

# Alakmegőrző fatranszformátorok

Tézisfüzet

Gazdag Zsolt

Témavezető:

Dr. Fülöp Zoltán

Szegedi Tudományegyetem  
Számítástudomány Alapjai Tanszék

2006

# Bevezetés

A fatranszformátorokat a [Rou70, Tha70] és [Tha73] munkákban vezették be és mivel a szintaxis-vezérelt fordítók formális modelljeiként szolgálnak, széles körben tanulmányozták őket (lásd pl. [Eng75, Bak78, Bak79, Ési80, Eng82, Ési83, GS84, FV92, GS97] és [FV98]).

Ezen a kutatási területen fán egy véges rangolt ábécé feletti termet értünk, amit véges, címkézett, rendezett és irányított gráfelméleti faként ábrázolunk. Egy fatranszformáció tulajdonképpen egy fákon értelmezett bináris reláció. Egy  $M$  fatranszformátor pedig egy olyan termátíró rendszer, amely egy  $\tau_M$  fatranszformációt számít ki, amit az  $M$  által kiszámolt fatranszformációnak nevezünk.

Jelen értekezésben a fatranszformátorok két alapvető típusát vizsgáljuk, a felszálló fatranszformátorokat [Rou70, Tha70] és a leszálló fatranszformátorokat [Tha73]. Amíg a felszálló fatranszformátorok a gyökerénél kezdve és a levelek felé haladva dolgoznak fel egy input fát, addig a leszálló fatranszformátorok fordított irányban működnek, azaz a levelektől a gyökér felé haladva dolgozzák fel az input fákot. A fatranszformátorok az ún. átírási szabályaik alkalmazásával tudnak feldolgozni egy input fát. Tulajdonképpen ezek a szabályok tekinthetők a fatranszformátorok szintaxisának, míg az alkalmazásukkal kiszámolt fatranszformáció megfeleltethető a fatranszformátor szemantikájának. A felszálló illetve leszálló fatranszformátorokkal kiszámítható fatranszformációk osztályát rendre *TOP*-pal és *BOT*-tal jelöljük.

Az értekezésben alakmegőrző (felszálló és leszálló) fatranszformátorokkal foglalkozunk. Azt mondjuk, hogy két fa alakja megegyezik, ha azok csak a csúcsaik címkéiben különböznek (lásd 1. ábra). Egy  $\tau$  fatranszformáció alakmegőrző, ha minden  $(s, t) \in \tau$  esetén az  $s$  és  $t$  fák alakja megegyezik. Továbbá, egy fatranszformátor alakmegőrző, ha alakmegőrző fatranszformációt számít ki. Az alakmegőrző felszálló és alakmegőrző leszálló fatranszformátorok által kiszámított fatranszformációk osztályát *SHAPE*-el jelöljük.

A felszálló és a leszálló átcímkéző fatranszformátorok [Eng75] alakmegőrzők. Ezek az átcímkézők miközben beolvasnak egy input szimbólumot, pontosan egy, az input szimbólummal megegyező rangú output szimbólumot írnak ki. A felszálló átcímkéző fatranszformátorok által és a leszálló átcímkéző fatranszformátorok által kiszámított fatranszformációk osztálya megegyezik, amelyet *QREL*-lel jelölünk.

Nyilvánvaló, hogy az átcímkéző tulajdonság a fatranszformátor szintaktikájá-

nak megszorítása, hiszen ez a megszorítás a fatranszformátor átírási szabályait érinti. Másrészt, az alakmegőrző tulajdonság a fatranszformátor szemantikájának egy tulajdonsága, mivel az a fatranszformátor által kiszámolt fatranszformáció egy tulajdonsága.

