhető függvény, amelyre* (4.2.2) *teljesül. Ha f korlátos R_+^n-on valamely $B > 0$-val, akkor*

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} f(\mathbf{u}) du_1 \dots du_n = \xi. \tag{4.3.2}$$

Bizonyítás. Adott $\epsilon > 0$ és $\mathbf{b} \in R_+^n$ esetén jelölje $\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})$ a (4.2.1)-nek a $\{\cdot\}$ zárójelében szereplő halmazt, azaz legyen

$$\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b}) := \{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b} : |f(\mathbf{u}) - \xi| \ge \epsilon\} \tag{4.3.3}$$

és legyen

$$[\mathbf{0}, \mathbf{b}] := \{\mathbf{u} \in R_+^n : \mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b}\}.$$

Világos, hogy $|[\mathbf{0}, \mathbf{b}]| = |\mathbf{b}|$ és igaz a következő becslés:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} f(\mathbf{u}) du_1 \dots du_n - \xi \right| \\
&\le \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} |f(\mathbf{u}) - \xi| du_1 \dots du_n \\
&\le \frac{1}{|\mathbf{b}|} \left\{ \int_{\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})} + \int_{[\mathbf{0},\mathbf{b}]\setminus\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})} \right\} |f(\mathbf{u}) - \xi| du_1 \dots du_n \\
&\le |\mathbf{b}|^{-1}[(B + |\xi|)|\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})| + \epsilon|\mathbf{b}|] \\
&\le (B + |\xi|)|\mathbf{b}|^{-1}|\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})| + \epsilon \le 2\epsilon,
\end{aligned}$$

ha $\min_{1\le j\le n} b_j$ elegendően nagy, ahol felhasználtuk (4.2.1)-et. Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges volt, így érvényes (4.3.2). $\diamond$

Schoenberg [25] nyomán vezessük be a következő segédfüggvényt:

$$h(t) := \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad t < -1, \\ 1 + t & \text{ha} \quad -1 \le t < 0, \\ 1 - t & \text{ha} \quad 0 \le t < 1, \\ 0 & \text{ha} \quad t \ge 1. \end{cases}$$

4.3.3. Lemma. *Bármely $t \in R$-re,*

$$h(t) := \frac{1}{2\pi} \int_R \left(\frac{\sin(s/2)}{s/2} \right)^2 e^{its} ds. \tag{4.3.4}$$

Továbbá

$$\frac{1}{2\pi}\int_R \left(\frac{\sin(s/2)}{s/2}\right)^2 ds = 1. \tag{4.3.5}$$

Bizonyítás. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy h-nak a $\hat{h}$ Fourier transzformáltja a következő alakba írható:

$$\hat{h}(s) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R h(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin(s/2)}{s/2}\right)^2, \quad s \in R. \tag{4.3.6}$$

Mivel mind a h, mind a $\hat{h}$ integrálható függvények (Lebesgue értelemben) és folytonosak az egész valós R számegyenesen, a

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \hat{h}(s)e^{its}ds, \quad t \in R, \tag{4.3.7}$$

inverziós formula alkalmazható (lásd [27, 11.o]). Figyelembe véve (4.3.6)-ot és (4.3.7)-et adódik (4.3.4). $\diamond$

A következő két lemma a 4.3.1. és a 4.3.2. Lemma diszkrét változata, melyek szükségesek a 4.2.2. Tétel bizonyításához.

4.3.4. Lemma. *Legyen $x_{\mathbf{k}} : N_+^n \to C$ olyan sorozat, melyre* (4.2.5) *teljesül. Ha a $g : C \to C$ folytonos a ξ-ben, akkor*

$$\text{st}-\lim_{\mathbf{k}\to\infty} g(x_{\mathbf{k}}) = g(\xi).$$

4.3.5. Lemma. *Ha az $x_{\mathbf{k}} : N_+^n \to C$ sorozatra* (4.2.5) *teljesül és $x_{\mathbf{k}}$ korlátos, akkor*

$$\lim_{\mathbf{l}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{l}|}\sum_{\mathbf{1}\le\mathbf{k}\le\mathbf{l}} x_{\mathbf{k}} = \xi.$$

Az utóbbi két lemma bizonyítása hasonló a 4.3.1. és 4.3.2. Lemma bizonyításához.

IV.4. A 4.2.1. és a 4.2.2. Tétel bizonyítása

A 4.2.1. *Tétel bizonyítása. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy (4.2.2) teljesül. A 4.3.1. Lemma szerint bármely $t \in R$-re

$$\text{st}-\lim_{\mathbf{u}\to\infty} e^{itf(\mathbf{u})} = e^{it\xi}.$$

Ekkor alkalmazva a 4.3.2. Lemmát megkapjuk (4.2.3)-at minden $t \in R$-re.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy (4.2.3) minden $t \in R$-re teljesül. (4.2.2)-t és (4.2.3)-t a következő ekvivalens formákba írhatjuk:

$$\text{st}-\lim_{\mathbf{u}\to\infty} [f(\mathbf{u}) - \xi] = 0$$

és

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} e^{it[f(\mathbf{u})-\xi]} du_1 \dots du_n = 1.$$

Így az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\xi = 0$ mind (4.2.2), mind (4.2.3) esetén.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőlegesen adott. Használjuk fel a 4.3.3. Lemmát. (4.3.4) a változók alkalmas helyettesítésével a

$$h\left(\frac{f(\mathbf{u})}{\epsilon}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_R \left(\frac{\sin(\epsilon s/2)}{\epsilon s/2}\right)^2 e^{isf(\mathbf{u})} ds$$

alakba írható. A Fubini tételt alkalmazva adódik, hogy

$$\frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} h\left(\frac{f(\mathbf{u})}{\epsilon}\right) du_1 \dots du_n$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_R \left(\frac{\sin(\epsilon s/2}{\epsilon s/2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} e^{isf(\mathbf{u})} du_1 \dots du_n \right\} ds.$$

Figyelembe véve (4.2.3)-at ($\xi = 0$-val) és azt, hogy bármely $s \in R$-re és $\mathbf{b} \in R_+^n$-re

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} e^{isf(\mathbf{u})} du_1 \dots, du_n \right| \leq 1,$$

Lebesgue majoráns konvergencia tételét alkalmazhatjuk. Így kapjuk, hogy

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} h\left(\frac{f(\mathbf{u})}{\epsilon}\right) du_1 \dots du_n \tag{4.4.1}$$

$$= \frac{\epsilon}{2\pi} \int_R \left(\frac{\sin(\epsilon s/2)}{\epsilon s/2} \right)^2 dt = h(0) = 1,$$

ahol még (4.3.5)-öt is figyelembe vettük.

Tekintsük a (4.3.3)-ban definiált $\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})$ halmazt $\xi = 0$-val. h definíciója alapján adódik, hogy

$$\int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} h\left(\frac{f(\mathbf{u})}{\epsilon}\right) du_1 \dots du_n$$

$$= \int \dots \int_{[\mathbf{0},\mathbf{b}]\setminus\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})} h\left(\frac{f(\mathbf{u})}{\epsilon}\right) du_1 \dots du_n \leq |\mathbf{b}| - |\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b}|,$$

ahol $[\mathbf{0}, \mathbf{b}] := \{\mathbf{u} : \mathbf{0} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{b}\}$. Ebből következik, hogy

$$\frac{|\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})|}{|\mathbf{b}|} \leq 1 - \frac{1}{|\mathbf{b}|} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} h\left(\frac{f(\mathbf{u})}{\epsilon}\right) du_1 \dots du_n. \tag{4.4.2}$$

A (4.4.1) és (4.4.2) összefüggésekből következik, hogy

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} |\mathbf{b}|^{-1} |\mathcal{S}_\epsilon(\mathbf{b})| = 0,$$

ami (4.2.1) (vö. (4.3.3)). Mivel $\epsilon > 0$ tetszőleges volt, így (4.2.2)-t bebizonyítottuk ($\xi = 0$)-val. $\diamond$

A 4.2.2. *Tétel bizonyítása.* Lényegében teljesen hasonló a 4.2.1. Tétel bizonyításához, csak a 4.3.1 és a 4.3.2. Lemma helyett felhasználjuk a 4.3.4. és 4.3.5. Lemmát. $\diamond$

IV.5. Észrevételek

(a) Az ebben a fejezetben szereplő fogalmak és eredmények természetes módon kiterjeszthetők vektor értékű mérhető $\mathbf{f} : R_+^n \to C^m$ függvényekre, valamint vektor értékű többszös $\mathbf{x_k} : N_+^n \to C^m$ sorozatokra, ahol m és n rögzített pozitív egészek. Ezekben az esetekben a (4.2.1)-ben és a (4.2.4)-ben előforduló

$$|f(\mathbf{u}) - \xi| \geq \epsilon \quad \text{és} \quad |x_\mathbf{k} - \xi| \geq \epsilon$$

egyenlőtlenségekben az abszolút értéket egy vektornormával kell helyettesíteni. Legyen

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) := (f_1(\mathbf{u}), \dots, f_m(\mathbf{u})), \text{ ahol } f_j : R_+^n \to C, j = 1, \dots, m; \text{ és } \xi := (\xi_1, \dots, \xi_m).$$

Használhatjuk például az euklideszi vektornormát:

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \xi\| := \{\sum_{j=1}^{m} |f_j(\mathbf{u}) - \xi_j|^2\}^{1/2}.$$

Akkor mondjuk, hogy $\mathbf{f}(\mathbf{u})$-nak ξ statisztikus határértéke a ∞-ben, jelben:

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{u}\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \xi, \tag{4.5.1}$$

ha bármely $\epsilon > 0$-ra,

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} |\mathbf{b}|^{-1}|\{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b} : \|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \xi\| \ge \epsilon\}| = 0$$

(vö. (4.2.1)). Nem nehéz ellenőrizni, hogy (4.5.1) akkor és csak akkor áll fenn, ha a következő statisztikus határérték reláció mindegyike teljesül:

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{b}\to\infty} f_j(\mathbf{u}) = \xi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Egy vektor értékű többszörös sorozat általános alakja a következő:

$$\mathbf{x_k} := (x_{\mathbf{k}}^{(1)}, \ldots, x_{\mathbf{k}}^{(m)}), \quad \text{ahol} \quad x_{\mathbf{k}}^{(j)} : N_+^n \to C, \quad j = 1, 2, \ldots, d.$$

A fentiek alapján a statisztikus határérték

$$\text{st–}\lim_{\mathbf{k}\to\infty} \mathbf{x_k} = \xi$$

definíciója, valamint az $\mathbf{x_k}$ komponensek statisztikus határértékének létezése közötti összefüggés nyilvánvaló.

