

Rácsseták bijektív leszámplálása

Doktori értekezés

NAGY GÁBOR

Témavezető:

DR. HAJNAL PÉTER

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem

Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet

Szeged

2014

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. A bijektív kombinatorika	3
1.2. A dolgozat felépítése és tartalma	4
2. Páros indexű Catalan-számok konvolúciója	6
2.1. Shapiro konvolúciós formulája	6
2.2. A kombinatorikus bizonyítás	7
2.3. A bijektív bizonyítás	16
2.4. Alkalmazások	31
2.5. További problémák	38
3. Diszkrét véletlen séták egy konvexitási tulajdonsága	41
3.1. Bevezetés	41
3.2. A diszkrét konvexitási lemma elemi bizonyítása	43
3.3. Magasabbról indított véletlen séták	48
3.4. Analóg eredmények magasabb dimenziókban	55
Összefoglalás	58
Summary	61
Köszönetnyilvánítás	64
Jelölések, fogalmak	65
Irodalomjegyzék	66

1. FEJEZET

Bevezetés

1.1. A bijektív kombinatorika

Ebben a dolgozatban a klasszikus értelemben vett kombinatorika, az összeszámlálási kombinatorika területéhez tartozó problémákat vizsgálunk. A tekintett problémák megoldásához tehát véges halmazok elemszámának pontos meghatározására, illetve esetünkben ezen számosságok összehasonlítására lesz szükség. (Elsősorban kombinatorikus azonosságokkal és egyenlőtlenségekkel foglalkozunk majd.) A legegyszerűbb munkamódszert választjuk; két halmaz elemszámának egyenlőségét mindig bijekció megadásával igazoljuk. Az összeszámlálási kombinatorika ezzel a módszerrel dolgozó alága a bijektív kombinatorika, mely a kombinatorikus alapmennyiségekhez (például a binomiális együtthatókhoz, vagy a Catalan-számokhoz) egy-egy „reprezentáló” halmazt társít, és az alapmennyiségekre kizárólag ezen halmazok elemszámaként tekint, így a konkrét számértékeken végzett algebrai manipulációk helyett csakis e halmazok segítségével érvel. (Például ha egy összeszámlálási problémára az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható a válasz, akkor ahelyett, hogy egy könnyen felírható alakból kiindulva algebrai átalakításokkal „kiszámoljuk”, hogy a válasz $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, célunk bijekciót megadni a megszámlolandó objektumok halmaza és az $\{1, \dots, n\}$ halmaz k elemű részhalmazainak halmaza között.) A keresett bijekcióval szemben hallgatólagos elvárás, hogy egyszerűen legyen definiálva (azaz az elemek képét meg lehessen kapni egy hatékony determinisztikus algoritmussal), és a leképezés bijekció volta könnyen ellenőrizhető legyen. Bár kétségtelen, hogy esztétikai szempontok is szerepet játszanak, természetesen ez a célkitűzés nem öncélú: Egyrészt nehezen vitatható, hogy ez a legletisztultabb, legszemléletesebb módja a kombinatorikus érvelésnek, míg az algebrai manipulációk – a többi, mélyebb technikával együtt – bizonyos szempontból inkább elfedik a „lényegét”, akkor is, amikor esetleg ezt az utat érezzük egyszerűbbnek „mechanikussága” miatt. Másrészt, a modernebb módszerek mellett továbbra is van létjogosultsága az elemi megközelítésnek, hiszen sokszor gyorsabban célt érhetünk elemi eszközök felhasználásával (esetleg más módszereket kiegészítve), mint nélkülük. Erre, és az ellenkezőjére is látunk majd példát a későbbi fejezetekben. Megfigyelhető tendencia ugyanakkor, hogy a nehezebb összeszámlálási problémákra általában előbb születnek nem kombinatorikus bizonyítások, mint bijektívek. Ez abból is fakad, hogy a modernebb módszerek jellemzően univerzálisabbak, míg egy alkalmas bijekció (bijektív bizonyítás) megkonstruálására nincs bevált „recept”, pusztán korábban látott trükkök, hasonló problémák, esetleg más módszerekkel kiszámolt tények jelenthetnek segítséget. (Léteznek ugyan olyan eljárások, melyekkel bizonyos nem bijektív módszerek bijektívizálhatók, de így általában kombinatorikus indoklásként nehezen elfogad-

ható, bonyolult bijekciókat kapunk. A partíciós azonosságok vizsgálatában lényeges előrelépés történt ebből a szempontból, melyre a következő bekezdésben még visszatérünk.) Az összeszámlálási kombinatorika egy átfogó összefoglalójaként – a bijektív és egyéb módszerek tekintetében is – Stanley kétkötetes *Enumerative Combinatorics* könyvét ajánljuk [31, 32].