Számos olyan eredmény ismert a fatranszformátorok területéről, melyek a következő problémaosztályhoz tartoznak. Legyen  $C$  egy bizonyos típusú fatranszformátorok által kiszámított fatranszformációk osztálya. Legyen továbbá  $C'$  a  $C$  osztály egy (természetes) részosztálya. A következő két kérdést szeretnénk megválaszolni. Van-e olyan (természetes) szintaktikus megszorítása a modellnek, hogy egy  $\tau$  fatranszformáció akkor és csak akkor tartozik a  $C'$  osztályhoz, ha létezik olyan  $M$  fatranszformátor, amely rendelkezik ezzel a szintaktikus megszorítással, és amelyre  $\tau_M = \tau$ ? Adott egy megfelelő típusú  $M$  fatranszformátor, eleme-e  $\tau_M$  a  $C'$  osztálynak? Ha az első kérdésre pozitív választ tudunk adni, akkor jellemeztük a  $C$  osztály szemantikus megszorítását a fatranszformátor egy szintaktikus megszorításával.

Az értekezésben egy, a fenti osztályba tartozó problémát oldunk meg. Nevezetesen, az alakmegőrző felszálló és leszálló fatranszformációkat jellemezzük átcímkező fatranszformátorokkal. Nyilvánvaló, hogy  $SHAPE \subseteq TOP \cup BOT$ . Az értekezés fő eredményeként megmutatjuk, hogy minden  $\tau \in SHAPE$  felszálló fatranszformáció kiszámítható egy átcímkező fatranszformátorral (3.64. Tétel), és hogy minden  $\tau \in SHAPE$  leszálló fatranszformáció is kiszámítható átcímkező fatranszformátorral (3.70. Tétel). Mivel az is teljesül, hogy  $QREL \subseteq SHAPE$ , egy  $\tau$  felszálló vagy leszálló fatranszformáció akkor és csak akkor eleme a  $SHAPE$  osztálynak, ha kiszámítható egy átcímkező fatranszformátorral. Ily módon megmutatjuk, hogy a szemantikát megszorító alakmegőrző tulajdonság jellemezhető egy szintaxisra vonatkozó megszorítással, az átcímkező tulajdonsággal.

Másrészt megmutatjuk azt is, hogy az alakmegőrző tulajdonság eldönthető mind felszálló fatranszformátorokra (4.4. Tétel), mind leszálló fatranszformátorokra (4.19. Tétel).

Az értekezés eredményei a [FG03, Gaz06b] és [Gaz06a] cikkekben jelentek meg. A tézisfüzetben a tételek és lemmák számozása megegyezik az értekezésben használt számozással.

Az értekezésben alapvető termátíró konstrukciókat használunk. Emellett használjuk a fatranszformátorok elméletében szokásos eszközöket, például a fahomomorfizmus fogalmát. Az eldönthetőségi eredmények bizonyításáiban sokszor alkalmazzuk a faautomaták elméletében jól ismert módszer, a pumpáló lemma

bizonyos változatait. Ezen módszer segítségével elegendő lesz majd egy fatranszformátor véges sok input és output fáját megvizsgálni, amikor el akarjuk dönteni, hogy a fatranszformátor rendelkezik-e egy adott tulajdonsággal vagy sem.

## Az értekezés eredményei

### Definíciók és jelölések

Legyen  $\Sigma$  egy véges, rangolt ábécé és  $A$  egy  $\Sigma$ -tól diszjunkt halmaz. Jelöljük  $T_\Sigma(A)$ -val a  $\Sigma$  feletti  $A$ -val indexelt fák halmazát. Jelölje  $T_\Sigma$  a  $T_\Sigma(\emptyset)$  halmazt. Minden  $k$ -ra ( $k \geq 0$ ) jelölje  $\Sigma^{(k)}$  a  $\Sigma$  azon szimbólumainak halmazát, amelyek rangja  $k$ .

Egy *erdő* a  $T_\Sigma$  egy részhalmaza, míg egy *fatranszformáció* a  $T_\Sigma \times T_\Delta$  egy részhalmaza. Szükségünk lesz a *változó szimbólumok*  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  halmazára. Minden  $k$ -ra ( $k \geq 0$ ) legyen  $X_k = \{x_1, \dots, x_k\}$ .