(b) Legyen ν tetszőleges pozitív mérték R_+^n Borel mérhető részhalmazain (vagy esetleg csak N_+^n-n) a $\nu(R_+^n) = \infty$ tulajdonsággal. Vezessük be R_+^n-n Borel mérhető függvények statisztikus határértékének, valamint többszörös sorozatok fogalmát N_+^n-n a ν mértékre vonatkozólag a következőképpen. Az $f : R_+^n \to C$ Borel mérhető függvénynek a ν-re vonatkozólag statisztikus határértéke van a ∞-ben, ha létezik olyan ξ szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{\nu(\{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b} : |f(\mathbf{u}) - \xi| \ge \epsilon\})}{\nu(\{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b}\})} = 0. \tag{4.5.2}$$

Ekkor a (4.2.1) definíció a (4.5.2) speciális esete, amikor is ν a hagyományos Lebesgue mérték R_+^n-n, míg a (4.2.4) definíció a (4.5.2) speciális esete, amikor ν az R_+^n azon rácspontjainak száma (amely megszámlálhatóan végtelen is lehet), melyeknek minden koordinátája pozitív egész.

Az $n = 1$ speciális esetben jól ismert, hogy minden ilyen ν pozitív Borel mérték, amelyre $\nu(R_+) = \infty$, egyértelműen jellemezhető olyan nemcsökkenő $g : R_+ \to R_+$ függvénnyel, amelyre g jobbról folytonos R_+ minden pontjában,

$$g(0) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{u\to\infty} g(u) = \infty.$$

Ekkor a kérdéses ν Borel mértéket az $(a, b]$ intervallum

$$\nu((a, b]) := g(b) - g(a), \quad 0 \le a < b < \infty$$

mértéke definiálja.

Példa. Legyen $u \in R_+$-ra $g(u) := \log_+ u$ és ν a g függvény által indukált Borel mérték. Világos, hogy az

$$x_k := \begin{cases} k & \text{ha} \quad k = jp_j \quad \text{valamely} \quad j \ge 1\text{-re}, \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

sorozat, ahol p_j $(p_j : j = 1, 2, \ldots)$ tetszőleges pozitív egészek nemcsökkenő sorozata $(\lim_{j\to\infty} p_j = \infty)$, statisztikusan divergens erre a ν mértékre vonatkozólag, ha

$$p_j \le Cj^\alpha, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

valamely $C > 0$ konstansra és $\alpha > 0$-ra.

Másrészt az (x_k) sorozat statisztikusan konvergál 0-hoz, ha

$$p_j \ge CC_1^{(\log j)^\alpha}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

valamely $C > 0$, $C_1 > 1$ konstansra és $\alpha > 1$-re.

Ezen előzmények után egyszerű ellenőrizni, hogy a 4.2.1. és a 4.2.2. Tétel érvényben marad, ha a (4.2.1) és (4.2.4) helyett a sokkal általánosabb (4.5.2) definíciót használjuk.

4.5.1. Tétel (Fekete-Móricz [6]). *Legyen $f : R_+^n \to C$ Borel mérhető függvény és ν pozitív Borel mérték R_+^n-n, amelyre $\nu(R_+^n) = \infty$. Ekkor a* (4.5.2) *határérték reláció akkor és csak akkor teljesül minden $\epsilon > 0$-ra, ha minden $t \in R$-re*

$$\lim_{\mathbf{b}\to\infty} \frac{1}{\nu(\{\mathbf{0} \le \mathbf{u} \le \mathbf{b}\})} \int_0^{b_1} \dots \int_0^{b_n} e^{itf(\mathbf{u})} d\nu(u_1, \dots, u_n) = e^{it\xi}.$$

V. TAUBER-TÍPUSÚ TÉTELEK STATISZTIKUS HATÁRÉRTÉKRE

Az értekezés II. fejezetében tárgyalt cikk [7] érdekes kérdést vetett fel a statisztikus határérték ismeretében. Ha bevezetjük a statisztikus szummálhatóság fogalmát, akkor az ottani eredmények alkalmas transzformációival milyen feltételeket kell adnunk, hogy a statisztikus szummálhatóságból következzen a statisztikus határérték létezése?

V.1. Főbb eredmények

Legyen $0 \not\equiv p : R_+ \to R_+$ nemcsökkenő függvény, amelyre $p(0) = 0$ és

$$\text{st–}\liminf_{t\to\infty} \frac{p(\lambda t)}{p(t)} > 1 \qquad \text{minden } \lambda > 1\text{–re.} \tag{5.1.1}$$

Legyen f valós vagy komplex értékű, Lebesgue–integrálható függvény valamely $(0, t)$ intervallumon, $0 < t < \infty$, azaz $f \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$. Legyen

$$s(x) := \int_0^x f(u)du \quad \text{és} \quad \sigma(t) := \frac{1}{p(t)} \int_0^t s(x)dp(x), \tag{5.1.2}$$

feltéve, ha $p(t) > 0$. Az (5.1.1) feltételből következik, hogy $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$, ezért a $p(t) > 0$ feltétel minden elég nagy t-re már biztosan fennáll. (5.1.2)-ben a második integrált Riemann–Stieltjes integrálként értelmezzük. Definíció szerint, hogy ha a

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = l$$

véges határérték létezik, akkor az

$$\int_0^\infty f(u)du$$

improprius integrál is létezik és értéke l. Viszont előfordulhat, hogy az f függvény impropriusan nem integrálható, de létezik a

$$\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t)} \int_0^t s(x)dp(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t)} \int_0^t dp(x) \int_0^x f(u)du$$

$$= \int_0^t f(u)\big\{1 - \frac{p(u)}{p(t)}\big\}du.$$

Ezen átalakításoknál (5.1.2)-t és Fubini tételét alkalmaztuk.

Akkor mondjuk az

$$\int_0^\infty f(x)dx$$

integrált *statisztikusan szummálhatónak* a p súlyfüggvényre vonatkozólag, ha létezik a

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = l \quad \text{véges határérték.} \tag{5.1.3}$$

Speciálisan a $p(x) = x$ választás esetén

$$\sigma(t) := \frac{1}{t}\int_0^t s(x)dx = \int_0^t f(u)\left(1 - \frac{u}{t}\right)du\,,\ t > 0.$$

Ha ebben az esetben (5.1.3) teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $s(x)$ *statisztikusan Cesàro szummálható l-hez.*

Ha a

$$\text{st}-\lim_{x\to\infty} s(x) = l \quad \text{véges határérték létezik} \tag{5.1.4}$$

és $s(x)$ korlátos, akkor számos esetben (5.1.3) is fennáll. Ennek ellenőrzéséhez az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $l = 0$. A statisztikus határérték definíciója alapján ez azt jelenti, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|A_\epsilon(a)| = 0, \text{ ahol } A_\epsilon(a) := \{x \in (0,a) : |s(x)| > \epsilon\}. \tag{5.1.5}$$

Legyen

$$B_\epsilon(a) := (0,\infty)\backslash A_\epsilon(a) \text{ és } |s(x)| \le K \text{ minden } x \in (0,\infty)\text{-re.}$$

A következő becslést alkalmazzuk:

$$\frac{1}{p(a)}\int_0^a s(x)dp(x) = \frac{1}{p(a)}\left\{\int_{A_\epsilon(a)} + \int_{B_\epsilon(a)}\right\} s(x)dp(x) \tag{5.1.6}$$

$$\le \frac{K}{p(a)}\int_{A_\epsilon(a)} dp(x) + \epsilon.$$

Mivel $s(x)$ folytonos, A_ϵ nyílt halmaz. Jól ismert, hogy ekkor $A_\epsilon(a)$ megszámlálható sok közös pont nélküli nyílt (α_k, β_k), $k = 1, 2, \ldots$ intervallumok uniója. (5.1.5) alapján

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \sum_k (\beta_k - \alpha_k) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |A_\epsilon(a)| = 0.$$

$$\int_{A_\epsilon(a)} dp(x) = \sum_k [p(\beta_k - 0) - p(\alpha_k + 0)]. \tag{5.1.7}$$

Például, ha $p(x) = x^\alpha$ valamely $0 < \alpha < 1$-ra, akkor minden r, t, δ-ra

$$p(r) - p(r - \delta) \geq p(t) - p(t - \delta), \text{ ha } 0 < \delta < r < t.$$

Sőt, ez az egyenlőtlenség akkor is érvényes, ha $p(x)$ monoton növő és konkáv függvény.

Az (5.1.5)-(5.1.7) alapján

$$\frac{1}{p(a)} \int_{A_\epsilon(a)} dp(x) \leq \frac{1}{p(a)} \int_0^{|A_\epsilon(a)|} dp(x) = \frac{p(|A_\epsilon(a)|) - p(0)}{p(a)}$$

$$\leq \frac{|A_\epsilon(a)|^\alpha}{a^\alpha} = \left(\frac{|A_\epsilon(a)|}{a}\right)^\alpha \to 0.$$

Megjegyezzük, hogy az (5.1.4) $\to$ (5.1.3) implikáció még abban az esetben is érvényes marad, ha $p(x) = x^\alpha \phi(x)$, ahol $0 < \alpha \leq 1$ és $\phi(x)$ lassan változó függvény. Ez utóbbi azt jelenti (lásd II. fejezet bevezetése), hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(\lambda x)}{\phi(x)} = 1 \text{ minden } \lambda \in (0, \infty)\text{-re.}$$

Először a valós értékű f függvény esetén bizonyítjuk a következő tételt egyoldali Tauber feltétel mellett.

