E-unitér inverz monoidok F-inverz fedői

Doktori értekezés tézisei

Szakács Nóra

Témavezető: Bálintné Dr. Szendrei Mária

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

2016

1. Bevezetés

A disszertáció témája a félcsoportelmélet témaköréhez tartozik, a tárgyalt félcsoportok az úgynevezett *inverz monoidok* (lásd Lawson [4] és Petrich [7] monográfiáit a témában). Ezen monoidokat a következő tulajdonság definiálja: bármely x elemének létezik olyan egyértelmű x^{-1} inverze, melyre $xx^{-1}x = x$ és $x^{-1}xx^{-1} = x^{-1}$ teljesül. Az inverz félcsoportok a csoportok általánosításai. Többek között parciális szimmetriák absztraktciójaként jönnek elő — az inverz monoidok olyan szerepet játszanak a parciális szimmetriák elméletében, mint a csoportok a szimmetriákéban.

A csoportokban ellentéteben az inverz monoidban nem igaz az, hogy xx^{-1} az egységelem, viszont mindig idempotens. Ebből adódóan az inverz monoidok struktúrájában az idempotensek fontos szerepet játszanak, az M inverz monoid idempotenseit $E(M)$ jelöli. Az inverz monoidok fontos tulajdonsága, hogy idempotensei felcserélhetőek, azaz félhálót alkotnak. Minden inverz monoidon adott egy *természetes részbenrendezés*, amely a félháló struktúrából adódó részbenrendezést terjeszti ki. Formálisan $s \leq t$ pontosan akkor, ha létezik olyan e idempotens, melyre $s = te$. Nem nehéz látni, hogy egy inverz monoidot olyan kongurenciával faktorizálva, amely minden idempotenst egybeejt, csoportot kapunk, melynek egységeleme az idempotenseket tartalmazó osztály. Ezen kongruenciák közül σ jelöli a *legkisebb csoportkongurenciát*, és így M/σ az M inverz monoid legnagyobb csoport homomorf képe.

A disszertáció címében is említett, úgynevezett *E-unitér inverz monoidok* definíciója az, hogy az idempotenseket tartalmazó σ-osztály csak az idemptenseket tartalmazza. A McAlister-féle P-tételként ismert híres eredmény szerint minden E-unitér inverz monoid felépíthető egy csoportból, egy félhálóból és egy részbenrendezett halmazból. Emiatt az E-unitér inverz monoidok bizonyos értelemben ismertek. Ez ad különleges jelentőséget a McAlister-féle fedési tételnek, mely azt mondja ki, hogy minden inverz monoidnak van E-unitér fedője, azaz minden inverz monoid homomorf képe valamely E-unitér inverz monoidnak, mégpedig olyan homomorfizmus mellett, mely az idempotenseken injektív (*idempotens-szétválasztó* homomorfizmus).

Szintén ismert, hogy minden véges inverz monoidnak van véges E-unitér fedője.

A másik, a disszertációban fontos szerepet játszó félcsoportosztály az *F-inverz monoidok* osztálya. Egy inverz monoidot F-inverznek nevezünk, ha minden σ-osztálya tartalmaz legnagyobb elemet a természetes részbenrendezésre nézve. Az F-inverz monoidok mindig E-unitérek. Jól ismert eredmény, hogy minden inverz monoidnak van *F-inverz fedője*, azaz minden inverz monoid idempotens-szétválasztó homomorf képe egy F-inverz monoidnak. Azt mondjuk, hogy az F inverz monoid F-inverz fedője M-nek a *G csoport felett*, ha G izomorf M/σ-val. A bizonyítás azonban ez esetben mindig szabad csoport feletti F-inverz fedőt eredményez, és ez mindig végtelen. A disszertáció fő motivációja a következő probléma:

Nyitott kérdés. Létezik-e bármely véges inverz monoidnak véges F-inverz fedője?

A kérdést Henckell és Rhodes fogalmaza meg [3]-ban. A kérdésre adott igenlő válasz megoldott volna egy fontos sejtést a véges félcsoportok komplexitás-elméletével kapcsolatban. Ez utóbbi sejtést azóta bizonyították [1], az F-inverz fedési kérdés azonban máig nyitott.