A *fa helyettesítés* fogalmát a következőképpen definiáljuk. Legyen  $t \in T_\Sigma(X_k)$  és legyenek  $t_1, \dots, t_k$  valamilyen rangolt ábécé feletti fák. Akkor  $t[t_1, \dots, t_k]$  jelöli azt a fát, amit úgy kapunk, hogy  $t$ -ben minden  $i$ -re ( $1 \leq i \leq k$ )  $x_i$  minden előfordulását a  $t_i$  fára cseréljük.

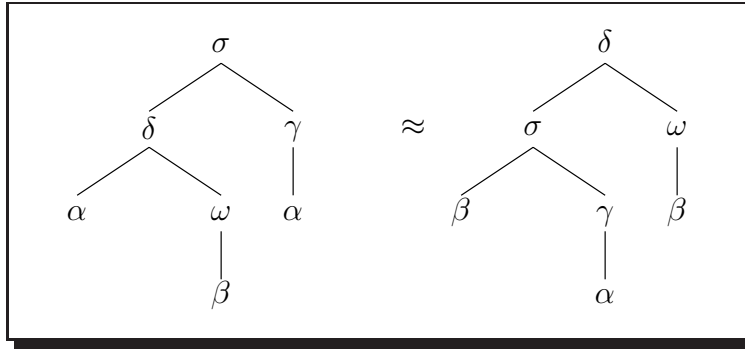
Legyen  $\bar{h} : \Sigma \rightarrow T_\Delta(X)$  egy leképezés azzal a tulajdonsággal, hogy ha  $\sigma \in \Sigma^{(k)}$  valamely nemnegatív  $k$ -ra, akkor  $\bar{h}(\sigma) \in T_\Delta(X_k)$ . Akkor a  $\bar{h}$  által indukált  $h : T_\Sigma \rightarrow T_\Delta$  *fahomomorfizmust*, a következőképpen definiáljuk. Minden  $s \in T_\Sigma$  fára, ha  $s = \sigma(s_1, \dots, s_k)$  valamely  $k \geq 0$ ,  $\sigma \in \Sigma^{(k)}$  és  $s_1, \dots, s_k \in T_\Sigma$  esetén, akkor  $h(s) = \bar{h}(\sigma)[h(s_1), \dots, h(s_k)]$ .

Azt mondjuk, hogy két fa,  $s \in T_\Sigma$  és  $t \in T_\Delta$  *azonos alakú*, ha azok csak a csúcspontjaik címkéiben különböznek (lásd 1. ábra). Egy  $\tau \subseteq T_\Sigma \times T_\Delta$  fatranszformáció *alakmegőrző*, ha minden  $(s, t) \in \tau$  esetén az  $s$  és  $t$  fák alakja azonos.

Most definiáljuk a felszálló és a leszálló fatranszformátorokat.

**1. Definíció ([Rou70, Tha70, Tha73])** *Fatranszformátornak* egy olyan  $M = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, R)$  rendszert nevezünk, ahol  $Q$  egy unáris rangolt ábécé, az *állapotok* halmaza;  $\Sigma$  és  $\Delta$  rangolt ábécék, az *input* és az *output rangolt ábécék*, teljesítve hogy  $Q \cap (\Sigma \cup \Delta) = \emptyset$ ;  $q_0 \in Q$  egy *kitüntetett állapot*; és  $R$  az *átírási szabályok* véges halmaza úgy, hogy vagy  $R$  minden szabálya

$$(\dagger) \quad q(\sigma(x_1, \dots, x_k)) \rightarrow r$$



1. ábra. Azonos alakú fák.

alakú, ahol  $k \geq 0$ ,  $\sigma \in \Sigma^{(k)}$ ,  $q \in Q$  és  $r \in T_\Delta(Q(X_k))$ , vagy  $R$  minden szabálya

$$(\ddagger) \quad \sigma(q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)) \rightarrow q(r)$$

alakú, ahol  $k \geq 0$ ,  $\sigma \in \Sigma^{(k)}$ ,  $q, q_1, \dots, q_k \in Q$  és  $r \in T_\Delta(X_k)$ . A  $(\dagger)$  esetben  $M$ -et *felszálló* fatranszformátornak,  $q_0$ -t *kezdőállapotnak* hívjuk, amíg a  $(\ddagger)$  esetben  $M$ -et *leszálló* fatranszformátornak,  $q_0$ -t pedig *végállapotnak* nevezzük.