A bijektív kombinatorika fontos megoldatlan problémáit sok esetben a más módszerekkel igazolt eredmények szolgáltatják; talán a leghíresebb ezek közül a két Rogers–Ramanujan-azonosság [24, 22], melyek Schur és MacMahon észrevétele szerint ekvivalens alakban megfogalmazhatók egyszerűnek látszó és tetszetős, egész számok partícióira vonatkozó kombinatorikus összefüggésekként is, azonban „szép” bijektív bizonyítást máig nem sikerült találni rájuk. (Garsia és Milne [9] bijektív bizonyítása meglehetősen összetett, de az általuk kidolgozott „involúciós elv” [8] és annak továbbfejlesztése segítségével partíciós azonosságok egész sorát lehet bijektíven bizonyítani, számítógépes segédlettel. Ez az elv jelentős változást hozott a partíciók vizsgálatában, de elfogadottsága nem egységes. A témáról Wilf [34] és Pak [20] munkáiban olvashatunk bővebben, pro és kontra véleményekkel együtt.)

1.2. A dolgozat felépítése és tartalma

Az értekezésben két különböző témakört vizsgálunk a bijektív kombinatorika keretein belül, melyek kapcsolódási pontja a rácsséták megjelenése és felhasználása. (Informálisan, egy d -dimenziós rácsséta a \mathbb{Z}^d diszkrét tér pontjain sétál, egy pontból mindig annak valamelyik szomszédjára, azaz valamelyik hozzá legközelebb eső pontra lépve.)

A 2. fejezet a [16] és [12] publikációkat dolgozza fel. Ebben a részben a Stanley által is népszerűsített [29, 30]

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n$$

konvolúciós azonossággal foglalkozunk, ahol C_n az n -edik Catalan-számot jelöli. (A Catalan-számok a kombinatorika alapvető mennyiségei, melyekről bőszeges ismeretanyagot tartalmaz Stanley [32] könyve és Koshy [13] monográfiája.) A fenti tetszetős formula Shapiro 2002-es eredménye [13; 123. o.], melyet nem nehéz formális hatványsorokkal igazolni, Shapiro is így érvelt. Megjegyezzük, hogy komputer-algebrai rendszerekkel is dolgozhatunk: A hipergeometrikus azonosságok számítógépes ellenőrzésére is használható Zeilberger-algoritmus tömör, matematikailag korrekt bizonyítást talál. (Az algoritmus részletes leírása megtalálható a [21] könyvben.) Bár ezekkel a módszerekkel egy-egy kompakt indokláshoz jutunk, az azonosság kombinatorikus jelentése rejtve marad. Tekintve, hogy egy kombinatorikus alapmennyiségeket tartalmazó, nagyon egyszerű formuláról van szó, természetesen fogalmazódik meg a kombinatorikus bizonyítás igénye. (Kombinatorikus bizonyítás alatt azt értjük, hogy felmutatunk egy olyan összeszámlálási problémát, amelyet a bal és jobb oldal egyaránt megválaszol, így a két oldal szükségképpen egyenlő.)

Rövid történeti áttekintés után a 2. fejezetben ismertetünk egy egyszerű kombinatorikus, majd pedig egy arra épülő teljesen bijektív bizonyítást, ezzel megoldjuk a Stanley által kitűzött feladatot [29; 194. probléma]. Bizonyításaink speciális utak kettős leszámolásán alapulnak. Ezután áttekintjük módszerünk néhány következményét, melyek közül a legfontosabb a középső binomiális együtthatók alternáló konvolúciós formulájának [28] új elemi bizonyítása. A témakör lezárásaként bemutatjuk a Shapiro-azonosság bizonyításában szereplő összeszámlálási probléma általánosítását, és sejtésként fogalmazzuk meg az általunk helyesnek gondolt választ.

A [18] és [17] publikációkon alapuló 3. fejezetben áttérünk egy másik területre; itt diszkrét véletlen sétákkal foglalkozunk, mely témakörhöz Spitzer klasszikus [27] könyvét ajánljuk elméleti kiegészítésként. Az ismertetett problémát az előzőekkel ellentétben kombinatorikus megfontolások nélkül nehezebb kezelni, mint elemi kombinatorikai eszközök igénybevételével. A probléma Totik Vilmostól származik, aki harmonikus mértékekkel kapcsolatos kutatásai során fogalmazta meg 2012-ben a következő lemmát (és bizonyította elsőként, Fourier-analitikus eszközökkel): Ha p_k jelöli annak a valószínűségét, hogy a négyzetrács $(0, 1)$ pontjából induló szimmetrikus véletlen séta a $(k, 0)$ pontban lép először az x -tengelyre ($k \in \mathbb{Z}$), akkor a $(p_k)_{k=0}^{\infty}$ sorozat konvex. Erre az állításra egy elemi, számolásmentes bizonyítást adunk, melyben a lényegi részt, bizonyos sétahalmazok elemszámára vonatkozó egyenlőtlenséget, a halmazok közötti injektív leképezés megadásával igazoljuk. (Emellett más megoldási módszereket is vázolunk.) Ezután megvizsgáljuk, hogy mit állíthatunk abban az esetben, ha távolabbi kezdőpontból indítjuk a véletlen sétát, majd rávilágítunk módszerünk korlátaira is. Végül eredményeink magasabb dimenziós analogonjait tárgyaljuk.