5.1.1. Tétel (Fekete [9]). *Legyen az $f \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$ függvény valós értékű és teljesüljön az* (5.1.1) *feltétel. Ekkor* (5.1.3)*-ból akkor és csak akkor következik* (5.1.4)*, ha bármely $\epsilon > 0$-ra*

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left| \left\{ t \in (0, a) : \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) < -\epsilon \right\} \right| = 0 \tag{5.1.8}$$

és

(5.1.9)

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} \left| \left\{ t \in (0,a) : \ \frac{1}{p(t)-p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t)-s(x)]dp(x) < -\epsilon \right\} \right| = 0.$$

5.1.1. Megjegyzés. Az (5.1.8) feltétel a következővel ekvivalens: bármely $\epsilon > 0$ és $\eta > 0$ esetén létezik $\lambda > 1$, amelyre

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)} \int_{t}^{\lambda t} [s(x)-s(t)]dp(x) < -\epsilon\}| \le \eta.$$

5.1.2. Megjegyzés. Az 5.1.1. Tétel szükségességének bizonyításából kiderül, hogy ha teljesülnek a (3.1.4), (5.1.1), (5.1.3) feltételek, akkor bármely rögzített $\lambda > 1$–re

$$\text{st–}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t)-p(t)} \int_{t}^{\lambda t} [s(x)-s(t)]dp(x) = 0, \tag{5.1.10}$$

míg bármely rögzített $0 < \lambda < 1$–re

$$\text{st–}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t)-p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t)-s(x)]dp(x) = 0. \tag{5.1.11}$$

5.1.3. Megjegyzés. A valós értékű $s(x)$ függvényt *statisztikusan lassan csökkenőnek* nevezzük, ha bármely $\epsilon > 0$–ra

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ \min_{t\le x\le \lambda t} [s(x)-s(t)] < -\epsilon\}| = 0. \tag{5.1.12}$$

Ez a feltétel ekvivalens a következővel: bármely $\epsilon > 0$–ra

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ \min_{\lambda t\le x\le t} [s(t)-s(x)] < -\epsilon\}| = 0. \tag{5.1.13}$$

Könnyen igazolható, hogy az (5.1.12) és (5.1.13) feltételekből következik (5.1.8) és (5.1.9). Ennek alapján adódik az 5.1.1. Tétel következő korollárium a.

5.1.1. Korollárium. *Ha a valós értékű $f \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$ függvény $s(x)$ integrálfüggvénye statisztikusan lassan csökkenő valamint* (5.1.1) *és* (5.1.3) *teljesül, akkor* (5.1.4) *is teljesül.*

Érdemes megemlíteni, hogy az (5.1.12) akkor is teljesül, ha létezik egy $H > 0$ konstans, amelyre $xf(x) \geq -H$ majdnem minden "elég nagy" x–re, mondjuk legyen $x > x_1$. Legyen $\epsilon > 0$ és válasszuk $\lambda := e^{\epsilon/H}$–t.

Mivel $x_1 < t \leq x < \infty$,

$$s(x) - s(t) = \int_t^x f(u)du \geq -H \int_t^x \frac{du}{u} = -H \ln \frac{x}{t}$$

$$\geq -H \ln \lambda = -\epsilon, \ x > x_1 \text{ és } \lambda > 1.$$

Az $a > x_1$–re a

$$\{x_1 < t \leq a : \min_{t \leq x \leq \lambda t} [s(x) - s(t)] < -\epsilon\}$$

halmaz üres. Ebből adódóan (5.1.12) feltétel igaz.

Másodszor az általánosabb komplex értékű f függvényre bizonyítjuk a következő tételt kétoldali Tauber feltétel mellett.

5.1.2. Tétel (Fekete [9]). *Legyen az $f \in L^1_{\text{loc}}(R_+)$ függvény komplex értékű és teljesüljön az* (5.1.1) *feltétel. Ekkor* (5.1.3)*-ból akkor és csak akkor következik* (5.1.4)*, ha bármely $\epsilon > 0$-ra*

(5.1.14)

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{a \to \infty} \frac{1}{a} \left| \left\{ t \in (0, a) : \left| \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) \right| > \epsilon \right\} \right| = 0,$$

vagy

(5.1.15)

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{a \to \infty} \frac{1}{a} \left| \left\{ t \in (0, a) : \left| \frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)] dp(x) \right| > \epsilon \right\} \right| = 0.$$

5.1.4. Megjegyzés. Az $s : R_+ \to C$ függvényt *statisztikusan lassan oszcillálónak* nevezzük, ha bármely $\epsilon > 0$–ra

$$\inf_{\lambda > 1} \limsup_{a \to \infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0, a) : \max_{t \leq x \leq \lambda t} |s(x) - s(t)| > \epsilon\}| = 0, \tag{5.1.16}$$

vagy ami ezzel ekvivalens,

$$\inf_{0 < \lambda < 1} \limsup_{a \to \infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0, a) : \max_{\lambda t \leq x \leq t} |s(t) - s(x)| > \epsilon\}| = 0.$$

Ez utóbbi két feltételből következik (5.1.14) és (5.1.15).

5.1.2. Korollárium. *Ha a komplex értékű* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(R_+)$ *függvény* $s(x)$ *integrálfüggvénye statisztikusan lassan oszcilláló valamint* (5.1.1) *és* (5.1.3) *teljesül, akkor* (5.1.4) *is teljesül.*

5.1.5. Megjegyzés. Az (5.1.16) feltétel teljesül, ha létezik egy $H > 0$ konstans és $x_1 > 0$, amelyre

$$|xf(x)| \leq H \qquad \text{majdnem minden } x > x_1\text{-re.}$$

V.2. Bizonyítások

Elöljáróban három lemmát bizonyítunk.

5.2.1. Lemma. *Legyen* $0 \not\equiv p : R_+ \to R_+$ *nemcsökkenő függvény, amelyre* $p(0) = 0$. *Ekkor az* (5.1.1) *feltétel ekvivalens a következővel:*

$$\text{st}\text{–}\liminf_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t)} > 1 \qquad \textit{minden } 0 < \lambda < 1\textit{–re.} \tag{5.2.1}$$

Bizonyítás Az (5.2.1) baloldala a következő alakba írható át:

$$\text{st}\text{–}\liminf_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t)} = \text{st}\text{–}\liminf_{t\to\infty} \frac{p(\frac{1}{\lambda}\lambda t)}{p(\lambda t)}$$

Legyen $u := \lambda t$, ekkor mivel $\frac{1}{\lambda} > 1$, azt kapjuk, hogy

$$\text{st}\text{–}\liminf_{t\to\infty} \frac{p(\frac{1}{\lambda}u)}{p(u)} > 1. \qquad \diamond$$

5.2.2. Lemma. *Legyen* $0 \not\equiv p : R_+ \to R_+$ *nemcsökkenő függvény, amelyre* $p(0) = 0$ *és az* (5.1.1), (5.1.3) *feltételek teljesüljenek. Ekkor bármely* $\lambda > 0$*-ra*

$$st\text{–}\lim_{t\to\infty} \sigma(\lambda t) = l. \tag{5.2.2}$$

Bizonyítás. Legyen $u := \lambda t$. Ekkor bármely $0 < \lambda < \infty$-re

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : |\sigma(\lambda t) - l| > \epsilon\}| =$$

$$\lambda \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\lambda a} |\{u \in (0,\lambda a) : |\sigma(u) - l| > \epsilon\}|.$$

Ennek a kifejezésnek a 0-hoz való konvergenciája azonban éppen az (5.1.3) feltétellel ekvivalens. $\diamond$

A következő lemma önmagában is érdekes, amely azt állítja, hogy ha (5.1.3) teljesül, akkor az $s(x)$ mozgó súlyozott átlaga is statisztikusan ugyanahhoz a határértékhez tart.

5.2.3. Lemma. *Legyen* $0 \not\equiv p : R_+ \to R_+$ *nemcsökkenő függvény, amelyre* $p(0) = 0$, *és teljesüljenek az* (5.1.1), (5.1.3) *feltételek. Ekkor bármely* $\lambda > 1$ *esetén*

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} s(x)dp(x) = l \tag{5.2.3}$$

és minden $0 < \lambda < 1$*-re*

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} s(x)dp(x) = l. \tag{5.2.4}$$

Bizonyítás. $\lambda > 1$ esetén a definíció szerint

$$\frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} s(x)dp(x) = \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} [p(\lambda t)\sigma(\lambda t) - p(t)\sigma(t)] \tag{5.2.5}$$

$$= \sigma(\lambda t) + \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)} [\sigma(\lambda t) - \sigma(t)].$$

(5.1.1) szerint minden $\lambda > 1$–re

$$0 < \text{st}-\limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)} = \left[\text{st}-\liminf_{t\to\infty} \frac{p(\lambda t)}{p(t)} - 1\right]^{-1} < \infty \tag{5.2.6}$$

teljesül és (5.2.3) következik az (5.1.3), (5.2.2) és (5.2.5) feltételekből.

$0 < \lambda < 1$ esetén

$$\frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} s(x)dp(x) = \frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} [p(t)\sigma(t) - p(\lambda t)\sigma(\lambda t)] \tag{5.2.7}$$

$$\sigma(t) + \frac{p(\lambda t)}{p(t) - p(\lambda t)}[\sigma(t) - \sigma(\lambda t)].$$

(5.1.1) szerint bármely $0 < \lambda < 1$-re

$$0 < \text{st}-\limsup_{t\to\infty} \frac{p(\lambda t)}{p(t) - p(\lambda t)} = \left[\text{st}-\liminf_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t)} - 1\right]^{-1} < \infty \tag{5.2.7'}$$

és (5.2.4) következik az (5.1.3), (5.2.2), (5.2.7) feltételekből és az 5.2.1. Lemmából. $\diamond$

Az 5.1.1. Tétel *bizonyítása. Szükségesség.* Legyen $\lambda > 1$ és tegyük fel, hogy (5.1.3) és (5.1.4) teljesülnek. Az 5.2.3. Lemma alapján

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dp(x)$$

$$= \text{st}-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} s(x)dp(x) - \text{st}-\lim_{t\to\infty} s(t) = l - l = 0.$$

Ez erősebb formában bizonyítja (5.1.8)-t.

$0 < \lambda < 1$ esetén hasonló módon kapjuk, hogy

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dp(x) = 0,$$

amely erősebb, mint (5.1.9).

