Lineáris késleltetett sztochasztikus differenciálegyenletek aszimptotikus statisztikai vizsgálata

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Benke János Marcell

Témavezető: Dr. Pap Gyula
tanszékvezető egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Bolyai Intézet

Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar

Szeged, 2018

1. Bevezetés

Az értekezésben lineáris időkésleltetett sztochasztikus differenciálegyenletekkel leírt statisztikai modellt tekintünk. A vizsgálódás célja a likelihood függvény lokális aszimptotikus tulajdonságainak bizonyítása. A késleltetett egyenletek lokális aszimptotikus tulajdonságait vizsgáló cikkek listája nem túl kiterjedt. Az eredmények nagy része Gushchin, Küchler és társszerzőinek köszönhető. A hivatkozások részletes bemutatása megtalálható az értekezés 1.3-as szakaszában. Gushchin és Küchler 1999-ben íródott cikkét azonban ki kell emelni. Ebben a tanulmányban a

$$\mathrm{d}X(t) = (aX(t) + bX(t-1))\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)$$

egyenlet lokális aszimptotikus tulajdonságait vizsgálták meg. Kiderült, hogy tizenegy különböző esetet lehet megkülönböztetni – melyekben a LAN, LAMN, PLAMN és LAQ tulajdonságok valamelyike teljesül (ezek definíciói megtalálhatóak ebben a bevezetőben és az értekezés 2.1-es szakaszában is) – amint a $\boldsymbol{\theta} = (a, b)$ paraméter befutja az $\mathbb{R}^2$ paraméterteret. Ez a cikk volt az egyik legmotiválóbb és leghasznosabb előzmény az értekezés megszületésénél.

Az értekezés bevezetője tartalmaz még néhány egyéb motiváló időkésleltetést tartalmazó példát (1.1-es szakasz), valamint az aszimptotikus statisztika alapvető koncepciójának egy heurisztikus tárgyalását (1.2-es szakasz).

Ebben a tézisfüzetben felidézzük az aszimptotikus statisztika alapvető definícióit. Az értekezés 2.1-es és 2.2-es szakaszában e témakör további, részletesebb bemutatása található.

1.1 Definíció. (LAQ) *Legyen* $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ *egy nyílt halmaz. Statisztikai kísérletek egy* $(X_T, \mathcal{X}_T, \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja lokálisan aszimptotikusan kvadratikus (LAQ) a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, ha léteznek* $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ *(skálázó) mátrixok,* $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T} : X_T \to \mathbb{R}^p$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ *mérhető függvények (statisztikák) és* $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T} : X_T \to \mathbb{R}^{p\times p}$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ *mérhető függvények úgy, hogy*

$$\log \frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T}\boldsymbol{h}_T,T}}{\mathrm{d}\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}} = \boldsymbol{h}_T^\top \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T} - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}_T^\top \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}\boldsymbol{h}_T + \mathrm{o}_{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}}(1), \ \textit{amint}\ \ T \to \infty,$$

amint $\boldsymbol{h}_T \in \mathbb{R}^p$, $T \in \mathbb{R}_{++}$, *egy korlátos család, amire teljesül, hogy* $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T}\boldsymbol{h}_T \in \Theta$ *minden* $T \in \mathbb{R}_{++}$ *esetén, továbbá*

$$(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}) = \mathrm{O}_{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}}(1), \qquad T \in \mathbb{R}_{++},$$

és a

$$(\mathcal{L}((\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}) \,|\, \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}))_{T\in\mathbb{R}_{++}}$$

család minden $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ *torlódási pontjára, amint* $T \to \infty$, *ami egy valószínűségi mérték az* $(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p\times p}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p\times p}))$ *téren teljesül, hogy*

$$\mu_{\boldsymbol{\theta}}(\{(\boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{J}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{p\times p} : \boldsymbol{J} \text{ egy szimmetrikus és szigorúan pozitív definit } \}) = 1 \tag{1.1}$$

és

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{p\times p}} \exp\left\{\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{\Delta} - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{J}\boldsymbol{h}\right\} \mu_{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}, \mathrm{d}\boldsymbol{J}) = 1, \tag{1.2}$$

amint $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^p$ *úgy, hogy létezik* $T_k \in \mathbb{R}_{++}$, $k \in \mathbb{N}$, *és* $\boldsymbol{h}_{T_k} \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{N}$, *úgy, hogy* $\boldsymbol{h}_{T_k} \to \boldsymbol{h}$, *amint* $k \to \infty$, $\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T_k}\boldsymbol{h}_{T_k} \in \Theta$ *minden* $k \in \mathbb{N}$ *esetén.*

