Kettős trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága, Riemann szummálhatósága és integrálok Lebesgue szummálhatósága

Doktori (PhD) értekezés

Krizsán Lívia

Témavezető:

Dr. Móricz Ferenc
az MTA doktora
professzor emeritus

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2016

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm témavezetőmnek, Dr. Móricz Ferenc Professzor Úrnak, hogy időt és fáradtságot nem sajnálva segítette munkámat, továbbá hogy hasznos tanácsaival, meglátásaival és útmutatásaival nagyban hozzájárult ezen értekezés eredményeinek megszületéséhez.

Végezetül szeretném hálámat kifejezni a Bolyai Intézet minden oktatójának, aki egyetemi és doktori tanulmányaim során hozzájárult szakmai fejlődésemhez.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A trigonometrikus sorok jelentősége a XVIII. században kezdett igazán megmutatkozni, amikor is hosszas vizsgálódások után Daniel Bernoullinak sikerült a két végén rögzített rezgő húr mozgását szinuszsorok segítségével leírnia. A 1800-as évek elején Joseph Fourier szintén szinuszsorokkal modellezte az elszigetelt rúdban zajló hőmérséklet változását, ezáltal még inkább hangsúlyozva a trigonometrikus sorok fontosságát. A későbbiekben számos további alkalmazhatóságra derült fény, többek között az elektrotechnika, rezgésvizsgálat, akusztika, optika, jelfeldolgozás, képfeldolgozás és kvantummechanika területén.

Ezen értekezés első felében olyan egy- és kétváltozós trigonometrikus sorokkal foglalkozunk, amelyek abszolút (és ebből kifolyólag egyenletesen is) konvergensek. Ismert tény, hogy ilyen sorok összegfüggvénye minden pontban létezik és folytonos. Továbbá azt is tudjuk, hogy minden egyenletesen konvergens trigonometrikus sor egyben összegfüggvényének Fourier sora.

Az első fejezetben ismertetjük a $\mathrm{lip}(\alpha)$, $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz és a $\mathrm{zyg}(\alpha)$, $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund osztályokat. Bemutatunk két ismert tételt, amelyek a sor együtthatói bizonyos közepeinek segítségével elegendő feltételeket adnak arra, hogy az összegfüggvény egyenletesen sima legyen, azaz hogy a $\mathrm{Zyg}(1)$ vagy a $\mathrm{zyg}(1)$ osztályba tartozzék. A tételek bizonyítása Zygmund nevéhez fűződik (lásd [21, 1. kötet, 320. oldal]), ezért a későbbiekben Zygmund tételeiként hivatkozunk rájuk. Ezen tételeket általánosítjuk, vagyis elegendő feltételeket adunk arra, hogy a sor összegfüggvénye a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ vagy a $\mathrm{zyg}(\alpha)$ osztályba tartozzék valamely $0 < \alpha \leq 2$ esetén. A könyvben leírtaktól lényegesen más alapötletű bizonyításokat mutatunk be. A bizonyítások egy-egy kulcsfontosságú lemmán alapulnak, ahol a $\{c_n : |n| \leq N\}$ kezdeti együtthatók bizonyos közepeinek viselkedését összekapcsoljuk a sorozat $\{c_n : |n| \geq N\}$ farok elemei közepeinek viselkedésével. Végezetül az összegfüggvénynek a $\mathrm{Lip}(1)$ osztályba való tartozására is elegendő feltételt adunk.

A második fejezetben a már meglevő eredményeinket terjesztjük ki kétváltozós trigonometrikus sorokra. Ismertetjük a kettős sorok tárgyalásához szükséges kétváltozós multiplikatív $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{zyg}(\alpha, \beta)$ és $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ osztályokat (lásd a [2] és [11] cikkekben). Elegendő feltételeket fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy a kettős sor összegfüggvénye valamely $\mathrm{zyg}(\alpha, \beta)$ vagy $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ osztályba tartozzék $(0 < \alpha, \beta \leq 2)$, illetve $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ vagy $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ osztályba tartozzék $(0 < \alpha, \beta \leq 1)$. Az említett feltételeket itt is a sor együtthatói bizonyos α-tól és β-tól függő közepeinek vizsgálatával nyerjük. Hasonló, azonban technikailag jóval bonyolultabb lemmákat fogalmazunk meg, mint az egyváltozós esetben: a kezdeti és a farok együtthatók közepeinek viselkedése között vonunk ismét párhuzamot.

A disszertáció második felében két új összegezhetőségi fogalmat vezetünk be: kettős trigonometrikus sorok Riemann-, és kettős trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatóságát. Az egyváltozós esethez hasonlóan (lásd [21]-ben) egy kettős trigonometrikus sor Riemann összegezhetőségének definiálásakor a sor mindkét változója szerinti kétszeri formális integrálásával kapott függvény szimmetrikus második deriváltjának létezését követeljük meg. Belátjuk, hogy a Riemann szummálhatóság a reguláris konvergencia általánosítása, azaz ha egy kettős trigonometrikus sor regulárisan konvergens, akkor Riemann értelemben is összegezhető, és a két értelemben vett összeg megegyezik. A bizonyításokban kulcsfontosságú szerepet tölt be Robison tétele (lásd [16]-ban), amely a végtelen dimenziójú korlátos-reguláris mátrixok jellemzését adja meg.

Az utolsó fejezetet a Lebesgue szummálhatóság témaköréből már ismert eredmények bemutatásával kezdjük. A trigonometrikus sorok Lebesgue összegezhetőségének fogalmát Zygmund a sor egyszeri formális integrálásával kapott függvény szimmetrikus deriváltjának létezésével definiálta (lásd [21, 1. kötet, 321. old.]). Megjegyezzük, hogy a Lebesgue szummálhatóság kettős sorokra való kiterjesztését Bagota Mónika és Móricz Ferenc közös [1] cikkükben publikálták. A terület legfrissebb eredményeit Móricz [13] cikkében olvashatjuk, amely már trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatóságát tárgyalja. A fejezet csúcspontjaként ezen cikk főbb eredményeit általánosítjuk kettős integrálokra, azaz elegendő feltételeket fogalmazunk meg arra vonatkozóan, hogy egy kettős integrál Lebesgue értelemben vett összege megegyezzen a Pringsheim értelemben vett összegével.

1. fejezet

Egyváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága

1.1. Előzmények: Zygmund tételei egyszeres trigonometrikus sorok összegfüggvényének simaságáról

Ezen fejezetben komplex számok tetszőleges $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ sorozatával képezett

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{1.1}$$

trigonometrikus sorokkal foglalkozunk. Egy ilyen sor szimmetrikus részletösszegein az

$$s_N(x) := \sum_{|n|\le N} c_n e^{inx} \qquad (N = 0,1,2,\ldots)$$

véges összegeket értjük. Az (1.1) sort akkor nevezzük konvergensnek, ha a

$$\lim_{N\to\infty} s_N(x) = s$$

véges határérték létezik. Ekkor a sor összegén az s számot értjük.

Megjegyezzük, hogy a szakirodalomban gyakran a trigonometrikus sorok

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

valós alakjával találkozunk. Ha azonban felírjuk a $\cos nx$ és $\sin nx$ függvények

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) \quad \text{és} \quad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) \qquad (n \ge 1)$$

alakjait, akkor megkapjuk a valós a_n, b_n és a komplex c_n együtthatók közötti összefüggést:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n), & \text{ha} \quad n > 0 \\ \frac{1}{2}a_0, & \text{ha} \quad n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}), & \text{ha} \quad n < 0. \end{cases}$$

Innen már látható, hogy az (1.1) sor szimmetrikus részletösszegei rendre megegyeznek az (1.2) sor részletösszegeivel, azaz

$$\sum_{|n| \le N} c_n e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (N = 0,1,2,\dots).$$

Az értekezésben azonban a tömörebb írásmód miatt a továbbiakban mindig az (1.1) komplex alakot fogjuk használni.

Definíció. Legyen $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ olyan sorozat, amelyre

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n| < \infty$$

teljesül. Ekkor az (1.1) trigonometrikus sor abszolút és egyenletesen konvergens. Jelöljük az összegét $f(x)$-szel:

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{T} := [-\pi, \pi) \,. \tag{1.3}$$

Az egyenletes konvergencia következtében az $f(x)$ függvény folytonos.

A fent definiált $f(x)$ függvény simaságának vizsgálatához bevezetjük a Lipschitz és Zygmund osztályok fogalmát.

Definíció. Tekintsük a periodikus $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ függvényt, ahol $\mathbb{T}$ a $[-\pi, \pi)$ tóruszt jelöli. Azt mondjuk, hogy az f függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha létezik olyan csakis az f függvénytől függő C konstans, melyre

$$|\Delta f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \le C h^{\alpha}$$

teljesül minden $x \in \mathbb{T}$ és $h > 0$ esetén.

Az f függvény a $\mathrm{lip}(\alpha)$ kis Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha a

$$\lim_{h \to 0} h^{-\alpha} |f(x+h) - f(x)| = 0$$

konvergencia egyenletes x-ben.

Az f függvény a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha folytonos és létezik olyan csakis az f függvénytől függő C konstans, amelyre

$$\left|\Delta^2 f(x,h)\right| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \le Ch^{\alpha}$$

fennáll minden $x \in \mathbb{T}$ és $h > 0$ esetén.

Azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{zyg}(\alpha)$ kis Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha > 0$-ra, ha folytonos és

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0$$

egyenletesen teljesül x-ben.

Az f függvényt simának nevezzük egy $x \in \mathbb{T}$ pontban, ha

$$\lim_{h\to 0} h^{-1} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0.$$

Világos, hogy a $\mathrm{zyg}(1)$ osztályt éppen azon folytonos függvények alkotják, amelyek egyenletesen simák.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy minden Lipschitz osztálybeli függvény egyenletesen folytonos. Viszont létezik olyan Lebesgue értelemben nem mérhető f függvény (lásd [21, 1. kötet, 43–44. old.]), amelyre

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = 0 \quad \text{minden} \quad x \quad \text{és} \quad h \quad \text{esetén.}$$

Emiatt követeljük meg a folytonosságot a Zygmund osztályok definíciójában.

A definíciók alapján nyilvánvalóak a következő tartalmazási relációk:

$$\mathrm{lip}(\alpha) \subset \mathrm{Lip}(\alpha) \quad \text{és} \quad \mathrm{zyg}(\alpha) \subset \mathrm{Zyg}(\alpha),$$

továbbá

$$\mathrm{Lip}(\beta) \subseteq \mathrm{Lip}(\alpha) \quad \text{és} \quad \mathrm{Zyg}(\beta) \subseteq \mathrm{Zyg}(\alpha), \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < \beta.$$

Világos, hogy ha $f \in \mathrm{lip}(1)$, illetve $f \in \mathrm{Lip}(\alpha)$ valamely $\alpha > 1$-re, akkor az f függvény konstans. Továbbá, ha $f \in \mathrm{zyg}(2)$, illetve $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$ valamely $\alpha > 2$-re, akkor f lineáris függvény, azaz esetünkben a periodicitás miatt f konstans. Érvényesek az alábbi tartalmazások is:

$$\mathrm{Lip}(\alpha) = \mathrm{Zyg}(\alpha) \quad \text{és} \quad \mathrm{lip}(\alpha) = \mathrm{zyg}(\alpha), \quad \text{ha} \quad 0 < \alpha < 1 \tag{1.4}$$

és

$$\mathrm{Lip}(1) \subset \mathrm{Zyg}(1) \quad \text{és} \quad \mathrm{lip}(1) \subset \mathrm{zyg}(1).$$

Bevezetésképpen ismertetünk két fontos tételt, amelyek megalkotása Zygmund nevéhez fűződik (lásd [21, 1. kötet, 320. oldal]) és amelyek későbbi eredményeinket ihlették.

1.1. Tétel. *Ha a* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *komplex számsorozathoz létezik olyan* K *állandó, amelyre teljesül, hogy*

$$\frac{1}{N}\sum_{|n|\le N} n^2|c_n| \le K \qquad (N = 1{,}2,\dots),$$

akkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty$ *és* $f(x) \in \mathrm{Zyg}(1)$.

1.2. Tétel. *Ha a* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *sorozat kielégíti a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{|n|\le N} n^2\,|c_n| = 0$$

feltételt, akkor $f(x) \in \mathrm{zyg}(1)$.

1.2. Zygmund tételeinek általánosításai egyszeres trigonometrikus sorokra

Az előző alfejezet eredményeinek általánosításaként elegendő feltételeket adunk arra, hogy az (1.3) sor $f(x)$ összegfüggvénye a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$, illetve a $\mathrm{zyg}(\alpha)$ osztályba tartozzék valamely $0 < \alpha \le 2$ esetén.

Új eredményeinket a következő tételekben foglaljuk össze.

1.3. Tétel. *Legyen* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. *Ha valamely* $0 < \alpha \le 2$ *esetén létezik olyan* C_α *konstans, amelyre teljesül, hogy*

$$\frac{1}{N^{2-\alpha}}\sum_{|n|\le N} n^2|c_n| \le C_\alpha \qquad (N = 1{,}2,\dots), \tag{1.5}$$

akkor az (1.3) *sor abszolút és egyenletesen konvergens, és az* $f(x)$ *összegfüggvény a* $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ *osztályhoz tartozik.*

1.4. Tétel. *Legyen* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. *Ha valamely* $0<\alpha<2$ *értékre teljesül, hogy*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^{2-\alpha}}\sum_{|n|\le N} n^2|c_n| = 0, \tag{1.6}$$

akkor $f(x)\in \mathrm{zyg}(\alpha)$.

Láthatjuk, hogy a fenti tételek az $\alpha=1$ speciális választással éppen az 1.1. és az 1.2. Tételeket szolgáltatják.

Továbbá (1.4) alapján az is igaz, hogy ha $0<\alpha<1$, akkor az (1.5) feltétel mellett $f(x)$ a $\mathrm{Lip}(\alpha)$, az (1.6) feltétel mellett pedig a $\mathrm{lip}(\alpha)$ osztályba is beletartozik. Az $\alpha=1$ esetben azonban a $\mathrm{Lip}(1)\subset \mathrm{Zyg}(1)$ szigorú tartalmazási reláció áll fenn. Ezért a következő tételben az $f(x)\in \mathrm{Lip}(1)$ tartalmazásra adunk elegendő feltételt.

1.5. Tétel. *Ha a* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *sorozat kielégíti a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| < \infty \tag{1.7}$$

feltételt, akkor $f(x)\in \mathrm{Lip}(1)$.

Megjegyzés. Világos, hogy $\alpha=1$ esetén (1.7)-ből következik (1.5). A fordított irányú állítás általában nem igaz, ezt mutatja a $c_n := n^{-2}$ sorozat, ami teljesíti (1.5)-öt, de (1.7)-et már nem.

1.3. Segédtételek és bizonyítások

Az 1.1. és az 1.2. Tételek általánosításához látszólag kis mértékben kellett módosítanunk a feltételeken. Az új eredmények bizonyításához azonban más eszközök szükségesek, mint amiket Zygmund [21] könyvében találunk. A könyvben leírtaktól lényegesen más alapötletű bizonyításokat mutatunk be. Olyan segédtételeket fogalmazunk meg, amelyek a $\{c_n : |n|\le N\}$ kezdeti- és a $\{c_n : |n|\ge N\}$ farok együtthatók bizonyos közepei közötti összefüggésekre világítanak rá.

1.6. Lemma. *Legyen* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

(i) *Ha az* (1.5) *feltétel teljesül valamely* $0<\alpha\le 2$ *esetén, akkor létezik olyan* $\tilde{C}_\alpha$ *konstans, amelyre fennáll, hogy*

$$N^\alpha \sum_{|n|\ge N} |c_n| \le \tilde{C}_\alpha \qquad (N=1,2,\dots). \tag{1.8}$$

(ii) *Fordítva, ha* (1.8) *fennáll valamely* $0 \le \alpha < 2$ *esetén, akkor* (1.5) *is teljesül.*

Speciálisan, minden $0 < \alpha < 2$ *értékre az* (1.5) *és az* (1.8) *feltételek ekvivalensek.*

Megjegyzés. A lemmában az α-ra tett feltételek élesek. Például a $c_n := n^{-1}$ sorozat teljesíti az (1.5) feltételt az $\alpha = 0$ esetben, de (1.8)-at már nem; a $c_n := n^{-3}$ sorozat pedig $\alpha = 2$-re kielégíti (1.8)-at, de (1.5)-öt viszont nem.

