

Szabó Péter Gábor

Egybevágó körök pakolásai négyzetben — korlátok,  
ismétlődő minták és minimálpolinomok

Doktori értekezés tézisei  
társszerzői nyilatkozatokkal

Témavezető: Dr. Csendes Tibor

Szegedi Tudományegyetem  
Szeged, 2005.

# 1. Bevezetés

Az értekezés adott számú egybevágó körnek a négyzetben való legsűrűbb pakolásának a problémájával foglalkozik. Ez a diszkrét geometriából származó optimalizálási feladat az elmúlt évtizedek egyik sokat tanulmányozott problémájává vált [2, 3, 4, 5, 6, 7, 12], közel ötven tudományos dolgozat tárgyalta eddig, amelyekről az értekezés is rövid áttekintést ad.

A disszertáció a problémát három fő szempont szerint vizsgálja:

- a) Hogyan adhatunk az optimális körpakolások numerikus paramétereire (pl. a sugárra, sűrűségre) elméleti és számítógépes módszerekkel korlátokat és hogyan lehet ezeket javítani?
- b) Milyen struktúrális sajátosságai vannak az optimális és a ma ismert legjobb körpakolásoknak és hogyan lehet ezek ismeretében az elméleti úton kapott alsó korlátokat tovább javítani?
- c) Hogyan határozhatók meg körpakolások minimálpolinomjai elméleti úton és számítógépes algebrai rendszerekkel és hogyan lehet azokat a körpakolások osztályozására használni?

Az értekezésben tárgyalt eredmények javarésze az irodalomjegyzékben megadott [1, 8, 9, 10, 11] publikációimban lettek közölve.

## 2. A probléma és annak ekvivalens modelljei

1. DEFINÍCIÓ.  $P(r_n, S) \in P_{r_n}$  egy körpakolás az  $r_n$  sugárral a  $[0, S]^2$  négyzetben, ahol  $P_{r_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, S]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4r_n^2; x_i, y_i \in [r_n, S - r_n] (1 \leq i < j \leq n)\}$ .  $P(r_n, S) \in P_{\bar{r}_n}$  optimális körpakolás, ha  $\bar{r}_n = \max_{P_{r_n} \neq \emptyset} r_n$ .

$\mathfrak{P}_1^n$  probléma: Határozzuk meg az optimális körpakolásokat rögzített  $n \geq 2$  egész számra.

2. DEFINÍCIÓ.  $A(m_n, \Sigma) \in A_{m_n}$  egy pontelhelyezés az  $m_n$  minimális távolsággal a  $[0, \Sigma]^2$  négyzetben, ahol  $A_{m_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, \Sigma]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq m_n^2; (1 \leq i < j \leq n)\}$ .  $A(m_n, \Sigma) \in A_{\bar{m}_n}$  optimális pontelhelyezés, ha  $\bar{m}_n = \max_{A_{m_n} \neq \emptyset} m_n$ .

$\mathfrak{P}_2^n$  probléma: Határozzuk meg az optimális pontelhelyezéseket rögzített  $n \geq 2$  egész számra.

3. DEFINÍCIÓ.  $P'(R, s_n) \in P'_{s_n}$  egy társított körpakolás az  $R$  sugárral a  $[0, s_n]$  négyzetben, ahol  $P'_{s_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, s_n]^{2n} \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 4R^2; x_i, y_i \in [R, s_n - R] (1 \leq i < j \leq n)\}$ .  $P'(R, s_n) \in P'_{\bar{s}_n}$  optimális társított körpakolás, ha  $\bar{s}_n = \min_{P'_{s_n} \neq \emptyset} s_n$ .

**$\mathfrak{P}_3^n$  probléma:** Határozzuk meg az optimális társított körpakolásokat, rögzített  $n \geq 2$  egész számra.