1.2 Definíció. (LAMN) *Legyen* $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ *egy nyílt halmaz. Statisztikai kísérletek egy* $(X_T, \mathcal{X}_T, \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja lokálisan aszimptotikusan kevert normális (LAMN) a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, ha LAQ a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, és a* $(\mathcal{L}((\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}) \,|\, \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}))_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *család minden* $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ *torlódási pontjára, amint* $T \to \infty$, *teljesül, hogy*

$$\int_{\mathbb{R}^p\times B} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{\Delta}} \,\mu_{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}, \mathrm{d}\boldsymbol{J}) = \int_{\mathbb{R}^p\times B} \mathrm{e}^{-\boldsymbol{h}^\top\boldsymbol{J}\boldsymbol{h}/2} \,\mu_{\boldsymbol{\theta}}(\mathrm{d}\boldsymbol{\Delta}, \mathrm{d}\boldsymbol{J}),$$

minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p\times p})$ *és* $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^p$ *esetén, azaz* $\boldsymbol{\Delta}$ *feltételes eloszlása* $\boldsymbol{J}$*-re vonatkozóan a* $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ *mérték melett* $\mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{J})$, *illetve, ami ezzel ekvivalens,* $\mu_{\boldsymbol{\theta}} = \mathcal{L}((\eta_{\boldsymbol{\theta}}\mathcal{Z}, \eta_{\boldsymbol{\theta}}\eta_{\boldsymbol{\theta}}^\top) \,|\, \mathbb{P})$, *ahol* $\mathcal{Z} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *és* $\eta_{\boldsymbol{\theta}} : \Omega \to \mathbb{R}^{p\times p}$ *egymástól független véletlen változók a* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mezőn úgy, hogy* $\mathcal{L}(\mathcal{Z} \,|\, \mathbb{P}) = \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_p)$.

1.3 Definíció. (LAN) *Legyen* $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ *egy nyílt halmaz. Statisztikai kísérletek egy* $(X_T, \mathcal{X}_T, \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja lokálisan aszimptotikusan normális (LAN) a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, ha LAMN a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, és a* $(\mathcal{L}((\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}) \,|\, \mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}))_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *család minden* $\mu_{\boldsymbol{\theta}}$ *torlódási pontjára, amint* $T \to \infty$, *teljesül, hogy*

$$\mu_{\boldsymbol{\theta}} = \mathcal{N}_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}) \times \delta_{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}},$$

ahol $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ *egy szimmetrikus, szigorúan pozitív definit mátrix,* $\delta_{\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}}$ *pedig a* $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}$ *pontba koncentrált Dirac-mérték az* $(\mathbb{R}^{p\times p}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{p\times p}))$ *téren. A* $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}$ *mennyiséget információs mátrixnak nevezzük.*

1.4 Definíció. (PLAMN) *Legyen* $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ *egy nyílt halmaz. Statisztikai kísérletek egy* $(X_T, \mathcal{X}_T, \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : \boldsymbol{\theta} \in \Theta\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja periodikusan lokálisan aszimptotikusan kevert normális (PLAMN) a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, ha LAQ a* $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ *pontban, és*

$$(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},kD+d}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},kD+d}) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}}(d), \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}(d)), \qquad \text{amint } k \to \infty,$$

amint $d \in [0, D)$, *és minden* $d \in [0, D)$ *esetén* $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}}(d)$ *feltételes eloszlása* $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}(d)$*-re vonatkozóan* $\mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}(d))$ *illetve, ami ezzel ekvivalens, léteznek egymástól független* $\mathcal{Z} : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *és* $\eta_{\boldsymbol{\theta}}(d) : \Omega \to \mathbb{R}^{p\times p}$ *véletlen változók úgy, hogy* $\mathcal{Z} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \mathcal{N}_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_p)$, *és* $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}}(d) = \eta_{\boldsymbol{\theta}}(d)\mathcal{Z}$, $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}(d) = \eta_{\boldsymbol{\theta}}(d)\eta_{\boldsymbol{\theta}}^\top(d)$.

2. Heston-modell

A lokális aszimptotikus tulajdonság illusztrálásához egy jól ismert pénzügyi modellt, a Heston-modellt vizsgáltuk meg az értekezés 2.3-as szakaszában. Ezen vizsgálódás eredményei Benke és Pap [3] cikkében kerültek publikálásra.

A vizsgált Heston-modell az alábbi alakú.

$$\begin{cases} \mathrm{d}Y_t = (a - bY_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_1\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \\ \mathrm{d}X_t = (\alpha - \beta Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma_2\sqrt{Y_t}\big(\varrho\,\mathrm{d}W_t + \sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}B_t\big), \end{cases} \qquad t \geqslant 0,$$

ahol $a > 0$, $b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\varrho \in (-1, 1)$ és $(W_t, B_t)_{t\geqslant 0}$ egy kétdimenziós standard Wiener-folyamat. Ebben a pénzügyi modellben X_t írja le egy kockázatos eszköz t időpontbeli árfolyamának logaritmusát, és Y_t pedig a sztochasztikus volatilitását. A b paraméter előjelétől függően három esetet lehet megkülönböztetni, melyeket szubkritikus ($b > 0$), kritikus ($b = 0$) és szuperkritikus ($b < 0$) esetnek nevezünk. Az (a, α, b, β) drift paramétereket tekintve megvizsgáltuk ezen modell lokális aszimptotikus tulajdonságait.

