CALOGERO-RUIJSENAARS TÍPUSÚ INTEGRÁLHATÓ RENDSZEREK

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Görbe Tamás Ferenc

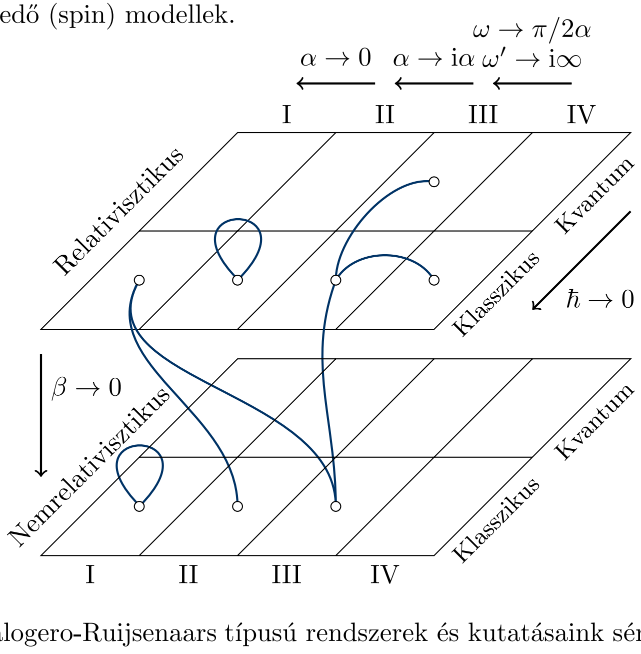
Témavezető: Dr. Fehér László, egyetemi tanár

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Fizika Doktori Iskola
Elméleti Fizikai Tanszék
Szeged

2017

Bevezetés

Az egydimenziós integrálható sokrészecske modellek széleskörű fizikai alkalmazásaik és gazdag matematikai hátterük okán az egzaktul megoldható hamiltoni rendszerek fontos osztályát képezik. A Calogero-Ruijsenaars típusú rendszerek központi helyet foglalnak el ezek között. Ez egyrészt a szolitonok elméletével való kapcsolatuknak, másrészt annak köszönhető, hogy számos más érdekes modell (pl. a Toda-molekula) származtatható belőlük, határesetekként és analitikus kiterjesztéssel. A Calogero-Ruijsenaars típusú modellek egyenesen vagy körön mozgó kölcsönható részecskéket írnak le. A kölcsönhatás jellege szerint négy típust különböztetünk meg. Ezek a racionális (I), a hiperbolikus (II), a trigonometrikus (III) és az elliptikus (IV) rendszerek. A modelleknek létezik nemrelativisztikus és relativisztikus, valamint klasszikus- és kvantummechanikai változata is. Integrálható általánosításaik közül kiemelendők a gyökrendszereken alapuló és a belső szabadsági fokot is megengedő (spin) modellek.



A Calogero-Ruijsenaars típusú rendszerek és kutatásaink sémája.

Tudományos előzmények

Tekintsük az (M, ω, H), $(\tilde{M}, \tilde{\omega}, \tilde{H})$ Liouville integrálható rendszereket. A két rendszer *hatás-szög dualitásáról* akkor beszélünk, ha létezik a fázisterek között egy $\mathcal{R}\colon M \to \tilde{M}$ szimplektomorf leképezés, amely az $\tilde{M}$ tér valamely $(\tilde{q}, \tilde{p})$ kanonikus koordinátáit a H Hamilton-függvényhez tartozó rendszer hatás-szög változóiba viszi át, és fordítva, az M térnek léteznek (q, p) kanonikus koordinátái, amelyek a $\tilde{H}$ Hamilton-függvény rendszerének hatás-szög változói lesznek. Ekkor $\mathcal{R}$ az ún. *hatás-szög leképezés*. Ezáltal $H \circ \mathcal{R}^{-1}$ kizárólag $\tilde{q}$-tól, és $\tilde{H} \circ \mathcal{R}$ csakis q-tól függ. Mindemellett az általunk vizsgált rendszerek esetén a H Hamilton-függvény (q, p) koordinátás alakja kölcsönható részecskék egy olyan modelljét adja, amelyben q a részecske-koordináták szerepét játssza, és hasonlóan, a $\tilde{H}$ függvény a $(\tilde{q}, \tilde{p})$ változókkal kifejezve $\tilde{q}$ pozíciókba elhelyezett részecskék kölcsönhatását írja le. Ezen különleges kapcsolat jelentőségét mutatja, hogy a kvantummechanikai tárgyalásban is megjelenik mint a fontos speciális függvényekkel kifejezett hullámfüggvények bispektrális tulajdonsága [2, 20].