4. DEFINÍCIÓ.  $A'(M, \sigma_n) \in A'_{\sigma_n}$  egy társított pontelhelyezés az  $M$  minimális távolsággal a  $[0, \sigma_n]$  négyzetben, ahol  $A'_{\sigma_n} = \{((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \in [0, \sigma_n]^2 \mid (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq M^2 \ (1 \leq i < j \leq n)\}$ .  $A'(M, \sigma_n) \in A'_{\sigma_n}$  optimális társított pontelhelyezés, ha  $\bar{\sigma}_n = \min_{A'_{\sigma_n} \neq \emptyset} \sigma_n$ .

**$\mathfrak{P}_4^n$  probléma:** Határozzuk meg az optimális társított pontelhelyezéseket, rögzített  $n \geq 2$  egész számra.

1. TÉTEL. [9] A  $\mathfrak{P}_1^n$ ,  $\mathfrak{P}_2^n$ ,  $\mathfrak{P}_3^n$  és  $\mathfrak{P}_4^n$  problémák ekvivalensek egymással abban az értelemben, hogy ha valamelyiket meg tudjuk oldani egy rögzített  $n \geq 2$  egész számra, akkor a többi problémát is meg tudjuk oldani arra az  $n$ -re, mivel a  $\mathfrak{P}_i^n$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) problémák optimális megoldásai egymásból származtathatók.

Az 1. TÉTELnek az alábbi következményben megfogalmazott összefüggéseit a dolgozatban gyakran felhasználjuk.

1. KÖVETKEZMÉNY. [9] Az egymásból származtatott körpakolások, pontelhelyezések, társított körpakolások és társított pontelhelyezések között az alábbi táblázatban szereplő összefüggések állnak fenn:

	$P(r_n, S)$	$A(m_n, \Sigma)$	$P'(R, s_n)$	$A'(M, \sigma_n)$
$P(r_n, S)$	1	$r_n = \frac{Sm_n}{2(m_n + \Sigma)}$	$r_n = \frac{RS}{s_n}$	$r_n = \frac{MS}{2(M + \sigma_n)}$
$A(m_n, \Sigma)$	$m_n = \frac{2\Sigma r_n}{S - 2r_n}$	1	$m_n = \frac{2R\Sigma}{s_n - 2R}$	$m_n = \frac{M\Sigma}{\sigma_n}$
$P'(R, s_n)$	$s_n = \frac{RS}{r_n}$	$s_n = \frac{2R(m_n + \Sigma)}{m_n}$	1	$s_n = \frac{2R(M + \sigma_n)}{M}$
$A'(M, \sigma_n)$	$\sigma_n = \frac{M(S - 2r_n)}{2r_n}$	$\sigma_n = \frac{M\Sigma}{m_n}$	$\sigma_n = \frac{M(s_n - 2R)}{2R}$	1

Mivel a problémát mint optimalizálási feladatot is vizsgálom, így több matematikai programozási modelljét is megadtam a dolgozatban. Ezek alapján a körpakolási feladat tekinthető úgy, mint egy

- folytonos nemlineáris korlátos globális optimalizálási feladat,
- max-min feladat,
- DC programozási feladat, vagy úgy is, mint egy
- teljesen kvadratikusan optimalizálási feladat [10].

### 3. Alsó és felső korlátok az optimumra

2. TÉTEL. Minden  $n \geq 2$  egész számra és az  $\bar{m}_n$  távolságértékre

$$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}} < \bar{m}_n.$$

K. J. Nurmela és munkatársai az [6] dolgozatban 1999-ben közölték a

$$\sigma^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\sigma \leq \frac{\sqrt{3}}{2}n$$

egyenlőtlenséget, amely egy  $A'(1, \sigma)$  társított pontelhelyezés pontjai számára adott alsó korlátot. Az egyenlőtlenséget  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ -mal szorozva

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma^2 + \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}\sigma \leq n$$

adódik. A 2. TÉTEL bizonyításában szereplő ekvivalens alakban olyan egyenlőtlenséget igazoltam, amely az előbbi egyenlőtlenségből eltüntette az  $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} < 0$  negatív együtt-hatójú lineáris tagot, így jobb alsó korlátot eredményez a belőle nyerhető formula  $\bar{m}_n$ -re is.