Legyen $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T}$ az $(Y_t, X_t)_{t\in[0,T]}$ folyamat által generált valószínűségi mérték a $(C([0,T], \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C([0,T], \mathbb{R}^2))$ téren. Továbbá tekintsük statisztikai kísérletek

$$(2.1) \qquad (\mathcal{E}_T) := \big(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)), \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^3\}\big)$$

családját, amint $T \in \mathbb{R}_{++}$, valamint az alábbi jelölést.

$$(2.2) \qquad \boldsymbol{S} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \varrho\sigma_1\sigma_2 \\ \varrho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$

2.1 Tétel. (Szubkritikus eset) *Ha* $a \in \big(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\big)$, $b \in \mathbb{R}_{++}$, *és* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *akkor a statisztikai kísérletek* (2.1)*-ben megadott családja LAN a* $\boldsymbol{\theta} := (a, \alpha, b, \beta)$ *pontban* $\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T} := \frac{1}{\sqrt{T}} \boldsymbol{I}_4$, $T \in \mathbb{R}_{++}$, *skálázással és*

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}} := \begin{bmatrix} \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y_\infty}\right) & -1 \\ -1 & \mathbb{E}(Y_\infty) \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{S}^{-1}$$

információs mátrixszal.

Következésképpen a statiszikai kísérletek $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)), \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{h}/\sqrt{T},T} : \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^4\})_{T \in \mathbb{R}_{++}}$ *családja konvergál az* $(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{4\times 4}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{4\times 4}), \{\mathcal{N}_4(\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{h}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}) : \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^4\})$ *kísérlethez, amint* $T \to \infty$.

2.2 Tétel. (Kritikus eset) *Ha* $a \in \big(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\big)$, $b = 0$, *és* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *akkor a statisztikai kísérletek* (2.1)*-ben megadott családja LAQ a* $\boldsymbol{\theta} := (a, \alpha, b, \beta)$ *pontban*

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T} := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\log T}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{I}_2, \quad T \in \mathbb{R}_{++},$$

skálázással és

$$\big(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T}(Y,X), \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}(Y,X)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}), \qquad \textit{amint } T \to \infty,$$

ahol

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}} := \begin{bmatrix} \left(a - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)^{-1/2} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2\varrho \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\varrho^2} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{Z}_2 \\ \boldsymbol{S}^{-1} \begin{bmatrix} a - \mathcal{Y}_1 \\ \alpha - \mathcal{X}_1 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}} := \begin{bmatrix} \left(a - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \int_0^1 \mathcal{Y}_s \, \mathrm{d}s \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{S}^{-1},$$

ahol $(\mathcal{Y}_t, \mathcal{X}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *a*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\mathcal{Y}_t = a \, \mathrm{d}t + \sigma_1 \sqrt{\mathcal{Y}_t} \, \mathrm{d}\mathcal{W}_t, \\ \mathrm{d}\mathcal{X}_t = \alpha \, \mathrm{d}t + \sigma_2 \sqrt{\mathcal{Y}_t} \big(\varrho \, \mathrm{d}\mathcal{W}_t + \sqrt{1-\varrho^2} \, \mathrm{d}\mathcal{B}_t\big), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

egyenlet $(\mathcal{Y}_0, \mathcal{X}_0) = (0, 0)$ *kezdeti értékkel vett egyértelmű erős megoldása, ahol* $(\mathcal{W}_t, \mathcal{B}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ *egy kétdimenziós standard Wiener-folyamat,*

$\boldsymbol{Z}_2$ *egy kétdimenziós standard normális eloszlású változó, ami független* $\big(\mathcal{Y}_1, \int_0^1 \mathcal{Y}_t \,\mathrm{d}t, \mathcal{X}_1\big)$*-től, és* $\boldsymbol{S}$ *a* (2.2)*-ben definiált mátrix.*

Következésképpen a statisztikai kísérletek $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)), \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T}\boldsymbol{h},T} : \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^4\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja konvergál az* $(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{4\times4}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{4\times4}), \{\mathbb{Q}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}} : \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^4\})$ *kísérlethez, amint* $T \to \infty$*, ahol*

$$\mathbb{Q}_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h}}(B) := \mathbb{E}\left(\exp\left\{\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{h}^\top \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{h}\right\} \mathbb{1}_B(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}})\right),$$

minden $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^{4\times4})$ *és* $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^4$ *esetén.*

Amennyiben $b = 0$ *és* $\beta \in \mathbb{R}$ *rögzített paraméterek, akkor a statisztikai kísérletek*

$$\left(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)), \left\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right), \, \alpha \in \mathbb{R}\right\}\right)_{T\in\mathbb{R}_{++}}$$

részcsaládja LAN a (a, α) *pontban* $\boldsymbol{r}^{(1)}_{\boldsymbol{\theta},T} := \frac{1}{\sqrt{\log T}}\boldsymbol{I}_2$, $T \in \mathbb{R}_{++}$*, skálázással és* $\boldsymbol{J}^{(1)}_{\boldsymbol{\theta}} := \left(a - \frac{\sigma_1^2}{2}\right)^{-1} \boldsymbol{S}^{-1}$ *információs mátrixszal.*