A McAlister-féle fedési tétel alapján elég E-unitér inverz monoidok esetén vizsgálnunk a kérdést, ahogyan a disszertáció során is tesszük. A kutatásunk fő előzménye Auinger és Szendrei [2] cikke erről a kérdéskörről. Ebben még egy lépéssel tovább mennek azt alkalmazva, hogy elegendő speciális E-unitér inverz monoidok, úgynevezett Margolis–Meakin-kiterjesztések esetében megválaszolni a kérdést. Ennek segítségével Auinger és Szendrei gráfok és lokálisan véges csoportvarietások nyelvére fordítják le az F-inverz fedési problémát.

A disszertáció új eredményeit a szerző, illetve a szerző és témavezetője a [9] és [10] cikkekben publikálta. A [2]-ben bevezetett gráftulajdonságot vizsgáljuk [9]-ben, [10]-ben pedig általánosítjuk [2] és [9] eredményeit inverz monoidok egy jóval szélesebb osztályára.

2. Előismeretek

A disszertációban gráfon irányított gráfot értünk. A Δ gráf csúcsainak halmazát V_Δ, az éleinek halmazát E_Δ jelöli. Az e él kezdőpontját ιe, végpontját τe jelöli. *Élcímkézett* (vagy egyszerűen címkézett) gráfon olyan Δ gráfot értünk, melyhez adott egy A halmaz és $E_\Delta \to A$ leképezés, amely az élek címkéit jelöli ki.

A továbbiakban nem szorítkozunk az irányított gráfokon megszokott irányított sétákra, ezért a Γ gráfot kiegészítjük az élek fordítottjaival a következő módon: az e él fordítottját jelölje e', és adott Δ gráf esetén legyen $\overline{\Delta}$ az a gráf, melyre $V_{\overline{\Delta}} = V_\Delta$ és $E_{\overline{\Delta}} = E_\Delta \cup E_{\Delta'}$, ahol $E_{\Delta'} = \{e' : e \in E_\Delta\}$. A sétákkal összhangban a gráfok összefüggőségét is irányítatlan értelemben értjük. Az élek visszafordításáért felelős $'$ operáció természetes módon kiterjeszthető a fordított élekre és a $\overline{\Delta}$-beli sétákra. Egy p séta esetén a *p által feszített $\langle p\rangle$ részgráfon* azon Δ azon élei által feszített részgráfot értjük, amelyen p valamely irányban áthalad.

(Kis) kategóriának nevezünk egy Δ gráfot, ha adott az élein egy asszociatív, parciális szorzás, amely a csatlakozó élpárokon értelmezett, és egy 1_i hurokél minden $i \in V_\Delta$ csúcs körül, amely lokális egységelemként viselkedik. Kategóriák esetén más a szokásos terminológia, mint gráfoknál: „csúcsok” és „élek” helyett rendre az „objektumok” és „morfizmusok” kifejezéseket használjuk, melyeket egy $\mathcal{X}$ kategóriában rendre $\mathrm{Ob}\,\mathcal{X}$ és $\mathrm{Arr}\,\mathcal{X}$ jelöl.

Az $\mathcal{X}$ kategóriát *inverz kategóriának* nevezzük, ha bármely $e \in \mathcal{X}(i,j)$ morfizmus esetén létezik egyetlen olyan $f \in \mathcal{X}(j,i)$ morfizmus, melyre $efe = e$ és $fef = f$ teljesül. Ezt az f-et *e inverzének* nevezzük, és e^{-1}-gyel jelöljük. Az inverz monoidok felfoghatóak olyan inverz kategóriákként, melyeknek egy objektuma van, így minden, inverz kategóriákra megfogalmazott állítás inverz monoidokra is érvényes. Továbbá az inverz monoidokra bevezetett alapvető fogalmaknak, mint például idempotensek és természetes részbenrendezés, megvan az analógiája inverz kategóriákra.

Legyen $\mathbf{U}$ inverz monoidok egy varietása (speciálisan csoportvarietás), legyen Γ gráf, és legyen $[p]_\mathbf{U}$ a p által meghatározott elem az $F_\mathbf{U}(E_\Gamma)$ relatívan szabad csoportban. Jelölje $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)$ a Γ-n értelmezett *szabad $g\mathbf{U}$-kategórát* [11], amelyet a következőképp adunk meg: az objektumok halmaza V_Γ, és bármely két i, j objektum esetén az (i,j)-morfizmusok halmaza

$$F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)(i,j) = \{(i,[p]_{\mathbf{U}},j) : p\ (i,j)\text{-séta } \overline{\Gamma}\text{-n}\},$$

csatlakozó morfizmusok szorzata pedig a következőképp definiált:

$$(i,[p]_{\mathbf{U}},j)(j,[q]_{\mathbf{U}},k) = (i,[pq]_{\mathbf{U}},k).$$

A disszertáció során inverz monoidok számos családját konstruáljuk kategóriák csoporthatásai segítségével. Például legyen G olyan csoport, amely hat az $\mathcal{X}$ kategórián kategória-homomorfizmusokkal. Ez a hatás természetes módon meghatároz egy olyan, $\mathcal{X}/G$-vel jelölt kategóriát, amely objektumai $\mathcal{X}$ objektumainak pályái, i pályáját a szokott módon ${}^G i = \{{}^g i : g \in G\}$ jelöli, és tetszőleges ${}^G i$, ${}^G j$ objektumok esetén a $({}^G i, {}^G j)$-morfizmusok épp az olyan (i', j')-morfizmusok pályái, melyre $i' \in {}^G i$, $j' \in {}^G j$. Vegyük észre, hogy ha G tranzitívan hat $\mathcal{X}$-en, akkor $\mathcal{X}/G$-nek egyetlen objektuma van, azaz monoid. A [6, Propositions 3.11, 3.14] állítások alapján, ha G tranzitívan és fixpontmentesen hat az $\mathcal{X}$ inverz kategórián, akkor $\mathcal{X}/G$ inverz monoid, és izomorf bármely i objektum esetén az $(\mathcal{X}/G)_i$ monoiddal, melynek alaphalmaza $\{(e,g) : g \in G \text{ és } e \in \mathcal{X}(i, {}^g i)\}$, a rajta értelmezett szorzás pedig

$$(e,g)(f,h) = (e \cdot {}^g f, gh).$$

Többek között egy A-generált G csoport $M(G)$ *Margolis–Meakin-kiterjesztése* is megkapható ezen konstrukció segítségével. Jelölje Γ a G csoport Cayley-gráfját, és tekintsük az $F_{g\mathbf{Sl}}(\Gamma)$ kategóriát, ahol **Sl** a félhálók varietását jelöli. A G csoport hat a saját Γ Cayley-gráfján balról szorzással, méghozzá tranzitívan és fixpontmentesen, és ez a hatás természetes módon kiterjeszthető $F_{g\mathbf{Sl}}(\Gamma)$-re. Ekkor $M(G)$ éppen az $F_{g\mathbf{Sl}}(\Gamma)/G$ inverz monoidként kapható meg. Alaphalmaza azon (X, g) párokból áll, melyre $g \in G$ és X olyan véges, összefüggő részgráfja Γ-nak, amely tartalmazza az 1 és g csúcsokat. A szorzás természetesen a következőképp adható meg:

$$(\mathrm{X},g)(\mathrm{Y},h) = (\mathrm{X} \cup {}^g\mathrm{Y}, gh).$$

Ha $\mathbf{U}$ csoportvarietás, akkor $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)/G$ csoport, és $G^{\mathbf{U}}$ a jele. Ez a „legáltalánosabb” olyan A-generált csoport, amely egy $\mathbf{U}$-beli csoport G-vel vett bővítése.

3. Margolis–Meakin-kiterjesztések F-inverz fedői

Auinger és Szendrei [2]-ben átfogalmazzák az F-inverz fedési problémát gráfok és csoportvarietások segítségével. Észreveszik, hogy elengendő a fent említett Margolis–Meakin-kiterjesztésekre megválaszolni a problémát, ezek F-inverz fedőit duális premorfizmusok segítségével vizsgálják.

Egy $\psi\colon M \to N$ inverz monoidok közti leképezést duális premorfizmusnak nevezünk, ha $(m\psi)^{-1} = m^{-1}\psi$ és $(mn)\psi \geq m\psi \cdot n\psi$ teljesül bármely $m, n \in M$ esetén (az ilyen leképezések neve [4]-ben duális prehomomorfizmus, [7]-ben prehomomorfizmus). A csoportból inverz monoidba képező duális premorfizmusok egy fontos osztálya szorosan kapcsolódik az F-inverz fedőkhöz, ahogy a következő tételben olvasható ([7, VII.6.11. Tétel]):

3.1. Tétel. *Legyen H csoport és M inverz monoid. Ha a $\psi\colon H \to M$ duális premorfizmusra teljesül, hogy*

$$\text{bármely } m \in M, \text{ esetén létezik olyan } h \in H, \text{ melyre } m \leq h\psi, \tag{3.1}$$

akkor

$$F = \{(m, h) \in M \times H : m \leq h\psi\}$$

az $M \times H$ direkt szorzat inverz részmonoidja, és F-inverz fedője M-nek H felett. Fordítva, izomorfiától eltekintve M bármely H feletti F-inverz fedője ilyen módon konstruálható.