3. TÉTEL. Minden  $n \geq 2$  egész számra és az  $\bar{r}_n$  körsugárra

$$\bar{r}_n \leq \min \left( \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}n + (4\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 2)(2 - \sqrt{3})}}, \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}}{2n + 2\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}(n-1)}} \right).$$

A 2. TÉTEL és a felső korlátot adó 3. TÉTEL alapján az  $\bar{m}_n$ -re adódó aszimptotikus becslésnek egy abszolút hibakorlátját határoztam meg az 1. ÁLLÍTÁSBAN.

1. ÁLLÍTÁS. Az  $\bar{m}_n \approx \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}n}}$  aszimptotikus közelítés egy abszolút hibakorlátja

$$\frac{2}{n-1}.$$

## 4. Számítógépes eljárások az alsó korlát javítására

Az elméleti úton kapott alsó korlátokat egy kétfázisú sztochasztikus globális optimalizálási eljárással nemcsak tovább javítottuk, hanem sikerült a szakirodalom több korábbi eredményénél jobbat adnunk. A kifejlesztett TAMSASS-PECS algoritmus a TA (Threshold Accepting) technikát ötvözi a SASS (Single Agent Stochastics Search) lokális keresőnek a feladatra specializált változatával [1].

### A TAMSASS-PECS eljárás

- 1 Válasszunk egy  $s$  kezdő megoldást
- 2 Válasszunk egy  $T_h$  kezdőértéket
- 3 Válasszunk egy  $\sigma$  kezdő szórás értéket
- 4 **while**  $\sigma > \sigma_{final}$  **do**
- 5     **while** minden pont nem lett látogatva **do**
- 6          $s = MSASS(s, \sigma, T_h, NextCenter(s))$
- 7         Csökkentsük a  $T_h$  értéket
- 8         Csökkentsük a  $\sigma$  standard szórás értéket
- 9 **return** a legjobb talált megoldás

A TAMSASS-PECS algoritmus egy pszeudovéletlen lehetséges megoldásból indul, amit a következő módon állítunk elő: osszuk fel a négyzetet  $\lceil \sqrt{n} \rceil \times \lceil \sqrt{n} \rceil$  négyzet alakú csempére. Az első pontot véletlenszerűen helyezzük el az első vagy a második csempe közepébe. További pontokat helyezünk el minden második csempe középpontjába, majd a maradék pontokat véletlenszerűen tesszük le a maradék szabad csempékbe (minden csempébe 1 pontot). A  $T_h$  kezdő küszöbérték 0.02, a  $\sigma$  kezdő szórás érték a csempék átmérőjével azonos.

A TAMSASS-PECS algoritmus a kezdő pontelhelyezést egy iterációs eljárás keretében próbálja meg javítani. Minden iterációs lépésben meghívásra kerül az MSASS szubrutin, minden pontra azonos  $\sigma$  szórás és  $T_h$  küszöbértékkel. Miután minden pontra lefutott az MSASS eljárás, a  $\sigma$  szórás és  $T_h$  küszöbérték egyaránt 1%-kal csökken. A TAMSASS-PECS eljárás addig tart, amíg egy  $\sigma_{final}$  érték alá nem kerül a  $\sigma$  szórás.

### Az MSASS szubrutin

```

1  proc MSASS( $s, \sigma_0, T_h, i$ )
2    var  $sCnt := 0; fCnt := 0; FCnt := 3; ct := 0.5; \sigma := \sigma_0;$ 
3    while  $fCnt < 4 \cdot FCnt$  and  $sCnt = 0$  do
4       $\sigma := \begin{cases} ct \cdot \sigma & \text{ha } fCnt > FCnt \\ \sigma & \text{különben} \end{cases}$ 
5      Generáljunk egy  $\xi$  valószínűségi változót  $N(0, \sigma)$  eloszlással;
6       $s'(i) := s(i) + \xi;$ 
7      if  $f(s) - f(s') \leq f(s)T_h$ 
8        then
9           $s(i) := s'(i);$ 
10          $sCnt := sCnt + 1;$ 
11       else
12          $s'(i) := s(i) - \xi;$ 
13         if  $f(s) - f(s') \leq f(s)T_h$ 
14           then
15              $s(i) := s'(i);$ 
16              $sCnt := sCnt + 1;$ 
17         else
18            $fCnt := fCnt + 1;$ 
19     od
20 end