Elegendőség. Tegyük fel, hogy (5.1.3), (5.1.8) és (5.1.9) feltételek teljesülnek. Elegendő megmutatni, hogy

$$\text{st}-\lim_{t\to\infty} [s(t) - \sigma(t)] = 0. \tag{5.2.8}$$

Vizsgáljuk először a $\lambda > 1$ esetet. (5.2.5)-ből adódik, hogy

$$s(t) - \sigma(\lambda t) = \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)}[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \tag{5.2.9}$$

$$-\frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)]dp(x),$$

amiből kapjuk, hogy bármely $\epsilon > 0$–ra

$$\{t \in (0, a) : \ [s(t) - \sigma(\lambda t)] \geq \epsilon\} \tag{5.2.10}$$

$$\subseteq \Big\{t \in (0,a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)}[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \geq \frac{\epsilon}{2}\Big\}$$

$$\cup \Big\{t \in (0,a) : \ \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) \leq -\frac{\epsilon}{2}\Big\}.$$

Ha adott egy $\eta > 0$, akkor az (5.1.8) szerint létezik egy $\lambda > 1$, amelyre

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) \leq -\frac{\epsilon}{2}\}| \leq \eta. \tag{5.2.11}$$

Másrészt legyen $v := \text{st–}\limsup_{t\to\infty} \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)}$. Ekkor

$$\Big\{t \in (0,a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)}[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \geq \frac{\epsilon}{2}\Big\}$$

$$\subset \Big\{t \in (0,a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)} \geq 2v\Big\} \cup \Big\{t \in (0,a) : \ [\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \geq \frac{\epsilon}{4v}\Big\}.$$

Alkalmazva a statisztikus felső határ definícióját,

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)} \geq 2v\}| = 0,$$

és az 5.2.2. Lemma alapján

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ [\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \geq \frac{\epsilon}{4v}\}| = 0.$$

Így az adódik, hogy

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)}[\sigma(\lambda t) - \sigma(t)] \geq \frac{\epsilon}{2}\}| = 0. \tag{5.2.12}$$

Az (5.2.10), (5.2.11) és (5.2.12) figyelembe vételével ekkor

$$\limsup_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ [s(t) - \sigma(\lambda t)] \geq \epsilon\}| \leq \eta.$$

Mivel $\eta > 0$ tetszöleges volt, ezért bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ s(t) - \sigma(\lambda t) \geq \epsilon\}| = 0. \tag{5.2.13}$$

Ez utóbbit az 5.2.2. Lemmával egybevetve adódik a

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ s(t) - \sigma(t) \geq \epsilon\}| = 0.$$

Most nézzük a $0 < \lambda < 1$ esetet. Az (5.2.7) szerint

$$s(t) - \sigma(t) = \frac{p(\lambda t)}{p(t) - p(\lambda t)}[\sigma(t) - \sigma(\lambda t)] \tag{5.2.14}$$

$$+\frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dp(x),$$

amiből kapjuk, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\{t \in (0, a) : \ [s(t) - \sigma(t)] < -\epsilon\}$$

$$\subseteq \Big\{t \in (0, a) : \ \frac{p(\lambda t)}{p(t) - p(\lambda t)}[\sigma(t) - \sigma(\lambda t)] < \frac{\epsilon}{2}\Big\}$$

$$\cup\Big\{t \in (0, a) : \ \frac{1}{p(t) - p(\lambda t)} \int_{\lambda t}^{t} [s(t) - s(x)]dp(x) < -\frac{\epsilon}{2}\Big\}.$$

Hasonlóan a $\lambda > 1$ esethez, az 5.2.2. Lemma, (5.1.6) és (5.2.7') alapján bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{t \in (0, a) : \ s(t) - \sigma(t) < -\epsilon\}| = 0. \tag{5.2.15}$$

Végül egybevetve az (5.2.13), (5.2.15)-t és az 5.2.2. Lemmát, adódik, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a}|\{t \in (0, a) : \ |s(t) - \sigma(t)| > \epsilon\}| = 0.$$

Ez bizonyítja (5.2.8)-t. $\diamond$

Az 5.1.2. Tétel *bizonyítása. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy az (5.1.3) és (5.1.4) feltételek teljesülnek. Ekkor az 5.2.3. Lemmából minden $\lambda > 1$-re (5.1.10) és minden $0 < \lambda < 1$–re (5.1.11) következik.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy az (5.1.3) és az (5.1.14) feltételek teljesülnek. (5.1.4)-et kell bizonyítanunk.

Legyen $\epsilon > 0$ tetszőleges. $\lambda > 1$ esetén az (5.2.9) alapján

$$\{t \in (0, a) : \ |s(t) - \sigma(\lambda t)| > \epsilon\} \tag{5.2.16}$$

$$\subseteq \Big\{t \in (0, a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)}|\sigma(\lambda t) - \sigma(t)| > \frac{\epsilon}{2}\Big\}$$

$$\cup \left\{ t \in (0,a) : \left| \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) \right| > \frac{\epsilon}{2} \right\}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} &|\{t \in (0,a) : \ |s(t) - \sigma(\lambda t)| > \epsilon\}| \\ &\leq \left| \left\{ t \in (0,a) : \ \frac{p(t)}{p(\lambda t) - p(t)} |\sigma(\lambda t) - \sigma(t)| > \frac{\epsilon}{2} \right\} \right| \\ &+ \left| \left\{ t \in (0,a) : \ \left| \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) \right| > \frac{\epsilon}{2} \right\} \right|. \end{aligned}$$

(5.1.11) szerint minden $\eta > 0$-hoz létezik egy $\lambda > 1$, amelyre

$$\limsup_{a \to \infty} \frac{1}{a} \left| \left\{ t \in (0,a) : \ \left| \frac{1}{p(\lambda t) - p(t)} \int_t^{\lambda t} [s(x) - s(t)] dp(x) \right| > \frac{\epsilon}{2} \right\} \right| \leq \eta. \tag{5.2.17}$$

Figyelembe véve az (5.2.6), (5.2.16), (5.2.17)-et és az 5.2.2. Lemmát, kapjuk, hogy

$$\limsup_{a \to \infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ |s(t) - \sigma(t)| > \epsilon\}| \leq \eta.$$

Mivel $\eta > 0$ tetszőleges volt, ezért szükségszerűen bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a \to \infty} \frac{1}{a} |\{t \in (0,a) : \ |s(t) - \sigma(t)| > \epsilon\}| = 0,$$

azaz (5.2.8) teljesül. Innen már (5.1.3) és (5.2.8) miatt (5.1.4) is igaz.

$0 < \lambda < 1$ esetén (5.1.4) bizonyítása hasonlóan megy. $\diamond$

VI. TAUBER-TÍPUSÚ FELTÉTELEK KETTŐS SOROZATOK STATISZTIKUS SZUMMÁLHATÓSÁGÁHOZ

VI.1. Bevezetés

A statisztikus konvergencia fogalmát Móricz [18] 2003-ban kiterjesztette többszörös sorozatokra, és bizonyította elemi tulajdonságait. Móricz és Orhan [22] Tauber feltételeket adott arra vonatkozólag, hogy a statisztikus konvergencia következzen a súlyozott közepek szerinti $(\overline{N}, p)$ statisztikus szummálhatóságból. Célunk ennek az eredménynek a kiterjesztése kettős sorozatokra.

Azt mondjuk, hogy a valós vagy komplex $(x_{jk} : j, k = 0, 1, 2, ...)$ kettős számsorozat *statisztikusan konvergál* valamely L-hez, jelben

$$\text{st}-\lim x_{jk} = L, \tag{6.1.1}$$

ha bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} |\{j \leq m \quad \text{és} \quad k \leq n : |x_{jk} - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Legyen $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ két nemnegatív $(p_0, q_0 > 0)$ számsorozat, amelyre

$$P_m := \sum_{j=0}^{m} p_j \to \infty, \text{ ha } m \to \infty \quad \text{és} \quad Q_n := \sum_{k=0}^{n} q_k \to \infty, \text{ ha } n \to \infty. \tag{6.1.2}$$

Definiáljuk az adott (x_{jk}) kettős számsorozat t_{mn} súlyozott közepét, azaz $(\overline{N}, p, q)$ közepét a következőképpen:

$$t_{mn} = \frac{1}{P_m Q_n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} p_j q_k x_{jk} \ , \ m, n = 0, 1, 2... \ . \tag{6.1.3}$$

Azt mondjuk, hogy az x_{jk} sorozat az $(\overline{N}, p, q)$ *közép szerint statisztikusan szummálható* L-hez, ha

$$\text{st}-\lim t_{mn} = L, \tag{6.1.4}$$

azaz

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N : |t_{mn} - L| \ge \epsilon\}| = 0.$$

Célunk olyan feltételek keresése, amelyekből a (6.1.4) $\to$ (6.1.1) implikáció következik.

Szükségünk lesz a Fridy és Orhan [4] által bevezetett statisztikus alsó és felső határérték fogalmára. Ha az $\alpha := \text{st–}\liminf_{k\to\infty} p_k$ véges, akkor minden $\alpha_1 < \alpha$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |\{k \le n : p_k < \alpha_1\}| = 0 \tag{6.1.5}$$

és minden $\alpha_2 > \alpha$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} |\{k \le n : p_k < \alpha_2\}| \ne 0. \tag{6.1.6}$$

Ez utóbbi azt jelenti, hogy a határérték vagy nem létezik, vagy létezik és pozitív. Ha a (6.1.5) minden valós α_1-re teljesül, akkor $\text{st–}\lim_{k\to\infty} p_k = \text{st–}\liminf_{k\to\infty} p_k := +\infty$. Ha a (6.1.6) minden α_2-re teljesül, akkor $\text{st–}\liminf_{k\to\infty} p_k := -\infty$.

A $\beta := \text{st–}\limsup_{k\to\infty} p_k$ duális reláció hasonlóképpen definiálható.

VI.2. Főbb eredmények

Először valós (x_{jk}) számsorozatokat tekintünk és egyoldali Tauber-típusú feltételeket adunk.