Bizonyítás. Az (i) állítás bizonyításához tegyük fel, hogy (1.5) fennáll valamely $0 < \alpha \le 2$ számra. A rövidség kedvéért vezessük be a D_p jelölést a p-edik diadikus blokkra:

$$D_p := \left\{2^p, 2^p+1, \dots, 2^{p+1}-1\right\} \qquad (p = 0,1,2,\dots).$$

Ekkor minden nemnegatív p egész számra teljesül, hogy

$$2^{2p} \sum_{|n| \in D_p} |c_n| \le \sum_{|n| \in D_p} n^2 \, |c_n| \le C_\alpha 2^{(p+1)(2-\alpha)},$$

tehát

$$\sum_{|n| \in D_p} |c_n| \le 2^{2-\alpha} C_\alpha 2^{-p\alpha} \qquad (p = 0,1,2,\dots).$$

Legyen $q \ge 0$ tetszőlegesen rögzített egész szám. Mivel $\alpha > 0$, így igaz a következő becslés:

$$\sum_{|n| \ge 2^q} |c_n| = \sum_{p=q}^{\infty} \sum_{|n| \in D_p} |c_n| \le 2^{2-\alpha} C_\alpha \sum_{p=q}^{\infty} 2^{-p\alpha} = 2^{2-\alpha} C_\alpha \frac{2^{-q\alpha}}{1-2^{-\alpha}},$$

ahonnan következik, hogy

$$2^{q\alpha} \sum_{|n| \ge 2^q} |c_n| \le C_\alpha \frac{2^{2-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} \quad \text{minden} \quad q = 0,1,2,\dots \quad \text{esetén.} \tag{1.9}$$

A továbbiakban legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges és q-t válasszuk meg úgy, hogy $2^q \le N < 2^{q+1}$ teljesüljön. Ekkor az alábbi módon vezetjük vissza (1.8) bizonyítását az (1.9) speciális esetre:

$$N^\alpha \sum_{|n| \ge N} |c_n| \le 2^{(q+1)\alpha} \sum_{|n| \ge 2^q} |c_n| \le 2^\alpha C_\alpha \frac{2^{2-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} = C_\alpha \frac{4}{1-2^{-\alpha}} =: \tilde{C}_\alpha.$$

Térjünk rá a (ii) rész igazolására.

A lemma (1.8) feltétele szerint bármely $p > 0$ egész számra

$$\frac{1}{2^{2(p+1)}} \sum_{|n| \in D_p} n^2 |c_n| \leq \sum_{|n| \in D_p} |c_n| \leq \frac{\tilde{C}_\alpha}{2^{p\alpha}},$$

fennáll, ahonnan következik, hogy

$$\sum_{|n| \in D_p} n^2 |c_n| \leq 4\tilde{C}_\alpha 2^{p(2-\alpha)} \qquad (p = 0,1,2,\ldots)\,.$$

Legyen $q \geq 1$ tetszőleges egész szám. Mivel $\alpha < 2$, a következőképpen becsülhetünk:

$$\sum_{|n|<2^q} n^2 |c_n| = \sum_{p=0}^{q-1} \sum_{|n| \in D_p} n^2 |c_n| \leq 4\tilde{C}_\alpha \sum_{p=0}^{q-1} 2^{p(2-\alpha)} = 4\tilde{C}_\alpha \frac{2^{q(2-\alpha)}-1}{2^{2-\alpha}-1},$$

azaz

$$\frac{1}{2^{q(2-\alpha)}-1} \sum_{|n| \leq 2^q-1} n^2 |c_n| \leq \frac{4\tilde{C}_\alpha}{2^{2-\alpha}-1} \qquad (q = 1,2,\ldots). \tag{1.10}$$

Mivel

$$\lim_{q \to \infty} \frac{2^{q(2-\alpha)}-1}{(2^q-1)^{2-\alpha}} = 1 \qquad (0 \leq \alpha < 2),$$

ezért létezik olyan csakis α-tól függő γ_α konstans, amelyre

$$\frac{2^{q(2-\alpha)}-1}{(2^q-1)^{2-\alpha}} \leq \gamma_\alpha \qquad (q = 1,2,\ldots).$$

Így (1.10) helyett írhatjuk, hogy

$$\frac{1}{(2^q-1)^{2-\alpha}} \sum_{|n| \leq 2^q-1} n^2 |c_n| \leq \frac{4\tilde{C}_\alpha \gamma_\alpha}{2^{2-\alpha}-1} \qquad (q = 1,2,\ldots)\,, \tag{1.11}$$

ami bizonyítja (1.5)-öt az $N = 2^q - 1$ speciális esetekben. Az általános eset igazolásához legyen N tetszőleges természetes szám. Tekintsük azon $q \geq 2$ egész számot, amelyre $2^{q-1} - 1 < N \leq 2^q - 1$. Ekkor (1.11)-et felhasználva nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n| \leq N} n^2 |c_n| \quad &\leq \quad \frac{1}{(2^{q-1}-1)^{2-\alpha}} \sum_{|n| \leq 2^q-1} n^2 |c_n| \leq \\
&\leq \quad \left(\frac{2^q-1}{2^{q-1}-1} \right)^{2-\alpha} \cdot \frac{4\tilde{C}_\alpha \gamma_\alpha}{2^{2-\alpha}-1} \leq 3^{2-\alpha} \frac{4\tilde{C}_\alpha \gamma_\alpha}{2^{2-\alpha}-1} =: C_\alpha.
\end{aligned}$$

Ezzel a (ii) állítást is beláttuk. ∎

1.7. Lemma. *Legyen* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

(i) *Ha az* (1.6) *feltétel teljesül valamely* $0<\alpha\le 2$ *esetén, akkor az is fennáll, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} N^\alpha \sum_{|n|\ge N} |c_n| = 0. \tag{1.12}$$

(ii) *Fordítva, ha valamely* $0\le\alpha<2$ *esetén az* (1.12) *feltétel teljesül , akkor* (1.6) *is fennáll.*

Speciálisan, az $0<\alpha<2$ *érték mellett az* (1.6) *és az* (1.12) *feltételek ekvivalensek.*

Bizonyítás. Az 1.6. Lemma bizonyítása alapján nyilvánvaló. ∎

Az 1.3. Tétel bizonyítása. Legyen $x\in\mathbb{T}$ és $0<h<1$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x,2h) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}\left(e^{in2h}-2+e^{-in2h}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} 2\left(\cos 2nh-1\right) = \\ &= -4\sum_{|n|\ge 1} c_n e^{inx}\sin^2 nh.\end{aligned}$$

Ezek után tekintsük a következő felbontást:

$$\frac{|\Delta^2 f(x,2h)|}{(2h)^\alpha} \le \frac{2^{2-\alpha}}{h^\alpha}\sum_{|n|\le N}|c_n|\sin^2 nh + \frac{2^{2-\alpha}}{h^\alpha}\sum_{|n|>N}|c_n|\sin^2 nh =: S_N+T_N, \tag{1.13}$$

ahol N-et az alábbi speciális módon választjuk meg:

$$N := \left[\frac{1}{h}\right] \qquad (0<h<1), \tag{1.14}$$

ahol $[\cdot]$ a szám egész részét jelöli. Ekkor $h\le\frac{1}{N}$, és (1.5)-öt felhasználva kapjuk, hogy

$$S_N \le (2h)^{2-\alpha}\sum_{|n|\le N} n^2|c_n| \le \left(\frac{2}{N}\right)^{2-\alpha}\sum_{|n|\le N} n^2|c_n| \le 2^{2-\alpha}C_\alpha. \tag{1.15}$$

Továbbá $\frac{1}{h}<N+1$ és (1.8) szerint

$$T_N \le \frac{2^{2-\alpha}}{h^\alpha}\sum_{|n|>N}|c_n| \le 2^{2-\alpha}(N+1)^\alpha\sum_{|n|\ge N+1}|c_n| \le 2^{2-\alpha}\tilde{C}_\alpha. \tag{1.16}$$

Az eddigi (1.13), (1.15) és (1.16) eredményeinket összevetve

$$\frac{|\Delta^2 f(x,2h)|}{(2h)^\alpha} \le 2^{2-\alpha}(C_\alpha+\tilde{C}_\alpha)$$

adódik, ahol a jobb oldal független $x \in \mathbb{T}$ és $0 < h < 1$ választásától. Ezzel igazoltuk, hogy $f(x) \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$. ∎

Az 1.4. Tétel bizonyítása. Legyen $x \in \mathbb{T}$ tetszőleges. Az (1.6) és (1.12) feltételek szerint minden rögzített $\varepsilon > 0$ értékhez létezik olyan N_0 küszöbszám, hogy minden $N > N_0$ esetén

$$\frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n| \le N} n^2 |c_n| \le \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^{2-\alpha}} \tag{1.17}$$

és

$$(N+1)^\alpha \sum_{|n| \ge N+1} |c_n| \le \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^{2-\alpha}} \tag{1.18}$$

teljesülnek. Az előző bizonyításhoz hasonlóan vegyük az (1.13) alakú felbontást. Legyen

$$h_0 := \frac{1}{N_0}.$$

Ekkor minden $0 < h < h_0$ esetén

$$N := \left[\frac{1}{h}\right] \ge \left[\frac{1}{h_0}\right] = N_0.$$

Így (1.17) és (1.18) szerint (1.15) és (1.16) mintájára kapjuk, hogy

$$S_N \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad T_N \le \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{is teljesül, ha} \quad 0 < h < h_0,$$

vagyis

$$\frac{|\Delta^2 f(x,2h)|}{(2h)^\alpha} \le \varepsilon \quad \text{minden} \quad x \in \mathbb{T} \quad \text{és} \quad 0 < h < h_0 \quad \text{esetén.}$$

Ezzel beláttuk, hogy $f(x) \in \mathrm{zyg}(\alpha)$. ∎

Az 1.5. Tétel bizonyítása. Legyen $x \in \mathbb{T}$ és $0 < h < 1$ tetszőleges. Könnyen látható, hogy

$$\begin{aligned}\Delta f(x,2h) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \left(e^{in(x+2h)} - e^{inx}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in(x+h)} \left(e^{inh} - e^{-inh}\right) = \\ &= 2i \sum_{|n| \ge 1} c_n e^{in(x+h)} \sin nh.\end{aligned}$$

N-et továbbra is definiáljuk az (1.14) formulával. Ekkor $N \leq \dfrac{1}{h} < N+1$ és (1.7) szerint a következő becslés adható:

$$\begin{aligned}\frac{|\Delta f(x,2h)|}{2h} &\leq \sum_{|n|\leq N} \left| c_n \frac{\sin nh}{h} \right| + \sum_{|n|>N} \left| c_n \frac{\sin nh}{h} \right| \leq \\ &\leq \sum_{|n|\leq N} |nc_n| + (N+1) \sum_{|n|\geq N+1} |c_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| < \infty,\end{aligned}$$

ami bizonyítja, hogy $f(x) \in \mathrm{Lip}(1)$. ∎

2. fejezet

Kétváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága

2.1. Zygmund tételeinek kiterjesztése kettős trigonometrikus sorokra

A kettős sorok tárgyalásához tekintsük $\{c_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ komplex számok olyan kettős sorozatát (jelölésben $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$), amelyre fennáll az

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_{m,n}|<\infty \tag{2.1}$$

összefüggés. Ekkor a

$$f(x,y):=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{m,n}e^{i(mx+ny)},\qquad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{2.2}$$

trigonometrikus sor abszolút és egyenletesen konvergens, következésképpen az $f(x,y)$ összegfüggvény egyenletesen folytonos.

A $\Delta_{x,h}$ és $\Delta_{y,k}$ operátorok

$$\begin{aligned}\Delta_{x,h}f(x,y)&:=f(x+h,y)-f(x,y)\\ \Delta_{y,k}f(x,y)&:=f(x,y+k)-f(x,y)\,,\quad h,k>0\end{aligned}$$

definícióinak bemutatása után bevezetjük ezen operátorok iterált használatára az

$$\begin{aligned}\Delta f(x,y;h,k):=&\Delta_{x,h}(\Delta_{y,k}f(x,y))=\Delta_{y,k}(\Delta_{x,h}f(x,y))=\\ =&f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)\end{aligned} \tag{2.3}$$

jelölést.

A továbbiakban ismertetjük a multiplikatív Lipschitz és Zygmund osztályok fogalmát.

Definíció. Egy folytonos f függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$ Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha, \beta > 0$-ra (lásd [11]-ben), ha létezik olyan kizárólag az f függvénytől, valamint az α és β számoktól függő C konstans, melyre fennáll, hogy

$$|\Delta f(x, y; h, k)| \leq C h^\alpha k^\beta \quad \text{minden} \quad x, y \quad \text{és} \quad h, k > 0 \quad \text{esetén.} \tag{2.4}$$

Amennyiben

$$\lim_{h,k \to 0} h^{-\alpha} k^{-\beta} \Delta f(x, y; h, k) = 0$$

is teljesül, méghozzá x-ben és y-ban egyenletesen, akkor azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{lip}(\alpha, \beta)$ kis Lipschitz osztályhoz tartozik.

A folytonos f függvény a $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha, \beta > 0$-ra (lásd [2]-ben), ha

$$\left|\Delta^2 f(x, y; h, k)\right| \leq C h^\alpha k^\beta \quad \text{minden} \quad x, y \quad \text{és} \quad h, k > 0 \quad \text{esetén,} \tag{2.5}$$

ahol C ismét csak az f függvénytől, α-tól és β-tól függ. Ha ráadásul

$$\lim_{h,k \to 0} h^{-\alpha} k^{-\beta} \Delta^2 f(x, y; h, k) = 0$$

is fennáll x-ben és y-ban egyenletesen, akkor f a $\mathrm{zyg}(\alpha, \beta)$ kis Zygmund osztályhoz tartozik.

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x, y; h, k) =& \Delta(\Delta f(x, y; h, k); h, k) = \\ &= f(x+2h, y+2k) + f(x+2h, y) + f(x, y+2k) + f(x, y) \\ &\quad - 2f(x+2h, y+k) - 2f(x+h, y+2k) - 2f(x+h, y) \\ &\quad - 2f(x, y+k) + 4f(x+h, y+k), \quad h, k > 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

A későbbiekben (2.6) helyett az alábbi szimmetrikus formát fogjuk használni:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 f(x-h, y-k; h, k) = \\ &= f(x+h, y+k) + f(x+h, y-k) + f(x-h, y+k) + f(x-h, y-k) \\ &\quad - 2f(x+h, y) - 2f(x, y+k) - 2f(x, y-k) - 2f(x-h, y) + 4f(x, y). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Vegyük észre, hogy minden $\alpha, \beta > 0$ esetén

$$\mathrm{Lip}(\alpha, \beta) \subseteq \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta) \qquad \text{és} \qquad \mathrm{lip}(\alpha, \beta) \subseteq \mathrm{zyg}(\alpha, \beta).$$

Ez világosan látható abból, hogy (2.3) és (2.6) szerint

$$\begin{aligned}\Delta^2 f\,(x-h, y-k; h, k) =& \Delta f\,(x, y; h, k) - \Delta f\,(x-h, y; h, k)\\ &- \Delta f\,(x, y-k; h, k) + \Delta f\,(x-h, y-k; h, k)\,.\end{aligned}$$

Definíció. Az egyváltozós esethez hasonlóan egy kétváltozós $f(x, y)$ függvényt akkor nevezzünk simának az (x, y) pontban, ha

$$\lim_{h,k\to 0} h^{-1}k^{-1}\Delta^2 f\,(x-h, y-k; h, k) = 0.$$

Láthatjuk, hogy a zyg(1,1) osztályt éppen a egyenletesen sima, folytonos függvények alkotják.

Ezen előzmények után a következő tételekben fogalmazzuk meg a fejezet legfontosabb eredményeit.

2.1. Tétel. *Legyen $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ komplex számok olyan kettős sorozata, amelyre*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_{m,0}| < \infty \quad \textit{és} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{0,n}| < \infty. \tag{2.8}$$

Ha valamely $0 < \alpha, \beta \leq 2$ és $C_{\alpha,\beta}$ konstansokra

$$\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} m^2 n^2 |c_{m,n}| \leq C_{\alpha,\beta} \qquad (M, N = 1,2,\ldots) \tag{2.9}$$

fennáll, akkor (2.1) *teljesül és a* (2.2)*-ben definiált f összegfüggvény a* $\mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$ *osztályhoz tartozik.*

Ha például (2.8) mellett még

$$\sum_{|m|\geq 1} \sum_{|n|\geq 1} m^2 n^2 |c_{m,n}| < \infty$$

is teljesül, akkor $f \in \mathrm{Zyg}(2,2)$, míg ha

$$\frac{1}{MN} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} m^2 n^2 |c_{m,n}| \leq C_{1,1} \qquad (M, N = 1,2,\ldots), \tag{2.10}$$

akkor $f \in \mathrm{Zyg}(1,1)$.

2.2. Tétel. *Ha a $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ sorozat teljesíti a* (2.8) *és a* (2.9) *feltételeket valamely $0 < \alpha, \beta < 2$ esetén, és ráadásul*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}} \sum_{|m|\leq M} \sum_{|n|\leq N} m^2 n^2 |c_{m,n}| = 0 \tag{2.11}$$

is fennáll, akkor a (2.2)*-ben definiált f függvény a* $\mathrm{zyg}(\alpha, \beta)$ *osztályhoz tartozik.*

Ha például (2.8) és (2.10) mellett még az is fennáll, hogy

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{MN} \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} m^2 n^2 \left|c_{m,n}\right| = 0,$$

akkor $f \in \mathrm{zyg}(1,1)$.