Következésképpen a statisztikai kísérletek $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)), \{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{h}/\sqrt{\log T},T} : \boldsymbol{h}_1 \in \mathbb{R}^2\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja konvergál az* $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times2}), \{\mathcal{N}_2(\boldsymbol{J}^{(1)}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{J}^{(1)}_{\boldsymbol{\theta}}) : \boldsymbol{h}_1 \in \mathbb{R}^2\})$ *kísérlethez, amint* $T \to \infty$*, ahol* $\boldsymbol{h} := (\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{0})^\top \in \mathbb{R}^4$.

2.3 Tétel. (Szuperkritikus eset) *Ha* $a \in \left[\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$, $b \in \mathbb{R}_{--}$*, és* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, akkor a statisztikai kísérletek* (2.1)*-ben megadott családja nem LAQ a* $\boldsymbol{\theta} := (a, \alpha, b, \beta)$ *pontban az*

$$\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{\theta},T} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{bT/2} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{I}_2, \quad T \in \mathbb{R}_{++}$$

skálázással, annak ellenére, hogy

$$\big(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta},T}(Y, X), \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta},T}(Y, X)\big) \xrightarrow{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}}, \boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}}), \qquad \text{amint } T \to \infty,$$

ahol

$$\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\theta}} := \left(\boldsymbol{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2\varrho \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\varrho^2} \end{bmatrix}^{-1}\right) \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1}\widetilde{\mathcal{V}} \\ Z_1 \\ \left(-\frac{\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}}{b}\right)^{1/2} \boldsymbol{Z}_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{\theta}} := \begin{bmatrix} \int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u & 0 \\ 0 & -\frac{\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}}{b} \end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{S}^{-1},$$

továbbá $(\widetilde{\mathcal{Y}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *a*

$$\mathrm{d}\widetilde{\mathcal{Y}}_t = a\mathrm{d}t + \sigma_1 \sqrt{\widetilde{\mathcal{Y}}_t}\, \mathrm{d}\mathcal{W}_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

egyenlet $\widetilde{\mathcal{Y}}_0 = y_0$ *kezdeti értékkel vett egyértelmű erős megoldása, ahol* $(\mathcal{W}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *egy standard Wiener-folyamat és*

$$\widetilde{\mathcal{V}} := \log \widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b} - \log y_0 - \left(a - \frac{\sigma_1^2}{2}\right) \int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u,$$

ahol Z_1 *egy standard normális eloszlású változó és* $\boldsymbol{Z}_2$ *egy kétdimenziós standard normális eloszlású változó úgy, hogy* $(\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}, \int_0^{-1/b} \widetilde{\mathcal{Y}}_u \, \mathrm{d}u)$, Z_1 *és* $\boldsymbol{Z}_2$ *függetlenek egymástól,* $\boldsymbol{S}$ *pedig a* (2.2)*-ben definiált mátrix. Továbbá* (1.1) *szintén tejesül, viszont* (1.2) *nem igaz.*

Ha $a \in \left(\frac{\sigma_1^2}{2}, \infty\right)$ *és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *rögzített paraméterek, akkor a statisztikai kísérletek*

$$\left(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)), \left\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta},T} : b \in \mathbb{R}_{--},\, \beta \in \mathbb{R}\right\}\right)_{T\in\mathbb{R}_{++}}$$

részcsaládja LAMN a (b, β) *pontban* $\boldsymbol{r}^{(2)}_{\boldsymbol{\theta},T} := \mathrm{e}^{bT/2}\boldsymbol{I}_2$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ *skálázással és*

$$\boldsymbol{\Delta}^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}} := \left(-\frac{\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}}{b}\right)^{1/2} \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2\varrho \\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\varrho^2} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{Z}_2,$$

$$\boldsymbol{J}^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}} := \left(-\frac{\widetilde{\mathcal{Y}}_{-1/b}}{b}\right) \boldsymbol{S}^{-1}.$$

Következésképpen a statisztikai kísérletek $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)),$ $\{\mathbb{P}_{\boldsymbol{\theta}+\mathrm{e}^{bT/2}\boldsymbol{h},T} : \boldsymbol{h}_2 \in \mathbb{R}^2\})_{T\in\mathbb{R}_{++}}$ *családja konvergál az* $(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times2}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2\times2}), \{\mathcal{L}((\boldsymbol{\Delta}^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{J}^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{J}^{(2)}_{\boldsymbol{\theta}}) \,|\, \mathbb{P}) : \boldsymbol{h}_2 \in \mathbb{R}^2\})$ *kísérlethez, amint* $T \to \infty$, *ahol* $\boldsymbol{h} := (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{h}_2)^\top \in \mathbb{R}^4$.