6.2.1. Tétel (Fekete [8]). *Tegyük fel, hogy a $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, és $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ számsorozatok olyanok, hogy $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, valamint*

$$\text{st–}\liminf \frac{P_{\lambda_m}}{P_m} > 1 \quad \textit{és} \quad \text{st–}\liminf \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n} > 1 \quad \textit{minden } \lambda > 1\textit{-re}, \tag{6.2.1}$$

ahol $\lambda_m := [\lambda m]$, $\lambda_n := [\lambda n]$. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy az $(\overline{N}, p, q)$ közép szerinti statisztikus szummálhatóságból, azaz (6.1.4)*-ből következzen az (x_{jk}) statisztikus konvergenciája ugyanazzal a határértékkel az, hogy fennálljon a következő két feltétel: bármely $\epsilon > 0$-ra*

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$(6.2.2) \qquad \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk}-x_{mn}) \le -\epsilon\}| = 0$$

és

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{and} \quad n \le N :$$

$$(6.2.3) \qquad \frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn}-x_{jk}) \le -\epsilon\}| = 0.$$

6.2.1. Megjegyzés. A (6.2.2) és (6.2.3) feltételek függetlenek egymástól. Az egyszerűség kedvéért az egydimenziós esetben és $p_j \equiv 1$-re mutatjuk meg ezt. Ekkor (6.2.2) és (6.2.3) helyett írhatjuk a

$$(6.2.2') \qquad \inf_{\lambda>1} \limsup_{M\to\infty} \frac{1}{M+1} |\{m \le M : \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} (x_j - x_m) \le -\epsilon\}| = 0,$$

és a

$$(6.2.3') \qquad \inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M\to\infty} \frac{1}{M+1} |\{m \le M : \frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} (x_m - x_j) \le -\epsilon\}| = 0.$$

feltételeket. Olyan (x_j) statisztikusan nem konvergens sorozatot konstruálunk, amelyre (x_j) statisztikusan szummálható 0-hoz, a (6.2.2') teljesül, viszont a (6.2.3') nem teljesül. Az (x_j)-t adjuk meg a következőképpen

$$x_j := \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad l^2 - l + 1 \le j \le l^2, \\ -l & \text{ha} \quad j = l^2 + 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor $x_j = \{1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -2,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ -3,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -4,\ ...\}$. Világos, hogy $\text{st–}\liminf x_j = 0$ és $\text{st–}\limsup x_j = 1$. Ezért az (x_j) statisztikusan nem konvergens. Könnyű ellenőrizni, hogy (x_j) statisztikusan 0-hoz szummálható. (Sőt több is igaz, (x_j) (C,1) szummálható is 0-hoz.) Másrészt a 6.3.4. Lemma szerint [egydimenzió esetén] bármely $\lambda > 1$-re

$$\text{st–}\limsup \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} (x_j - x_m)$$

$$= \text{st–}\lim \frac{1}{\lambda_m - m} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} x_j \;-\; \text{st–}\liminf x_m \;= 0,$$

míg $0 < \lambda < 1$ esetén

$$\text{st–}\limsup \frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} (x_m - x_j)$$

$$= \text{st–}\limsup x_m \;-\; \text{st–}\lim \frac{1}{m - \lambda_m} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} x_j \;= 1.$$

6.2.2. Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy (6.2.1)-ből következik (6.1.2).

6.2.3. Megjegyzés. Ha a (6.1.1), (6.1.4) és (6.2.1) feltételek fennállnak, akkor szükségképpen az is fennáll, hogy

$$\text{st–}\lim \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) = 0 \tag{6.2.4}$$

minden $\lambda > 1$-re és

$$\text{st–}\lim \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn} - x_{jk}) = 0 \tag{6.2.5}$$

minden $0 < \lambda < 1$-re.

Azt mondjuk, hogy az (x_{jk}) kettős sorozat *statisztikusan lassan csökkenő* az első indexre vonatkozólag, ha minden $\epsilon > 0$-ra

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$\min_{m<j\le\lambda_m} (x_{jn} - x_{mn}) \le -\epsilon\}| = 0. \tag{6.2.6}$$

Az (x_{jk}) sorozatot *erős értelemben statisztikusan lassan csökkenőnek* nevezzük, ha (6.2.6) akkor is érvényben marad, ha

$$\min_{m<j\le\lambda_m} (x_{jn} - x_{mn}) \text{ helyett } \quad \min_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} (x_{jk} - x_{mk}) \quad \text{írunk.} \tag{6.2.6'}$$

Hasonlóan az (x_{jk})-t statisztikusan lassan csökkenőnek nevezzük a második indexre vonatkozólag, ha minden $\epsilon > 0$-ra

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{and} \quad n \le N :$$

$$\min_{n<k\le\lambda_n} (x_{mk} - x_{mn}) \le -\epsilon\}| = 0; \tag{6.2.7}$$

és (x_{jk})-ra erős értelemben igaz ez, ha (6.2.7) akkor is érvényben marad, ha

$$\min_{n<k\le\lambda_n} (x_{mk} - x_{mn}) \text{ helyett } \min_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} (x_{jk} - x_{jn}) \quad \text{írunk.} \tag{6.2.7'}$$

6.2.4. Megjegyzés. Könnyen ellenőrizhető, hogy (6.2.6)-ból következik az

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$\min_{\lambda_m<j\le m} (x_{mn} - x_{jn}) \le -\epsilon\}| = 0,$$

és fordítva. Ugyanez az ekvivalencia érvényes (6.2.7)-re és azokra az esetekre, mikor a (6.2.6)-ot és (6.2.7)-et erős értelemben tekintjük, azaz a (6.2.6) helyett a (6.2.6')-t és a (6.2.7) helyett a (6.2.7')-t használjuk. Figyelembe véve a (6.2.2)-ben szereplő kifejezést, adódik, hogy

$$\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn})$$

$$\ge \min_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} (x_{jk} - x_{mk}) + \min_{n<k\le\lambda_n} (x_{mk} - x_{mn})$$

és (6.2.3)-ra is felírható hasonló egyenlőtlenség. A következő korollárium közvetlen következménye a 6.2.1. Tételnek.

6.2.1. Korollárium. *A $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, és $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ számsorozatokra legyen $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, valamint teljesüljön a* (6.2.1) *feltétel. Legyen (x_{jk}) statisztikusan lassan csökkenő sorozat mindkét indexre vonatkozólag és ráadásul erős értelemben az egyik indexre vonatkozólag. Ekkor* (6.1.4)*-ből következik* (6.1.1)*.*

Most az (x_{jk}) komplex számsorozatokat tekintjük és kétoldali Tauber-típusú feltételeket adunk.

6.2.2. Tétel (Fekete [8]). *A* $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, *és* $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *számsorozatokra legyen* $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, *valamint teljesüljön a* (6.2.1) *feltétel. Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy* (6.1.4)*-ből következzen az* (x_{jk}) *statisztikus konvergenciája ugyanazzal a határértékkel az, hogy fennálljon a következő két feltétel valamelyike: bármely* $\epsilon > 0$*-ra*

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$\left| \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \right| \ge \epsilon\}| = 0 \tag{6.2.8}$$

vagy

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$\left| \frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k (x_{mn} - x_{jk}) \right| \ge \epsilon\}| = 0. \tag{6.2.9}$$

6.2.5. Megjegyzés. Több is igaz ennél. Ha fennáll a (6.1.1), (6.1.4) és a (6.2.1), akkor szükségképpen (6.2.4) minden $\lambda > 1$-re és (6.2.5) minden $0 < \lambda < 1$-re igaz.

Az (x_{jk}) kettős komplex számsorozatot *statisztikusan lassan oszcillálónak* nevezzük az első indexre vonatkozólag, ha minden $\epsilon > 0$-ra

$$\inf_{\lambda>1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$\max_{m<j\le\lambda_m} |(x_{jn} - x_{mn})| \ge \epsilon\}| = 0. \tag{6.2.10}$$

Azt mondjuk, hogy az (x_{jk}) *erős értelemben statisztikusan lassan oszcilláló* az első indexre vonatkozólag, ha (6.2.10) akkor is érvényben marad, ha

$$\max_{m<j\le\lambda_m} |(x_{jn} - x_{mn})| \text{ helyett } \max_{\substack{m<j\le\lambda_m \\ n<k\le\lambda_n}} |(x_{jk} - x_{mk})| \quad \text{írunk.}$$

A statisztikusan lassan oszcillálás fogalmát a második indexre vonatkozólag hasonlóan definiáljuk.

6.2.6. Megjegyzés. Hasonlóan a 6.2.4. Megjegyzéshez a (6.2.10) feltétel ekvivalens a következővel: minden $\epsilon > 0$-ra

$$\inf_{0<\lambda<1} \limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M \quad \text{és} \quad n \le N :$$

$$\max_{\lambda_m < j \le m} |(x_{mn} - x_{jn})| \ge \epsilon\}| = 0,$$

és analóg ekvivalencia igaz az erős értelemben is.

6.2.2. Korollárium. *A $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, és $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ nemnegatív számsorozatokra legyen $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, valamint teljesüljön a* (6.2.1) *feltétel. Legyen (x_{jk}) statisztikusan lassan oszcilláló sorozat mindkét indexre vonatkozólag és ráadásul erős értelemben az egyik indexre vonatkozólag. Ekkor* (6.1.4)*-ből következik* (6.1.1)*.*

A (C, 1, 1) szummálhatóság esetén, amikor $p_j \equiv 1$ és $q_k \equiv 1$, tételeink és korollháriumaik a [21]-ban bizonyítottakra korlátozódnak.

VI.3. Bizonyítások

6.3.1. Lemma. *Ha P_m és Q_n pozitív számok nemcsökkenő sorozatai, akkor a* (6.2.1)*-ben szereplő feltételek ekvivalensek a következőkkel:*

$$\text{st}-\liminf \frac{P_m}{P_{\lambda_m}} > 1 \quad \textit{és} \quad \text{st}-\liminf \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}} > 1 \quad \textit{minden} \quad 0 < \lambda < 1\textit{-re.}$$

Bizonyítás. Lásd [22, Lemma 1].

6.3.2. Lemma. *A $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, és $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ nemnegatív számsorozatokra legyen $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, valamint teljesüljön a* (6.2.1) *és a* (6.1.4) *feltétel. Ekkor minden $\lambda > 0$-ra*

$$\text{st}-\lim t_{\lambda_m, \lambda_n} = L. \tag{6.3.1}$$

Bizonyítás. $\lambda > 1$ *esete.* Minden $M \geq 1$, $N \geq 1$ és $\epsilon > 0$-ra

$$\{m \leq M,\, n \leq N : |t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - L| \geq \epsilon\} \subseteq \{m \leq \lambda_M,\, n \leq \lambda_N : |t_{mn} - L| \geq \epsilon\},$$

amiből

$$\frac{1}{(M+1)(N+1)}|\{m \leq M,\, n \leq N : |t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - L| \geq \epsilon\}|$$
$$\leq \frac{\lambda^2}{(\lambda_M+1)(\lambda_N+1)}|\{m \leq \lambda_M,\, n \leq \lambda_N : |t_{mn} - L| \geq \epsilon\}|,$$

mivel $\frac{\lambda_M+1}{M+1} \leq \frac{\lambda M+1}{M+1} < \lambda$ és hasonló egyenlőtlenség érvényes $\frac{\lambda_N+1}{N+1}$-ra.
Mivel st$-\lim t_{mn} = L$, ezért az egyenlőtlenség bal oldali tagja 0-hoz tart, azaz st$-\lim t_{\lambda_m,\,\lambda_n} = L$.