Az  $M$  fatranszformátor által indukált *derivációs reláció* egy olyan  $\Rightarrow_M$  bináris reláció a  $T_{Q \cup \Sigma \cup \Delta}$  halmaz felett, melyet a következőképpen definiálunk. Ha  $M$  felszálló fatranszformátor, akkor  $u, v \in T_{Q \cup \Sigma \cup \Delta}$  esetén  $u \Rightarrow_M v$  akkor és csak akkor, ha létezik  $(\dagger)$   $R$ -beli szabály és  $v$ -t úgy kapjuk  $u$ -ból, hogy  $u$ -ban kicseréljük a  $q(\sigma(u_1, \dots, u_k))$  részfa egy előfordulását  $r[u_1, \dots, u_k]$ -val, ahol  $u_1, \dots, u_k \in T_\Sigma$ . Amennyiben  $M$  egy leszálló fatranszformátor, akkor  $u, v \in T_{Q \cup \Sigma \cup \Delta}$  esetén  $u \Rightarrow_M v$  akkor és csak akkor, ha létezik  $(\ddagger)$   $R$ -beli szabály, és  $v$ -t úgy kapjuk  $u$ -ból, hogy  $u$ -ban kicseréljük a  $\sigma(q_1(v_1), \dots, q_k(v_k))$  részfának egy előfordulását  $q(r[v_1, \dots, v_k])$ -val, ahol  $v_1, \dots, v_k \in T_\Delta$ . A  $\Rightarrow_M$  reflexív, tranzitív lezártját  $\Rightarrow_M^*$  jelöli. Az  $M$  által kiszámított fatranszformáció a  $\tau_M$  reláció, ahol

$$\tau_M = \begin{cases} \{(s, t) \in T_\Sigma \times T_\Delta \mid q_0(s) \Rightarrow_M^* t\}, & \text{ha } M \text{ felszálló fatranszformátor,} \\ \{(s, t) \in T_\Sigma \times T_\Delta \mid s \Rightarrow_M^* q_0(t)\}, & \text{ha } M \text{ leszálló fatranszformátor.} \end{cases}$$

Az  $M$  és  $M'$  fatranszformátorok *ekvivalensek*, ha  $\tau_M = \tau_{M'}$ .

Azt mondjuk, hogy az  $M$  fatranszformátor *átcímkező felszálló fatranszformátor* (*átcímkező leszálló fatranszformátor*), ha  $R$  minden szabálya

$$q(\sigma(x_1, \dots, x_k)) \rightarrow \delta(q_1(x_1), \dots, q_k(x_k))$$

$$(\sigma(q_1(x_1), \dots, q_k(x_k)) \rightarrow q(\delta(x_1, \dots, x_k)))$$

alakú, ahol  $\delta \in \Delta^{(k)}$ .

Ismert eredmény, hogy az átcímkező felszálló fatranszformátorok ekvivalensek az átcímkező leszálló fatranszformátorokkal [Eng75], így röviden ezeket a fatranszformátorokat *átcímkezőknek* is nevezzük majd. Az átcímkezők által kiszámított fatranszformációk osztályát *QREL*-lel jelöljük.

Egy  $M$  fatranszformátor *alakmegőrző*, ha  $\tau_M$  alakmegőrző. Az alakmegőrző felszálló vagy leszálló fatranszformátorok által kiszámított fatranszformációk osztályát *SHAPE* jelöli.