3. Egyenletes késleltetés

Az értekezés harmadik fejezetében a fő eredmények kerülnek bemutatásra. Tegyük fel, hogy a megfigyelt $(X(t))_{t\in[-r,T]}$, folyamatot a

$$\mathrm{d}X(t) = \vartheta \int_{[-r,0]} X(t+u)\, a(\mathrm{d}u)\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), \qquad t \geqslant 0,$$

lineáris késleltetett sztochasztikus differenciálegyenlet írja le, ahol a egy véges, előjeles mérték a $[-r,0]$ intervallumon, W egy standard Wiener-folyamat, ϑ pedig az ismeretlen, valós paraméter. Ezen modell lokális aszimptotikus tulajdonságaira vagyunk kíváncsiak.

Egy bevezetés után a 3.2-es szakaszban először egy speciális esetet tekintünk, amikor a késleltetés egyenletes. Ezen vizsgálódás eredményei Benke és Pap [1] cikkében kerültek publikálásra. Tehát tegyük fel, hogy $(X^{(\vartheta)}(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ a

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \vartheta \int_{-1}^{0} X(t+u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ X(t) = X_0(t), & t \in [-1,0], \end{cases}$$

egyenlet megoldása, ahol $(X_0(t))_{t\in[-1,0]}$ egy rögzített, folytonos kezdeti függvény. Továbbá minden $T \in \mathbb{R}_{++}$ esetén legyen $\mathbb{P}_{\vartheta,T}$ az $(X^{(\vartheta)}(t))_{t\in[-1,T]}$ folyamat által generált valószínűségi mérték a $(C([-1,T],\mathbb{R}), \mathcal{B}(C([-1,T],\mathbb{R})))$ téren. Tekintsük a statisztikai kísérletek

$$(3.1) \qquad (\mathcal{E}_T) := \big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})), \{\mathbb{P}_{\vartheta,T} : \vartheta \in \mathbb{R}\}\big)$$

családját, ahol $T \in \mathbb{R}_{++}$.

3.1 Tétel. *Ha* $\vartheta \in \left(-\frac{\pi^2}{2}, 0\right)$, *akkor a statisztikai kísérletek* (3.1)-*ben megadott családja LAN a* ϑ *pontban* $r_{\vartheta,T} = \frac{1}{\sqrt{T}}$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ *skálázással és*

$$J_\vartheta = \int_0^\infty \left(\int_{-1}^{0} x_{0,\vartheta}(t+u)\, \mathrm{d}u \right)^2 \mathrm{d}t.$$

3.2 Tétel. *A statisztikai kísérletek* (3.1)-*ben megadott családja LAQ a* 0 *pontban* $r_{0,T} = \frac{1}{T}$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ *skálázással és*

$$\Delta_0 = \int_0^1 \mathcal{W}(t)\, \mathrm{d}\mathcal{W}(t), \qquad J_0 = \int_0^1 \mathcal{W}(t)^2\, \mathrm{d}t,$$

ahol $(\mathcal{W}(t))_{t\in[0,1]}$ *egy standard Wiener-folyamat.*

3.3 Tétel. *A statisztikai kísérletek* (3.1)*-ben megadott családja LAQ a* $-\frac{\pi^2}{2}$ *pontban* $r_{-\frac{\pi^2}{2},T} = \frac{1}{T}$*,* $T \in \mathbb{R}_{++}$ *skálázással és*

$$\Delta_{-\frac{\pi^2}{2}} = \frac{1}{\pi(\pi^2+16)}\Bigg(16\int_0^1 (\mathcal{W}_1(s)\,\mathrm{d}\mathcal{W}_2(s) - \mathcal{W}_2(s)\,\mathrm{d}\mathcal{W}_1(s))$$
$$-4\pi\int_0^1 (\mathcal{W}_1(s)\,\mathrm{d}\mathcal{W}_1(s) + \mathcal{W}_2(s)\,\mathrm{d}\mathcal{W}_2(s))\Bigg),$$
$$J_{-\frac{\pi^2}{2}} = \frac{16}{\pi^2(\pi^2+16)}\int_0^1 (\mathcal{W}_1(t)^2 + \mathcal{W}_2(t)^2)\,\mathrm{d}t,$$

ahol $(\mathcal{W}_1(t), \mathcal{W}_2(t))_{t\in[0,1]}$ *egy kétdimenziós Wiener-folyamat.*

3.4 Tétel. *Ha* $\vartheta \in (0,\infty)$*, akkor a statisztikai kísérletek* (3.1)*-ben megadott családja LAMN a* ϑ *pontban* $r_{\vartheta,T} = \mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)T}$*,* $T \in \mathbb{R}_{++}$ *skálázással és*

$$\Delta_\vartheta = Z\sqrt{J_\vartheta}, \qquad J_\vartheta = \frac{(1-\mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)})^2}{2v_0(\vartheta)(v_0(\vartheta)^2 + 2v_0(\vartheta) - \vartheta)^2}(U^{(\vartheta)})^2,$$

ahol

$$U^{(\vartheta)} = X_0(0) + \vartheta\int_{-1}^0\int_u^0 \mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)(s-u)}X_0(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)s}\,\mathrm{d}W(s),$$