$0 < \lambda < 1$ *esete.* Azt állítjuk, hogy ugyanazon t_{jk} tag nem fordulhat elő $(1+\frac{1}{\lambda})^2$-nél többször a $t_{\lambda_m,\,\lambda_n}$ sorozatban. Valóban, rögzített k-ra legyenek p és q olyan egészek, amelyekre

$$j = \lambda_p = \lambda_{p+1} = ... = \lambda_{p+q-1} < \lambda_{p+q}$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$j \leq \lambda p < \lambda(p+1) < ... < \lambda(p+q-1) < j+1 \leq \lambda(p+q).$$

Ekkor

$$j + \lambda(q-1) \leq \lambda(p+q-1) < j+1,$$

amiből következik, hogy $\lambda(q-1) < 1$, azaz $q < 1 + \frac{1}{\lambda}$.
Hasonlóan rögzített j-re bizonyíthatjuk, hogy t_{jk} nem fordulhat elő $(1+\frac{1}{\lambda})^2$-nél többször a $t_{\lambda_m,\,\lambda_n}$ sorozatban. Ezekből következik, hogy

$$\frac{1}{(M+1)(N+1)}|\{m \leq M,\, n \leq N : |t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - L| \geq \epsilon\}|$$
$$\leq (1+\frac{1}{\lambda})^2 \frac{\lambda_M+1}{M+1}\frac{\lambda_N+1}{N+1}\frac{1}{(\lambda_M+1)(\lambda_N+1)}|\{m \leq \lambda_M,\, n \leq \lambda_N :$$
$$|t_{mn} - L| \geq \epsilon\}|$$
$$\leq \frac{(\lambda+1)^2}{\lambda^2} 2\lambda^2 \frac{1}{(\lambda_M+1)(\lambda_N+1)}|\{m \leq \lambda_M,\, n \leq \lambda_N :$$

$$|t_{mn} - L| \geq \epsilon\}| \to 0, \quad \text{ha} \quad M,\, N \to \infty.$$

Fentebb kihasználtuk, hogy

$$\frac{(\lambda_M + 1)(\lambda_N + 1)}{(M+1)(N+1)} \leq 2\lambda^2.$$

Ennélfogva st–$\lim t_{\lambda_m,\,\lambda_n} = L$. $\diamond$

A következő két reprezentáció nagyon fontos szerepet játszik a 6.2.1. és a 6.2.2. Tétel bizonyításában.

6.3.3. Lemma. *Ha $\lambda > 1$, akkor*

$$\frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk}$$

$$= t_{\lambda_m,\,\lambda_n} + \frac{P_m}{P_{\lambda_m} - P_m}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - t_{m,\,\lambda_n}) + \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n} - Q_n}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - t_{\lambda_m,\,n})$$

$$+\frac{P_m Q_n}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - t_{m,\,\lambda_n} - t_{\lambda_m,\,n} + t_{mn}). \tag{6.3.2}$$

Ha $0 < \lambda < 1$, akkor

$$\frac{1}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})} \sum_{j=\lambda_m+1}^{m} \sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k x_{jk}$$

$$= t_{mn} + \frac{P_{\lambda_m}}{P_m - P_{\lambda_m}}(t_{mn} - t_{\lambda_m,\,n)}) + \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n - Q_{\lambda_n}}(t_{mn} - t_{m,\,\lambda_n})$$

$$+\frac{P_{\lambda_m} Q_{\lambda_n}}{(P_m - P_{\lambda_m})(Q_n - Q_{\lambda_n})}(t_{mn} - t_{\lambda_m,\,n} - t_{m,\,\lambda_n} + t_{\lambda_m,\,\lambda_n}). \tag{6.3.3}$$

Bizonyítás. $\lambda > 1$ esete. Definíció szerint

$$\sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk}$$

$$= P_{\lambda_m} Q_{\lambda_n} t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - P_{\lambda_m} Q_n t_{\lambda_m,\,n} - P_m Q_{\lambda_n} t_{m,\,\lambda_n} + P_m Q_n t_{mn}.$$

Felhasználva ezt egyszerű átrendezéssel adódik, hogy

$$\frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk}$$

$$= t_{\lambda_m,\lambda_n} + \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\{(P_{\lambda_m}Q_n - P_mQ_n)(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{\lambda_m,n})$$

$$+(P_mQ_{\lambda_n}-P_mQ_n)(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{m,\lambda_n}) + P_mQ_n(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{m,\lambda_n}-t_{\lambda_m,n}+t_{mn})\}$$

$$+t_{\lambda_m,\lambda_n} + \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}-Q_n}(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{\lambda_m,n}) + \frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m}(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{m,\lambda_n})$$

$$+\frac{P_mQ_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{m,\lambda_n}-t_{\lambda_m,n}+t_{mn}).$$

A (6.3.3) bizonyítása hasonlóan történik. ◇

6.3.4. Lemma. *A* $p := \{p_j\}_{j=0}^{\infty}$, *és* $q := \{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ *nemnegatív számsorozatokra legyen* $p_0 > 0$, $q_0 > 0$, *valamint teljesüljön a* (6.2.1) *és a* (6.1.4) *feltétel. Ekkor minden* $\lambda > 1$*-re*

$$\text{st–}\lim \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk} = L, \tag{6.3.4}$$

és minden $0 < \lambda < 1$*-re*

$$\text{st–}\lim \frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n} p_j q_k x_{jk} = L. \tag{6.3.5}$$

Bizonyítás. $\lambda > 1$ *esete.* Használjuk fel a (6.3.2) előállítást, valamint azt a tényt, hogy

$$\text{st–}\limsup \frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m} = \text{st–}\limsup \frac{1}{\frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1} = \frac{1}{\text{st–}\liminf \frac{P_{\lambda_m}}{P_m}-1} < \infty, \tag{6.3.6}$$

ahol kihasználtuk (6.2.1)-et is. Hasonlóan adódik, hogy

$$\text{st–}\limsup \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}-Q_n} < \infty. \tag{6.3.7}$$

Nyilvánvaló, hogy (6.3.4) következik a (6.1.4)-ből és a 6.3.2. Lemmából.

$0 < \lambda < 1$ *esete.* Használjuk fel a (6.3.3) előállítást. A 6.3.1. Lemma szerint

$$\text{st}-\limsup \frac{P_{\lambda_m}}{P_m - P_{\lambda_m}} = \frac{1}{\text{st}-\liminf \frac{P_m}{P_{\lambda_m}} - 1} < \infty \tag{6.3.8}$$

és

$$\text{st}-\limsup \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n - Q_{\lambda_n}} < \infty. \tag{6.3.9}$$

A (6.3.5) így már következik a (6.1.4)-ből és a 6.3.2. Lemmából. $\diamond$

A 6.2.1. Tétel *bizonyítása. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy (x_{jk})-ra fennáll a (6.1.1) és (6.1.4). $\lambda > 1$ esetén alkalmazzuk a 6.3.4. Lemmát

$$\text{st}-\lim \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn})$$

$$= \text{st}-\lim \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k x_{jk} - \text{st}-\lim x_{mn}$$

$$= L - L = 0, \quad \text{ha} \quad m, n \to \infty.$$

Ez bizonyítja (6.2.4)-et. Ehhez hasonlóan következik a $0 < \lambda < 1$ esetén (6.2.5) a 6.3.4. Lemmából következik a (6.2.5).

Elegendőség. Tegyük fel, hogy $\text{st}-\lim t_{mn} = L$ és teljesülnek a (6.2.1)-(6.2.3) feltételek. A $\text{st}-\lim x_{jk} = L$ bizonyításához elég megmutatni, hogy

$$\text{st}-\lim (x_{mn} - t_{mn}) = 0. \tag{6.3.10}$$

$\lambda > 1$ *esete.* Alkalmazva a 6.3.3. Lemmát

$$x_{mn} - t_{\lambda_m, \lambda_n} = \frac{P_m}{P_{\lambda_m} - P_m}(t_{\lambda_m, \lambda_n} - t_{m, \lambda_n}) + \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n} - Q_n}(t_{\lambda_m, \lambda_n} - t_{\lambda_m, n})$$

$$+ \frac{P_m Q_n}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)}(t_{\lambda_m, \lambda_n} - t_{m, \lambda_n} - t_{\lambda_m, n} + t_{mn})$$

$$- \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}), \tag{6.3.11}$$

amiből minden $\epsilon > 0$-ra

$$\{m \le M,\, n \le N :\, x_{mn} - t_{\lambda_m,\,\lambda_n} \ge \epsilon\} \subseteq$$

$$\{m \le M,\, n \le N :\, \frac{P_m}{P_{\lambda_m} - P_m}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - t_{m,\,\lambda_n}) + \frac{Q_n}{Q_{\lambda_n} - Q_n}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - t_{\lambda_m,\,n})$$

$$+\frac{P_m Q_n}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n} - t_{m,\,\lambda_n} - t_{\lambda_m,\,n} + t_{mn}) \ge \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$\cup\{m \le M,\, n \le N :\, \frac{1}{(P_{\lambda_m} - P_m)(Q_{\lambda_n} - Q_n)} \sum_{j=m+1}^{\lambda_m} \sum_{k=n+1}^{\lambda_n} p_j q_k (x_{jk} - x_{mn}) \le -\frac{\epsilon}{2}\}$$

$$=:\, A_{MN}(\epsilon) \,\cup\, B_{MN}(\epsilon). \tag{6.3.12}$$

A 6.3.2. Lemma, (6.3.6) és (6.3.7) alapján minden $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |A_{MN}(\epsilon)| = 0. \tag{6.3.13}$$

Másrészt tetszőlegesen adott $\delta > 0$-hoz a (6.2.2) szerint létezik egy $\lambda > 1$, amelyre

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |B_{MN}(\epsilon)| \le \delta. \tag{6.3.14}$$

Egybevetve (3.12)-(3.14)-t, kapjuk, hogy

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M,\, n \le N :\, x_{mn} - t_{\lambda_m,\,\lambda_n} \ge \epsilon\}| \le \delta.$$