Dualitásban álló sokrészecske rendszereket vizsgált Ruijsenaars [19, 21, 22, 23], aki közvetlen úton konstruált hatás-szög leképezéseket az A_{n-1} gyökrendszerhez asszociált Calogero-Ruijsenaars és Toda típusú integrálható rendszerekhez. Ezen dualitási relációk redukciós értelmezéséről számos cikk született az 1990-es években, pl. [10, 11]. Az ezekben felmerült ötleteket továbbfejlesztve és szisztematikusan kidolgozva az elmúlt évtizedben Fehér és munkatársai ilyen kapcsolatokat vezettek le redukciós keretek között [6, 5, 1, 7, 8, 4, 9] (ld. *Alkalmazott módszerek*). Az a természetes várakozás, hogy hasonló dualitások fennállnak másfajta gyökrendszerek esetén is Pusztai munkájában nyert igazolást [14, 15, 16, 17, 18].

Kutatásunkban olyan új eredmények elérését tűztük ki célul (ld. *Célkitűzések*), amelyek ezen korábbi fejleményekhez kapcsolódnak.

Célkitűzések

A disszertációban bemutatott doktori munka céljai az alábbi pontokba foglalhatók össze:

I. A racionális A_{n-1} Calogero-Moser modell hatás-szög változóira vonatkozó Sklyanin-formula bizonyítása redukciós módszerrel.

II. A trigonometrikus BC_n Sutherland rendszer hatás-szög duálisának részletes kidolgozása hamiltoni redukciós keretek között.

III. Az előző pont eredményeit és Marshall egy korábbi munkáját általánosítva a trigonometrikus BC_n Sutherland modell egy 1-paraméteres integrálható deformációjának megalkotása.

IV. A Lax formalizmus kiterjesztése az egynél több csatolási állandót tartalmazó általánosított hiperbolikus Ruijsenaars-Schneider rendszerekre.

V. Új elliptikus A_{n-1} Ruijsenaars-Schneider modellek konstruálása az n-dimenziós komplex projektív téren.

A fenti kutatási elképzeléseket sikeresen valósítottuk meg, sőt további, a kezdeti várakozásokon túlmutató előrelépéseket is tettünk (ld. *Új tudományos eredmények*).

Alkalmazott módszerek

A fenti célok eléréséhez az úgynevezett *hamiltoni redukció* módszerét, valamint standard matematikai eszközöket alkalmaztunk.

Dióhéjban összefoglalva, a redukciós eljárás során a levezetendő rendszerek részecskéinek bonyolult mozgását egy magasabb dimenziós térben mozgó, nagyfokú szimmetriával bíró szabad részecske 'ügyesen' választott vetületeként nyerjük.