Megjegyzés. A 2.2 Tételben a (2.9) feltétel nem hagyható el, ugyanis létezik valós számok olyan kettős sorozata, amelyre (2.11) teljesül, de a (2.9)-ben szereplő részletösszegek nem korlátosak.

Az előző két tétel feltételeinek erősítésével hasonló elegendőségi tételeket mondhatunk ki az f összegfüggvény $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ és $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ osztályokba való tartozására $0 < \alpha, \beta \le 1$ esetén.

2.3. Tétel. *Legyen* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *olyan sorozat, amelyre* (2.8) *teljesül. Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra és* $C^{(3)}_{\alpha,\beta}$ *konstansra fennáll, hogy*

$$\frac{1}{M^{1-\alpha} N^{1-\beta}} \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} \left|mnc_{m,n}\right| \le C^{(3)}_{\alpha,\beta} \qquad (M,N = 1,2,\ldots), \tag{2.12}$$

akkor (2.1) *is teljesül és a* (2.2)*-ben megadott* f *összegfüggvény a* $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

Tehát, ha például a (2.8) feltétel teljesül és

$$\sum_{|m|\ge 1} \sum_{|n|\ge 1} \left|mnc_{m,n}\right| < \infty,$$

akkor $f \in \mathrm{Lip}(1,1)$.

2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra a* (2.8) *és a* (2.12) *feltételek teljesülnek, és ráadásul*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M^{1-\alpha} N^{1-\beta}} \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} \left|mnc_{m,n}\right| = 0 \tag{2.13}$$

is fennáll valamely $0 < \alpha, \beta < 1$ *esetén. Ekkor a* (2.2)*-ben definiált* f *összegfüggvény a* $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

2.2. Segédtételek és bizonyítások

A bizonyítások felépítése sok hasonlóságot mutat az előző fejezet tételeinek bizonyításaival. Hasonló, ám technikailag jóval bonyolultabb lemmmákat kell megfogalmaznunk.

2.5. Lemma. *Minden* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozathoz, amelyre* (2.9) *teljesül valamely* $0 < \alpha, \beta \le 2$ *esetén, található olyan* $C^{(1)}_{\alpha,\beta}$ *konstans, hogy*

$$\frac{M^\alpha}{N^{2-\beta}} \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| \le C^{(1)}_{\alpha,\beta} \qquad (M, N = 1,2,\dots) \tag{2.14}$$

is fennáll.

Bizonyítás. Felhasználva az előző fejezetben a diadikus blokkokra bevezetett D_p jelölést a (2.9) feltétel szerint

$$2^{2p} \sum_{|m|\in D_p} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| \le \sum_{|m|\in D_p} \sum_{|n|\le N} m^2 n^2 |c_{m,n}| \le C_{\alpha,\beta} 2^{(p+1)(2-\alpha)} N^{2-\beta},$$

azaz minden $p = 0,1,2,\dots$ és $N \ge 1$ esetben

$$\sum_{|m|\in D_p} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| \le 2^{2-\alpha} C_{\alpha,\beta} 2^{-p\alpha} N^{2-\beta}.$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy tetszőlegesen választott $r \ge 0$ egész számra

$$\begin{aligned} \sum_{|m|\ge 2^r} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| &= \sum_{p=r}^{\infty} \sum_{|m|\in D_p} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| \le \\ &\le 2^{2-\alpha} C_{\alpha,\beta} N^{2-\beta} \sum_{p=r}^{\infty} 2^{-p\alpha} = \frac{2^{2-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} C_{\alpha,\beta} 2^{-r\alpha} N^{2-\beta} \end{aligned} \tag{2.15}$$

teljesül. Ezzel sikerült (2.14)-et belátnunk abban a speciális esetben, amikor$M = 2^r$ ($r = 0,1,2,\dots$) és $N \in \mathbb{N}$. Az általános eset igazolásához válasszunk egy tetszőleges $M \in \mathbb{N}$ számot és tekintsük azt az r egészet, amelyre $2^r \le M < 2^{r+1}$ teljesül. (2.15) szerint igaz az alábbi becslés:

$$\begin{aligned} \frac{M^\alpha}{N^{2-\beta}} \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| &\le \frac{2^{\alpha(r+1)}}{N^{2-\beta}} \sum_{|m|\ge 2^r} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_{m,n}| \le \\ &\le 2^\alpha \frac{2^{2-\alpha}}{1-2^{-\alpha}} C_{\alpha,\beta} = \frac{4}{1-2^{-\alpha}} C_{\alpha,\beta} =: C^{(1)}_{\alpha,\beta}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ezzel az általános eset is bizonyítást nyert. ∎

2.6. Lemma. *Ha a* $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ *sorozat kielégíti a* (2.11) *feltételt valamely* $0<\alpha,\beta<2$ *értékekre, akkor*

$$\lim_{M,N\to\infty}\frac{M^\alpha}{N^{2-\beta}}\sum_{|m|\ge M}\sum_{|n|\le N}n^2\left|c_{m,n}\right|=0. \tag{2.17}$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon>0$ tetszőlegesen választott szám. A 2.6. Lemma feltételei szerint létezik $n_0\in\mathbb{N}$ úgy, hogy

$$\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}}\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N}m^2n^2\left|c_{m,n}\right|\le\varepsilon,\quad \text{ha}\quad M,N\ge 2^{n_0}.$$

Az előző 2.5. Lemma bizonyítását megismételve úgy, hogy $C_{\alpha,\beta}$ helyébe ε-t írunk, (2.16) a következőt szolgáltatja:

$$\frac{M^\alpha}{N^{2-\beta}}\sum_{|m|\ge M}\sum_{|n|\le N}n^2\left|c_{m,n}\right|\le\frac{4}{1-2^{-\alpha}}\varepsilon,\quad \text{ha}\quad M,N\ge 2^{n_0},$$

ami pontosan a bizonyítandó állítás. ∎

2.7. Lemma. *Ha a* $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ *sorozatra teljesül a* (2.9) *feltétel valamely* $0<\alpha,\beta\le 2$ *értékekre, akkor létezik olyan* $C^{(2)}_{\alpha,\beta}$ *konstans, melyre*

$$M^\alpha N^\beta\sum_{|m|\ge M}\sum_{|n|\ge N}\left|c_{m,n}\right|\le C^{(2)}_{\alpha,\beta}\qquad (M,N=1,2,\ldots). \tag{2.18}$$

Bizonyítás. Az eddigi bizonyítások gondolatmenetét követve figyeljük meg, hogy (2.9) teljesülése esetén

$$\begin{aligned}2^{2(p+q)}\sum_{|m|\in D_p}\sum_{|n|\in D_p}\left|c_{m,n}\right|&\le\sum_{|m|\in D_p}\sum_{|n|\in D_p}m^2n^2\left|c_{m,n}\right|\le\\&\le C_{\alpha,\beta}2^{(p+1)(2-\alpha)}2^{(q+1)(2-\beta)}\qquad (p,q=0,1,2,\ldots).\end{aligned}$$

Átrendezve a következőt kapjuk:

$$\sum_{|m|\in D_p}\sum_{|n|\in D_p}\left|c_{m,n}\right|\le 2^{4-\alpha-\beta}C_{\alpha,\beta}2^{-(p\alpha+q\beta)}\qquad (p,q=0,1,2,\ldots).$$

A már jól megszokott módszert alkalmazva, bármely $r,s=0,1,2,\ldots$ számokra fennáll, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{|m|\ge 2^r}\sum_{|n|\ge 2^s}\left|c_{m,n}\right|&=\sum_{p=r}^{\infty}\sum_{q=s}^{\infty}\sum_{|m|\in D_p}\sum_{|n|\in D_q}\left|c_{m,n}\right|\\&\le 2^{4-\alpha-\beta}C_{\alpha,\beta}\sum_{p=r}^{\infty}\sum_{q=s}^{\infty}2^{-(p\alpha+q\beta)}=\frac{2^{4-\alpha-\beta}}{\left(1-2^{-\alpha}\right)\left(1-2^{-\beta}\right)}C_{\alpha,\beta}2^{-(r\alpha+s\beta)}.\end{aligned}$$

Ez bizonyítja (2.18)-at, ha $M = 2^r$ és $N = 2^s$ alakúak ($r, s = 0,1,2,\dots$). Bármilyen más módon választott M és N értékekhez keressünk olyan r és s egész számokat, amelyekre $2^r \le M < 2^{r+1}$ és $2^s \le N < 2^{s+1}$. Az előbbi speciális esetre vezetjük vissza a feladatunkat:

$$M^\alpha N^\beta \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\ge N} |c_{m,n}| \le 2^{\alpha(r+1)} N^{\beta(s+1)} \sum_{|m|\ge 2^r} \sum_{|n|\ge 2^s} |c_{m,n}| \le$$
$$\le 2^\alpha 2^\beta \frac{2^{4-\alpha-\beta}}{(1-2^{-\alpha})(1-2^{-\beta})} C_{\alpha,\beta} = \frac{16}{(1-2^{-\alpha})(1-2^{-\beta})} C_{\alpha,\beta} =: C^{(2)}_{\alpha,\beta}.$$

Ezzel kész is a bizonyítás. ■

2.8. Lemma. *Ha valamely $0 < \alpha, \beta < 2$ értékekre a $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ sorozat teljesíti a* (2.11) *feltételt , akkor*

$$\lim_{M,N\to\infty} M^\alpha N^\beta \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\ge N} |c_{m,n}| = 0 \tag{2.19}$$

is fennáll.

Bizonyítás. A 2.6. Lemma bizonyításában látottakhoz hasonlóan módosítva a 2.7. Lemma bizonyítását kapjuk az állítást. ■

Megjegyezzük, hogy az $0 \le \alpha, \beta < 2$ esetben a 2.5. és 2.7. Lemmákban szereplő (2.14)⇒(2.9) és (2.18)⇒(2.9) implikációk megfordításai is érvényesek. Speciálisan, a (2.9), (2.14) és (2.18) feltételek ekvivalensek, ha $0 < \alpha, \beta < 2$. Analóg módon a (2.11), (2.17) és (2.19) feltételek is ekvivalensek, ha $0 < \alpha, \beta < 2$.

A fenti ismeretek birtokában hozzáfoghatunk a fejezet fő tételeinek igazolásához.

A 2.1. Tétel bizonyítása. A (2.9) feltevés alapján alkalmazhatjuk a 2.7. Lemmát az $M, N = 1$ esetben:

$$\sum_{|m|\ge 1} \sum_{|n|\ge 1} |c_{m,n}| \le C^{(2)}_{\alpha,\beta}.$$

Ezt összevetve (2.8)-cal kapjuk, hogy (2.1) valóban fennáll. Ennek következtében a (2.2)-ben definiált f függvény folytonos.

Térjünk rá a (2.4) egyenlőtlenség igazolására. Használjuk a (2.7)-ben megadott szimmetrikus alakot. A későbbiekben megjelenő formulák egyszerűbb felírása céljából helyettesítsük a h és k értékeket a kétszeresükkel. Elemi átalakításokkal nyerjük az alábbi reprezentációt:

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2 f\left(x-2h, y-2k; 2h,2k\right)= \\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}\big(e^{i(m(x+2h)+n(y+2k))}+e^{i(m(x+2h)+n(y-2k))} \\
&\qquad +e^{i(m(x-2h)+n(y+2k))}+e^{i(m(x-2h)+n(y-2k))} \\
&\qquad -2e^{i(m(x+2h)+ny)}-2e^{i(mx+n(y+2k))} \\
&\qquad -2e^{i(m(x-2h)+ny)}-e^{i(mx+n(y-2k))}+4e^{i(mx+ny)}\big)= \\
&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}e^{i(mx+ny)}\left(e^{im2h}+e^{-im2h}-2\right)\left(e^{in2k}+e^{-in2k}-2\right)= \\
&=16\sum_{|m|\geq 1}\sum_{|n|\geq 1} c_{m,n}e^{i(mx+ny)}\sin^2 mh\sin^2 nk.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $0<h,k\leq 1$. Legyen

$$
M:=\left[\frac{1}{h}\right] \quad \text{és} \quad N:=\left[\frac{1}{k}\right],
$$

ahol $[\cdot]$ akárcsak az előző fejezetben a szám egész részét jelöli. Világos, hogy $M,N\geq 1$. A (2.20)-ben nyert felírást használva a következőképpen becsülhetünk:

$$
\begin{aligned}
&Q_2\left(f;h,k\right):=\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\frac{\left|\Delta^2 f\left(x-2h,y-2k;2h,2k\right)\right|}{(2h)^{\alpha}(2k)^{\beta}}\leq \\
&\leq 2^{4-\alpha-\beta}\Big(\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|\leq N} m^2n^2\left|c_{m,n}\right|h^{2-\alpha}k^{2-\beta}+\sum_{|m|>M}\sum_{|n|\leq N} n^2\left|c_{m,n}\right|h^{-\alpha}k^{2-\beta} \\
&\qquad +\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|>N} m^2\left|c_{m,n}\right|h^{2-\alpha}k^{-\beta}+\sum_{|m|>M}\sum_{|n|>N}\left|c_{m,n}\right|h^{-\alpha}k^{-\beta}\Big) \\
&=: 2^{4-\alpha-\beta}\left(S_1+S_2+S_3+S_4\right).
\end{aligned}
$$

Mivel (2.9) teljesül, ezért

$$
S_1\leq\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}}\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|\leq N} m^2n^2\left|c_{m,n}\right|\leq C_{\alpha,\beta},
$$

míg a 2.5. Lemma szerint

$$
S_2\leq\frac{(2M)^{\alpha}}{N^{2-\beta}}\sum_{|m|>M}\sum_{|n|\leq N} n^2\left|c_{m,n}\right|\leq 2^{\alpha}C^{(1)}_{\alpha,\beta}.
$$

A 2.5. Lemmában M és N szerepét felcserélve jutunk a

$$
S_3\leq\frac{(2N)^{\beta}}{M^{2-\alpha}}\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|>N} m^2\left|c_{m,n}\right|\leq 2^{\beta}C^{(1)}_{\alpha,\beta}
$$

becsléshez. A hiányzó

$$S_4 \le (2M)^{\alpha}(2N)^{\beta} \sum_{|m|>M} \sum_{|n|>N} |c_{m,n}| \le 2^{\alpha+\beta} C^{(2)}_{\alpha,\beta}$$

egyenlőtlenséget pedig a 2.7. Lemma állítása szolgáltalja. Az imént nyert négy becslés eredményeképpen kapjuk a keresett

$$Q_2(f;h,k) \le 16 \left(2^{-\alpha-\beta} C_{\alpha,\beta} + 2^{-\beta} C^{(1)}_{\alpha,\beta} + 2^{-\alpha} C^{(1)}_{\alpha,\beta} + C^{(2)}_{\alpha,\beta}\right)$$

összefüggést. Vagyis $f \in \mathrm{Zyg}(\alpha, \beta)$, ami éppen a bizonyítandó állítás. ∎

A 2.2. Tétel bizonyítása. Az előző bizonyításhoz hasonlóan történik, azzal a módosítással, hogy a (2.9) feltétel helyett (2.11)-et, valamint a 2.5. és a 2.7. Lemmák helyett a 2.6. és a 2.8. Lemmákat használjuk. ∎

A 2.5.–2.8. Lemmák bizonyításával analóg módon történik a következő segédtételek bizonyítása is, ezért ezeket a továbbiakban nem részletezzük.

2.9. Lemma. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat teljesíti a* (2.12) *feltételt valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra. Ekkor létezik olyan* $C^{(4)}_{\alpha,\beta}$ *konstans, amelyre*

$$\frac{M^{\alpha}}{N^{1-\beta}} \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\le N} |n c_{m,n}| \le C^{(4)}_{\alpha,\beta} \qquad (M, N = 1,2,\ldots).$$

2.10. Lemma. *Ha valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *értékekre a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat teljesíti a* (2.13) *feltételt, akkor*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{M^{\alpha}}{N^{1-\beta}} \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\le N} |n c_{m,n}| = 0.$$

2.11. Lemma. *Ha a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra teljesül a* (2.12) *feltétel valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *esetén, akkor létezik olyan* $C^{(5)}_{\alpha,\beta}$ *konstans, amelyre*

$$M^{\alpha} N^{\beta} \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\ge N} |c_{m,n}| \le C^{(5)}_{\alpha,\beta} \qquad (M, N = 1,2,\ldots).$$

2.12. Lemma. *Ha a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra* (2.13) *teljesül valamely* $0 < \alpha, \beta < 1$ *értékekre, akkor*

$$\lim_{M,N\to\infty} M^{\alpha} N^{\beta} \sum_{|m|\ge M} \sum_{|n|\ge N} |c_{m,n}| = 0.$$

A 2.3. Tétel bizonyítása. Alkalmazzuk a 2.11. Lemmát az $M, N = 1$ értékek mellett:

$$\sum_{|m|\geq 1}\sum_{|n|\geq 1}|c_{m,n}| < C^{(5)}_{\alpha,\beta}.$$

Figyelembe véve (2.8)-at is, együttesen adják (2.1)-et. Így a (2.2)-ben megadott f függvény folytonos.