Mivel $\delta > 0$ tetszőleges volt, ezért minden $\epsilon > 0$-ra az is fennáll, hogy

$$\limsup_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M,\, n \le N :\, x_{mn} - t_{\lambda_m,\,\lambda_n} \ge \epsilon\}| = 0. \tag{6.3.15}$$

A 6.3.2. Lemmát alkalmazva nyerjük, hogy

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{(M+1)(N+1)} |\{m \le M,\, n \le N :\, x_{mn} - t_{mn} \ge \epsilon\}| = 0. \tag{6.3.16}$$

$0 < \lambda < 1$ *esete.* (6.3.3) szerint

$$x_{mn} - t_{mn} = \frac{P_{\lambda_m}}{P_m - P_{\lambda_m}}(t_{mn} - t_{\lambda_m,\,n}) + \frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n - Q_{\lambda_n}}(t_{mn} - t_{m,\,\lambda_n})$$

$$+\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}(t_{mn}-t_{\lambda_m,\,n}-t_{m,\,\lambda_n}+t_{\lambda_m,\,\lambda_n})$$

$$+\frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_k(x_{mn}-x_{jk}), \tag{6.3.17}$$

amiből minden $\epsilon>0$-ra az következik, hogy

$$\{m\le M,\, n\le N:\, x_{mn}-t_{mn}\le-\epsilon\}\subseteq$$

$$\{m\le M,\, n\le N:\, \frac{P_{\lambda_m}}{P_m-P_{\lambda_m}}(t_{mn}-t_{\lambda_m,\,n})+\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n-Q_{\lambda_n}}(t_{mn}-t_{m,\,\lambda_n})$$

$$+\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}(t_{mn}-t_{\lambda_m,\,n}-t_{m,\,\lambda_n}+t_{\lambda_m,\,\lambda_n})\le-\frac{\epsilon}{2}\}$$

$$\cup\{m\le M,\, n\le N:\, \frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_k(x_{mn}-x_{jk})\le-\frac{\epsilon}{2}\}.$$

A 6.3.2. Lemma, (6.2.3), (6.3.8) és (6.3.9) szerint minden $\epsilon>0$-ra kapjuk, hogy

$$\lim_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}|\{m\le M,\, n\le N:\, x_{mn}-t_{mn}\le-\epsilon\}|=0. \tag{6.3.18}$$

A (6.3.16)-ot és (6.3.18)-at egybevetve minden $\epsilon>0$-ra adódik, hogy

$$\lim_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}|\{m\le M,\, n\le N:\, |x_{mn}-t_{mn}|\ge\epsilon\}|=0.$$

Ezzel beláttuk (6.3.10)-et és a 6.2.1. Tételt bebizonyítottuk. $\diamond$

A 6.2.2. Tétel *bizonyítása. Szükségesség.* Tegyük fel, hogy (x_{jk})-ra teljesül (6.1.1) és (6.1.4). Alkalmazva a 6.3.4. Lemmát minden $\lambda>1$-re megkapjuk (6.2.4)-et és minden $0<\lambda<1$-re megkapjuk (6.2.5)-t.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy st–$\lim t_{mn}=L$ és a (6.2.8) és (6.2.9) feltételek egyike teljesül. A (6.1.1) igazolásához most is elegendő (6.3.10)-et bizonyítani.

Legyen $\epsilon>0$ tetszőlegesen adott. A $\lambda>1$ esetben a (6.3.11) alapján kapjuk, hogy

$$\{m\le M,\, n\le N:\, |x_{mn}-t_{\lambda_m,\,\lambda_n}|\ge\epsilon\}$$

$$\subseteq\left\{m\le M,\, n\le N:\, \left|\frac{P_m}{P_{\lambda_m}-P_m}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n}-t_{m,\,\lambda_n})\frac{Q_n}{Q_{\lambda_n}-Q_n}(t_{\lambda_m,\,\lambda_n}-t_{\lambda_m,\,n})\right.\right.$$

$$+\frac{P_m Q_n}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}(t_{\lambda_m,\lambda_n}-t_{m,\lambda_n}-t_{\lambda_m,n}+t_{mn})\Bigg|\geq\frac{\epsilon}{2}\Bigg\}$$

$$\cup\Bigg\{m\leq M,\, n\leq N:\ \frac{1}{(P_{\lambda_m}-P_m)(Q_{\lambda_n}-Q_n)}\Bigg|\sum_{j=m+1}^{\lambda_m}\sum_{k=n+1}^{\lambda_n}p_jq_k(x_{jk}-x_{mn})\Bigg|\geq\frac{\epsilon}{2}\Bigg\}$$

$$:=A^{(1)}_{MN}(\epsilon)\cup B^{(1)}_{MN}(\epsilon). \tag{6.3.19}$$

Adott $\delta>0$-hoz a (6.2.8) alapján létezik olyan $\lambda>1$, amelyre

$$\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}|B^{(1)}_{MN}(\epsilon)|\leq\delta.$$

A $0<\lambda<1$ esetben (6.3.17) szerint

$$\{m\leq M,\, n\leq N:\ |x_{mn}-t_{mn}|\leq\epsilon\}\subseteq\Bigg\{m\leq M,\, n\leq N:$$

$$\Bigg|\frac{P_{\lambda_m}}{P_m-P_{\lambda_m}}(t_{mn}-t_{\lambda_m,n})+\frac{Q_{\lambda_n}}{Q_n-Q_{\lambda_n}}(t_{mn}-t_{m,\lambda_n})$$

$$+\frac{P_{\lambda_m}Q_{\lambda_n}}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}(t_{mn}-t_{\lambda_m,n}-t_{m,\lambda_n}+t_{\lambda_m,\lambda_n})\Bigg|\geq\frac{\epsilon}{2}\Bigg\}$$

$$\Bigg\{m\leq M,\, n\leq N:\ \frac{1}{(P_m-P_{\lambda_m})(Q_n-Q_{\lambda_n})}\Bigg|\sum_{j=\lambda_m+1}^{m}\sum_{k=\lambda_n+1}^{n}p_jq_k(x_{mn}-x_{jk})\Bigg|\geq\frac{\epsilon}{2}\Bigg\}$$

$$:=A^{(2)}_{MN}(\epsilon)\cup B^{(2)}_{MN}(\epsilon). \tag{6.3.20}$$

Adott $\delta>0$-hoz a (6.2.9) szerint létezik olyan $0<\lambda<1$, amelyre

$$\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}|B^{(2)}_{MN}(\epsilon)|\leq\delta.$$

Alkalmazva a (6.3.19)-et, (6.3.20)-at és a 6.3.2. Lemmát, mindkét esetben adódik, hogy

$$\limsup_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}|\{m\leq M,\, n\leq N:\ |x_{mn}-t_{mn}|\geq\epsilon\}|\leq\delta.$$

Mivel $\delta>0$ tetszőleges volt, minden $\epsilon>0$-ra következik, hogy,

$$\lim_{M,N\to\infty}\frac{1}{(M+1)(N+1)}|\{m\leq M,\, n\leq N:\ |x_{mn}-t_{mn}|\geq\epsilon\}|=0.$$

Ezzel igazoltuk (6.3.10)-et, így a 6.2.2. Tétel bizonyítása teljes. $\diamond$

VI.4. Megoldásra váró probléma

Legyen $(x_{jk} : j, k = 0, 1, 2, ...)$ valós vagy komplex számok kettős sorozata és tekintsük a

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} x_{jk}, \quad m, n = 0, 1, 2, ...$$

összeget. Nyitott kérdes annak bizonyítása, hogy ha (x_{jk})-ra teljesülnek a Landau-típusú feltételek az első és második indexre vonatkozólag, azaz léteznek olyan $n_0 > 0$ és $H > 0$ konstansok, amelyekre

$$j(x_{j+1,k} - x_{jk}) \geq -H, \text{ ha } j+1, \, k > 0$$

és

$$k(x_{j,k+1} - x_{jk}) \geq -H, \text{ ha } j, \, k+1 > n_0,$$

akkor az (x_{jk}) közönséges (Pringsheim-féle) konvergenciája következik a $(C, 1, 1)$ statisztikus szummálhatóságból.

Megjegyezzük, hogy ezt Fridy és Khan egyszeres sorozatokra bizonyította [5], de kettős sorozatokra a teljes bizonyítás még hiányzik.

ÖSSZEFOGLALÓ

A Tauber-típusú tételek jelentősége J. E. Littlewood tételéből eredt (1910), amely a matematikai analízis egy új ágát nyitotta meg a múlt század elejétől. A Tauber-típusú tételek segítségével egy sor bizonyos szummálhatóságából következtetni tudunk a sor konvergenciájára is. E téma kiemelkedő egyénisége volt Jovan Karamata, aki a lassan változó függvények szerkezetének vizsgálatával jelentősen hozzájárult a matematika ezen ágának kiszélesítéséhez. Az értekezés második fejezetében Karamata egyik eredményét élesítjük, szükséges és elegendő feltételeket adunk arra vonatkozólag, hogy lokálisan integrálható függvények súlyozott közép szerinti szummálhatóságából következzen az integrálok konvergenciája is. Legyen P egy $R_+ := [0, \infty)$ intervallumon definiált függvény, amelyre

$$P \quad \text{nemcsökkenő} \quad R_+\text{–on}, \quad P(0) = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = \infty.$$

Az $f : R_+ \to C$ komplex értékű Lebesgue szerint bármely véges $(0, t)$-n, $0 < t < \infty$ integrálható függvényre legyen

$$s(x) := \int_0^x f(y)dy \quad \text{és} \quad \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x), \quad t > 0,$$

feltéve, hogy $P(t) > 0$. Olyan szükséges és elegendő feltételeket kerestünk tehát, amelyek segítségével a $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = L$ feltételből $\lim_{x\to\infty} s(x) = L$ következik. Valós értékű f függvényre egyoldali, míg komplex értékű f függvényre kétoldali Tauber-típusú tétel adódik. Az így kapott tételeknek az a jelentőségük, hogy alkalmazhatók az összes súlyozott közép szerinti szummálhatóságra, és egységesítik a szakirodalomban található speciális szummálhatósági módszereket.

A statisztikus konvergencia fogalma, mint sorozatok határértékének egy új kiterjesztése a múlt század közepén került bevezetésre, de csak Fridy 1985-ben megjelent cikke után vált egyre elterjedtebbé a matematika különböző ágaiban. Az x_k számsorozatot *statisztikusan konvergensnek* nevezzük L-hez, ha bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_k - L| \ge \epsilon\}| = 0,$$

ahol az abszolútérték jel a halmaz elemszámát jelöli.