Az ilyen, $M(G)$-be képező duális premorfizmusok olyan $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)/G \to F_{g\mathbf{Sl}}(\Gamma)$ duális premorfizmusok által vizsgálhatók, melyekre Γ a G csoport Cayley-gráfja, és $\psi|\Gamma = \mathrm{id}_\Gamma$.

Legyen Γ irányított gráf, $\mathbf{U}$ pedig csoportvarietás. Az $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)$ kategória minden x morfizmusához hozzárendeljük Γ részgráfjainak a következő két sorozatát: legyen

$$C_0(x) = \bigcap\{\langle p\rangle : (\iota p, [p]_{\mathbf{U}}, \tau p) = x\}, \tag{3.2}$$

és legyen $P_0(x)$ a $C_0(x)$ gráf ιx-et tartalmazó összefüggő komponense. Ha $C_n(x), P_n(x)$ minden x esetén definiált, akkor legyen

$$C_{n+1}(x) = \bigcap\{P_n(x_1) \cup \cdots \cup P_n(x_k) : k \in \mathbb{N}, x_1 \cdots x_k = x\},$$

és legyen $P_{n+1}(x)$ ismét $C_{n+1}(x)$-nek a ιx-et tartalmazó összefüggő komponense.

A [2, Lemma 3.1] lemma alapján pontosan akkor létezik olyan $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)/G \to F_{g\mathbf{Sl}}(\Gamma)$ duális premorfizmus, melyre $\psi|\Gamma = \mathrm{id}_\Gamma$, ha $\tau x \in P_n(x)$ teljesül bármely x és n esetén. Ha $\tau x \notin P_n(x)$ valamely $x = (\iota p, [p]_\mathbf{U}, \tau p)$ morfizmusra és $n \in \mathbb{N}_0$-ra, akkor p-t *szakadó sétának* nevezzük $\mathbf{U}$ felett.

Azt mondjuk, hogy a Γ gráf rendelkezik az $\mathbf{U}$ tulajdonsággal, ha nincsen Γ-ban szakadó séta $\mathbf{U}$ felett. A G csoport Cayley-gráfja pontosan akkor rendelkezik az $(S_\mathbf{U})$ tulajdonsággal, ha az $M(G)$ Margolis–Meakin-kiterjesztésnek van F-inverz fedője olyan csoport felett, mely valamely $\mathbf{U}$-beli csoport G-vel vett bővítése — röviden $\mathbf{U}$-n *keresztüli* F-inverz fedője. Ennek következménye [2] egyik fő tétele.

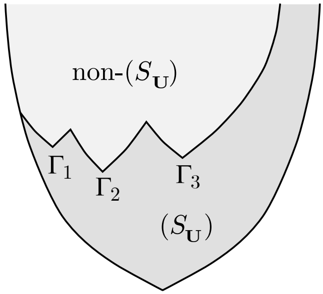
3.2. Tétel. *Pontosan akkor van minden véges inverz monoidnak véges F-inverz fedője, ha minden véges, összefüggő gráf rendelkezik $(S_\mathbf{U})$-val valamely lokálisan véges $\mathbf{U}$ varietás esetén.*

A disszertáció 3. fejezetében és [9]-ben az $(S_\mathbf{U})$ tulajdonságot vizsgáljuk. Bebizonyítjuk, hogy adott $\mathbf{U}$ csoportvarietás esetén az $(S_\mathbf{U})$ tulajdonságot teljesítő gráfok leírhatóak úgynevezett *kizárt minorokkal.* Legyen Γ gráf, és e egy (u, v)-éle, melyre $u \neq v$. Azt az operációt, mely az e él elhagyásából és az u, v csúcsok ezzel egyidejű azonosításából áll, *élösszehúzásnak* nevezzük. A Δ gráf *minorja* Γ-nak, ha megkapható belőle csúcsok és élek elhagyásával, élek átirányításával, és élösszehúzással.

A következő lemma kulcsfontosságú:

3.3. Állítás. *Legyen Γ gráf és Δ egy minorja. Ekkor, ha Δ nem rendelkezik $(S_\mathbf{U})$-val, akkor Γ sem.*

Az állítás alapján a nem-$(S_\mathbf{U})$ gráfok felfelé zártak a természetes részbenrendezésben, így leírhatók a minimális elemeikkel, ahogy az a 3.1 ábrán látható. Robertson és Seymour [8] mély gráfelméleti tételének következménye, hogy mindig véges sok minimális elem van.