A Lipschitz osztályba tartozáshoz ellenőriznünk kell még (2.3) teljesülését. Tekintsük a (2.3) bal oldalán szereplő kifejezés (2.3) alakját. Azért, hogy későbbiekben egyszerűbb formulákkal dolgozhassunk, h és k helyett vegyük a kétszeresüket. Elemi átalakításokkal nyerjük, hogy

$$\begin{aligned}\Delta f\,(x,y;2h,2k) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}\left(e^{i(m(x+2h)+n(y+2k))}\right.\\ &\qquad\left.-e^{i(m(x+2h)+ny)}-e^{i(mx+n(y+2k))}+e^{i(mx+ny)}\right)=\\ &=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}e^{i(mx+ny)}\left(e^{im2h}-1\right)\left(e^{in2k}-1\right)=\\ &=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}e^{i(m(x+h)+n(y+k))}\left(e^{imh}-e^{-imh}\right)\left(e^{ink}-e^{-ink}\right)\\ &=-4\sum_{|m|\geq 1}\sum_{|n|\geq 1} c_{m,n}e^{i(m(x+h)+n(y+k))}\sin mh\sin nk.\end{aligned}\tag{2.21}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $0 < h, k \leq 1$. Legyen

$$M := \left[\frac{1}{h}\right] \quad \text{és} \quad N := \left[\frac{1}{k}\right].$$

Az (2.21)-ben levezetett alakot használva a következőképpen becsülhetünk:

$$\begin{aligned}Q_1\,(f;h,k) &:= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}\frac{|\Delta f\,(x,y;2h,2k)|}{(2h)^{\alpha}\,(2k)^{\beta}} \leq\\ &\leq 2^{2-\alpha-\beta}\Bigg(\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|\leq N}|mnc_{m,n}|\,h^{1-\alpha}k^{1-\beta}+\sum_{|m|>M}\sum_{|n|\leq N}|nc_{m,n}|\,h^{-\alpha}k^{1-\beta}+\\ &\qquad+\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|>N}|mc_{m,n}|\,h^{1-\alpha}k^{-\beta}+\sum_{|m|>M}\sum_{|n|>N}|c_{m,n}|\,h^{-\alpha}k^{-\beta}\Bigg)\\ &=: 2^{2-\alpha-\beta}\,(S_5+S_6+S_7+S_8)\,.\end{aligned}$$

Becsüljük S_5-öt (2.12) szerint, S_6-ot és S_7-et a 2.9. Lemma, S_8-at pedig a 2.11. Lemma segítségével. Mindezt összevetve adódik, hogy

$$Q_1(f;h,k) \leq 4\left(2^{-\alpha-\beta}C^{(3)}_{\alpha,\beta}+2^{-\beta}C^{(4)}_{\alpha,\beta}+2^{-\alpha}C^{(4)}_{\alpha,\beta}+C^{(5)}_{\alpha,\beta}\right),$$

ami igazolja (2.3)-et. Tehát $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, \beta)$. ■

A 2.4. Tétel bizonyítása. Az előző bizonyításhoz hasonlóan történik, azzal a módosítással, hogy a (2.12) feltétel helyett (2.13)-at, valamint a 2.9. és a 2.11. Lemmák helyett a 2.10. és a 2.12. Lemmákat használjuk. ■

3. fejezet

Trigonometrikus sorok Riemann szummálhatósága

3.1. Előzmények: Egyszeres trigonometrikus sorok Riemann szummálhatósága

Röviden összefoglaljuk az egyváltozós trigonometrikus sorok Riemann szummálhatóságára vonatkozó ismereteket.

Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ mindkét irányban végtelen komplex számsorozat. Amint azt az 1. Fejezetben is olvashattuk, egy

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{3.1}$$

alakú trigonometrikus sort akkor nevezünk konvergensnek, ha az

$$s_N(x) := \sum_{|n|\le N} c_n e^{inx} \qquad (N = 0,1,2,\ldots)$$

részletösszegek sorozata konvergens. Tekintsük a (3.1) sor kétszeri formális integrálásával kapott

$$R(x) := c_0 \frac{x^2}{2} - \sum_{|n|\ge 1} c_n \frac{e^{inx}}{n^2} \qquad (x \in \mathbb{T}) \tag{3.2}$$

sort. Ha $\{c_n\}$ korlátos sorozat, akkor biztosan állíthatjuk, hogy a (3.2)-ben szereplő sor abszolút és egyenletesen konvergens. Következésképpen az imént definiált $R(x)$ függvény mindenütt értelmezett és folytonos is.

Kisebb általakítások elvégzése után világos, hogy

$$\frac{\Delta^2 R(x;2u)}{4u^2} := \frac{R(x+2u)+R(x-2u)-2R(x)}{4u^2} = \tag{3.3}$$
$$= c_0 + \sum_{|n|\geq 1} c_n e^{inx} \left(\frac{\sin nu}{nu}\right)^2 \qquad (u>0).$$

Definíció. Ha a

$$\lim_{u\to 0} \frac{\Delta^2 R(x;2u)}{4u^2} = s$$

határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) sor az x pontban Riemann módszere szerint összegezhető (röviden: Riemann összegezhető), és Riemann összege s. Figyeljük meg, hogy a fenti határérték nem más, mint az R függvény klasszikus értelemben vett második szimmetrikus differenciálhányadosa az x pontban, amelyet általában $D^2R(x)$-szel jelölnek.

A most bemutatni kívánt tételek Riemann nevéhez fűződnek (lásd Riemann [15] vagy akár Zygmund [21, Vol.I, 319-320 old.] könyvében). Ezért a későbbiekben csak Riemann Első és Második Tételeként hivatkozunk majd rájuk.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra teljesül a*

$$\lim_{|n|\to\infty} c_n = 0 \tag{3.4}$$

feltétel. Ha valamely x *pontban a* (3.2) *sor hagyományos értelemben vett összege* s*, akkor Riemann módszere szerint is összegezhető* s*-hez.*

Láthatjuk, hogy a Riemann szummálhatóság bizonyos értelemben a hagyományos konvergencia általánosítása.

3.2. Tétel. *Ha* (3.4) *fennáll, akkor az is teljesül, hogy*

$$\frac{\Delta^2 R(x;2u)}{4u} = c_0 u + \sum_{|n|\geq 1} c_n e^{inx} \frac{\sin^2 nu}{n^2 u} \to 0 \qquad (u\to 0),$$

méghozzá x*-ben egyenletesen.*

Megemlítjük, hogy Weisz [19] könyvében részletesen olvashatunk a Riemann szummálhatóság és egyéb összegezhetőségi eljárások kapcsolatáról is.

3.2. Kettős trigonometrikus sorok Riemann szummálhatósága

A továbbiakban legyen $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ komplex számok kettős sorozata. Tekintsük az

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{m,n}e^{i(mx+ny)} \tag{3.5}$$

kettős trigonometrikus sort a téglalap alakú

$$s_{M,N}(x,y):=\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N}c_{m,n}e^{i(mx+ny)} \qquad (M,N=0,1,2,\ldots)$$

szimmetrikus részletösszegeivel.

Kétféle kettős sorokra vonatkozó konvergencia fogalmat mutatunk be. Az elsőt Pringsheim vezetett be (lásd Pringsheim [14] cikkében vagy Zygmund [21, Vol. II, 302 old.] könyvében).

Definíció. A (3.5) kettős trigonometrikus sor Pringsheim értelemben konvergál az s értékhez valamely (x,y) pontban, ha bármely $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan n_0 természetes szám, hogy

$$|s_{M,N}(x,y)-S|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad M,N>n_0.$$

A Pringsheim konvergencia jelölésére a megszokott

$$\lim_{M,N\to\infty}s_{M,N}(x,y)=s$$

jelölést fogjuk használni, ahol M és N egymástól függetlenül tart a végtelenbe.

A Pringsheim értelemben vett konvergencia azonban nem garantálja sem a sor tagjainak korlátosságát, sem pedig az ún.

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}e^{imx}\left(c_{m,-n}e^{-iny}+c_{m,n}e^{iny}\right) \qquad (n\in\mathbb{Z}) \tag{3.6}$$

sorösszegek, illetve a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{inx}\left(c_{-m,n}e^{-imx}+c_{m,n}e^{imx}\right) \qquad (m\in\mathbb{Z}). \tag{3.7}$$

oszlopösszegek konvergenciáját. Ezen okok váltották ki egy erősebb konvergencia fogalom bevezetését, amelyet Hardy [4] cikkében ismertetett.

Definíció. A (3.5) kettős trigonometrikus sor regulárisan konvergens, ha Pringsheim értelemben konvergens, továbbá a (3.6)-beli sorösszegek és a (3.7)-beli oszlopösszegek is konvergensek.

Móricz [9] cikkében a (3.5) alakú sorok reguláris konvergenciájára a következő ekvivalens feltételt találta:

$$\left|\sum_{m_0\le|m|\le M}\sum_{n_0\le|n|\le N} c_{m,n}e^{i(mx+ny)}\right| < \varepsilon \quad \text{ha} \quad \max\{m_0,n_0\} > M_1 \tag{3.8}$$
$$\text{és} \quad 0\le m_0\le M,\ 0\le n_0\le N.$$

A fenti konvergencia típusok ismeretében rátérhetünk a Riemann szummálhatóság fogalmának kiterjesztésére.

Ha a (3.5) sort formálisan integráljuk mindkét változója szerint kétszer, akkor az

$$\begin{aligned} R(x,y) := c_{0,0}\frac{x^2y^2}{4} - \frac{y^2}{2}\sum_{|m|\ge1} c_{m,0}\frac{e^{imx}}{m^2} - \frac{x^2}{2}\sum_{|n|\ge1} c_{0,n}\frac{e^{inx}}{n^2} + \\ + \sum_{|m|\ge1}\sum_{|n|\ge1} c_{m,n}\frac{e^{i(mx+ny)}}{m^2n^2}, \qquad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

függvényhez jutunk. Ha a $\{c_{m,n}\}$ sorozat korlátos, akkor az imént kapott (3.9)-ben szereplő sorok abszolút és egyenletesen is konvergensek. Tehát az R függvény minden $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ pontban jól definiált, és az egyenletes konvergencia következtében folytonos is.

A kétváltozós eset vizsgálatához vezessük be a következő jelölést:

$$\begin{aligned} \Delta^2 R(x,y;2u,2v) :=& R(x+2u,y+2v) + R(x-2u,y+2v) + R(x+2u,y-2v) + \\ &+ R(x-2u,y-2v) - 2R(x+2u,y) - 2R(x,y+2v) - \\ &- 2R(x-2u,y) - 2R(x,y-2v) + 4R(x,y) \qquad (u,v>0). \end{aligned}$$

(3.3) mintájára írjuk fel az alábbi könnyen ellenőrizhető azonosságot:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 R(x,y;2u,2v)}{16u^2v^2} = c_{0,0} + \sum_{|m|\ge1} c_{m,0}e^{imx}\left(\frac{\sin mu}{mu}\right)^2 + \\ + \sum_{|n|\ge1} c_{0,n}e^{iny}\left(\frac{\sin nv}{nv}\right)^2 + \sum_{|m|\ge1}\sum_{|n|\ge1} c_{m,n}e^{i(mx+ny)}\left(\frac{\sin mu}{mu}\right)^2\left(\frac{\sin nv}{nv}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Definíció. Ha a

$$\lim_{u,v\to 0}\frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u,2v)}{16u^2v^2}=s$$

határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy a (3.5) sor az (x,y) pontban Riemann módszere szerint összegezhető (röviden: Riemann összegezhető), és Riemann összege s. Ismét megemlítjük, hogy a fenti határérték valójában az R függvény második szimmetrikus differenciálhányadosa az (x,y) pontban, amelyet $D^2R\,(x,y)$-nal szokás jelölni.

A fenti ismereteink birtokában már megfogalmazhatjuk Riemann Első és Második Tételének kétváltozós megfelelőit.

A következő tétel szerint a Riemann szummálhatóság a reguláris konvergencia általánosításaként is felfogható.

3.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ *sorozatra*

$$\lim_{|m|+|n|\to\infty} c_{m,n}=0 \tag{3.11}$$

teljesül. Ha valamely (x,y) *pontban a* (3.5) *kettős sor regulárisan konvergens, akkor Riemann módszere szerint is összegezhető, és a két értelemben vett összeg megegyezik.*

3.4. Tétel. *Ha* (3.11) *teljesül, akkor*

$$\frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u,2v)}{16uv}\to 0 \qquad (u,v\to 0)$$

is fennáll, ráadásul (x,y)*-ban egyenletesen.*

3.3. Segédtételek és bizonyítások

Mielőtt hozzákezdenénk az új eredményeink igazolásához, nagy vonalakban tekintsük át Riemann Első és Második Tételének Zygmund [21, 1. kötet, 319-320. old.]-ben olvasható bizonyítását, ami az alábbi két fontos lépésből áll:

1. Rögzítünk egy tetszőleges $u_k\to 0$ sorozatot, majd Abel transzformációt hajtunk végre a (3.3) jobb oldalán megjelent soron:

$$\frac{\Delta^2 R\,(x;2u_k)}{4u_k^2}=\sum_{n=0}^{\infty}s_n\left[\frac{\sin^2 nu_k}{nu_k^2}-\frac{\sin^2(n+1)u_k}{(n+1)u_k^2}\right]$$

2. Belátjuk, hogy az

$$a_{k,n} := \frac{\sin^2 nu_k}{nu_k^2} - \frac{\sin^2 (n+1)u_k}{(n+1)u_k^2}$$

elemekből képezett $\mathcal{A} = (a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ mátrix reguláris, azaz bármely $s_k \to s$ $(k \to \infty)$ konvergens sorozat esetén a $\sigma_k := \sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} s_n$ sorozatnak is létezik határértéke és $\sigma_k \to s\,(k \to \infty)$.

A regularitás ellenőrzése Toeplitz tételének (lásd Toeplitz [18] cikkében vagy Zygmund [21, 1. kötet, 74-75. old.] könyvében) segítségével történik, miszerint egy $\mathcal{A} = (a_{k,n}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ mátrix pontosan akkor reguláris, ha teljesíti a következő három feltételt:

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n} = 0 \quad (n = 0,1,2,\dots)$;

(b) $\sup\limits_{k\geq 0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_{k,n}| < K(<\infty)$;

(c) $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{k,n} = 1$.

Definíció. Kettős sorozatok lineáris transzformációjának reprezentálásához tekintsünk egy

$$\mathcal{A} := \left[a_{m,n}^{j,k} : m, n = 0,1,2,\dots; j, k = 1,2,\dots\right]$$

végtelen valós mátrixot. Adott $\{s_{m,n} : m, n = 0,1,2,\dots\}$ valós vagy komplex számok kettős sorozatához rendelt

$$t_{j,k} := \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}^{j,k} s_{m,n} \tag{3.12}$$

összegeket a sorozat $\mathcal{A}$-közepeinek nevezzük. Ha minden $j, k{=}1,2,\dots$ esetén léteznek a $t_{j,k}$ közepek Pringsheim értelemben, azaz

$$\lim_{M,N\to\infty} \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N} a_{m,n}^{j,k} s_{m,n} = t_{j,k},$$

és létezik a

$$\lim_{j,k\to\infty} t_{j,k} = s$$

véges határérték, akkor azt mondjuk, hogy az $\{s_{m,n}\}$ sorozat $\mathcal{A}$-összegezhető és $\mathcal{A}$-összege s (bővebben olvasd Hamilton [3] cikkében).

Egy $\mathcal{A}$ mátrixot akkor nevezünk korlátos-regulárisnak, ha minden korlátos és konvergens $\{s_{m,n}\} \to s$ sorozat $\mathcal{A}$-összegezhető ugyanahhoz az s határértékhez és az $\mathcal{A}$-közepek korlátosak. Robison az alábbi négy szükséges és elegendő feltételt adta egy $\mathcal{A}$ mátrix korlátos-regularitására (lásd [16]-ban):

(a) $\lim\limits_{j,k\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \left|a_{m,n}^{j,k}\right| = 0 \quad \text{minden} \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \text{esetén;}$

(b) $\lim\limits_{j,k\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_{m,n}^{j,k}\right| = 0 \quad \text{minden} \quad m = 0,1,2,\ldots \quad \text{esetén;}$

(c) $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|a_{m,n}^{j,k}\right| \le C < \infty \quad \text{minden} \quad j,k = 1,2,\ldots \quad \text{esetén;}$

(d) $\lim\limits_{j,k\to\infty} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{m,n}^{j,k} = 1.$

Figyeljük meg, hogy a (c) feltevésből következik, hogy a (d)-ben szereplő sor konvergens. Így minden korlátos és konvergens $\{s_{m,n}\}$ sorozatnak léteznek a (3.12)-ben definiált $\mathcal{A}$-közepei. A későbbiekben szükségünk lesz arra az észrevételre, miszerint ha a

$$\lim_{m,n\to\infty} s_{m,n} = 0$$

speciális eset áll fenn, akkor a (d) feltétel elhagyható, vagyis nem szükséges ahhoz, hogy a

$$\lim_{j,k\to\infty} t_{j,k} = 0$$

konvergenciát belássuk.