Móricz Ferenc ennek a fogalomnak az analogonjaként vezette be 2003-ban a mérhető függvények statisztikus határértékét. Legyen az f függvény Lebesgue–mérhető a $(0, \infty)$ intervallumon. Az f függvénynek a ∞-ben *statisztikus határértéke* van, ha létezik olyan l szám, hogy bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{x \in (0, a) : |f(x) - l| > \epsilon\}| = 0,$$

ahol az abszolútérték jelek most a halmaz Lebesgue–mértékét jelölik. A statisztikus konvergencia és statisztikus határérték elemi tulajdonságairól, valamint ezek alkalmazási területeiről nyújt összefoglaló betekintést az értekezés harmadik fejezete.

Schoenberg 1959-ben klasszikus tételt adott a statisztikus konvergencia létezésére, amely szerint az x_k sorozat ξ-hez való statisztikus konvergenciájának szükséges és elegendő feltétele az, hogy minden t-re fennálljon az alábbi határérték:

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} e^{itx_k} = e^{it\xi}.$$

Az értekezés negyedik fejezete megadja e tétel nemdiszkrét és általánosított változatát, mely szükséges és elegendő feltételt ad a statisztikus határérték létezésére n-dimenzióban. E tételt terjesztjük ki továbbá vektor értékű sorozatokra és függvényekre is.

Az ötödik fejezetben visszatérünk a Tauber-típusú tételekhez, a súlyozott statisztikus szummálhatóság bevezetésével szükséges és elegendő feltételeket adunk arra vonatkozólag, hogy egy integrálható függvény súlyozott statisztikus szummálhatóságából következzék annak statisztikus határértéke is.

Az utolsó fejezet kettős sorozatokra vonatkozó Tauber feltételekkel foglalkozik. Az x_{jk} kettős számsorozat *statisztikusan konvergál* valamely L-hez, ha bármely $\epsilon > 0$-ra

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} |\{j \le m \quad \text{és} \quad k \le n : |x_{jk} - L| \ge \epsilon\}| = 0.$$

A téma kérdésköre megegyezik az előző fejezetével, azaz olyan tételek szerepelnek, amelyekkel egy kettős sorozat statisztikus szummálhatóságából következik annak statisztikus konvergenciája is. Fridy és Khan egyszeres sorozatokra ennél

erősebb tételt is bizonyított (Móricz ugyanezt az eredményt más módszerrel is megkapta), ti. azt, hogy a Landau-típusú egyoldali Tauber feltétellel a statisztikus szummálhatóságból a közönséges konvergencia is következik. Nyitott probléma azonban az, hogy ez az erősebb tétel kiterjeszthető-e kettős sorozatok esetére is.

Summary

The importance of Tauberian theorems emanated from Littlewood's theorem (1910) which became the starting point of a new branch of mathematical analysis the Tauberian theory. A typical Tauberian theorem says that if a given sequence is summable by some regular summability method, plus an additional so-called Tauberian condition is satisfied then the sequence in question is convergent to the same limit. Jovan Karamata proved various Tauberian theorems and he discovered the structure of slowly varying functions and their fundamental properties. In the second chapter we sharpen one of Karamata's results, we prove necessary and sufficient Tauberian conditions for locally integrable functions (in Lebesgue's sense) over R_+, under which convergence follows from summability by weighted mean methods. Let P be a function defined on $R_+ := [0, \infty)$ such that

$$P \quad \text{is nondecreasing on} \quad R_+, \quad P(0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{t\to\infty} P(t) = \infty.$$

P is called a *weight function.* For any complex-valued function $f : R_+ \to C$ which is integrable in Lebesgue's sense over every finite interval $(0, t)$ for $0 < t < \infty$, in symbol: $f \in L^1_{\text{loc}}(R)$, we set

$$s(x) := \int_0^x f(y)dy \quad \text{and} \quad \sigma(t) := \frac{1}{P(t)} \int_0^t s(x)dP(x), \quad t > 0,$$

provided that $P(t) > 0$. We give necessary and sufficient conditions under which $\lim_{x\to\infty} s(x) = L$ follows from $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = L$. The main results of this chapter apply to all weighted mean methods and unify the results known in the literature for particular methods. Among others, the conditions in our theorems are easy consequences of the slow decrease condition for real-valued functions, or the slow oscillation condition for complex-valued functions. Therefore, practically all classical one-sided as well as two-sided Tauberian conditions for weighted mean methods are corollaries of our two main theorems.

H. Fast introduced an extension of the usual concept of sequential limits which he called statistical convergence. The intensive study of the concept of statistical

convergence was initiated by Fridy in 1985. A number sequence x_k is said to be *statistically convergent* to some number L, if for each $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0,$$

where the vertical bars denote the cardinality of the set which they enclose.

In 2003 Ferenc Móricz introduced the notion of statistical limit of a measurable function. This notion can be considered as the nondiscrete analogue of statistical convergence. Let f be measurable (in Lebesgue's sense) on the interval $(0, \infty)$. We say that f has a *statistical limit at* ∞ if there exists a number l such that for every $\epsilon > 0$,

$$\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} |\{x \in (0, a) : |f(x) - l| > \epsilon\}| = 0,$$

where the vertical bars denote the Lebesgue measure of the set which they enclose. In the third chapter we give a summary about the basic properties of statistical convergence and statistical limit.

Schoenberg's classical theorem (1959) says that a sequence x_k is statistically convergent to some number ξ if and only if for every $t \in R$,

$$\lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell} \sum_{k=1}^{\ell} e^{itx_k} = e^{it\xi}.$$

In the fourth chapter we extend this result from single to multiple sequences, and prove an analogous theorem on statistical limit. These theorems even may be extended to vector-valued sequences or functions, respectively.

In the fifth chapter we present other Tauberian theorems by introducing the notion of statistical summability by weighted means and we give necessary and sufficient conditions under which the statistical limit of a measurable function follows from its statistical summability.

In the last chapter we are interested in Tauberian theorems concerning double sequences. A double sequence x_{jk} is said to be statistically convergent to some number L, if for each $\epsilon > 0$,

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{(m+1)(n+1)} |\{j \leq m \quad \text{és} \quad k \leq n : |x_{jk} - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

We prove necessary and sufficient Tauberian theorems under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means. For single sequences Fridy and Khan proved a stronger theorem which says that the ordinary convergence follows from statistical summability with the Landau-type one-sided Tauberan condition. (Móricz proved this result in a different way.) The extension of this stronger theorem for double sequences is still an open problem.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular variation, Cambridge, 1987

[2] H. Fast, Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* **2** (1951), 241-244.

[3] J. A. Fridy, On statistical convergence, *Analysis* **5** (1985), 301-312.

[4] J. A. Fridy and C. Orhan, Statistical limit superior and limit inferior, *Proc. Amer. Math. Soc.* **125** (1997), 3625-3631

[5] J. A. Fridy and M. K. Khan, Statistical extensions of some classical Tauberian theorems, *PAMS*, **128** (2000), 2347-2355

[6] Á. Fekete and F. Móricz, A characterization of the existence of statistical limit of measurable functions, *Acta Math. Hungar.* (to appear)

[7] Á. Fekete and F. Móricz, Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over R_+, *Publ. Math. Debrecen*, **67** (2005), 65-78.

[8] Á. Fekete, Tauberian conditions for double sequences that are statistically summable by weighted means, *Sarajevo Journal of Mathematics*, Vol.1 (14) (2005), 197-210

[9] Á. Fekete, Tauberian conditions under which the statistical limit of an integrable function follows from its statistical summability, *Studia Sci. Math. Hungarica*, **43** (2006), 131-145.

[10] G. H. Hardy, Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series, *Proc. London Math. Soc. (2)*, **8** (1910), 310-320.

[11] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford, 1949.

[12] J. Karamata, Quelques théorèmes de nature tauberienne relatifs aux intégrales et aux séries, *Bull. Acad. Serbe* **2** (1935), 169-205.

[13] J. Karamata, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommabilité*, Hermann et Cie, Paris, 1937.

[14] J. Korevaar, Tauberian Theory, a century of developments, Springer, 2004

[15] B. Kwee, A Tauberian theorem for the logarithmic method of summation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **63** (1967), 401-405.

[16] E. Landau, Über die Bedeutung einer neuerer Grentzwertsätze der Herren Hardy und Axel, *Prace Mat.-Fiz.* **21** (1910), 97-177.

[17] F. Móricz, Necessary and sufficient Tauberian conditions in the case of weighted mean summable integrals over R_+, *Math. Ineq. & Appl., Zagreb* Volume 7, Number 1, (2004), 87-93.

[18] F. Móricz, Statistical convergence of multiple sequences, *Arch. Math. (Basel)* **81** (2003), 82-89.

[19] F. Móricz, Statistical limits of measurable functions, *Analysis* **24** (2004), 207-219.

[20] F. Móricz, Strong Cesàro summability and statistical limit of double Fourier integrals, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **71** (2005), 159-174.

[21] F. Móricz, Tauberian theorems for double sequences that are statistically summable (C, 1, 1), *J. Math. Anal. Appl.* **286** (2003), 340-350.

[22] F. Móricz and C. Orhan, Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means, *Studia Sci. Math. Hungar.* **41** (2004), 391-403.

[23] F. Móricz and U. Stadtmüller, Necessary and sufficient conditions under which convergence follows from summability by weighted means, *Intern. J. Math. Math. Sci.* **27** (2001), 399-406.

[24] Z. Németh and F. Móricz, Tauberian conditions under which convergence of integrals follows from summability $(C, 1)$ over R_+, *Analysis Math.*, **26** (2000), 53-61.

[25] I. J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 361-375.

[26] R. Schmidt, Über divergente Folgen und Mittelbildungen, *Math. Z.* **22** (1925), 89-152.

[27] E. M. Stein and G. Weisz, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1971.

[28] H. Steinhaus, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Col-*

loq. Math. **2** (1951), 73-74.

[29] A. Tauber, Ein Satz aus der Theorie der unendliche Reihen, *Monatsh. Math. u. Phys.* **8** (1897), 273-277

[30] E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*, Clarendon Press, Oxford, 1937.

[31] A. Zygmund, Trigonometrical series, *Monogr. Mat.* **5**, Warszawa-Lwow, 1935.

[32] A. Zygmund, Trigonometric series, Cambridge Univ. Press, UK, 1959.