```

Az MSASS eljárás bemenő paraméterei: egy kezdő  $s$  lehetséges megoldás (ami egy pontelhelyezés pontjaiból álló vektor),  $\sigma_0$  a szórás kezdőértéke,  $T_h$  kezdő küszöbérték és  $i$  a pontelhelyezés azon pontjának a sorszáma, amelynek a helyzetét próbálja az eljárás egy lépésen belül megváltoztatni. Fontos módosítás, hogy a 7. illetve 13. sorokban nem egyszerűen az  $f(s) < f(s')$  feltétel szerepel, hanem akkor is elfogadjuk a módosítást, ha  $f(s) \leq f(s') + f(s)T_h$ . Az MSASS szubrutinban szereplő ciklus addig hajtódik végre, amíg vagy sikerült javított pozíciót találni az  $i$ . pontra vagy a sikertelen próbálkozások száma 11-nél több lesz.

## Eredmények

A numerikus eredményeket a PROFIL/BIAS C++ program könyvtár intervallum aritmetikai eljárásainak segítségével garantált megbízhatóságúvá tettem, így a kapott numerikus értékek bizonyítottan alsó korlátjai lesznek az optimumnak.

A TAMSASS-PECS eljárással 100 körig publikáltunk [1] közelítő pakolásokat és 5 esetben megjavítottuk az irodalomban addig ismert legjobb eredményt, nevezetesen az  $n = 32, 37, 47, 62$  és  $72$  körszámokra vonatkozóan.

## 5. Ismétlődő minták a körpakolásokban

Az optimális és az eddig ismert legjobb körpakolások struktúráinak összehasonlítása alapján kiderült, hogy azokban bizonyos esetekben ismétlődő minták fedezhetők fel. Az ismétlődő minták és a körök darabszáma között gyakran kapcsolat van. Ezen kapcsolat alapján bizonyos körpakolásokat mintaosztályokba sorolhatunk [8,11].

### Véges mintaosztályok

A mintaosztályokra és a hozzájuk tartozó mintákra használni fogjuk a  $\mathbf{PAT}(f(k))$  jelölést, ahol  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  egy adott függvényt és  $f(k)$  a körök számát jelenti ( $n = f(k)$ ).

Az értekezésben az alábbi mintaosztályokat tárgyalom részletesen [8,11]:

- a) a  $\mathbf{PAT}(k^2 - l)$  ( $l = 0, 1, 2$ ) mintaosztályok,
- b) a  $\mathbf{PAT}(k(k + 1))$  mintaosztály,
- c) a  $\mathbf{PAT}(k^2 + \lfloor k/2 \rfloor)$  mintaosztály.

A  $k^2 - l$  ( $l = 3, 4, 5$ ) körszámú pakolások struktúrájának közelítéséhez bevezettem és tanulmányoztam az

- d)  $\mathbf{STR}(k^2 - l)$  ( $l = 3, 4, 5$ ) struktúraosztályokat is [8].

Az értekezésben a legrészletesebben a rácspakolásokat tartalmazó mintaosztállyal foglalkoztam, melyek sejtetően végtelen optimális körpakolás sorozatokat is tartalmaznak.

### Egy végtelennek sejtett mintaosztály

*K. J. Nurmela* és munkatársai az alábbi sejtést közölték 1999-ben [6]: Tekintsük a  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  egyszerű lánctörtbe fejtekör előálló approximáló törtsorozat azon részsorozatát, amely minden második törtet tartalmazza a sorozatból. Rendeljünk ezen részsorozat minden egyes  $\frac{2}{q}$  törtjéhez egy pontelhelyezést a következő módon: Osszuk fel a négyzet két egymásra merőleges oldalát rendre  $p$  és  $q$  darab egyenlő részre és húzzunk

párhuzamosokat az oldalakkal az osztópontokon keresztül, így kapunk  $p \times q$  darab téglalapot. Tegyük le egy pontot a négyzet bal alsó sarkába (a (0,0) pontba), majd tegyük minden második téglalapprácpontba egy-egy újabb pontot. Nem nehéz látni, hogy így

$$\left\lceil \frac{(p+1)(q+1)}{2} \right\rceil$$

darab pontot tudunk lerakni. A sejtés az, hogy az előbbi törtsorozat minden egyes törtjéhez tartozó pontelhelyezés optimális lesz. Az ilyen módon előálló pakolásokat rácspakolásoknak hívom.