3.1. ábra. A gráfok részbenrenezett halmaza, és a kizárt minorok

3.4. Tétel. *Bármely* $\mathbf{U}$ *csoportvarietás esetén létezik véges sok olyan kétszeresen élösszefüggő* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *gráf, hogy az* $\mathbf{U}$ *felett szakadó sétát tartalmazó gráfok éppen azok, melyeknek minorja a* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ *gráfok valamelyike.*

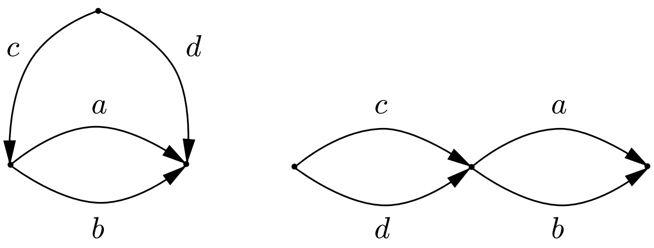
A következő tétel a fejezet fő eredménye, és az Abel-féle varietásokhoz tartozó kizárt minorokat írja le.

3.5. Tétel ([9])**.** *Egy gráf pontosan akkor tartalmaz szakadó sétát nemtriviális Abel-féle csoportvarietás felett, ha minorként tartalmazza a 3.2 ábrán látható gráfok valamelyikét.*

Ebből a gráftulajdonság és az F-inverz probléma kapcsolatának visszafejtésével következik:

3.6. Tétel. *Egy* G *csoport* $M(G)$ *Margolis–Meakin-kiterjesztésének pontosan akkor van* F*-inverz fedője Abel-csoporton keresztül, ha* G *szabad vagy ciklikus.*

Az előző tétel leírja, hogy mely Margolis–Meakin-kiterjesztéseknek van F-inverz fedője Abel-csoportokon keresztül. Feltehetjük ugyanezt a kérdést általános inverz monoidok esetén is. A disszertáció 4. fejezetében és [10]-ben bemutatunk egy, a



3.2. ábra. A kizárt minorok **Ab** esetén

[2]-belihez hasonló elméletet, mely segítségével a kérdést E-unitér inverz monoidok egy széles osztályára vizsgáljuk.

4. Felfele véges monoidok F-inverz fedői

A következőkben [2] Margolis–Meakin-kiterjesztésekre vonatkozó eredményeit általánosítjuk úgynevezett felfele véges E-unitér inverz monoidokra. Egy inverz monoidot felfele végesnek nevezünk, ha az $m^\omega = \{n \in M : n \geq m\}$ halmaz bármely $m \in M$ esetén véges. Többek között a véges inverz monoidok és a csoportok Margolis–Meakin-kiterjesztései felfele végesek.

Legyen $\mathcal{X}$ inverz kategória, Δ pedig tetszőleges gráf. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{X}$ *kvázi-*Δ*-generált*, ha adott egy $\epsilon_\mathcal{X} \colon \Delta \to \mathcal{X}$ gráfmorfizmus, amelyre a $\Delta\epsilon_\mathcal{X} \cup \mathrm{E}(\mathcal{X})$ részgráf generálja $\mathcal{X}$-et, ahol $\mathrm{E}(\mathcal{X})$ jelöli $\mathcal{X}$ idempotenseinek részgráfját.

4.1. Lemma. *Minden felfele véges inverz monoid kvázi-*A*-generált valamely* $A \subseteq \max M^-$ *halmazra.*

Egy $\psi \colon \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, kvázi-$\Delta$-generált kategóriák közötti duális premorfizmust *kanonikusnak* nevezünk, ha $\epsilon_\mathcal{Y}\psi = \epsilon_\mathcal{X}$. A Margolis–Meakin-kiterjesztések F-inverz fedőiről szóló, [2]-ben található okfejtéshez hasonló módon kapjuk a következőt:

4.2. Állítás. *Legyen* M *kvázi-*A*-generált inverz monoid, ahol* $A \subseteq \max M^-$*, jelölje* G *az* M/σ *csoportot, és legyen* $\mathbf{U}$ *csoportvarietás. Ekkor* $G^\mathbf{U}$ A*-generált csoport,* *és M-nek pontosan akkor van F-inverz fedője $\mathbf{U}$-n keresztül, ha létezik $G^{\mathbf{U}} \to M$ kanonikus duális premorfizmus.*