## Az alakmegőrző fatranszformátorok jellemzése

Az értekezés ezen fejezetében megmutatjuk, hogy  $SHAPE = QREL$ . Annak bizonyításhoz hogy az alakmegőrző felszálló fatranszformátorok ekvivalensek az átcímkezőkkel, a következő előkészületek szükségesek.

Egy  $M = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, R)$  felszálló fatranszformátor *felszálló permutációs kváziátcímkező fatranszformátor* (röviden: *permutációs kváziátcímkező*), ha a következő teljesül. Legyen  $(\dagger)$  egy  $R$ -beli szabály, mint az 1. Definícióban. Akkor vagy (i)  $k \neq 1$  és  $r = \gamma\delta(\gamma_1q_1(x_{\pi(1)}), \dots, \gamma_kq_k(x_{\pi(k)}))$ , ahol  $\delta \in \Delta^{(k)}$ ,  $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Delta^{(1)}$ -beli szimbólumokból álló szavak és  $\pi$  az  $\{1, 2, \dots, k\}$  halmaz egy permutációja; vagy (ii)  $k = 1$  és  $r = \gamma p(x_1)$ , ahol  $\gamma$  olyan mint az (i) esetben.

A 3.1.1. alfejezetben megmutatjuk az alakmegőrző fatranszformátorok azon tulajdonságait, amelyekkel bebizonyítható a következő lemma.

**3.5. Lemma.** *Minden alakmegőrző felszálló fatranszformátor egy permutációs kváziátcímkező.*

Egy  $M$  felszálló fatranszformátor felszálló kváziátcímkező, ha permutációs kváziátcímkező, de csak az identikus permutáció jelenik meg a szabályainak jobb oldalán.

A 3.2.1. alfejezetben megmutatjuk, hogy egy alakmegőrző permutációs kváziátcímkező permutáló szabályai helyettesíthetők átcímkező szabályokkal, vagyis bebizonyítjuk a következő lemmát.

**3.31. Lemma.** *Minden alakmegőrző permutáló kváziátcímkezőhöz megkonstruálható egy ekvivalens felszálló kváziátcímkező.*

Végezetül, a 3.3.1. alfejezetben megadunk egy módszert amelynek segítségével megmutatjuk, hogy minden alakmegőrző kváziátcímkező ekvivalens egy átcímkezővel.

Az eddigi eredmények felhasználásával be tudjuk bizonyítani a következő tételt.

**3.64. Tétel ([FG03]).** *Minden alakmegőrző felszálló fatranszformátor ekvivalens egy átcímkezővel.*

Ahhoz, hogy megmutathassuk ennek a fejezetnek a második fő eredményét, nevezetesen, hogy minden alakmegőrző leszálló fatranszformátor ekvivalens egy átcímkezővel, szükségünk lesz az alábbi előkészítésre.

A 3.1.2. alfejezetben megmutatjuk a leszálló fatranszformátorok néhány hasznos tulajdonságát, majd a 3.2.2. alfejezetben bevezetjük a *transzformálható* fatranszformátorok fogalmát. A transzformálható fatranszformátorok rendelkeznek azokkal a tulajdonságokkal, amelyekre szükségünk lesz amikor az úgynevezett keret-fatranszformátorokat vezetjük be.

A 3.1.2. fejezet eredményeinek segítségével be tudjuk bizonyítani a következő lemmát.

**3.36. Lemma.** *Legyen  $M$  egy alakmegőrző felszálló fatranszformátor. Ha  $\tau_M$  végtelen halmaz, akkor  $M$  transzformálható.*

Amint az a következő lemmából is kiderül, szoros kapcsolat áll fent egy  $M$  transzformálható fatranszformátor és annak  $fr(M)$  keret-fatranszformátora között. Továbbá  $fr(M)$  számos olyan jó tulajdonsággal rendelkezik, amelyek megkönnyítik majd a további munkánkat. Példának okáért,  $fr(M)$  egy leszálló kváziátcímkező. (A leszálló kváziátcímkezők fogalma a felszállókéhoz hasonló módon definiálható.)