## Rácspakolások

Tegyük fel, hogy  $p$  és  $q$  olyan pozitív egész számok, hogy  $\frac{p}{q} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ . A továbbiakban  $[[p, q]]$ -val fogom jelölni az olyan rácspakolást, amelyre  $p$  és  $q$  olyan természetes számok, hogy  $\frac{p}{q}$  benne van az előbbi intervallumban, valamint GP-vel fogom jelölni az ilyen  $[[p, q]]$  elemekből álló halmazt (GP= 'Grid Packing').

9. ÁLLÍTÁS. [9] GP-ben az alábbi műveletek jól definiáltak:

$$\begin{aligned} [[p_1, q_1]] + [[p_2, q_2]] &:= [[p_1 + p_2, q_1 + q_2]], \\ \lambda [[p, q]] &:= [[\lambda p, \lambda q]], \end{aligned}$$

ahol  $\lambda$  pozitív egész szám, továbbá, ha  $p_2 < p_1$  és  $q_2 < q_1$  akkor

$$[[p_1, q_1]] - [[p_2, q_2]] := [[p_1 - p_2, q_1 - q_2]],$$

és ha  $\lambda$  osztója  $p$ -nek és  $q$ -nak, akkor

$$\frac{1}{\lambda} [[p, q]] := \left[ \left[ \frac{p}{\lambda}, \frac{q}{\lambda} \right] \right].$$

## Optimálisnak sejtett rácspakolás sorozatok

Az előbb tárgyalt optimálisnak sejtett rácspakolás sorozat megadható egy rekurzív segítségével is.

10. ÁLLÍTÁS. [8] Tekintsük a  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  periodikus egyszerű lánctörtbe fejtésével előálló approximáló törtsorozat azon részsorozatát, amely a második törttől kezdve, minden második törtet tartalmazza a sorozatból. Az ezen törtekhez hozzárendelt rácspakolások azonosak lesznek az alábbi rekurzív módon generált rácspakolás sorozattal:

$$\begin{aligned} S_1 &= [[1, 1]], \quad S_2 = [[3, 5]], \\ S_n &= 4S_{n-1} - S_{n-2} \quad (n \geq 3). \end{aligned}$$

Az említett végtelen rácspakolás sorozat optimalitásának sejtése abból a felismerésből is származik, hogy a pakolás sorozat elemei rendkívül sűrű körpakolások. A sorozat körpakolásainak sűrűsége  $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ -höz konvergál (ami pedig egybevágó köröknek

a síkon vett legsűrűbb kitöltésének a sűrűsége). A bizonyítottan optimális pakolások struktúrájának ismeretére, valamint az eddigi legjobb pakolások alapján, további négy olyan körpakolás sorozatot adtam meg, amelyekről szintén azt sejttem, hogy optimális pakolások minden elemükben.

12. ÁLLÍTÁS. *Tekintsük a következő  $\{A_i\}, \{B_i\}, \{C_i\}, \{D_i\}$  rácspakolás sorozatokat, ahol  $(i \in \mathbb{Z}^+) : A_i := 2S_i, B_i := S_i + S_{i+1}, C_i := B_i/2, D_i := C_i + [3, 5]$  Ekkor  $\lim_{i \rightarrow \infty} d_{X_i} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$ , ahol  $X \in \{S, A, B, C, D\}$  és  $d_{X_i}$  jelöli a körpakolások sűrűségét.*

### Javított alsó korlát mintaosztályok felhasználásával

A mintaosztályok jól használhatók arra is, hogy az elméleti úton kapott alsó korlátokat tovább javítsuk.