A $G^{\mathbf{U}}$ kanonikus duális premorfizmusok tanulmányozásához az első lépés egy Margolis–Meakin-kiterjesztéshez hasonló struktúra bevezetése M-re. Legyen M tetszőleges E-unitér inverz monoid, jelölje az M/σ csoportot G. A konstrukciónkban kulcsszerepet játszik a következőképp definiált $\mathcal{I}_M$ kategória: az objektumok halmaza G, az (i,j)-morfizmusok halmaza

$$\mathcal{I}_M(i,j) = \{(i,m,j) \in G \times M \times G : i \cdot m\sigma = j\} \ (i,j \in G),$$

két csatlakozó morfizmus, $(i,m,j) \in \mathcal{I}_M(i,j)$ és $(j,n,k) \in \mathcal{I}_M(j,k)$ szorzata pedig

$$(i,m,j)(j,n,k) = (i,mn,k).$$

Legyen $p = e_1 e_2 \cdots e_n$ séta $\overline{\mathcal{I}_M}$-on, ahol $e_j = (\iota e_j, m_j, \tau e_j)$ és $m_j \in \overline{M}$ minden j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ esetén, és tekintsük a $w = m_1 m_2 \cdots m_n \in \overline{M}^*$ szót. A p sétához hozzárendeljük M-nek a $\lambda(p) = [w]_M$ elemét. Tetszőleges X véges, összefüggő, $\mathcal{I}_M$-beli részgráf és $i,j \in V_{\mathrm{X}}$ esetén legyen $\lambda_{(i,j)}(\mathrm{X}) = \lambda(p)$, ahol p egy X-et feszítő (i,j)-séta. Belátható, hogy ez jóldefiniált.

Legyen M kvázi-A-generált E-unitér inverz monoid, melyre $A \subseteq \max M^-$. Megadjuk $\mathcal{I}_M$ egy kvázi-Γ-generált modelljét, ahol Γ a G csoport Cayley-gráfja. Rögzítsük $E(M)$-nek egy olyan I részhalmazát, melyre $A \cup I$ generálja M-et. Jelölje Γ^I az $\mathcal{I}_M$ gráf azon élei által feszített részgráfját, melyek középső komponense $A \cup I$-ből való. Bevezetünk egy lezárási operátort Γ^I összes részgráfjának $\mathrm{Sub}(\Gamma^I)$ részbenrendezett halmazán.

Tekintsük Γ^I egy X részgráfját, melyre $i,j \in V_{\mathrm{X}}$, és legyen

$$\mathrm{X}^{\mathrm{cl}} = \bigcup \{\mathrm{Y} \in \mathrm{Sub}(\Gamma^I) : \mathrm{Y} \text{ véges, összefüggő, } i,j \in V_{\mathrm{Y}}, \\ \text{és } \lambda_{(i,j)}(\mathrm{Y}) \geq \lambda_{(i,j)}(\mathrm{X})\},$$

amelyről ismét belátható, hogy jóldefiniált. Általánosabban, tetszőleges $\mathrm{X} \in \mathrm{Sub}(\Gamma^I)$ részgráf esetén a következőképp definiáljuk az X^{cl} gráfot:

$$\mathrm{X}^{\mathrm{cl}} = \bigcup \{\mathrm{Y}^{\mathrm{cl}} : \mathrm{Y} \text{ véges összefüggő részgráfja X-nek}\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $\mathrm{X} \to \mathrm{X}^{\mathrm{cl}}$ lezárási operátor $\mathrm{Sub}(\Gamma^I)$-n, és a szokott módon az X részgráfot *zártnak* nevezzük, ha $\mathrm{X} = \mathrm{X}^{\mathrm{cl}}$. Megjegyezzük, hogy véges részgráfok lezártja általában nem véges. A Γ^I gráf zárt részgráfjainak halmazát $\mathrm{ClSub}(\Gamma^I)$-vel jelöljük, a véges részgráfok lezártját pedig $\mathrm{ClSub}_{\mathrm{fc}}(\Gamma^I)$-vel. Részgráfok bármely X_j $(j \in J)$ halmaza esetén legyen $\bigvee_{j\in J} \mathrm{X}_j = \left(\bigcup_{j\in J} \mathrm{X}_j\right)^{\mathrm{cl}}$. A $(\mathrm{ClSub}(\Gamma^I); \subseteq)$ részbenrendezett halmaz teljes hálót alkot a megszokott metszetre és a fent definiált $\bigvee$ egyesítésre.