**3.44. Következmény.** *Legyen  $M$  egy transzformálható felszálló fatranszformátor és legyen  $fr(M)$  az ő keret-fatranszformátora. Ekkor fennáll a  $\tau_M = g^{-1} \circ \tau_{fr(M)} \circ h$  egyenlőség.*

A fenti következményben szereplő  $g$  és  $h$  függvények az  $fr(M)$  input és output ábécéi által meghatározott fahomomorfizmusok. Továbbá, a  $\circ$  művelet a szokásos, relációkon értelmezett kompozíció.

A 3.2.3. fejezetben kerül bizonyításra a következő lemma, amely bizonyos alakmegőrző leszálló fatranszformátorok keret-fatranszformátorainak egy nagyon fontos tulajdonságát mutatja be.

**3.52. Lemma** *Minden  $M$  alakmegőrző leszálló fatranszformátor esetén, ha  $\tau_M$  végtelen halmaz, akkor  $fr(M)$  maga is alakmegőrző.*

Tekintsünk most egy olyan  $M$  alakmegőrző leszálló fatranszformátort, melyre  $\tau_M$  végtelen. A 3.64. tételt felhasználva definiáljuk az  $M$  átcímkező keret-fatranszformátorát, ami egy, az  $fr(M)$  fatranszformátorral ekvivalens átcímkező leszálló fatranszformátor, és amit  $rfr(M)$ -el jelölünk.

Felhasználva az  $rfr(M)$  keret-fatranszformátort, a 3.3.2. alfejezetben megadjuk azt az átcímkezőt ami ekvivalens  $M$ -el. Ezért igaz lesz az alábbi tétel.

**3.70. Tétel ([Gaz06b]).** *Minden  $M$  alakmegőrző leszálló fatranszformátor ekvivalens egy átcímkezővel.*

Ezek alapján kijelenthetjük a 3.64. és a 3.70. tételek egy következményét:

**3.71. Következmény.**  $SHAPE = QREL$ .

## Eldönthetőségi eredmények

Ebben a fejezetben – többek között – megmutatjuk, hogy eldönthető, hogy egy (felszálló vagy leszálló) fatranszformátor alakmegőrző-e vagy sem.

A 4.1.1. alfejezetben foglalkozunk a felszálló esettel. Megadjuk egy algoritmust ami eldönti, hogy egy adott  $M$  felszálló fatranszformátor alakmegőrző-e vagy sem. Továbbá, ha  $M$  alakmegőrző, akkor az algoritmus megkonstruálja azt az átcímkezőt, ami ekvivalens  $M$ -mel.

**4.4 Tétel ([FG03]).** *Eldönthető, hogy egy felszálló fatranszformátor alakmegőrző-e vagy sem. Továbbá, ha  $M$  alakmegőrző, akkor megkonstruálható egy átcímkező, ami ekvivalens  $M$ -mel.*

A 4.1.2. fejezetben leszálló fatranszformátorokra mutatunk meg hasonló eredményeket. Először megadjuk egy olyan algoritmust ami eldönti, hogy egy adott  $M$  transzformálható fatranszformátor alakmegőrző-e vagy sem. Továbbá ha  $M$  alakmegőrző, akkor az algoritmus megkonstruálja azt az átcímkezőt, ami ekvivalens  $M$ -mel.

**4.5. Lemma.** *Legyen  $M$  egy transzformálható leszálló fatranszformátor. Akkor eldönthető, hogy  $M$  alakmegőrző-e vagy sem. Továbbá ha  $M$  alakmegőrző, akkor megkonstruálható egy vele ekvivalens átcímkező.*



Megmutatjuk továbbá azt is, hogy ha  $M$  kielégít bizonyos eldönthető feltételeket, akkor az is eldönthető lesz, hogy  $M$  transzformálható-e.