4. TÉTEL. [11] *Az  $m_n$  érték nem kisebb mint*

$$\max (L_1(n), L_2(n), L_{3a}(n), L_{3b}(n), L_4(n), L_5(n), L_6(n), L_7(n), L_8(n), L_9(n)),$$

ahol

$$\begin{aligned} L_1(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n} \rceil - 1}, \\ L_2(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+1} \rceil - 3 + \sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\ L_{3a}(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+2} \rceil - 2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}}, \\ L_{3b}(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+2} \rceil - 5 + 2\sqrt{2+\sqrt{3}}}, \\ L_4(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+3} \rceil - 3 + \sqrt{3}}, \\ L_5(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+4} \rceil - 3 + \sqrt{3}}, \\ L_6(n) &= \frac{1}{\lceil \sqrt{n+5} \rceil - 4 + 3\sqrt{3}/2}, \\ L_7(n) &= \frac{k^2 - k - \sqrt{2k}}{k^3 - 2k^2}, \text{ ha } n = k(k+1), \text{ különben } 0, \\ L_8(n) &= \max_i \left\{ \sqrt{\frac{1}{p_i^2} + \frac{1}{q_i^2}} \right\}, \text{ ha } n = \left\lfloor \frac{(p_i+1)(q_i+1)}{2} \right\rfloor, \text{ } p_i^2 \leq 3q_i^2 \text{ és } \\ &\quad q_i^2 \leq 3p_i^2, i \in \mathbb{N}, \text{ különben } 0, \\ L_9(n) &= \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3n}}}. \end{aligned}$$

A rácspakolás sorozatokat felhasználtam az alábbi tétel bizonyításában is.

5. TÉTEL. [9] *Minden  $n \geq 2$  egész számra*

$$(3 - 2\sqrt{2})\pi \leq d_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2) < \frac{\pi}{\sqrt{12}},$$

ahol  $d_n(\bar{r}_n, [0, 1]^2)$  jelöli a körpakolás sűrűségét és ezek a korlátok élesek.

## 6. Körpakolások minimálpolinomjai

A dolgozatban a pontelhelyezésekhez rendelhető minimálpolinomok (vagyis olyan minimális fokszámú polinomok, amelyeknek legkisebb pozitív gyöke  $m_n$ ) fogalmát



kiterjesztettem a feladat többi ekvivalens geometriai megfelelőjére és segítségükkel, több esetben sikerült egy körpakolás optimális részstruktúráinak általánosított minimálpolinomjai felhasználásával a pakolás minimálpolinomját meghatározni rezultánsképzéssel.

15. DEFINÍCIÓ. [9] Egy körpakolást/pontelhelyezést *optimális részstruktúrának* mondunk az  $X \subset [0, 1]$  kompakt halmazban, ha a  $d_{n'}(r_{n'}, [0, 1]^2)$  sűrűség maximális  $X$ -ben, ahol  $n'$  jelöli az  $X$ -beli körök számát,

16. DEFINÍCIÓ. [9] A  $p_n^I(x)$  polinomot *általánosított minimálpolinomnak* mondjuk, ha rendre  $x \in \{r, m, s, \sigma\}$  és  $I \in \{S, \Sigma, R, M\}$ ,  $\bar{x}_n$  a legkisebb pozitív gyöke a  $p_n^I(x)$  polinomnak, és a polinom fokszáma minimális. Legyen  $P_n(x) = p_n^1(x)$ .

13. ÁLLÍTÁS. [9] *Az általánosított minimálpolinomok közötti kapcsolatok az alábbi formulákkal írhatók le:*

$$\begin{array}{c|c}
 \mathbf{p}_n^{\mathbf{S}}(r) = p_n^{\Sigma:=S-2r}(m := 2r) & \mathbf{p}_n^{\Sigma}(m) = p_n^{R:=\Sigma+m}(s := \frac{m}{2}) \\
 p_n^{R:=S}(s := r) & p_n^{M:=\Sigma}(\sigma := m) \\
 p_n^{M:=S-2r}(\sigma := 2r) & p_n^{S:=\Sigma+m}(r := \frac{m}{2}) \\
 \hline
 \mathbf{p}_n^{\mathbf{R}}(s) = p_n^{M:=R-2s}(\sigma := 2r) & \mathbf{p}_n^{\mathbf{M}}(\sigma) = p_n^{S:=M+\sigma}(r := \frac{\sigma}{2}) \\
 p_n^{S:=R}(r := s) & p_n^{\Sigma:=M}(m := \sigma) \\
 p_n^{\Sigma:=R-2s}(m := 2s) & p_n^{R:=M+m}(s := \frac{\sigma}{2})
 \end{array}$$