és Z *egy standard normális eloszlású változó, ami független* J_ϑ*-tól.*

3.5 Tétel. *Ha* $\vartheta \in \left(-\infty, -\frac{\pi^2}{2}\right)$*, akkor a statisztikai kísérletek* (3.1)*-ben megadott családja PLAMN a* ϑ *pontban* $D = \frac{\pi}{\kappa_0(\vartheta)}$ *periódussal,* $r_{\vartheta,T} = \mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)T}$*,* $T \in \mathbb{R}_{++}$ *skálázással és*

$$\Delta_\vartheta(d) = Z\sqrt{J_\vartheta(d)}, \qquad J_\vartheta(d) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2v_0(\vartheta)s}(V^{(\vartheta)}(d-s))^2\,\mathrm{d}s,$$

amint $d \in \left[0, \frac{\pi}{\kappa_0(\vartheta)}\right)$*, ahol*

$$V^{(\vartheta)}(t) = X_0(0)\varphi_\vartheta(t) + \vartheta\int_{-1}^0\int_u^0 \varphi_\vartheta(t+u-s)\mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)(s-u)}X_0(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}u$$
$$+\int_0^\infty \varphi_\vartheta(t-s)\mathrm{e}^{-v_0(\vartheta)s}\,\mathrm{d}W(s), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

valamint

$$\varphi_\vartheta(t) := A_0(\vartheta)\cos(\kappa_0(\vartheta)t) + B_0(\vartheta)\sin(\kappa_0(\vartheta)t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

és Z *egy standard normális eloszlású változó, ami független* $J_\vartheta(d)$*-től.*

4. Általános késleltetés

Az értekezés 3.3-as szakaszában az általános késleltetésű modellt vizsgáljuk. Az eredmények Benke és Pap [2] cikkében kerültek publikálásra. Tekintsük tehát a

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = \vartheta \int_{[-r,0]} X(t+u)\, a(\mathrm{d}u)\, \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ X(t) = X_0(t), & t \in [-r,0], \end{cases}$$

egyenletet, ahol a késleltetést leíró a mérték egy tetszőleges, véges, előjeles mérték a $[-r,0]$ intervallumon.

Az aszimptotikus viselkedés szoros kapcsolatban áll a $h_\vartheta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ún. karakterisztikus függvénnyel, ami előáll a

$$h_\vartheta(\lambda) := \lambda - \vartheta \int_{[-r,0]} \mathrm{e}^{\lambda u}\, a(\mathrm{d}u)$$

alakban, és a

$$\lambda - \vartheta \int_{[-r,0]} \mathrm{e}^{\lambda u}\, a(\mathrm{d}u) = 0.$$

ún. karakterisztikus egyenlet megoldásainak (karakterisztikus gyökök) Λ_ϑ halmazával. Az egyik legfontosabb mennyiség a maximális valósrészű karakterisztikus gyök valósrésze, azaz

$$v_0(\vartheta) := \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \Lambda_\vartheta\} < \infty.$$

Minden $\lambda \in \Lambda_\vartheta$ esetén jelölje $m_\vartheta(\lambda)$ a λ karakterisztikus gyök multiplicitását.

A korábbi eredményekben és az egyenletes késleltetés esetében is az látható, hogy a LAN tulajdonság akkor teljesül, ha a $v_0(\vartheta)$ mennyiség szigorúan negatív. Ennek megfelelően az sejthető, hogy ez a feltétele a LAN tulajdonság teljesülésének. Ezzel szemben mutatunk példát olyan esetre, amikor $v_0(\vartheta) = 0$ és a LAN tulajdonság áll fenn (ld.

az értekezés 3.3.7-es példáját). A $v_0(\vartheta)$ mennyiség egy módosítására van szükség. Ehhez minden $\lambda \in \Lambda_\vartheta$ esetén jelölje $\widetilde{m}_\vartheta(\lambda)$ a

$$P_{\vartheta,\lambda}(t) := \sum_{\ell=0}^{m_\vartheta(\lambda)-1} c_{\vartheta,\lambda,\ell}\, t^\ell$$

komplex értékű polinom valódi fokszámát, ahol

$$c_{\vartheta,\lambda,\ell} := \frac{1}{\ell!} \sum_{j=0}^{m_\vartheta(\lambda)-1-\ell} \frac{A_{\vartheta,-j-1-\ell}(\lambda)}{j!} \int_{[-r,0]} u^j \mathrm{e}^{\lambda u}\, a(\mathrm{d}u),$$