Definiáljuk az $\mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)$ inverz kategóriát a következőképp: az objektumainak halmaza legyen G, az (i,j)-morfizmusoké $(i,j \in G)$ pedig

$$\mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)(i,j) = \{(i,\mathrm{X},j) : \mathrm{X} \in \mathrm{ClSub}_{\mathrm{fc}}(\Gamma) \text{ és } i,j \in V_{\mathrm{X}}\},$$

két csatlakozó morfizmus szorzata legyen

$$(i,\mathrm{X},j)(j,\mathrm{Y},k) = (i,\mathrm{X} \vee \mathrm{Y},k).$$

Könnyen látható (lásd még [5]), hogy $\mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I) \to \mathcal{I}_M,\ (i,\mathrm{X},j) \mapsto (i,\lambda_{(i,j)}(\mathrm{X}),j)$ kategória-izomorfizmus, így $\mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)/G$ kanonikusan izomorf M-mel, mégpedig az $(X,g) \mapsto \lambda_{(1,g)}(\mathrm{X})$ izomorfizmus mellett. Ez az M E-unitér inverz monoid P-reprezentációját adja.

A fejezet célja, hogy ekvivalens feltételeket adjunk meg a $G^{\mathbf{U}} \to M$ kanonikus duális premorfizmus létezésével. Mivel $G^{\mathbf{U}} = F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)/G$ és $M \cong \mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)/G$, ez természetes módon megfelel az $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma) \to \mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)$ kanonikus duális premorfizmusoknak.

Hasonlóan ahhoz, ahogyan [2]-ben láthattuk, az $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)$ kategória minden x morfizmusához hozzárendeljük Γ^I részgráfjainak két sorozatát. Legyen

$$C_0^{\mathrm{cl}}(x) = \bigcap\{\langle p\rangle^{\mathrm{cl}} : p\ (\iota x,\tau x)\text{-séta } \overline{\Gamma}\text{-ban, melyre } x = (\iota x,[p]_{\mathbf{U}},\tau x)\},$$

és legyen $P_0^{\mathrm{cl}}(x)$ a $C_0^{\mathrm{cl}}(x)$ gráf ιx-et tartalmazó összefüggő komponense. Ha $C_n^{\mathrm{cl}}(x), P_n^{\mathrm{cl}}(x)$ minden x esetén definiált, legyen

$$C_{n+1}^{\mathrm{cl}}(x) = \bigcap\{P_n^{\mathrm{cl}}(x_1) \vee \cdots \vee P_n^{\mathrm{cl}}(x_k) : k \in \mathbb{N}_0,\ x_1,\ldots,x_k \in F_{g\mathbf{U}}(\Gamma) \text{ csatlakozó morfizmusok, és } x = x_1\cdots x_k\},$$

és legyen $P_{n+1}^{\mathrm{cl}}(x)$ ismét $C_{n+1}^{\mathrm{cl}}(x)$-nek a ιx-et tartalmazó összefüggő komponense.

Bármely x morfizmus és n index esetén $C_n^{\mathrm{cl}}(x)$ és $P_n^{\mathrm{cl}}(x)$ zárt részgráfok, mitöbb, $P_n^{\mathrm{cl}}(x)$ összefüggő és tartalmazza ιx-et. A következő [10] egyik fő tétele:

4.3. Tétel. *Legyen M kvázi-A-generált felfele véges E-unitér inverz monoid, melyre $A \subseteq \max M^-$, legyen $G = M/\sigma$, és $\mathbf{U}$ csoportvarietás. Jelölje G Cayley-gráfját Γ. A következők ekvivalensek:*

(1) M-nek van $\mathbf{U}$-n keresztüli F-inverz fedője.

(2) Létezik $G^{\mathbf{U}} \to M$ kanonikus duális premorfizmus.

(3) Létezik $G^{\mathbf{U}} \to \mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)/G$ kanonikus duális premorfizmus.

(4) Létezik $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma) \to \mathcal{X}_{\mathrm{cl}}(\Gamma^I)$ kanonikus duális premorfizmus.

(5) Az $F_{g\mathbf{U}}(\Gamma)$ kategória bármely x morfizmusa és bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén a $P_n^{\mathrm{cl}}(x)$ gráf tartalmazza τx-et.

Példaképpen megadunk véges E-unitér inverz monoidoknak olyan családját, amelyeknek van véges F-inverz fedője a 4.3 Tétel alapján.