A reguláris mátrixok fogalmának kiterjesztése után már minden eszközünk adott, hogy bebizonyítsuk a 3.2. szakaszban kimondott tételeinket.

A 3.3. Tétel bizonyítása. Legyen valamely $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ pontban a (3.5) sor reguláris értelemben vett összege s. A (3.10)-ben felírt azonosság jobb oldalát tekintve láthatjuk, hogy elegendő a

$$\lim_{u_j,v_k\to\infty} \frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u_j,2v_k)}{16u_j^2 v_k^2} = s$$

határértéket az $u_j, v_k > 0$ esetben igazolni. A

$$g : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(0) := 1 \quad \text{és} \quad g(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \quad (x \ne 0).$$

függvény bevezetése után (3.10) az alábbi tömörebb alakba írható át:

$$\frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u_j,2v_k)}{16u_j^2 v_k^2} = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} e^{i(mx+ny)} g(mu_j)g(nv_k). \tag{3.13}$$

Felhasználva, hogy

$$c_{m,n}e^{i(mx+ny)} + c_{-m,-n}e^{-i(mx+ny)} + c_{-m,n}e^{i(-mx+ny)} + c_{m,-n}e^{i(mx-ny)} =$$
$$= s_{m,n} - s_{m-1,n} - s_{m,n-1} + s_{m-1,n-1} \qquad (m,n\geq 1),$$

a (3.13) sor szimmetrikus részletösszegeit négy összegre bonthatjuk (további részletekért lásd Móricz [10] cikkében):

$$\sum_{|m|\leq M}\sum_{|n|\leq N} c_{m,n}e^{i(mx+ny)}g(mu_j)g(nv_k) =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} s_{m,n}\,[\,g\,(mu_j)\,g\,(nv_k) - g\,((m+1)u_j)\,g\,(nv_k) -$$
$$- g\,(mu_j)\,g\,((n+1)v_k) + g\,((m+1)u_j)\,g\,((n+1)v_k)\,] +$$
$$+ \sum_{m=0}^{M-1} s_{m,N}\,[g\,(mu_j)\,g\,(Nv_k) - g\,((m+1)u_j)\,g\,(Nv_k)] +$$
$$+ \sum_{n=0}^{N-1} s_{M,n}\,[g\,(Mu_j)\,g\,(nv_k) - g\,(Mu_j)\,g\,((n+1)v_k)] +$$
$$+ s_{M,N}\,g\,(Mu_j)\,g\,(Nv_k) =: S_1 + S_2 + S_3 + S_4.$$

Elsődleges célunk annak igazolása, hogy $S_2, S_3, S_4 \to 0$, ha $M,N\to\infty$, ugyanis ez esetben

$$\frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u_j,2v_k)}{16u_j^2 v_k^2} = \lim_{M,N\to\infty} S_1 =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} s_{m,n}\,[\,g(mu_j)g(nv_k) - g((m+1)\,u_j)g(nv_k) - \tag{3.14}$$
$$- g(mu_j)g((n+1)\,v_k) + g((m+1)\,u_j)g((n+1)\,v_k)\,]\,.$$

Minthogy (3.8) szerint az $\{s_{m,n}\}$ részletösszegek korlátosak, így $S_4\to 0$ triviálisan teljesül. Másodsorban

$$\sum_{m=0}^{\infty} |g\,(mu_j)\,g\,(Nv_k) - g\,((m+1)u_j)\,g\,(Nv_k)| =$$
$$= g\,(Nv_k)\sum_{m=0}^{\infty} |g\,(mu_j) - g\,((m+1)u_j)|\,. \tag{3.15}$$

A jobb oldalon szereplő sort pedig a következőképp becsülhetjük:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |g(mu_j) - g((m+1)u_j)| = \sum_{m=0}^{\infty} \left| \int_{mu_j}^{(m+1)u_j} g'(t)dt \right| \leq \int_0^{\infty} |g'(t)|\, dt. \tag{3.16}$$

A l'Hospital szabály kétszeri alkalmazásával nyerjük, hogy

$$g'(t) = 2 \cdot \frac{t \sin t \cos t - \sin^2 t}{t^3} \to 0 \qquad (t \to 0), \tag{3.17}$$

aminek felhasználásával adódik, hogy

$$\int_0^{\infty} |g'(t)|\, dt \leq C_1 + 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{t+1}{t^3} dt =: C_2 (< \infty). \tag{3.18}$$

Mivel $g(Nv_k) \to 0$, összegezve az (3.15)–(3.18) eredményeinket látható, hogy $S_2 \to 0$. Az előző gondolatmenetet kissé módosítva

$$\lim_{M \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |g(Mu_j)\, g(nv_k) - g(Mu_j)\, g((n+1)v_k)| = 0$$

nyerhető. Ezzel $S_3 \to 0$ is igazolást nyert.

(3.14) szerint elegendő az S_1 összeget alaposabban megvizsgálnunk. Definiáljuk az $\mathcal{A} = \left[a_{m,n}^{j,k}\right]$ mátrixot az alábbi elemekkel:

$$\begin{aligned} a_{m,n}^{j,k} :=& g(mu_j) g(nv_k) - g((m+1)u_j) g(nv_k) - \\ &- g(mu_j) g((n+1)v_k) + g((m+1)u_j) g((n+1)v_k). \end{aligned}$$

Világosan látható (3.14)-ből, hogy ha belátjuk, hogy az $\mathcal{A}$ mátrix korlátos-reguláris, akkor a (3.5) sor s összeghez való Riemann szummálhatósága triviálisan következik. Tehát a bizonyítás teljességéhez elegendő azt belátnunk, hogy az $\mathcal{A}$ mátrix teljesíti Robison tételének (a)–(d) feltételeit. Az (a) pont igazolásához tekintsük az alábbi átalakítást:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left|a_{m,n}^{j,k}\right| =& \sum_{m=0}^{\infty} |\, g(nv_k) \left(g(mu_j) - g((m+1)u_j)\right) - \\ & - g((n+1)v_k) \left(g(mu_j) + g((m+1)u_j)\right) | = \\ =& \sum_{m=0}^{\infty} |(g(mu_j) - g((m+1)u_j)) \left(g(nv_k) - g((n+1)v_k)\right)| = \\ =& \left| \left(\frac{\sin nv_k}{nv_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)v_k}{(n+1)v_k}\right)^2 \right| \cdot \sum_{m=0}^{\infty} |g(mu_j) - g((m+1)u_j)|\,. \end{aligned}$$

Bármely $n = 0,1,2,\dots$ esetén fennáll, hogy

$$\left(\frac{\sin nv_k}{nv_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)v_k}{(n+1)v_k}\right)^2 \to 0 \quad (k \to \infty).$$

A fentebb kapott (3.16)–(3.18) eredményeinket ismét felhasználva láthatjuk, hogy az (a) feltétel teljesül. A (b) feltétel analóg módon bizonyítható.

Szintén (3.16)–(3.18) szolgáltatja a (c) pontbeli feltételt:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_{m,n}^{j,k}\right| = \sum_{m=0}^{\infty}\left|g\left(mu_j\right) - g\left(\left(m+1\right)u_j\right)\right| \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left|g\left(nv_k\right) - g\left(\left(n+1\right)v_k\right)\right| <$$
$$< 2C_2 =: C(<\infty) \quad \text{minden } j,k = 1,2,\dots \quad \text{esetén.}$$

A (d)-ben szereplő határértéket a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}^{j,k} = 1 \qquad (j,k = 1,2,\dots)$$

azonossággal bizonyítjuk. Ezt viszont könnyedén igazolhatjuk, ha vesszük a

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{m,n}^{j,k} = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sin mu_j}{mu_j}\right)^2 - \left(\frac{\sin(m+1)u_j}{(m+1)u_j}\right)^2\right) \cdot$$
$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{\sin nv_k}{nv_k}\right)^2 - \left(\frac{\sin(n+1)v_k}{(n+1)v_k}\right)^2\right).$$

szétválasztást, ugyanis mindkét sor részletösszegei teleszkopikusak és a j,k értékektől függetlenül 1-hez tartanak.

Robison tételének alkalmazása az $\mathcal{A}$ mátrixra zárja a tétel bizonyítását. ∎

A 3.4. Tétel bizonyítása. A (3.10)-ben felírt alakhoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta^2 R\left(x,y;2u_j,2v_k\right)}{16u_jv_k} = u_jv_kc_{0,0} + v_k\sum_{|m|\geq 1}c_{m,0}e^{imx}\frac{\sin^2 mu_j}{m^2u_j} +$$
$$+ u_j\sum_{|n|\geq 1}c_{0,n}e^{iny}\frac{\sin^2 nv_k}{n^2v_k} + \sum_{|m|\geq 1}\sum_{|n|\geq 1}c_{m,n}e^{i(mx+ny)}\frac{\sin^2 mu_j}{m^2u_j}\frac{\sin^2 nv_k}{n^2v_k}$$
$$=: S_5 + S_6 + S_7 + S_8.$$

Megmutatjuk, hogy $S_i \to 0$ $(i = 5,6,7,8)$, ha $u_j, v_k \to 0$ $(j,k \to \infty)$.

$S_5 \to 0$ triviálisan teljesül, $S_6, S_7 \to 0$ pedig az 3.2. Tétel alkamazásával nyerhetők.

Írjuk S_8-at az alábbi ekvivalens alakba:

$$S_8 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\big(c_{m,n}e^{i(mx+ny)}+c_{-m,-n}e^{-i(mx+ny)}+$$

$$+c_{-m,n}e^{i(-mx+ny)}+c_{m,-n}e^{i(mx-ny)}\big)\frac{\sin^2 mu_j}{m^2u_j}\frac{\sin^2 nv_k}{n^2v_k}.$$

Mivel az

$$s_{m,n} := c_{m,n}e^{i(mx+ny)}+c_{-m,-n}e^{-i(mx+ny)}+c_{-m,n}e^{i(-mx+ny)}+c_{m,-n}e^{i(mx-ny)}$$

kettős sorozat 0-hoz tart, amint $m,n\to\infty$, a 3.3. Tétel bizonyításában látottakhoz hasonlón elegendő azt igazolnunk, hogy az

$$a^{j,k}_{m,n} := \frac{\sin^2 mu_j}{m^2u_j}\frac{\sin^2 nv_k}{n^2v_k}$$

elemekből képezett $\mathcal{A}=\left[a^{j,k}_{m,n}\right]$ mátrix korlátos-regularitás. Ahogy azt korábban már említettük, az $s_{m,n}$ sorozat 0-hoz tartása miatt a (d) feltétel elhagyható, így elég az (a)–(c) feltételek teljesülését ellenőriznünk. Az (a) feltétel igazolásához vizsgáljuk meg a

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left|a^{j,k}_{m,n}\right| = \frac{\sin^2 nv_k}{n^2v_k}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2 mu_j}{m^2u_j}. \tag{3.19}$$

sort. Mivel

$$\frac{\sin^2 nv_k}{n^2v_k}\to 0 \quad \text{as } k\to\infty,$$

ezért elég azt megmutatnunk, hogy az (3.19) jobb oldalán szereplő sor egy K korlát alatt marad minden j esetén. Legyen

$$M = M(j) := \left[\frac{1}{u_j}\right]+1,$$

ahonnan világos, hogy

$$\frac{1}{u_j} < M \le \frac{1}{u_j}+1.$$

Megfigyeléseink után a következőképp becsülhetünk:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2 mu_j}{m^2u_j} &= \sum_{m=1}^{M}\frac{m^2u_j^2}{m^2u_j}+\sum_{m=M+1}^{\infty}\frac{1}{m^2u_j} < Mu_j+\frac{1}{u_jM}\le \\ &\le\left(\frac{1}{u_j}+1\right)u_j+\frac{1}{u_j\frac{1}{u_j}} = 2+u_j < 2+\max_j u_j =: K.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Ezzel beláttuk, hogy az (a) feltétel biztosan teljesül. Analóg módon juthatunk el a (b) feltétel igazolásához. A (c) feltételt (3.20)-hoz hasonlóan ellenőrizhetjük:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{m,n}^{j,k}\right| = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin^2 mu_j}{m^2 u_j}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 nv_k}{n^2 v_k} \leq$$
$$\leq \left(2+\max_j u_j\right)\left(2+\max_k v_k\right) =: C(<\infty).$$

Végül, alkalmazzuk Robison tételét, ami a bizonyítandó állítást adja. ∎

4. fejezet

Trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatósága

4.1. Előzmények: Trigonometrikus sorok Lebesgue szummálhatósága

Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ egy számsorozat. Értelmezzük a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx} \tag{4.1}$$

trigonometrikus sor formális integrálásával kapott

$$L(x) := c_0 x + \sum_{|n|\geq 1} c_n \frac{e^{inx}}{in} \qquad (x \in \mathbb{T}) \tag{4.2}$$

függvényt, feltéve hogy a benne szereplő sor konvergens. Ez a helyzet például, ha $\{c_n\}$ együtthatókra teljesül a

$$\sum_{|n|\geq 1} \left|\frac{c_n}{n}\right| < \infty$$

feltétel.

Vegyük észre, hogy a (4.1) sor konvergenciája nem vonja maga után $L(x)$ létezését. Például a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\log n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2i\log n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-inx}}{2i\log n}$$

sor mindenütt konvergens, de $L(x)$ az $x = 0$ pontban divergens:

$$L(0) = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n0}{n\log n} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}.$$

Definíció. Legyen a (4.2) függvény értelmezve az x pont valamely környezetében. Ha a

$$\frac{\Delta L(x,h)}{2h} := \frac{L(x+h)-L(x-h)}{2h} \to s \qquad (h \to 0) \tag{4.3}$$

határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy a (4.1) trigonometrikus sor az x pontban Lebesgue módszerével összegezhető, az s számot pedig a sor Lebesgue értelemben vett összegének nevezzük. Figyeljük meg, hogy ez esetben az s érték éppen az $L(x)$ függvény szimmetrikus deriváltja az x pontban, amit a szakirodalomban általában $DL(x)$-szel jelölnek.

A következő tétel (lásd Zygmund [21, 1. kötet, 322. old.]) elegendő feltételt ad arra, hogy egy trigonometrikus sor hagyományos és Lebesgue értelemben vett összege megegyezzen.

4.1. Tétel. *Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ olyan sorozat, amelyre a*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{|n|\le N} |nc_n| = 0 \tag{4.4}$$

feltétel teljesül. Ekkor minden $x \in \mathbb{T}$ esetén

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\Delta L(x,h)}{2h} - s_N(x) \right) = 0, \quad \text{ahol} \quad N := \left[\frac{1}{h}\right] \quad \text{és} \quad h > 0,$$

ráadásul a konvergencia egyenletes x-ben.

Megjegyezzük, hogy ha

$$\lim_{|n|\to\infty} nc_n = 0,$$

akkor a (4.4) feltétel biztosan teljesül.

A most bemutatott Lebesgue szummálhatóság fogalmát Bagota és Móricz [1] cikkükben terjesztették ki kétváltozós trigonometrikus sorokra. Röviden összefoglaljuk a cikk főbb eredményeit, amelyek későbbi kutatásinkat inspirálták. Tekintsük a $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ számokból képezett

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} e^{i(mx+ny)} \tag{4.5}$$

kétváltozós komplex trigonometrikus sort, melynek konvergenciáját az $s_{M,N}$ szimmetrikus részletösszegek Pringsheim értelemben vett konvergenciájával értelmezzük (lásd az előző fejezetben).

Tekintsük a fenti (4.5) sor x és y szerinti formális integrálásával képezett

$$L(x,y) := c_{0,0}xy + y\sum_{|m|\geq 1} c_{m,0}\frac{e^{imx}}{im} + x\sum_{|n|\geq 1} c_{0,n}\frac{e^{iny}}{in} + \sum_{|m|\geq 1}\sum_{|n|\geq 1} c_{m,n}\frac{e^{i(mx+ny)}}{i^2mn} \tag{4.6}$$

függvényt, feltéve hogy a benne szereplő sorösszegek mind léteznek és végesek.