Pontosabban fogalmazva, a redukció kiindulásaként egy csoportelméleti eredetű fázisteret választunk. Ez lehet egy X mátrix Lie-csoport vagy Lie-algebra $P = T^*X$ koérintőnyalábja. A P nyalábon természetes módon megadható Ω szimplektikus forma és egy $\mathcal{H}\colon P \to \mathbb{R}$ Hamilton-függvény megválasztása egy $(P, \Omega, \mathcal{H})$ hamiltoni rendszert eredményez. Ha a $\mathcal{H}$ Hamilton-függvény kellően egyszerű alakot ölt, akkor a mozgásegyenletek explicit módon megoldhatók, sőt akár $\{\mathcal{H}_j\}$ Poisson kommutáló első integrálok egy egész serege felírható. Ekkor egy megfelelően választott G csoport hatása az X (és ezáltal a P) téren, amelyre nézve a $\mathcal{H}_j$ függvények invariánsak, lehetővé teszi az asszociált $\Phi\colon P \to \mathfrak{g}^*$ momentum leképezés felírását. A Φ momentum leképezés értékének $\mu \in \mathfrak{g}^*$ elemre történő rögzítése egy $\Phi^{-1}(\mu)$ szintfelületet jelöl ki a P fázistérben. Ez a kényszerfelület a momentum érték $G_\mu \subset G$ izotrópia-részcsoportjának pályáiból áll. Ezen pályák alkotják a $(P_{\text{red}}, \omega_{\text{red}}, H)$ redukált fázistér pontjait. A fenti konstrukciónak köszönhetően az involúcióban álló $\{\mathcal{H}_j\}$ mozgásállandók hamiltoni folyamai invariánsan hagyják a momentum szintfelületet és a $\{\mathcal{H}_j\}$ függvények állandók G_μ pályái mentén. Következésképpen értelmezhetők a függvények $H_j\colon P_{\text{red}} \to \mathbb{R}$ redukciói, amelyek Poisson zárójele továbbra eltűnik, és ily módon a származtatott $(P_{\text{red}}, \omega_{\text{red}}, H)$ hamiltoni rendszer Liouville értelemben integrálható. A gyakorlatban jellemzően a redukált fázisteret a G_μ csoport pályáinak egy S sima szelésével azonosítjuk. Ilyen szelést a $\Phi = \mu$ egyenlet megoldásával nyerünk. Két így kapott $S, \tilde{S}$ modell lehet egymás hatás-szög duálisa.

Új tudományos eredmények

Az alábbiakban röviden ismertetem a disszertációban elért tudományos eredményeket. A kapcsolódó publikációkat a tézisfüzet végén található lista gyűjti össze (ld. *Publikációk*). A közleményekre az azoknak megfelelő tézispontok címében, illetve szükség esetén a szövegben hivatkozok.

I. A racionális Calogero-Moser rendszer spektrális koordinátái [P6]

+ A hamiltoni redukció módszerének alkalmazásával azonosítottam a racionális Calogero-Moser rendszer Falqui és Mencattini [3] által felírt kanonikus koordinátáit.

+ Bizonyítottam egy Falqui és Mencattini [3] által megsejtett összefüggést.

+ Igazoltam Sklyanin [24] formuláját, amely spektrális kanonikus koordinátákat szolgáltat a racionális Calogero-Moser rendszerhez.

II. A trigonometrikus BC_n Sutherland rendszer hatás-szög duálisa [P1, P8, P5]

+ Hamiltoni redukció útján származtattam a trigonometrikus BC_n Sutherland modell hatás-szög duálisát, amelyben a racionális BC_n Ruijsenaars-Schneider rendszer egy valós formáját ismertem fel.

+ Bizonyítottam, hogy a duális modell lokális leírásában használt változók kanonikus koordináta-rendszert alkotnak [P8].

+ Felírtam ezen duális rendszer Lax-mátrixát explicit alakban.

+ Megadtam a duális modell fázisterének, valamint Lax-mátrixának globális leírását [P1].

- Jellemeztem a trigonometrikus BC$_n$ Sutherland modell egyensúlyi konfigurációit a hatás-szög dualitás segítségével.
- További alkalmazásként igazoltam, hogy a duális rendszer $(n-1)$ extra mozgásállandóval rendelkezik, következésképp maximálisan szuperintegrálható.
- Végül bizonyítottam, hogy a hiperbolikus BC$_n$ Sutherland modell Pusztai [16] által konstruált involúcióban álló mozgásállandói és a van Diejen [25] által talált Poisson kommutáló első integrálok ekvivalensek, azaz ugyanazt az abeli algebrát generálják [P5]. A két említett függvénycsalád közötti lineáris kapcsolatot explicit formában felírtam és igazoltam.