**4.18. Lemma.** *Legyen  $M$  egy periodikus és útmegőrző leszálló fatranszformátor. Eldönthető, hogy  $M$  transzformálható vagy sem.*

A fenti eredmények felhasználásával meg lehet mutatni, hogy eldönthető, hogy egy leszálló fatranszformátor alakmegőrző-e.

**4.19 Tétel([Gaz06a]).** *Eldönthető, hogy egy leszálló fatranszformátor alakmegőrző-e.*

A 3.64. tétel segítségével minden alakmegőrző felszálló fatranszformátorhoz megkonstruálható egy vele ekvivalens átcímkező. A 4.5. és 3.36. lemmák segítségével pedig meg lehet mutatni, hogy egy  $M$  alakmegőrző leszálló fatranszformátorhoz megkonstruálható egy vele ekvivalens átcímkező, feltéve, hogy  $\tau_M$  végtelen halmaz.

Nem nehéz továbbá belátni, hogy ha  $M$  egy olyan alakmegőrző leszálló fatranszformátor, hogy  $\tau_M$  véges, akkor szintén megkonstruálható egy  $M$ -el ekvivalens átcímkező. Azt kaptuk tehát, hogy egy tetszőleges (felszálló vagy leszálló) fatranszformátorhoz megkonstruálható egy vele ekvivalens átcímkező.

Ismert, hogy az átcímkezők ekvivalencia-problémája eldönthető [AB93]. Felhasználva ezt az eredményt és a fent leírtakat, levonhatjuk a következtetést, nevezetesen, hogy az alakmegőrző fatranszformátorok ekvivalencia-problémája is eldönthető.

**4.20. Következmény.** Az alakmegőrző fatranszformátorok ekvivalencia-problémája eldönthető.

## Összefoglalás

A értekezésben az alakmegőrző fatranszformátorokat jellemeztük átcímkező fatranszformátorokkal. Ezen eredményünk felhasználható már ismert eredmények általánosítására a következőképpen.

Először felidézünk egy felszálló fatranszformátorokra vonatkozó eredményt és annak előzményeit. A [LST98] dolgozatban fordítások azon legszűkebb osztályát vizsgálták, amely tartalmazza a hosszmegőrző racionális fordításokat és zárt az

unióra, kompozícióra és iterációra. A szerzők megmutatták ezen osztály számos érdekes jellemzését. Később, Z. Fülöp és A. Terlutte megpróbálták általánosítani a [LST98] dolgozat eredményeit alakmegőrző felszálló fatranszformátorokra. Az eredményeket azonban csak átcímkező fatranszformátorokra sikerült általánosítani. Megadták az  $UCI(QREL)$  ( $U$  = unió,  $C$  = kompozíció és  $I$  = iteráció) osztály egy jellemzését, amihez  $QREL$ -beli egyszerű kifejezések kompozícióit és iterációit használták fel. Megadták továbbá az  $UCI(QREL)$  osztály egy másik jellemzését, amihez nagyon egyszerű termátíró rendszerek úgynevezett egy lépéses átíró relációit használták fel. Felhasználva a 3.71. következményt, a fenti eredményekben  $QREL$  kicserélhető a  $SHAPE$  osztállyal, ily módon általánosítva az [LST98] dolgozat eredményeit alakmegőrző fatranszformátorokra.

Tekintsük most azt a jól ismert eredményt, miszerint a lineáris fatranszformációk megőrzik az erdők felismerhetőségét [Rou70, Eng75]. Mivel nyilvánvalóan az átcímkezők is lineárisak, a 3.71. következmény alapján kijelenthetjük, hogy az alakmegőrző fatranszformátorok is megőrzik az erdők felismerhetőségét.

Végezetül tekintsük a következő, szintén jól ismert eredményt, nevezetesen, hogy  $BOT = QREL \circ HOM$  [Eng75]. Ez az eredmény azt fejezi ki, hogy minden  $\tau$  felszálló fatranszformáció felírható  $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$  alakban, ahol  $\tau_1$  és  $\tau_2$  rendre egy átcímkező fatranszformátor és egy homomorfizmus fatranszformátor által kiszámolt fatranszformáció. A 3.71. következmény alapján a fenti egyenlőségben a  $QREL$  osztályt kicserélhetjük a  $SHAPE$  osztállyal.