Definíció. Tegyük fel, hogy a (4.6)-beli függvény értelmezve van az (x, y) pont egy környezetében. Képezzük az $L(x, y)$ függvény szimmetrikus differenciahányadosát az (x, y) pontban:

$$\frac{\Delta L(x,y,h,k)}{4hk} := \frac{1}{4hk}\,[\,L(x+h,y+k) - L(x-h,y+k) + \\ + L(x-h,y-k) - L(x+h,y-k)\,]$$

Ha a

$$\lim_{h,k\to 0}\frac{\Delta L(x,y,h,k)}{4hk} = s$$

véges határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy a (4.5) sor az (x, y) pontban Lebesgue módszerével összegezhető s-hez. Itt is megjegyezzük, hogy az s értéke éppen $L(x, y)$ függvény szimmetrikus deriváltja az (x, y) pontban.

A következő tétel a 4.1. Tétel kettős sorokra vonatkozó kiterjesztése (lásd Bagota, Móricz [1, 2. Tétel]).

4.2. Tétel. *Ha a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra teljesülnek a*

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{1\leq |m|\leq M}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|mc_{m,n}| = 0 \tag{4.7}$$

és

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leq |n|\leq N}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|nc_{m,n}| = 0 \tag{4.8}$$

feltételek, akkor bármely $(x, y) \in \mathbb{T}^2$ *pont esetén*

$$\lim_{h,k\to 0}\left(\frac{\Delta L(x,y,h,k)}{4hk} - s_{M,N}(x,y)\right) = 0, \tag{4.9}$$

ahol

$$M := \left[\frac{1}{h}\right],\ N := \left[\frac{1}{k}\right] \quad \text{és} \quad h,k > 0,$$

továbbá a (4.9)*-beli konvergencia egyenletes* (x, y)*-ban.*

Megjegyzés. Speciálisan, hogy ha a $\{c_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}$ együtthatókra fennáll, hogy

$$\lim_{|m|\to\infty}\sum_{|n|\in\mathbb{Z}}|mc_{m,n}|=0,$$

akkor szükségképpen (4.7) is teljesül. Hasonlóan,

$$\lim_{|n|\to\infty}\sum_{|m|\in\mathbb{Z}}|nc_{m,n}|=0$$

garantálja (4.8) fennállását.

4.2. Egyszeres trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatósága

A Lebesgue összegezhetőség fogalmát Szász [17] cikkében bővítette tovább, amelyben trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatóságát vezette be a következőkben bemutatott módon. Legyen az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ függvény Lebesgue-értelemben integrálható $\mathbb{R}$ minden korlátos intervallumán, jelölésben: $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Tekintsük a

$$\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{isx}ds,\quad x\in\mathbb{T} \tag{4.10}$$

trigonometrikus integrált az

$$I_S(x):=\int_{|s|<S} f(s)e^{isx}ds \qquad (x\in\mathbb{T})$$

szimmetrikus részintegráljaival. A (4.10) integrált konvergensnek nevezzük az $x\in\mathbb{T}$ pontban, ha a

$$\lim_{S\to\infty} I_S(x)=l$$

határérték létezik. Ekkor azt mondjuk, hogy az integrál értéke az x pontban az l szám.

Ha (4.10)-ben x szerint formálisan integráljuk az integrandust, akkor az

$$L(x):=\int_{\mathbb{R}} f(s)\frac{e^{isx}}{is}ds \qquad (x\in\mathbb{T}) \tag{4.11}$$

függvényhez jutunk. Mivel (4.11)-ben szereplő Lebesgue integrál nem feltétlenül létezik, $L(x)$ definíciója egyenlőre csak formális.

Definíció. A (4.10) integrált Lebesgue értelemben összegezhetőnek vagy rövidebben Lebesgue összegezhetőnek nevezzük egy $x \in \mathbb{T}$ pontban, ha a

$$\frac{\Delta L(x;h)}{2h} := \frac{L(x+h)-L(x-h)}{2h} = \int_{\mathbb{R}} f(s)e^{isx}\frac{\sin sh}{sh}ds \to l \qquad (0<h\to 0) \tag{4.12}$$

véges szimmetrikus differenciálhányados létezik. Ekkor az l számot a (4.10) integrál Lebesgue összegének nevezzük.

Szász [17] a következő tételt is bizonyította, ami valójában a 4.1. Tétel integrálokra vonatkozó megfelelője.

4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ függvényre teljesül, hogy*

$$\lim_{S\to\infty}\frac{1}{S}\int_{|s|<S}|sf(s)|\,ds = 0. \tag{4.13}$$

Ekkor a (4.12) *integrál Lebesgue értelemben létezik, és x-ben egyenletesen fennáll, hogy*

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta L(x;h)}{2h} - I_{1/h}(x)\right) = 0 \qquad (h>0).$$

Vagyis a (4.13) *feltétel mellett a* (4.10) *integrál hagyományos és Lebesgue értelemben is összegezhető, és a két értelemben vett összege megegyezik.*

Megjegyzés. Elevenítsük fel az $f\in L^1(\mathbb{R})$ függvény $\hat{f}$ Fourier transzformáltjának definícióját (lásd pl. Zygmund [21, 2. kötet, 264. old.]-ben):

$$\hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-isx}ds, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Figyeljük meg, hogy a 4.3. Tétel állítása könnyen átfogalmazható az $\hat{f}$ Fourier transzformáltakra, szintén a (4.13) feltétel mellett.

4.3. Kettős trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatósága

Legyen az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ függvény Lebesgue értelemben integrálható $\mathbb{R}^2$ minden korlátos $[a,b]\times[c,d]$ téglalap alakú részhalmazán, jelölésben: $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Tekintsük az

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt, \quad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{4.15}$$

kettős trigonometrikus integrált a

$$I_{S,T}(x,y) := \int_{|s|<S}\int_{|t|<T} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt \qquad (S,T>0) \tag{4.16}$$

szimmetrikus részintegráljaival. A kettős integrálok konvergenciáját is Pringsheim értelemben fogjuk érteni, hasonlóan ahhoz, ahogyan a kettős sorokra már bemutattuk a 3.2. alfejezetben. A továbbiakban azt mondjuk, hogy a (4.15) kettős integrál az $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ pontban Pringsheim értelemben konvergál az l számhoz, jelölésben:

$$\lim_{S,T\to\infty} I_{S,T}(x,y) = l,$$

ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\rho=\rho(\varepsilon)>0$ küszöbszám, amelyre

$$|I_{S,T}(x,y)-l|<\varepsilon, \quad \text{ha} \quad S,T>\rho.$$

Tekintsük a (4.15)-ben szereplő integrandus x és y változója szerinti formális integrálásával kapott

$$L(x,y) := \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\frac{e^{i(sx+ty)}}{i^2 st}dsdt, \qquad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{4.17}$$

függvényt. Akárcsak az egyszeres integrálok esetében, itt is megjegyezzük, hogy a fent szereplő $L(x,y)$ definíciója egyenlőre csak formális, mivel az így képezett integrál nem feltétlenül létezik.

Definíció. A (4.15) integrált Lebesgue értelemben összegezhetőnek nevezzük egy $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban, ha a

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} :=& \frac{1}{4hk}\left(L(x+h,y+k)-L(x-h,y+k)\right.\\ &\left.-L(x+h,y-k)+L(x-h,y-k)\right)=\\ =& \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}\frac{\sin tk}{tk}dsdt \to l \qquad (0<h,k\to 0)\end{aligned} \tag{4.18}$$

véges határérték létezik. Ekkor az l számot a (4.15) integrál Lebesgue összegének nevezzük. Figyeljük meg, hogy az l számot itt is az $L(x,y)$ függvény (x,y) pontban vett szimmetrikus vegyes differenciálhányadosaként értelmeztük.

Új eredményeinket a következőképp fogalmazhatjuk meg.

4.4. Tétel. *Ha az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ függvényre a*

$$s\int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt \in L^1_{loc}(\mathbb{R},ds)$$

és a

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{S} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |sf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.19}$$

feltétel teljesül, továbbá a

$$t \int_{\mathbb{R}} f(s,t) ds \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$$

és a

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |tf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.20}$$

feltétel is fennáll, akkor a (4.15)*-ben definiált kettős integrál Lebesgue értelemben létezik és a*

$$\lim_{h,k\to 0} \left(\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} - I_{1/h,1/k}(x,y) \right) = 0 \qquad (h,k>0) \tag{4.21}$$

konvergencia egyenletes (x,y)*-ban.*

Más szóval, a (4.19) *és a* (4.20) *feltételek mellett a* (4.15) *kettős integrál akkor és csakis akkor összegezhető Lebesgue értelemben egy adott* (x,y) *pontban, ha Pringsheim értelemben is konvergens* (x,y)*-ban, és a két értelemben vett összeg megegyezik.*

Megjegyzés. Külön kiemeljük, hogy az előző tétel az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvények

$$\hat{f}(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t) e^{-i(sx+ty)} dsdt, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

módon definiált kettős Fourier transzfoltmáltjaira is alkalmazható, amennyiben a (4.19) és a (4.20) feltételek teljesülnek.

4.4. Segédtételek és bizonyítások

A 4.4. Tétel egyváltozós változatának (4.3. Tétel) Móricz [13] cikkében adott bizonyítását általánosítjuk kétváltozós esetre. A bizonyítás összetettsége miatt a könnyebb átláthatóság kedvéért öt lemmát fogalmazzuk meg, melyek a bizonyítás egy-egy kulcsfontosságú mozzanatát képviselik majd. A 4.5. Lemma Móricz [13] cikkében is megtalálható.

4.5. Lemma. *Ha $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ függvényre $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ és a*

$$\lim_{S\to\infty} \frac{1}{S} \int_{|s|<S} |sg(s)|\, ds = 0$$

feltétel teljesül, akkor

$$\lim_{S\to\infty} S \int_{|s|>S} \left| \frac{g(s)}{s} \right| ds = 0.$$

Ezen lemma következményeként kimondhatjuk következő segédtételt.

4.6. Lemma. *Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ függvényre*

$$s \int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, ds)$$

és

$$\lim_{S\to\infty} \frac{1}{S} \int_{|s|<S} \int_{\mathbb{R}} |sf(s,t)|\, dsdt = 0$$

teljesülnek, akkor

$$\lim_{S\to\infty} S \int_{|s|>S} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(s,t)}{s} \right| dsdt = 0. \tag{4.22}$$

Bizonyítás. Az alkalmas

$$g(s) := s \int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

választással a 4.5. Lemma éppen a bizonyítandó állítást szolgáltatja. ∎

Az előző lemma szimmetrikus változatát is megfogalmazzuk.

4.7. Lemma. *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ függvényre teljesülnek a*

$$t \int_{\mathbb{R}} f(s,t)ds \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$$

és

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \int_{|t|<T} |tf(s,t)|\, dsdt = 0$$

feltételek, akkor

$$\lim_{T\to\infty} T \int_{\mathbb{R}} \int_{|t|>T} \left| \frac{f(s,t)}{t} \right| dsdt = 0. \tag{4.23}$$

A következő technikailag jóval bonyolultabb lemmában a kezdeti- és farok integrálok közötti viselkedésbeli összefüggésekre mutatunk rá.

4.8. Lemma. *Legyen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *olyan függvény, amelyre* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ *és*

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{ST} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |stf(s,t)|\, dsdt = 0. \tag{4.24}$$

Ekkor

$$\lim_{S,T\to\infty} ST \int_{|s|>S} \int_{|t|>T} \left|\frac{f(s,t)}{st}\right| dsdt = 0. \tag{4.25}$$

Bizonyítás. A (4.24) feltétel szerint minden $\varepsilon > 0$ értékhez létezik $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ küszöbszám úgy, hogy

$$\frac{1}{ST} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |stf(s,t)|\, dsdt < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad S,T > \rho. \tag{4.26}$$

Elevenítsük fel az 1. fejezetben is használt diadikus blokkok fogalmát, miszerint

$$D_p(S) := \left\{s \in \mathbb{R} : 2^pS < |s| \le 2^{p+1}S\right\}, \quad \text{ahol} \quad S > 0 \quad \text{és} \quad p = 0,1,2,\ldots.$$

Ezen jelöléseket használva világos, hogy

$$\int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} |stf(s,t)|\, dsdt \ge 2^{p+q}ST \int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} |f(s,t)|\, dsdt$$

és

$$\int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} \left|\frac{f(s,t)}{st}\right| dsdt \le \frac{1}{2^{p+q}ST} \int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} |f(s,t)|\, dsdt.$$

Ezen egyenlőtlenségeket és (4.26)-ot összevetve nyerjük az alábbi becslést:

$$\begin{aligned}\int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} \left|\frac{f(s,t)}{st}\right| dsdt &\le \frac{1}{(2^{p+q}ST)^2} \int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} |stf(s,t)|\, dsdt < \\ &< \frac{1}{(2^{p+q}ST)^2} 2^{p+q+2}ST\varepsilon = \frac{4\varepsilon}{2^{p+q}ST}, \quad \text{ha} \quad S,T > \rho \quad \text{és} \quad p,q = 0,1,2,\ldots.\end{aligned}$$

Ezek alapján pedig az alábbi sorösszeggel becsülhetünk:

$$\begin{aligned}ST \int_{|s|>S} \int_{|t|>T} \left|\frac{f(s,t)}{st}\right| dsdt &= ST \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \int_{D_p(S)} \int_{D_q(T)} \left|\frac{f(s,t)}{st}\right| dsdt < \\ &< 4\varepsilon \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+q}} = 16\varepsilon, \quad \text{ha} \quad S,T > \rho.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Mivel ε értékét tetszőlegesen választhattuk, ezért (4.25) igazolást nyert. ∎

Végül az következő közismert lemmát is megemlítjük.

4.9. Lemma. *Minden $u \neq 0$ valós számra teljesül a*

$$0 \leq 1 - \frac{\sin u}{u} \leq 2\,|u|$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Az $|u| \geq 1$ esetben

$$0 \leq 1 - \frac{\sin u}{u} \leq 2 \leq 2\,|u| \qquad (|u| \geq 1)$$

triviálisan igaz, míg az $|u| < 1$ esetben a $\sin u$ függvény Taylor sorfejtéséből kapjuk, hogy

$$0 \leq 1 - \frac{\sin u}{u} \leq \frac{u^2}{3!} < u^2 < 2|u|, \qquad (|u| < 1).$$

■

A 4.4. Tétel bizonyítása. A tétel (4.19) és a (4.20) feltételei szerint alkalmazhatjuk a 4.6. és 4.7. Lemmákat. Következésképpen a két lemma (4.22) és (4.23) állításai alapján

$$\frac{f(s,t)}{s} \in L^1\left(\{s \in \mathbb{R} : |s| > S\} \times \mathbb{R}\right)$$

és

$$\frac{f(s,t)}{t} \in L^1\left(\mathbb{R} \times \{t \in \mathbb{R} : |t| > T\}\right),$$

legalábbis amennyiben S és T elég nagyok. Mivel azonban $f(s,t)$ lokálisan integrálható $\mathbb{R}^2$-en, így a (4.18)-ban szereplő kettős integrál Lebesgue értelemben biztosan létezik.