III. A trigonometrikus BC$_n$ Sutherland rendszer Poisson-Lie deformációja [P2, P3]

- Marshall korábbi, hiperbolikus esettel foglalkozó munkáját [12] általánosítva levezettem a trigonometrikus BC$_n$ Sutherland rendszer egy 1-paraméteres integrálható deformációját a $2n \times 2n$-es egységnyi determinánsú unitér mátrixok alkotta Poisson-Lie csoport Heisenberg duplájának általánosított Marsden-Weinstein redukciójából.
- Megoldottam a momentum kényszer-egyenletet, visszavezetve azt egy Fehér és Klimčík [7] által korábban már részletesen vizsgált egyenletre.
- A fejezet fő eredményeként globálisan jellemeztem a redukált rendszert [P2]. Igazoltam, hogy a levezetett rendszer Liouville integrálható.
- Továbbá megmutattam, hogy a modell miként kapható meg van Diejen [25] öt csatolási állandót tartalmazó modelljéből. Ezáltal a levezetett modellt sikerült beilleszteni a Calogero-Ruijsenaars típusú integrálható rendszerek közé.

+ Végül teljessé tettem a hiperbolikus verzió Marshall [12] által adott származtatását [P3].

IV. A hiperbolikus BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen rendszer Lax reprezentációja [P7]

+ Igazoltam, hogy a Lax mátrix eleme az (n, n)-szignatúrájú 'belső szorzással' definiált pszeudounitér mátrixok Lie-csoportjának.

+ Pusztai korábbi eredményét [15] felhasználva bizonyítottam, hogy a Lax mátrix pozitív definit.

+ Megmutattam a Pusztai által levezetett szóráselméleti eredmények segítségével, hogy a Lax mátrixból származó spektrális invariánsok és van Diejen [25] öt paramétert tartalmazó Poisson kommutáló függvénycsaládjának megfelelő specializációja ekvivalensek.

+ Ennek segítségével bebizonyítottam, hogy a Lax mátrix független sajátértékei Poisson kommutáló mozgásállandók teljes rendszerét alkotják.

V. Trigonometrikus és elliptikus Ruijsenaars-Schneider modellek a komplex projektív téren [P4]

+ Megvizsgáltam a Fehér és Kluck [9] által korábban felfedezett ún. *egyes típusú* csatolási állandóval jellemzett kompaktifikált Ruijsenaars-Schneider modelleket, és közvetlen, elemi úton megmutattam, hogy a trigonometrikus esetben ezen rendszerek miként ágyazhatók be a megfelelő komplex projektív térbe.

+ A trigonometrikus esetben alkalmazott eljárást általánosítottam az elliptikus potenciálok esetére is, ezáltal új elliptikus Ruijsenaars-Schneider modelleket konstruáltam a komplex projektív téren. Ezzel kiterjesztettem Ruijsenaars korábbi eredményeit [20, 23].

Publikációk

A tézispontokhoz kapcsolódó referált közlemények:

[P1] L. Fehér and **T.F. Görbe**, *Duality between the trigonometric BC_n Sutherland system and a completed rational Ruijsenaars-Schneider-van Diejen system*, J. Math. Phys. **55** (2014) 102704; doi:10.1063/1.4898077; arXiv:1407.2057 [math-ph]

[P2] L. Fehér and **T.F. Görbe**, *On a Poisson-Lie deformation of the BC_n Sutherland system*, Nucl. Phys. B **901** (2015) 85-114; doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.10.008; arXiv:1508.04991 [math-ph]

[P3] L. Fehér and **T.F. Görbe**, *The full phase space of a model in the Calogero-Ruijsenaars family*, J. Geom. Phys. (2016); doi:10.1016/j.geomphys.2016.04.018; arXiv:1603.02877 [math-ph]

[P4] L. Fehér and **T.F. Görbe**, *Trigonometric and elliptic Ruijsenaars-Schneider systems on the complex projective space*, Lett. Math. Phys. **106** (2016) 1429-1449; doi:10.1007/s11005-016-0877-z; arXiv:1605.09736 [math-ph]