6. TÉTEL. [9] *Tekintsünk egy pontelhelyezést az egységnyezetben. Tegyük fel, hogy a pontelhelyezésnek van  $N \geq 2$  darab optimális részstruktúrája, rendre  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N$  oldalú igazított négyzetekben. Ha  $f$  egy olyan polinom, hogy vannak olyan  $1 \leq i, j \leq N$  indexek, hogy  $\Sigma_i = f(\Sigma_j)$ , akkor a  $p_n^{\Sigma}(m)$  minimálpolinom kiszámolható az  $i$ . és  $j$ . optimális részstruktúra minimálpolinomjaiból az alábbi módon:*

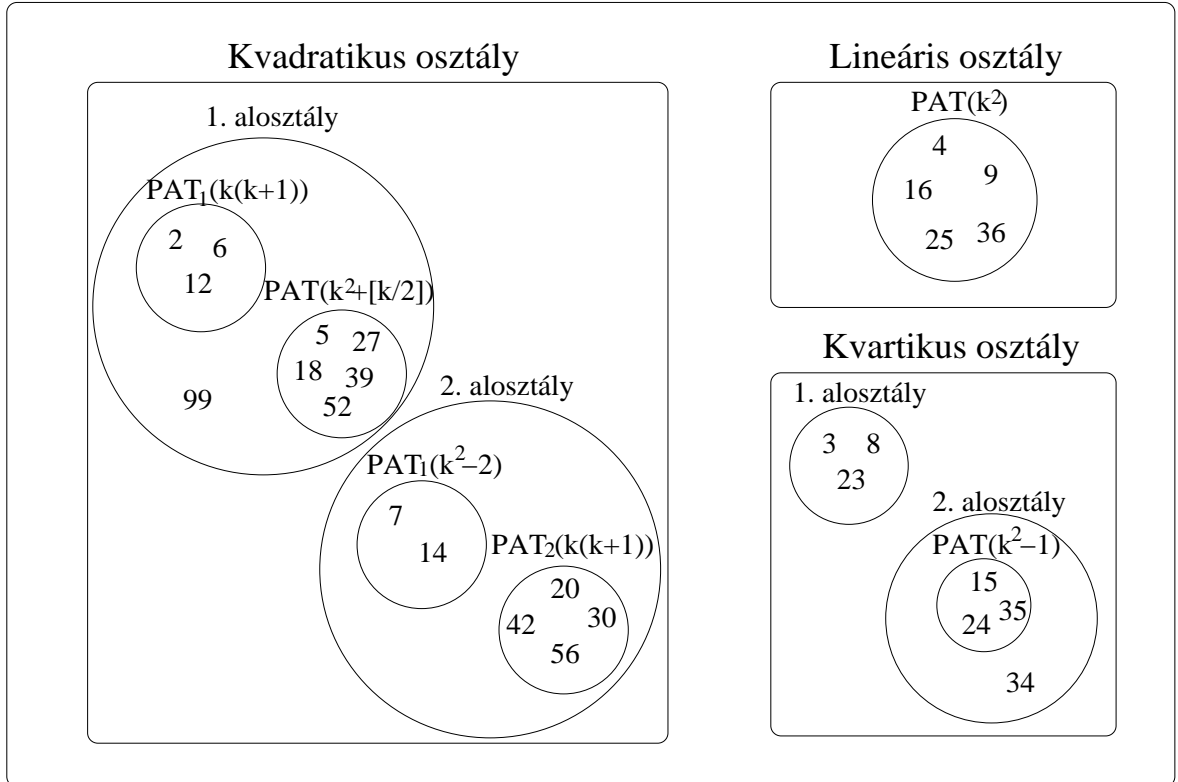
$$\begin{aligned}
 p_n^{\Sigma}(m) &= \text{Res}(p_{n_1}^{\Sigma_j}(m), p_{n_2}^{f(\Sigma_j)}(m), \Sigma_j) = \\
 &\det(\text{Syl}(p_{n_1}^{\Sigma_j}(m), p_{n_2}^{f(\Sigma_j)}(m), \Sigma_j)).
 \end{aligned}$$