Legyenek $h > 0$ és $k > 0$ tetszőlegesen rögzített valós számok. A (4.16) és a (4.18) jelöléseket szem előtt tartva (4.21) a következő alakba írható:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} - I_{1/h,1/k}(x,y)\\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}\frac{\sin tk}{tk}dsdt\\
&\quad - \int_{|s|<1/h}\int_{|t|<1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt\\
&= \int_{|s|>1/h}\int_{|t|>1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}\frac{\sin tk}{tk}dsdt\\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{|t|<1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}\frac{\sin tk}{tk}dsdt\right.\\
&\qquad \left. - \int_{|s|>1/h}\int_{|t|>1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin tk}{tk}dsdt\right)\\
&\quad + \left(\int_{|s|<1/h}\int_{\mathbb{R}} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}\frac{\sin tk}{tk}dsdt\right.\\
&\qquad \left. - \int_{|s|<1/h}\int_{|t|<1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}dsdt\right)\\
&\qquad - \int_{|s|<1/h}\int_{|t|<1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\left(\frac{\sin sh}{sh}-1\right)\left(\frac{\sin tk}{tk}-1\right)dsdt\\
&=: J^{(1)}_{1/h,1/k}(x,y) + J^{(2)}_{1/h,1/k}(x,y) + J^{(3)}_{1/h,1/k}(x,y) + J^{(4)}_{1/h,1/k}(x,y).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

A tétel (4.19) és (4.20) feltevései szerint alkalmazhatjuk a 4.8. Lemmát:

$$
\left|J^{(1)}_{1/h,1/k}(x,y)\right| \le \frac{1}{hk}\int_{|s|>1/h}\int_{|t|>1/k}\left|\frac{f(s,t)}{st}\right|dsdt \to 0, \quad \text{ha} \quad h,k\to 0. \tag{4.29}
$$

A $J^{(2)}_{1/h,1/k}(x,y)$ összegen hajtsuk végre az alábbi ekvivalens átalakítást:

$$
\begin{aligned}
J^{(2)}_{1/h,1/k}(x,y) = &\int_{|s|<1/h}\int_{|t|<1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\left(\frac{\sin sh}{sh}-1\right)\frac{\sin tk}{tk}dsdt\\
&+ \int_{|s|>1/h}\int_{|t|<1/k} f(s,t)e^{i(sx+ty)}\frac{\sin sh}{sh}\frac{\sin tk}{tk}dsdt
\end{aligned}
$$

Erre az alakra (4.19) szerint alkalmazhatjuk a 4.6. és a 4.9. Lemmákat, amelyek szerint

$$
\begin{aligned}
\left|J^{(2)}_{1/h,1/k}(x,y)\right| \le &2h\int_{|s|<1/h}\int_{|t|<1/k}|sf(s,t)|\,dsdt\\
&+\frac{1}{h}\int_{|s|>1/h}\int_{|t|<1/k}\left|\frac{f(s,t)}{s}\right|dsdt \to 0, \quad \text{ha} \quad h,k\to 0.
\end{aligned}
\tag{4.30}
$$

Az előző (4.30) eredményünkhöz hasonlóan kaphatjuk a következőt is:

$$
\begin{aligned}
\left|J^{(3)}_{1/h,1/k}(x,y)\right| \leq & 2k \int_{|s|<1/h} \int_{|t|<1/k} |tf(s,t)|\, dsdt \\
& + \frac{1}{k} \int_{|s|<1/h} \int_{|t|>1/k} \left|\frac{f(s,t)}{t}\right| dsdt \to 0 \qquad (h,k \to 0),
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

ahol a 4.7. és a 4.9. Lemmákat alkalmaztuk. Végül a (4.19) és a (4.20) feltételek és a 4.8. Lemma garantálják a bizonyításhoz hiányzó

$$
\left|J^{(4)}_{1/h,1/k}(x,y)\right| \leq 4hk \int_{|s|<1/h} \int_{|t|<1/k} |stf(s,t)|\, dsdt \to 0 \qquad (h,k \to 0) \tag{4.32}
$$

összefüggést.

Az eddig kapott (4.28)–(4.32) eredményeink együttesen bizonyítják a tétel (4.21) állítását. ■

Irodalomjegyzék

[1] M. Bagota and F. Móricz, *On the Lebesgue summability of double trigonometric series*, J. Math. Anal. Appl., **348** (2008), 555–561.

[2] V. Fülöp and F. Móricz, *Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Zygmund classes of functions*, Analysis, **28** (2008), 345–354.

[3] H. J. Hamilton, *Transformations of multiple sequences*, Duke Math. J., **2** (1936), 29–60.

[4] G. H. Hardy, *On the convergence of certain multiple series*, Proc. Cambridge Philosoph. Soc., **19** (1916–1919), 86–95.

[5] L. Krizsán and F. Móricz, *Generalization of Zygmund's theorem on the smoothness of the sum of trigonometric series*, Acta Sci. Math. (Szeged), **78** (2012), 155–164.

[6] L. Krizsán and F. Móricz, *A two-dimensional extension of Zygmund's theorem on the smoothness of the sum of trigonometric series*, Acta Sci. Math. (Szeged), **79** (2013), 49–62.

[7] L. Krizsán and F. Móricz, *The Lebesgue summability of double trigonometric integrals*, Math. Inequal. Appl., **17** (2014), 1543–1550.

[8] L. Krizsán, *On the Riemann summability of double trigonometric series*, Math. Pannonica, **25/1** (2014-2015), 135–145.

[9] F. Móricz, *On the convergence in a restricted sense of multiple series*, Anal. Math., **5** (1979), 135–147.

[10] F. Móricz, *The Kronecker lemmas for multiple series and some applications*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **37** (1981), 39–50.

[11] F. Móricz, *Absolutely convergent multiple Fourier series and multiplicative Lipschitz classes of functions*, Acta Math. Hungar., **121** (2008), 1–19.

[12] F. Móricz, *On the uniform convergence of double sine integrals over* $\mathbb{R}^2_+$, Analysis, **31** (2011), 191–204.

[13] F. Móricz, *The Lebesgue summability of trigonometric integrals*, J. Math. Anal. Appl., **390** (2012), 188–196.

[14] A. Pringsheim, *Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen*, Math. Ann., **53** (1900), 289–321.

[15] B. Riemann, *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Aus dem Nachlass des Verfassers mitgeteilt durch Dedekind. Gött. Abh. 1868 (From the nachlass of the author, communicated by Dedekind.)

[16] G. M. Robison, *Divergent double sequences and series*, Trans. Am. Math. Soc., **28** (1926), 50–73.

[17] O. Szász, *On Lebesgue summability and its generalizations to integrals*, Amer. J. Math., **67** (1945), 389–396.

[18] O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace Mat.-Fiz., **22** (1911), 113–119.

[19] F. Weisz, *Summability of multi-dimensional Fourier series and Hardy spaces*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[20] A. Zygmund, *Smooth functions*, Duke Math. J., **12** (1945), 47–76.

[21] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Cambridge Univ. Press, 1959.

Összefoglaló

Ezen értekezés első két fejezetében egy- és kétváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simaságát tárgyaljuk. Pontosabban, elegendő feltételeket adunk arra vonatkozóan, hogy az összegfüggvény egyváltozós esetben valamely Lipschitz vagy Zygmund osztályba tartozzék, a kétváltozós esetben pedig valamely multiplikatív Lipschitz vagy Zygmund osztály eleme legyen.

A harmadik fejezetben az egyváltozós sorokra már ismert Riemann szummálhatóság fogalmát terjesztjük ki kettős sorokra. Elegendő feltételt mutatunk arra, hogy egy kettős trigonometrikus sor Riemann összege megegyezzen a reguláris értelemben vett összegével.

A negyedik részben a Lebesgue szummálhatóság fogalmát visszük át kettős trigonometrikus integrálokra. Olyan feltételeket mutatunk, amelyek teljesülése garantálja hogy a kettős integrál Pringsheim értelemben vett összege megegyezzen a Lebesgue összegével.

A disszertáció a szerző [5], [6], [7] és [8] cikkeiben publikált eredményeire épül.

1. Egyváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága

Definíció. Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ olyan sorozat, amelyre

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty.$$

Ekkor a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

trigonometrikus sor abszolút és egyenletesen konvergens. Jelöljük az összegét $f(x)$-szel:

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{T} := [-\pi, \pi)\ . \tag{1.1}$$

Az egyenletes konvergencia következtében az $f(x)$ függvény folytonos.

Definíció. Tekintsük a periodikus $f{:}\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ függvényt, ahol $\mathbb{T}$ a $[-\pi,\pi)$ tóruszt jelöli. Azt mondjuk, hogy az f függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha)$ Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha>0$-ra, ha létezik olyan csakis az f függvénytől függő C konstans, hogy

$$|\Delta f(x,h)| := |f(x+h)-f(x)| \le Ch^{\alpha}$$

teljesül minden $x\in\mathbb{T}$ és $h>0$ esetén.

Az f függvény a $\mathrm{lip}(\alpha)$ kis Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha>0$-ra, ha a

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\,|f(x+h)-f(x)| = 0$$

konvergencia egyenletes x-ben.

Az f függvény a $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha>0$-ra, ha folytonos és létezik olyan csakis az f függvénytől függő C konstans, amelyre

$$\left|\Delta^2 f(x,h)\right| := |f(x+h)-2f(x)+f(x-h)| \le Ch^{\alpha}$$

fennáll minden $x\in\mathbb{T}$ és $h>0$ esetén.

Azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{zyg}(\alpha)$ kis Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha>0$-ra, ha folytonos és

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha}\,|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)| = 0$$

egyenletesen teljesül x-ben.

Zygmund elegendő feltételeket adott arra vonatkozóan, hogy az (1.1)-ben definiált $f(x)$ összegfüggvény a $\mathrm{Zyg}(1)$, illetve a $\mathrm{zyg}(1)$ osztályba tarozzék (lásd [21, 1. kötet, 320. oldal]). Ezen tételek általánosítottuk tetszőleges $0<\alpha\le 2$ esetére. Új eredményeinket a következő tételekben foglaltuk össze.

1.1. Tétel. *Legyen $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$. Ha valamely $0<\alpha\le 2$ esetén létezik olyan C_α konstans, amelyre teljesül, hogy*

$$\frac{1}{N^{2-\alpha}}\sum_{|n|\le N} n^2|c_n| \le C_\alpha \qquad (N=1,2,\dots), \tag{1.2}$$

akkor az (1.1) *sor abszolút és egyenletesen konvergens, és az* $f(x)$ *összegfüggvény a* $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ *osztályhoz tartozik.*

1.2. Tétel. *Legyen* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. *Ha valamely* $0 < \alpha < 2$ *értékre teljesül, hogy*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_n| = 0, \tag{1.3}$$

akkor $f(x) \in \mathrm{zyg}(\alpha)$.

Megjegyzés. Ha $0 < \alpha < 1$, akkor

$$\mathrm{Lip}(\alpha) = \mathrm{Zyg}(\alpha) \quad \text{és} \quad \mathrm{lip}(\alpha) = \mathrm{zyg}(\alpha),$$

és ezáltal az is igaz, hogy az (1.2) feltétel mellett $f(x)$ a $\mathrm{Lip}(\alpha)$, az (1.3) feltétel mellett pedig a $\mathrm{lip}(\alpha)$ osztályba is beletartozik.

Az $\alpha = 1$ esetben azonban a $\mathrm{Lip}(1) \subset \mathrm{Zyg}(1)$ szigorú tartalmazási reláció áll fenn. Ezért a következő tételben az $f(x) \in \mathrm{Lip}(1)$ tartalmazásra adtunk elegendő feltételt.

1.3. Tétel. *Ha a* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *sorozat kielégíti a*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| < \infty$$

feltételt, akkor $f(x) \in \mathrm{Lip}(1)$.

2. Kétváltozós trigonometrikus sorok összegfüggvényének simasága

Definíció. Legyen $\{c_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \subset \mathbb{C}$ komplex számok olyan kettős sorozata, amelyre

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{m,n}| < \infty. \tag{2.1}$$

Ekkor a

$$f(x,y) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} e^{i(mx+ny)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{T}^2 \tag{2.2}$$

trigonometrikus sor abszolút és egyenletesen konvergens, következésképpen az $f(x,y)$ összegfüggvény egyenletesen folytonos.

Definíció. A fenti f összegfüggvény simaságának vizsgálatához vezessük be a

$$\Delta f(x,y;h,k) := f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)$$

operátort.

Definíció. Egy folytonos f függvény a $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ Lipschitz osztályhoz tartozik valamely $\alpha,\beta>0$-ra (lásd [11]-ben), ha létezik olyan kizárólag az f függvénytől, valamint az α és β számoktól függő C konstans, melyre fennáll, hogy

$$|\Delta f(x,y;h,k)| \le Ch^\alpha k^\beta \quad \text{minden} \quad x,y \quad \text{és} \quad h,k>0 \quad \text{esetén.} \tag{2.3}$$

Amennyiben

$$\lim_{h,k\to 0} h^{-\alpha}k^{-\beta}\Delta f(x,y;h,k) = 0$$

is teljesül, méghozzá x-ben és y-ban egyenletesen, akkor azt mondjuk, hogy f a $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ kis Lipschitz osztályhoz tartozik.

A folytonos f függvény a $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ Zygmund osztályhoz tartozik valamely $\alpha,\beta>0$-ra (lásd [2]-ben), ha

$$\left|\Delta^2 f(x,y;h,k)\right| \le Ch^\alpha k^\beta \quad \text{minden} \quad x,y \quad \text{és} \quad h,k>0 \quad \text{esetén,} \tag{2.4}$$

ahol C ismét csak az f függvénytől, α-tól és β-tól függ. Ha ráadásul

$$\lim_{h,k\to 0} h^{-\alpha}k^{-\beta}\Delta^2 f(x,y;h,k) = 0$$

is fennáll x-ben és y-ban egyenletesen, akkor f a $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ kis Zygmund osztályhoz tartozik.

A következő tételekben fogalmaztuk meg a legfőbb eredményeinket.

2.1. Tétel. *Legyen $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ komplex számok olyan kettős sorozata, amelyre*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_{m,0}| < \infty \quad \textit{és} \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{0,n}| < \infty. \tag{2.5}$$

Ha valamely $0<\alpha,\beta\le 2$ és $C_{\alpha,\beta}$ konstansokra

$$\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}} \sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N} m^2n^2\,|c_{m,n}| \le C_{\alpha,\beta} \qquad (M,N=1,2,\dots) \tag{2.6}$$

fennáll, akkor (2.1) *teljesül és a* (2.2)*-ben definiált f összegfüggvény a* $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

2.2. Tétel. *Ha a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat teljesíti a* (2.5) *és a* (2.6) *feltételeket valamely* $0 < \alpha, \beta < 2$ *esetén, és ráadásul*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}} \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} m^2 n^2 |c_{m,n}| = 0$$

is fennáll, akkor a (2.2)*-ben definiált* f *függvény a* $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

Az előző két tétel feltételeinek erősítésével hasonló elegendőségi tételeket mondtunk ki az f összegfüggvény $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ és $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ osztályokba való tartozására $0 < \alpha, \beta \le 1$ esetén.

2.3. Tétel. *Legyen* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *olyan sorozat, amelyre* (2.5) *teljesül. Ha valamely* $0 < \alpha, \beta \le 1$ *számokra és* $C^{(3)}_{\alpha,\beta}$ *konstansra fennáll, hogy*

$$\frac{1}{M^{1-\alpha}N^{1-\beta}} \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} |mnc_{m,n}| \le C^{(3)}_{\alpha,\beta} \qquad (M,N = 1,2,\ldots), \tag{2.7}$$

akkor (2.1) *is teljesül és a* (2.2)*-ben megadott* f *összegfüggvény a* $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

2.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra a* (2.5) *és a* (2.7) *feltételek teljesül és ráadásul*

$$\lim_{M,N\to\infty} \frac{1}{M^{1-\alpha}N^{1-\beta}} \sum_{|m|\le M} \sum_{|n|\le N} |mnc_{m,n}| = 0$$

is fennáll valamely $0 < \alpha, \beta < 1$ *esetén. Ekkor a* (2.2)*-ben definiált* f *összegfüggvény a* $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ *osztályhoz tartozik.*

3. Trigonometrikus sorok Riemann szummálhatósága

Definíció. Legyen $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ komplex számok kettős sorozata. Ha a

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} e^{i(mx+ny)} \tag{3.1}$$

kettős trigonometrikus sor formálisan integráljuk mindkét változója szerint kétszer, akkor az

$$\begin{aligned} R(x,y) := c_{0,0}\frac{x^2y^2}{4} - \frac{y^2}{2}\sum_{|m|\ge 1} c_{m,0}\frac{e^{imx}}{m^2} - \frac{x^2}{2}\sum_{|n|\ge 1} c_{0,n}\frac{e^{inx}}{n^2} + \\ + \sum_{|m|\ge 1}\sum_{|n|\ge 1} c_{m,n}\frac{e^{i(mx+ny)}}{m^2n^2}, \qquad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

függvényhez jutunk. Ha a $\{c_{m,n}\}$ sorozat korlátos, akkor az imént kapott (3.2)-ben szereplő sorok abszolút és egyenletesen is konvergensek. Tehát az R függvény minden $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ pontban jól definiált, és az egyenletes konvergencia következtében folytonos is.

Definíció. Vezessük be a

$$\begin{aligned}\Delta^2 R(x,y;2u,2v) :=& R(x+2u,y+2v)+R(x-2u,y+2v)+R(x+2u,y-2v)+\\ &+R(x-2u,y-2v)-2R(x+2u,y)-2R(x,y+2v)-\\ &-2R(x-2u,y)-2R(x,y-2v)+4R(x,y) \qquad (u,v>0)\end{aligned}$$

jelölést. Ha a

$$\lim_{u,v\to 0} \frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u,2v)}{16u^2v^2} = s$$

határérték létezik, akkor azt mondjuk, hogy a (3.1) sor az (x,y) pontban Riemann módszere szerint összegezhető (röviden: Riemann összegezhető), és Riemann összege s.

Az alábbi két állítás Riemann [15]-ben publikált tételeinek kétváltozós megfelelője.

3.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozatra*

$$\lim_{|m|+|n|\to\infty} c_{m,n} = 0 \tag{3.3}$$

teljesül. Ha valamely (x,y) *pontban a* (3.1) *kettős sor regulárisan konvergens, akkor Riemann módszere szerint is összegezhető, és a két értelemben vett összeg megegyezik.*

3.2. Tétel. *Ha* (3.3) *teljesül, akkor*

$$\frac{\Delta^2 R\,(x,y;2u,2v)}{16uv} \to 0 \qquad (u,v\to 0)$$

is fennáll, ráadásul (x,y)*-ban egyenletesen.*

4. Trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatósága

A trigonometrikus sorok Lebesgue összegezhetőségének fogalmát Zygmund a sor egyszeri formális integrálásával kapott függvény szimmetrikus differenciálhányados függvényének létezésével definiálta (lásd [21, 1. kötet, 321. old.]). Megjegyezzük, hogy a Lebesgue szummálhatóság kettős sorokra való kiterjesztését Bagota Mónika és Móricz Ferenc közös [1] cikkükben publikálták. A terület legfrissebb eredményeit Móricz [13] cikkében olvashatjuk, amely trigonometrikus integrálok Lebesgue szummálhatóságát tárgyalja.