[P5] **T.F. Görbe** and L. Fehér, *Equivalence of two sets of Hamiltonians associated with the rational BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen system*, Phys. Lett. A **379** (2015) 2685-2689; doi:10.1016/j.physleta.2015.08.014; arXiv:1503.01303 [math-ph]

[P6] **T.F. Görbe**, *A simple proof of Sklyanin's formula for canonical spectral coordinates of the rational Calogero-Moser system*, SIGMA **12** (2016) 027; doi:10.3842/SIGMA.2016.027; arXiv:1601.01181 [math-ph]

[P7] B.G. Pusztai and **T.F. Görbe**, *Lax representation of the hyperbolic van Diejen dynamics with two coupling parameters*, to appear in Commun. Math. Phys. (2017); arXiv:1603.06710 [math-ph]

A tézispontokhoz kapcsolódó referált konferencia-közlemény:

[P8] **T.F. Görbe**, *On the derivation of Darboux form for the action-angle dual of trigonometric BC_n Sutherland system*, J. Phys.: Conf. Ser. **563** (2014) 012012; doi:10.1088/1742-6596/563/1/012012; arXiv:1410.0301 [math-ph]

További referált folyóiratcikk:

[P9] V. Ayadi, L. Fehér, and **T.F. Görbe**, *Superintegrability of rational Ruijsenaars-Schneider systems and their action-angle duals*, J. Geom. Symmetry Phys. **27** (2012) 27-44; doi:10.7546/jgsp-27-2012-27-44; arXiv:1209.1314 [nlin.SI]

Poszterek:

[P10] **T.F. Görbe**, *The trigonometric BC_n Sutherland system: action-angle duality and applications*, 3-rd Conference on Finite Dimensional Integrable Systems in Geometry and Mathematical Physics 2015 (FDIS2015), 12-17 July 2015, Będlewo (Poland)

[P11] **T.F. Görbe**, *Lax representation of the hyperbolic van Diejen system with two coupling parameters*, Integrable Systems Conference 2016, 19-24 June 2016, CSF Ascona (Switzerland)

Hivatkozások

[1] V. Ayadi and L. Fehér, *On the superintegrability of the rational Ruijsenaars-Schneider model*, Phys. Lett. A **374** (2010) 1913-1916; doi:10.1016/j.physleta.2010.02.065; arXiv:0909.2753 [math-ph]

[2] J.J. Duistermaat and F.A. Grünbaum, *Differential equations in the spectral parameter*, Commun. Math. Phys. **103** (1986) 177-240; doi:10.1007/BF01206937

[3] G. Falqui and I. Mencattini, *Bi-Hamiltonian geometry and canonical spectral coordinates for the rational Calogero-Moser system*, J. Geom. Phys. (2016); doi:10.1016/j.geomphys.2016.04.023; arXiv:1511.06339 [math-ph]

[4] L. Fehér, *Action-angle map and duality for the open Toda lattice in the perspective of Hamiltonian reduction*, Phys. Lett. A **377** (2013) 2917-2921; doi:10.1016/j.physleta.2013.09.008; arXiv:1312.0404 [math-ph]

[5] L. Fehér and V. Ayadi, *Trigonometric Sutherland systems and their Ruijsenaars duals from symplectic reduction*, J. Math. Phys. **51** (2010) 103511; doi:10.1063/1.3492919; arXiv:1005.4531 [math-ph]

[6] L. Fehér and C. Klimčík, *On the duality between the hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars-Schneider models*, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009) 185202; doi:10.1088/1751-8113/42/18/185202; arXiv:0901.1983 [math-ph]

[7] L. Fehér and C. Klimčík, *Poisson-Lie interpretation of trigonometric Ruijsenaars duality*, Commun. Math. Phys. **301** (2011) 55-104; doi:10.1007/s00220-010-1140-6; arXiv:0906.4198 [math-ph]

[8] L. Fehér and C. Klimčík, *Self-duality of the compactified Ruijsenaars-Schneider system from quasi-Hamiltonian reduction*, Nucl. Phys. B **860** (2012) 464-515; doi:10.1016/j.nuclphysb.2012.03.005; arXiv:1101.1759 [math-ph]