Végezetül megemlítünk egy kapcsolatot az értekezésünk tárgya és a számítástudomány egy másik területe között. A disszertációban átcímkezőket használtunk alakmegőrző fatranszformátorok jellemzésére. Az [AJMd02] munkában az átcímkezőket az úgynevezett reguláris modellvizsgálat területén alkalmazták. Itt fákkal reprezentálták egy rendszer állapotait, és az átmeneteket az állapotok között átcímkező fatranszformátorok valósították meg.

## Hivatkozások

- [AB93] Y. Andre and F. Bossut. Decidability of equivalence for linear letter to letter top-down tree transducers. In *FCT 93*, pages 142–151, 1993.
- [AJMd02] Parosh Aziz Abdulla, Bengt Jonsson, Pritha Mahata, and Julien d’Orso. Regular tree model checking. In *CAV*, pages 555–568, 2002.

- [Bak78] B. S. Baker. Tree transducers and tree languages. *Inform. and Control*, 37:241–166, 1978.
- [Bak79] B. S. Baker. Composition of top-down and bottom-up tree transductions. *Inform. and Control*, 41:186–213, 1979.
- [Eng75] J. Engelfriet. Bottom-up and top-down tree transformations — A comparison. *Math. Systems Theory*, 9:198–231, 1975.
- [Eng82] J. Engelfriet. The Copying Power of One-State Tree Transducers. *J. Comput. System Sci.*, 25(3):418–435, 1982.
- [Ési80] Z. Ésik. Decidability results concerning tree transducers I. *Acta Cybernet.*, 5:1–20, 1980.
- [Ési83] Z. Ésik. Decidability results concerning tree transducers II. *Acta Cybernet.*, 6:303–314, 1983.
- [FG03] Z. Fülöp and Zs. Gazdag. Shape preserving top-down tree transducers. *Theoret. Comput. Sci.*, 304:315–339, 2003.
- [FV92] Z. Fülöp and S. Vágvolgyi. Decidability of the inclusion in monoids generated by tree transformation classes. In M. Nivat and A. Podelski, editors, *Tree Automata and Languages*, pages 381–408. Elsevier Science Publishers B.V., 1992.
- [FV98] Z. Fülöp and H. Vogler. *Syntax-Directed Semantics — Formal Models Based on Tree Transducers*. Monographs in Theoretical Computer Science, An EATCS Series. Springer-Verlag, 1998.
- [Gaz06a] Zs. Gazdag. Decidability of the shape preserving property of bottom-up tree transducers. *To appear in International Journal of Foundations of Computer Science*, 2006.
- [Gaz06b] Zs. Gazdag. Shape preserving bottom-up tree transducers. *To appear in Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 2006.
- [GS84] F. Gécseg and M. Steinby. *Tree Automata*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1984.

- [GS97] F. Gécseg and M. Steinby. Tree languages. In G. Rozenberg and A. Salomaa, editors, *Handbook of Formal Languages*, volume 3, pages 1–68. Springer-Verlag, 1997.
- [LST98] M. Latteux, D. Simplot, and A. Terlutte. Iterated length-preserving rational transductions. In *Proc. of MFCS 98*, volume 1450 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 286–295. Springer Verlag, 1998.
- [Rou70] W.C. Rounds. Mappings and grammars on trees. *Math. Systems Theory*, 4:257–287, 1970.
- [Tha70] J.W. Thatcher. Generalized<sup>2</sup> sequential machine maps. *J. Comput. System Sci.*, 4:339–367, 1970.
- [Tha73] J.W. Thatcher. Tree automata: an informal survey. In A.V. Aho, editor, *Currents in the Theory of Computing*, pages 143–172. Prentice Hall, 1973.