és $A_{\vartheta,k}(\lambda)$, $k \in \{-m_\vartheta(\lambda), -m_\vartheta(\lambda)+1, \ldots\}$ az $1/h_\vartheta(z)$ függvény $z = \lambda$ pont körüli Laurent-sorának együtthatói. A zéró polinom fokszáma legyen $-\infty$. Továbbá legyen

$$\begin{aligned} v_\vartheta^* &:= \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \in \Lambda_\vartheta,\ \widetilde{m}_\vartheta(\lambda) \geqslant 0\}, \\ m_\vartheta^* &:= \max\{\widetilde{m}_\vartheta(\lambda) : \lambda \in \Lambda_\vartheta,\ \mathrm{Re}(\lambda) = v_\vartheta^*\}, \end{aligned}$$

ahol $\sup\emptyset := -\infty$ és $\max\emptyset := -\infty$.

Minden $T \in \mathbb{R}_{++}$ esetén legyen $\mathbb{P}_{\vartheta,T}$ az $(X^{(\vartheta)}(t))_{t\in[-r,T]}$ folyamat által generált mérték a $(C([-r,T],\mathbb{R}), \mathcal{B}(C([-r,T],\mathbb{R})))$ téren. Tekintsük a statisztikai kísérletek

$$(4.1) \qquad (\mathcal{E}_T) := \big(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}), \mathcal{B}(C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})), \{\mathbb{P}_{\vartheta,T} : \vartheta \in \mathbb{R}\}\big)$$

családját, ahol $T \in \mathbb{R}_{++}$.

4.1 Tétel. *Ha $\vartheta \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $v_\vartheta^* < 0$, akkor a statisztikai kísérletek* (4.1)*-ben megadott családja LAN a ϑ pontban $r_{\vartheta,T} = T^{-1/2}$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ skálázással és*

$$J_\vartheta = \int_0^\infty \left(\int_{[-r,0]} x_{0,\vartheta}(t+u)\, a(\mathrm{d}u) \right)^2 \mathrm{d}t.$$

Speciálisan, ha $a([-r,0]) = 0$, akkor $v_0^* = -\infty$, $m_0^* = -\infty$, és a statisztikai kísérletek (4.1)*-ben megadott családja LAN a* 0 *pontban $r_{0,T} = T^{-1/2}$, $T \in \mathbb{R}_{++}$ skálázással és*

$$J_0 = \int_0^r a([-t,0])^2\, \mathrm{d}t.$$

4.2 Tétel. *Ha* $\vartheta \in \mathbb{R}$ *olyan, hogy* $v_\vartheta^* = 0$, *akkor a statisztikai kísérletek* (4.1)*-ben megadott családja LAQ a* ϑ *pontban* $r_{\vartheta,T} = T^{-m_\vartheta^*-1}$ *skálázással és*

$$\Delta_\vartheta = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_\vartheta\cap(\mathrm{i}\mathbb{R})\\ \widetilde{m}_\vartheta(\lambda)=m_\vartheta^*}} c_{\vartheta,\lambda,m_\vartheta^*} \int_0^1 \mathcal{Z}_{\mathrm{Im}(\lambda),m_\vartheta^*}(s)\,\mathrm{d}\overline{\mathcal{Z}_{\mathrm{Im}(\lambda),0}(s)},$$

$$J_\vartheta = \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_\vartheta\cap(\mathrm{i}\mathbb{R})\\ \widetilde{m}_\vartheta(\lambda)=m_\vartheta^*}} |c_{\vartheta,\lambda,m_\vartheta^*}|^2 \int_0^1 |\mathcal{Z}_{\mathrm{Im}(\lambda),m_\vartheta^*}(s)|^2\,\mathrm{d}s,$$

ahol

$$\mathcal{Z}_{\varphi,0} := \begin{cases} \mathcal{W}, & \textit{ha} \;\; \varphi = 0,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\mathcal{W}_{\varphi,\mathrm{Re}} + \mathrm{i}\mathcal{W}_{\varphi,\mathrm{Im}}\big), & \textit{ha} \;\; \varphi \in \mathbb{R}_{++},\\ \overline{\mathcal{Z}_{-\varphi,0}}, & \textit{ha} \;\; \varphi \in \mathbb{R}_{--}, \end{cases}$$

és $(\mathcal{W}(s))_{s\in[0,1]}$, $(\mathcal{W}_{\varphi,\mathrm{Re}}(s))_{s\in[0,1]}$ *és* $(\mathcal{W}_{\varphi,\mathrm{Im}}(s))_{s\in[0,1]}$, $\varphi \in \mathbb{R}_{++}$, *egymástól független standard Wiener-folyamatok, valamint*

$$\mathcal{Z}_{\varphi,\ell}(s) := \int_0^s (s-u)^\ell\,\mathrm{d}\mathcal{Z}_{\varphi,0}(u), \qquad s \in [0,1], \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad \ell \in \mathbb{N}.$$

