A disszertáció összefoglalója

Egy G gráf $i(G)$-vel jelölt intervallum száma az a legkisebb t természetes szám, amelyre G előáll halmazok metszési gráfjaként, amely halmazok mindegyike legfeljebb t intervallum uniója. A disszertáció első fejezetében igazoljuk Griggs és West sejtését arról, hogy milyen becslés adható $i(G)$-re e, azaz az élek száma függvényében. Belátjuk, hogy $i(G) \leq \lceil 1/2\sqrt{e} \rceil + 1$. Becslésünk egy következménye, hogy $i(G) \leq \sqrt{3/2\gamma(G)} + o(1)$, ahol $\gamma(G)$ a G gráf génusza.

Az $i(G)$-re ismert becslések többsége monoton növőek, így nagyon gyengévé válnak, ha a G gráf élszáma a lehetséges élek számának felét meghaladja. Sejtéseket fogalmazunk meg, amelyek monoton csökkentő felső becsléseket adnak $i(G)$-re. A második fejezetben $i(G)$-re a komplementer gráf élszámát használó becslést adunk. Belátjuk, hogy $i(G) \leq \lceil \frac{1}{2}\sqrt{e(\bar{G})} \rceil + \mathcal{O}(n/\log n)$.

A harmadik fejezetben gráfok intervallum számának további tulajdonságait vizsgáljuk. Karakterizáljuk azokat a gráfokat, amelyek intervallum száma maximális a fokszám becslések tekintetében, 1/2-es szorzó tényező erejéig meghatározzuk split gráfok intervallum számát, és igazoljuk, hogy magas intervallum szám okozója "nagy" feszített páros gráf.

A negyedik fejezetben a dominációs szám játék változatát vizsgáljuk. A játék dominációs szám definiációjához egy (egyszerű, irányítatlan) gráfra vonatkozó játékot kell ismertetnünk. A és D, két játékos felváltva irányítja gráfunk egy-egy élét, amíg egy irányított gráfhoz nem jutnak. D kezdi a játékot és célja minél kisebb dominációs számú gráf elérése, míg A célja éppen az ellenkező. A G gráf játék dominációs száma a $\gamma_g(G)$-vel jelölt azon érték, amely az optimálisan stratégiákkal játszott játék végén kialakított irányított gráf dominációs száma. (Egy $\vec{G}$ irányított gráf S csúcshalmaza domináló halmaz, ha minden S-en kívüli v csúcshoz található olyan csúcs

S-ben, amelyből vezet él v-hez. Egy irányított gráf dominációs száma a legkisebb domináló halmazának mérete.)

Több gráfosztály esetén meghatározzuk elemeinek játék dominációs számát, illetve becsléseket adunk rá más gráfparaméterek függvényében.

Az ötödik fejezet Dilworth, Ramsey és Turán tételeinek általánosításait tartalmazza. Ezek a tételek példákat mutatnak arra, hogy diszkrét lépések megtétele esetén extrém ugrások közvetkezhetnek be bizonyos mértékek (gráfparaméterek) vizsgálatánál. Példáink olyan tartományokban fordulnak elő, amelyeket a korábbi kutatások nem tudtak tárgyalni.

A diszertáció különböző gyökerű problémákat vizsgál, de ezek kutatása hasonló eszközökkel történik és a különböző paraméterek mindegyike egy mély elméletre vet fényt.

A tézis eredményei között közös munkák is szerepelnek. Az 1. és 2. fejezetben, Pluhár Andrással, a 3. fejezetben Pascal Ochemmel és Pluhár Andrással, a 4. és 5. fejezetben Bollobás Bélával, a 4. fejezetben Noga Alonnal és Szabó Tamással, az 5. fejezetben David Weinreich-hel dolgoztam együtt.