[9] L. Fehér and T.J. Kluck, *New compact forms of the trigonometric Ruijsenaars-Schneider system*, Nucl. Phys. B **882** (2014) 97-127; doi:10.1016/j.nuclphysb.2014.02.020; arXiv:1312.0400 [math-ph]

[10] V. Fock, A. Gorsky, N. Nekrasov, and V. Rubtsov, *Duality in integrable systems and gauge theories*, JHEP **07** (2000) 028; doi:10.1088/1126-6708/2000/07/028; arXiv:hep-th/9906235

[11] A. Gorsky and N. Nekrasov, *Relativistic Calogero-Moser model as gauged WZW theory*, Nucl. Phys. B **436** (1995) 582-608; doi:10.1016/0550-3213(94)00499-5; arXiv:hep-th/9401017

[12] I. Marshall, *A new model in the Calogero-Ruijsenaars family*, Commun. Math. Phys. **338** (2015) 563-587; doi:10.1007/s00220-015-2388-7; arXiv:1311.4641 [math-ph]

[13] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*, Invent. Math. **37** (1976) 93-108; doi:10.1007/BF01418964

[14] B.G. Pusztai, *On the scattering theory of the classical hyperbolic C_n Sutherland model*, J. Phys. A **44** (2011) 155306; doi:10.1088/1751-8113/44/15/155306; arXiv:1010.4663 [math-ph]

[15] B.G. Pusztai, *Action-angle duality between the C_n-type hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars-Schneider-van Diejen models*, Nucl. Phys. B **853** (2011) 139-173; doi:10.1016/j.nuclphysb.2011.07.021; arXiv:1106.2943 [math-ph]

[16] B.G. Pusztai, *The hyperbolic BC_n Sutherland and the rational BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen models: Lax matrices and duality*, Nucl. Phys. B **856** (2012) 528-551; doi:10.1016/j.nuclphysb.2011.11.015; arXiv:1109.0446 [math-ph]

[17] B.G. Pusztai, *Scattering theory of the hyperbolic BC_n Sutherland and the rational BC_n Ruijsenaars-Schneider-*

van Diejen models, Nucl. Phys. B **874** (2013) 647-662; doi:10.1016/j.nuclphysb.2013.06.007; arXiv:1304.2462 [math-ph]

[18] B.G. Pusztai, *On the classical r-matrix structure of the rational BC_n Ruijsenaars-Schneider-van Diejen system*, Nucl. Phys. B **900** (2015) 115-146; doi:10.1016/j.nuclphysb.2015.09.009; arXiv:1508.03556 [math-ph]

[19] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems I. The pure soliton case*, Commun. Math. Phys. **115** (1988) 127-165; doi:10.1007/BF01238855

[20] S.N.M. Ruijsenaars, *Relativistic Toda systems*, Commun. Math. Phys. **133** (1990) 217-247; doi:10.1007/BF02097366

[21] S.N.M. Ruijsenaars, *Finite-dimensional soliton systems*, in Integrable and Superintegrable Systems (ed. B. Kupershmidt), pp. 165-206, Singapore, World Scientific, 1990; doi:10.1142/9789812797179_0008

[22] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems III. Sutherland type systems and their duals*, Publ. RIMS **31** (1995) 247-353; doi:10.2977/prims/1195164440

[23] S.N.M. Ruijsenaars, *Systems of Calogero-Moser type*, in Particles and Fields (eds. G. Semenoff, L. Vinet), pp. 251-352, Springer, New York, NY, 1999; doi:10.1007/978-1-4612-1410-6_7

[24] E. Sklyanin, *Bispectrality for the quantum open Toda chain*, J. Phys. A: Math. Theor. **46** (2015) 382001; doi:10.1088/1751-8113/46/38/382001; arXiv:1306.0454 [nlin.SI]

[25] J.F. van Diejen, *Deformations of Calogero-Moser systems and finite Toda chains*, Theor. Math. Phys. **99** (1994) 549-554; doi:10.1007/BF01016137; arXiv:solv-int/9310001