Definíció. Legyen az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ függvény Lebesgue értelemben integrálható $\mathbb{R}^2$ minden korlátos $[a,b]\times[c,d]$ téglalap alakú részhalmazán, jelölésben: $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Tekintsük az

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt,\quad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{4.1}$$

kettős trigonometrikus integrált a

$$I_{S,T}(x,y):=\int_{|s|<S}\int_{|t|<T} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt \qquad (S,T>0)$$

szimmetrikus részintegráljaival. Azt mondjuk, hogy a (4.1) kettős integrál a $(x,y)\in$ $\in\mathbb{T}^2$ pontban Pringsheim értelemben konvergál az l számhoz, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\rho=\rho(\varepsilon)>0$ küszöbszám, amelyre

$$|I_{S,T}(x,y)-l|<\varepsilon,\quad \text{ha}\quad S,T>\rho.$$

Definíció. Tekintsük a (4.1)-ben szereplő integrandus x és y változója szerinti formális integrálásával kapott

$$L(x,y):=\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\frac{e^{i(sx+ty)}}{i^2st}dsdt,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

függvényt. A (4.1) integrált Lebesgue értelemben összegezhetőnek nevezzük egy $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ pontban, ha a

$$\begin{aligned}\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk}:=&\frac{1}{4hk}\big(L(x+h,y+k)-L(x-h,y+k)\\&-L(x+h,y-k)+L(x-h,y-k)\big)\to l \qquad (0<h,k\to 0)\end{aligned}$$

véges határérték létezik. Ekkor az l számot a (4.1) integrál Lebesgue összegének nevezzük.

Az alábbi tétel a Móricz [13] cikkében található tétel kettős integrálokra vett megfelelője.

4.1. Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *függvényre a*

$$s \int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, ds)$$

és a

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{S} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |sf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.2}$$

feltétel teljesül, továbbá a

$$t \int_{\mathbb{R}} f(s,t)ds \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$$

és a

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{|s|<S} \int_{|t|<T} |tf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.3}$$

feltétel is fennáll, akkor a (4.1)*-ben definiált kettős integrál Lebesgue értelemben létezik és a*

$$\lim_{h,k\to 0} \left(\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} - I_{1/h,1/k}(x,y) \right) = 0 \qquad (h,k>0)$$

konvergencia egyenletes (x,y)*-ban.*

Más szóval, a (4.2) *és a* (4.3) *feltételek mellett a* (4.1) *kettős integrál akkor és csakis akkor összegezhető Lebesgue értelemben egy adott* (x,y) *pontban, ha Pringsheim értelemben is konvergens* (x,y)*-ban, és a két értelemben vett összeg megegyezik.*

Megjegyzés. Külön kiemeljük, hogy az előző tétel az $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ függvények

$$\hat{f}(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t) e^{-i(sx+ty)} dsdt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

módon definiált kettős Fourier transzfoltmáltjaira is alkalmazható, amennyiben a (4.2) és a (4.3) feltételek teljesülnek.

Summary

In the first part of the dissertation we study the smoothness of the sum of single and double trigonometric series. We give sufficient conditions under which the sum function of the series belongs to one of the Lipschitz or Zygmund classes in the single-variable cases, or belongs to one of the multiplicative Lipschitz or Zygmund classes in the two-variable cases.

In the third chapter we extend the concept of the Riemann summability from single to double trigonometric series. We give sufficient conditions which guarantee that if the double series converges regularly at some point, then it is also Riemann summable to the same limit.

In the fourth chapter we define the Lebesgue summability of double trigonometric integrals. We give sufficient conditions under which the double integral is Lebesgue summable at some point if and only if it converges in Pringsheim's sense at to the same limit.

This disertation is based on the following papers of the author: [5], [6], [7] and [8].

1. Smoothness of the sum of single trigonometric series

Definition. Let $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ be a sequence of complex numbers such that

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < \infty.$$

Then the trigonometric series

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

converges absolutely and uniformly. Denote the sum of it by $f(x)$:

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \qquad x \in \mathbb{T} := [-\pi,\pi)\ . \tag{1.1}$$

Due to the uniform convergence the function $f(x)$ is continuous.

Definition. We consider periodic functions $f : \mathbb{T} := [-\pi,\pi) \to \mathbb{C}$. The function f is said to belong to the Lipschitz class $\mathrm{Lip}(\alpha)$ for some $\alpha > 0$ if there exists a constant C depending on f and α such that

$$|\Delta f(x,h)| := |f(x+h) - f(x)| \le Ch^\alpha$$

for all x and $h > 0$.

We say that f belongs to the little Lipschitz class $\mathrm{lip}(\alpha)$ if

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha} |f(x+h) - f(x)| = 0$$

uniformly in x.

A continuous function f is said to belong to the Zygmund class $\mathrm{Zyg}(\alpha)$ for some $\alpha > 0$ if there exists a constant C depending on f and α such that

$$\left|\Delta^2 f(x,h)\right| := |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| \le Ch^\alpha$$

for all x and $h > 0$.

We say that a continuous function f belongs to the little Zygmund class $\mathrm{zyg}(\alpha)$ for some $\alpha > 0$ if

$$\lim_{h\to 0} h^{-\alpha} |f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = 0$$

uniformly in x.

Zygmund gived sufficient conditions to ensure that the sum $f(x)$ of series (1.1) belongs to the class Zyg(1) or zyg(1) (see in [21, Vol. I, p. 320.]). We generalized these theorems for any arbitrary $0 < \alpha \le 2$. Our new results are formulated in the following two theorems.

Theorem 1.1. *Let $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. If for some $0 < \alpha \le 2$ we have*

$$\frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_n| \le C_\alpha \qquad (N = 1,2,\dots), \tag{1.2}$$

where C_α is a constant, then the series (1.1) *converges absolutely and uniformly, and its sum $f(x) \in \mathrm{Zyg}(\alpha)$.*

Theorem 1.2. *Let* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$. *If for some* $0 < \alpha < 2$ *we have*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{2-\alpha}} \sum_{|n|\le N} n^2 |c_n| = 0, \tag{1.3}$$

then $f(x) \in \mathrm{zyg}(\alpha)$.

Remark. If $0 < \alpha < 1$, then

$$\mathrm{Lip}(\alpha) = \mathrm{Zyg}(\alpha) \quad \text{and} \quad \mathrm{lip}(\alpha) = \mathrm{zyg}(\alpha).$$

Consequently, under condition (1.2) and (1.3) the sum function $f(x)$ also belongs to the Lipschitz classes $\mathrm{Lip}(\alpha)$ or $\mathrm{lip}(\alpha)$.

In the case $\alpha = 1$ we have $\mathrm{Lip}(1) \subset \mathrm{Zyg}(1)$. We were able to prove only the following.

Theorem 1.3. *If* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ *is such that*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| < \infty,$$

then the sum $f(x) \in \mathrm{Lip}(1)$.

2. Smoothness of the sum of double trigonometric series

Definition. Let $\{c_{m,n}\}_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \subset \mathbb{C}$ be a double sequence of complex numbers such that

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{m,n}| < \infty. \tag{2.1}$$

Then the double trigonometric series

$$f(x,y) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n} e^{i(mx+ny)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{T}^2 \tag{2.2}$$

converges absolutely and uniformly. Consequently, its sum $f(x,y)$ is uniformly continuous.

Definition. We define the difference operator Δ as follows

$$\Delta f(x,y;h,k) := f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y), \quad h,k > 0.$$

Definition. We recall that a continuous function f is said to belong to the multiplicative Lipschitz class $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ for some $\alpha,\beta>0$ (see in [11]) if

$$|\Delta f\,(x,y;h,k)|\le Ch^{\alpha}k^{\beta}\quad\text{for all}\quad x,y\quad\text{and}\quad h,k>0,$$

where the constant C depends only on f, α and β.

We say that f belongs to the little Lipschitz class $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$ if

$$\lim_{h,k\to 0} h^{-\alpha}k^{-\beta}\Delta f\,(x,y;h,k)=0$$

uniformly in x,y.

We recall that a continuous function f is said to belong to the multiplicative Zygmund class $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$ for some $\alpha,\beta>0$ (see in [2]) if

$$\left|\Delta^2 f\,(x,y;h,k)\right|\le Ch^{\alpha}k^{\beta}\quad\text{for all}\quad x,y\quad\text{and}\quad h,k>0,$$

where the constant C depends only on f, α and β.

We say that f belongs to the little Zygmund class $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$ if

$$\lim_{h,k\to 0} h^{-\alpha}k^{-\beta}\Delta^2 f\,(x,y;h,k)=0$$

uniformly in x and y.

Our main new results are stated in the following theorems.

Theorem 2.1. *Suppose* $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ *is such that*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}|c_{m,0}|<\infty\quad\textit{and}\quad\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_{0,n}|<\infty. \tag{2.3}$$

If for some $0<\alpha,\beta\le 2$

$$\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}}\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N} m^2n^2\,|c_{m,n}|\le C_{\alpha,\beta}\qquad (M,N=1,2,\ldots), \tag{2.4}$$

where $C_{\alpha,\beta}$ *is a constant depending only on* α *and* β*, then condition* (2.1) *is satisfied and the function* f *defined in* (2.2) *belongs to the class* $\mathrm{Zyg}(\alpha,\beta)$.

Theorem 2.2. *Suppose* $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ *is such that conditions* (2.3) *and* (2.4) *are satisfied for some* $0<\alpha,\beta<2$*, and, in addition, if*

$$\lim_{M,N\to\infty}\frac{1}{M^{2-\alpha}N^{2-\beta}}\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N} m^2n^2\,|c_{m,n}|=0,$$

then the function f *defined in* (2.2) *belongs to the class* $\mathrm{zyg}(\alpha,\beta)$.

Under stronger conditions analogous theorems can also be proved for the Lipschitz classes $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$ and $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$, where $0<\alpha,\beta\le 1$.

Theorem 2.3. *Suppose $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ is such that condition (2.3) is satisfied. If for some $0<\alpha,\beta\le 1$*

$$\frac{1}{M^{1-\alpha}N^{1-\beta}}\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N}|mnc_{m,n}|\le C^{(3)}_{\alpha,\beta}\qquad (M,N=1,2,\dots), \tag{2.5}$$

where $C^{(3)}_{\alpha,\beta}$ is a constant depending only on α and β, then condition (2.1) is satisfied and the function f defined in (2.2) belongs to the class $\mathrm{Lip}(\alpha,\beta)$.

Theorem 2.4. *Suppose $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ is such that conditions (2.3) and (2.5) are satisfied for some $0<\alpha,\beta<1$, and, in addition, if*

$$\lim_{M,N\to\infty}\frac{1}{M^{1-\alpha}N^{1-\beta}}\sum_{|m|\le M}\sum_{|n|\le N}|mnc_{m,n}|=0$$

then the function f defined in (2.2) belongs to the class $\mathrm{lip}(\alpha,\beta)$.

3. Riemann summability of trigonometric series

Definition. Let $\{c_{m,n}\}\subset\mathbb{C}$ be a double sequence of complex numbers. Integrating the double series

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_{m,n}e^{i(mx+ny)} \tag{3.1}$$

formally twice with respect to both x and y, we obtain the double series

$$\begin{aligned}R(x,y):=c_{0,0}\frac{x^2y^2}{4}-\frac{y^2}{2}\sum_{|m|\ge1}c_{m,0}\frac{e^{imx}}{m^2}-\frac{x^2}{2}\sum_{|n|\ge1}c_{0,n}\frac{e^{inx}}{n^2}+&\\ +\sum_{|m|\ge1}\sum_{|n|\ge1}c_{m,n}\frac{e^{i(mx+ny)}}{m^2n^2},\quad (x,y)\in\mathbb{T}^2.&\end{aligned} \tag{3.2}$$

If the sequence $\{c_{m,n}\}$ is bounded, then the double series in (3.2) converges absolutely and uniformly. Consequently, the function R is defined at every $(x,y)\in\mathbb{T}^2$, and it is continuous.

Definition. We introduce the notation

$$\begin{aligned}\Delta^2 R(x,y;2u,2v) :=& R(x+2u,y+2v)+R(x-2u,y+2v)+R(x+2u,y-2v)+\\ &+R(x-2u,y-2v)-2R(x+2u,y)-2R(x,y+2v)-\\ &-2R(x-2u,y)-2R(x,y-2v)+4R(x,y) \qquad (u,v>0).\end{aligned}$$

If the limit

$$\lim_{u,v\to 0} \frac{\Delta^2 R(x,y;2u,2v)}{16u^2v^2} = s$$

exists, then the double series (3.1) is said to be summable at the point (x,y) by the Riemann method of summation (or briefly: Riemann summable) to the sum s.

The next two theorems are counterparts of Riemann's theorems published in [15].

Theorem 3.1. *Suppose that* $\{c_{m,n}\} \subset \mathbb{C}$ *is such that*

$$\lim_{|m|+|n|\to\infty} c_{m,n} = 0. \tag{3.3}$$

If the double series (3.1) *converges regularly at some point* (x,y) *to a finite sum* s*, then it is also Riemann summable to* s*.*

Theorem 3.2. *If condition* (3.3) *is satisfied, then uniformly in* (x,y) *we have*

$$\frac{\Delta^2 R(x,y;2u,2v)}{16uv} \to 0 \qquad (u,v\to 0).$$

4. Lebesgue summability of trigonometric integrals

Definition. Let $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ be such that it is integrable in Lebesgue's sense over any bounded rectangle $[a,b]\times[c,d]$ of $\mathbb{R}^2$, in symbols: $f\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. We consider the double trigonometric integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt, \quad (x,y)\in\mathbb{T}^2 \tag{4.1}$$

with its symmetric rectangular partial integrals

$$I_{S,T}(x,y) := \int_{|s|<S}\int_{|t|<T} f(s,t)e^{i(sx+ty)}dsdt \qquad (S,T>0).$$

We say that the double integral (4.1) converges in Pringsheim's sense at a point $(x,y)\in\mathbb{T}^2$ to the limit l, if for every $\varepsilon>0$ there exists $\rho=\rho(\varepsilon)>0$ such that

$$|I_{S,T}(x,y)-l|<\varepsilon, \quad \text{if} \quad S,T>\rho.$$

Definition. A formal integration of the integrand in (4.1) with respect to both x and y gives

$$L(x,y) := \iint_{\mathbb{R}^2} f(s,t)\frac{e^{i(sx+ty)}}{i^2 st} dsdt, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.2}$$

The definition of $L(x,y)$ is interpreted formally, since the double integral in (4.2) may not exist in Lebesgue's sense.

We say that the integral (4.1) is Lebesgue summable at some point $(x,y) \in \mathbb{T}^2$ to the finite limit l if

$$\begin{aligned} \frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} :=& \frac{1}{4hk}\left(L(x+h,y+k) - L(x-h,y+k)\right. \\ &\left. - L(x+h,y-k) + L(x-h,y-k)\right) \to l \qquad (0 < h,k \to 0). \end{aligned}$$

Our main result is formulated in the following theorem.

Theorem 4.1. *If* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *is such that*

$$s\int_{\mathbb{R}} f(s,t)dt \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, ds)$$

and

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{S}\int_{|s|<S}\int_{|t|<T} |sf(s,t)|\, dsdt = 0 \tag{4.3}$$

as well as

$$t\int_{\mathbb{R}} f(s,t)ds \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$$

and

$$\lim_{S,T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{|s|<S}\int_{|t|<T} |tf(s,t)|\, dsdt = 0, \tag{4.4}$$

then the double integral in (4.1) *exists in Lebesgue's sense and we have uniformly in* (x,y) *that*

$$\lim_{h,k\to 0}\left(\frac{\Delta L(x,y;h,k)}{4hk} - I_{1/h,1/k}(x,y)\right) = 0 \qquad (h,k > 0).$$

In other words, under conditions (4.3) *and* (4.4) *the double integral* (4.1) *is Lebesgue summable at some point* (x,y) *to a finite limit if and only if* (4.1) *converges in Pringsheim's sense at* (x,y) *to the same limit.*

Remark. We recall that the Fourier transform $\hat{f}$ of a function $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ is defined by

$$\hat{f}(x, y) := \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbb{R}^2} f(s, t) e^{-i(sx+ty)} ds dt, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.5}$$

Clearly, Theorem 4.1. can be reformulated in terms of the Lebesgue summability of the double integral in (4.5) under the same conditions (4.3) and (4.4).