A dolgozatban 100 körig bezárólag adtam meg több általam meghatározott minimálpolinomot és számos esetben a körpakolásokhoz és pontelhelyezésekhez a segítségükkel meghatározott egzakt értékeket is  $\bar{m}_n$ -re és  $\bar{r}_n$ -re. Külön kitértem az  $n = 11$  körszámú esetre, amikor is egy 8-ad fokú polinom gyökeit úgy határoztam meg algebrailag, hogy a körpakolás alapján sejtettem meg azt az alkalmas kvadratikus testet, amelyben a gyököket keresni kellett.

## Minimálpolinomokon alapuló osztályozás

A pontelhelyezésekhez rendelt minimálpolinomok jól használhatók a pakolások osztályozására is. Az alapján, hogy egy körpakolás minimálpolinomja, lineáris, kvadratikuss vagy kvartikus különböző osztályokat és részosztályokat határoztam meg, amelyeknek a korábbi mintaosztályokhoz való viszonyát szemlélteti az alábbi ábra.

## KÖRPAKOLÁSOK



## Irodalomjegyzék

- [1] L. G. Casado, I. García, P. G. Szabó, and T. Csendes (2001), *Packing Equal Circles in a Square II. – New Results for up to 100 Circles Using the TAMSASS-PECS Algorithm*, Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 207–224.
- [2] R. L. Graham and B. D. Lubachevsky (1996), *Repeated Patterns Dense Packings of Equal Circles in a Square*, The Electronic Journal of Combinatorics 3:#16.
- [3] M. Cs. Markót (2004), *Optimal Packing of 28 Equal Circles in a Unit Square - the First Reliable Solution*, Numerical Algorithms 1-4:253-261.
- [4] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1997), *Packing up to 50 Equal Circles in a Square*, Discrete & Computational Geometry 18:111–120.
- [5] K. J. Nurmela and P. R. J. Östergård (1999), *More Optimal Packings of Equal Circles in a Square*, Discrete & Computational Geometry 22:439–457.

- [6] K. J. Nurmela, P. R. J. Östergård, and R. aus de Spring (1999), *Asymptotic behaviour of optimal circle packings in a square*, Canadian Mathematical Bulletin 42:380–385.
- [7] R. Peikert, D. Würtz, M. Monagan, and C. de Groot (1992), *Packing Circles in a Square: A Review and New Results*, Proceedings of the 15th IFIP Conference on System Modelling and Optimization (Zürich, Switzerland, September 2-6, 1991), Springer Lecture Notes in Control and Information Sciences 180:45–54.
- [8] P. G. Szabó (2000), *Some New Structures for the "Equal Circles Packing in a Square" Problem*, Central European Journal of Operations Research 8:79–91.
- [9] P. G. Szabó (2005), *Optimal substructures in optimal and approximate circle packings*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Vol 46, No.1, pp. 103-118.
- [10] P. G. Szabó, M. Cs. Markót and T. Csendes (2005), *Global Optimization in Geometry — Circle Packing into the Square*, Essays and Surveys in Global Optimization (Ed. by C. Audet, P. Hansen, and G. Savard), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 233–266.
- [11] P. G. Szabó, T. Csendes, L. G. Casado, and I. García (2001), *Packing Equal Circles in a Square I. – Problem Setting and Bounds for Optimal Solutions*, Optimization Theory: Recent Developments from Mátraháza, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 191–206.
- [12] D. Würtz, M. Monagan and R. Peikert (1994), *The History of Packing Circles in a Square*, Maple Technical Newsletter (Maple in Mathematics and Sciences — A Special issue) 0:35–42.