4.4. Példa. Legyen G csoport, amely hat az S egységelem nélküli félhálón, melyre bármely $s \in S$ esetén az s-nél nagyobb elemek halmaza véges. Tekintsük az $S \rtimes G$ szemidirekt szorzatot, és legyen $M = (S \rtimes G)^1$ az az inverz monoid, melyet $S \rtimes G$-ből egy külső egységelem hozzáadásával nyerünk. Ekkor M olyan felfele véges E-unitér inverz monoid, amely nem F-inverz, de bármely nem-triviális csoporton keresztül van F-inverz fedője.

Ez a példa megvilágítja a konstrukciónk általánosságát a [2]-ben találhatóval szemben. A 3.6 Tétel alapján egy csoport Margolis–Meakin-kiterjesztésének pontosan akkor van Abel-csoporton keresztüli fedője, ha a csoport ciklikus vagy szabad. Ezzel szemben az előző példa mutatja, hogy bármely G csoport esetén megadható olyan felfele véges E-unitér inverz monoid, melynek legnagyobb csoport homomorf képe G, nem F-inverz, de van Abel-csoporton keresztüli F-inverz fedője.

A következőkben a célunk a 3.6 Tétel általánosítása felfele véges E-unitér inverz monoidokra. A 4.3 Tétel egy egyszerű következménye a következő:

4.5. Állítás. *Ha M olyan felfele véges E-unitér inverz monoid, melyre $|M/\sigma| \leq 2$, akkor M-nek van F-inverz fedője bármely nemtriviális csoportvarietáson keresztül. Speciálisan, M-nek van F-inverz fedője elemi Abel-féle p-csoport felett bármely p esetén.*

Most tegyük fel, hogy M felfele véges E-unitér inverz monoid, M/σ legalább háromelemű, és létezik olyan σ-osztály, amelyben van legalább két maximális elem. Válasszunk két ilyen $a, b \in M$, $a \sigma b$ elemet, és egy $v \in M/\sigma$ osztályt. Jelölje $\max v$ a v σ-osztály maximális elemeinek halmazát, és tekintsük idempotenseknek a következő halmazát:

$$H(a, b; v) = \{d^{-1}ab^{-1}d : d \in \max v\}.$$

Ennek a halmaznak létezik legkisebb felső korlátja $E(M)$-ben, melyet $h(a, b; v)$ jelöl. A következő tulajdonság fontos szerepet játszik a disszertáció utolsó tételében:

(C) $\quad c \cdot h(a, b; v) \cdot c^{-1}b \not\leq a$ valamely $c \in \max v$ esetén.

A 4.3 Tétel alapján a következő elégséges feltételt kapjuk arra, hogy M-nek ne létezzen Abel-csoporton keresztüli F-inverz fedője:

4.6. Tétel. *Ha M olyan felfele véges E-unitér inverz monoid, melynek léteznek olyan $a, b \in M$, $a\ \sigma\ b$ elemei és olyan v σ-osztálya, amelyekre a (C) feltétel teljesül, akkor M-nek nincs F-inverz fedője Abel-csoporton keresztül.*

Irodalomjegyzék

[1] C. J. Ash. Inevitable graphs: A proof of the Type II conjecture and some related decision procedures. *Internat. J. Algebra Comput.*, 1:127–146, 1991.

[2] K. Auinger and M. B. Szendrei. On F-inverse covers of inverse monoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 204:493–506, 2006.

[3] K. Henckell and J. Rhodes. The theorem of Knast, the $\mathbf{PG} = \mathbf{BG}$ and type II conjectures. In *Monoids and Semigroups with Applications*, pages 453–463, (Berkeley, CA, 1989), 1991. World Scientific, River Edge.

[4] M. V. Lawson. *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries.* World Scientific, Singapore, 1998.

[5] S. W. Margolis and J. C. Meakin. E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group presentation. *J. Pure Appl. Algebra*, 58:45–76, 1989.

[6] S. W. Margolis and J.-E. Pin. Inverse semigroups and varieties of finite semigroups. *J. Algebra*, 110:306–323, 1987.

[7] M. Petrich. *Inverse Semigroups.* Wiley & Sons, New York, 1984.

[8] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. XX. Wagner's conjecture. *J. Combin. Theory Ser. B*, 98:325–357, 2004.

[9] N. Szakács. On the graph condition regarding the F-inverse cover problem. *Semigroup Forum.* DOI: 10.1007/s00233-015-9713-5.

[10] N. Szakács and M. B. Szendrei. On F-inverse covers of finite-above inverse monoids. *J. Algebra*, 452:42–65, 2016.

[11] B. Tilson. Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 48:83–198, 1987.