Speciálisan, ha $a([-r,0]) \neq 0$, *akkor* $v_0^* = 0$, $m_0^* = 0$, *és a statisztikai kísérletek* (4.1)*-ben megadott családja LAQ a* 0 *pontban* $r_{0,T} = T^{-1}$ *skálázással és*

$$\Delta_0 = a([-r,0]) \int_0^1 \mathcal{W}(s)\,\mathrm{d}\mathcal{W}(s), \qquad J_0 = a([-r,0])^2 \int_0^1 \mathcal{W}(s)^2\,\mathrm{d}s.$$

4.3 Tétel. *Legyen* $\vartheta \in \mathbb{R}$ *olyan, hogy* $v_\vartheta^* > 0$. *Ha*

$$H_\vartheta := \{\mathrm{Im}(\lambda) : \lambda \in \Lambda_\vartheta \cap (v_\vartheta^* + \mathrm{i}\mathbb{R}_{++}),\ \widetilde{m}_\vartheta(\lambda) = m_\vartheta^*\} \neq \emptyset,$$

és a H_ϑ*-beli számoknak létezik egy* D_ϑ *közös osztója (azaz páronként összemérhetőek és az ezen számokból képzett hányadosok és* D_ϑ *egész számok), akkor a statisztikai kísérletek* (4.1)*-ben megadott családja PLAMN a* ϑ *pontban* $\frac{2\pi}{D_\vartheta}$ *periódussal,* $r_{\vartheta,T} = T^{-m_\vartheta^*}\mathrm{e}^{-v_\vartheta^* T}$ *skálázással és*

$$\Delta_\vartheta(d) = Z\sqrt{J_\vartheta(d)},$$

$$J_\vartheta(d) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2v_\vartheta^* t} \operatorname{Re}\Bigg(\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_\vartheta\cap(v_\vartheta^*+\mathrm{i}\mathbb{R}) \\ \widetilde{m}_\vartheta(\lambda)=m_\vartheta^*}} c_{\vartheta,\lambda,m_\vartheta^*} U_\lambda^{(\vartheta)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(d-t)\operatorname{Im}(\lambda)} \Bigg)^2 \mathrm{d}t,$$

amint $d \in [0, \frac{2\pi}{D_\vartheta})$, *ahol*

$$U_\lambda^{(\vartheta)} = X_0(0) + v_\vartheta^* \int_{[-r,0]} \int_u^0 \mathrm{e}^{-\lambda(s-u)} X_0(s)\,\mathrm{d}s\, a(\mathrm{d}u) + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}\,\mathrm{d}W(s),$$

minden $\lambda \in \mathbb{C}$ *esetén, valamint* Z *egy standard normális eloszlású változó, ami független az* $(X_0(t))_{t\in[-r,0]}$ *és* $(W(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ *folyamatoktól.*

Ha $H_\vartheta = \emptyset$, *akkor a statisztikai kísérletek* (4.1)*-ben megadott családja LAMN a* ϑ *pontban* $r_{\vartheta,T} = T^{-m_\vartheta^*}\mathrm{e}^{-v_\vartheta^* T}$ *skálázással és*

$$\Delta_\vartheta = Z\sqrt{J_\vartheta}, \qquad J_\vartheta = \frac{c_{\vartheta,v_\vartheta^*,m_\vartheta^*}^2}{2v_\vartheta^*} (U_{v_\vartheta^*}^{(\vartheta)})^2.$$

Hivatkozások

[1] Benke, J. M. and Pap, G. (2015). Asymptotic inference for a stochastic differential equation with uniformly distributed time delay. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **167** 182–192.

[2] Benke, J. M. and Pap, G. (2017). One-parameter statistical model for linear stochastic differential equation with time delay. *Statistics* **51(3)** 510–531.

[3] Benke, J. M. and Pap, G. (2017). Local asymptotic quadraticity of statistical experiments connected with a Heston model. *Acta Scientiarum Mathematicarum* **83(1-2)** 313–344.

[4] Gushchin, A. A. and Küchler, U. (1999). Asymptotic inference for a linear stochastic differential equation with time delay. *Bernoulli* **5(6)** 1059–1098.

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Benke János Marcell Ph.D. fokozatra pályázó Lineáris késleltetett sztochasztikus differenciálegyenletek aszimptotikus statisztikai vizsgálata című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- Benke, J. M. and Pap, G. (2015). Asymptotic inference for a stochastic differential equation with uniformly distributed time delay. *Journal of Statistical Planning and Inference.* **167** 182–192.
- Benke, J. M. and Pap, G. (2017). One-parameter statistical model for linear stochastic differential equation with time delay. *Statistics* **51(3)** 510–531.
- Benke, J. M. and Pap, G. (2017). Local asymptotic quadraticity of statistical experiments connected with a Heston model. *Acta Scientiarum Mathematicarum* **83(1-2)** 313–344.

Benke János Marcell hozzájárulása a fent felsorolt cikkekhez 50-50%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2018. február 12.

Dr. Pap Gyula
Szegedi Tudományegyetem
tanszékvezető egyetemi tanár