Az értekezés végén részletesebben is összefoglaljuk a szakmai fejezetek tartalmát, magyarul és angolul egyaránt.

A könnyebb olvashatóság érdekében törekedtünk arra, hogy minél kevesebb jelölést vezessünk be. A több helyen is használt saját jelöléseinket, illetve a nem egységes szakirodalom alapján többféleképpen is érthető jelöléseket a 65. oldalon gyűjtöttük össze. Ugyanitt megismételtük a dolgozatban szereplő különböző út- és sétatípusok definícióit egy helyen.

A dolgozat fő tételeit és lemmáit teljes részletességgel bizonyítjuk, további irodalom igénybevételére nincs szükség megértésükhöz. (Néhány fontos hivatkozott eredményt bizonyítással együtt ismertetünk.) Abban az esetben, ha egy korábban már részletezett gondolat megismétlésére lenne szükség, akkor csak vázoljuk, hogy hasonlóan járhatunk el, mint korábban. A fő témánkhöz szorosan nem kapcsolódó állításoknál nem leszünk mindig ilyen alaposak, egyes részek igazolása az olvasóra marad (ezek rutinszerűen elvégezhetők). A kiegészítő részek kidolgozottsága tükrözi a szerző matematikai ízlését is.

Páros indexű Catalan-számok konvolúciója

2.1. Shapiro konvolúciós formulája

A Catalan-számok fontos szerepet töltenek be az összeszámlálási kombinatorikában, hiszen számos probléma megoldása során természetes módon megjelennek: Sloane és Plouffe [26] szerint „valószínűleg a leggyakrabban előforduló kombinatorikus mennyiségek a binomiális együtthatók után”. Szépségükön túl ezért is indokolt minél mélyebb megértésük, melyet sok matematikus tűzött ki célul. A vonatkozó kutatások intenzitását mutatja, hogy Stanley, a bijektív kombinatorika egyik nemzetközileg elismert vezetője, több mint 200 ekvivalens Catalan-szám definíciót gyűjtött össze alapművé vált Enumerative Combinatorics könyvében [32, 30]. A következő alfejezetben ezek közül az egyik legstandardabb kombinatorikus értelmezést választjuk majd bizonyításaink kiindulópontjának, most azonban csak a „számszerűsített” definíciót közöljük:

Definíció. Az $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ számot az n -edik *Catalan-számnak* nevezzük és C_n -nel jelöljük. \diamond

Közismert, hogy a Catalan-számokra teljesül a következő konvolúciós azonosság (amely a $C_0 = 1$ kezdőértékkel együtt rekurzív definícióként is felfogható):

$$\sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1}. \quad (2.1)$$

Ez egy egyszerű állítás, amely a bevezető kombinatorika kurzusok tananyagához tartozik, kombinatorikus bizonyítással együtt. L. Shapiro 2002-ben észrevette, hogy a *páros indexű Catalan-számok* analóg konvolúciója is elegáns zárt alakra hozható:

2.1. Tétel. (Shapiro [30; 6.C18])

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n. \quad (2.2)$$

Shapiro formuláját nem nehéz igazolni a Catalan-számok generátorfüggvényének segítségével [13; 123. o.], azonban első ránézésre meglepő módon a formula kombinatorikus jelentését jóval nehezebb megfejtetni, ez a feladat egy évtizedig megoldatlan maradt. Shapiro nem is publikálta az azonosságot és a [13]-beli egyszerű levezetést; a formula akkor kapott nagyobb publicitást, amikor kombinatorikus módon megoldatlan problémaként bekerült Stanley Bijective Proof Problems on-line

feladatgyűjteményébe [29; 194. probléma], és a már említett Enumerative Combinatorics könyv Catalan addendum nevet viselő elektronikus kiegészítésébe [30; 6.C18].

Az első lényeges előrelépés 2011-ben történt: Andrews ekkor publikálta az azonosság egy q -analóg változatát, háromféle bizonyítással [1]. A legmélyebb módszer egy általánosabb azonosságot bizonyít q -hipergeometrikus összegzési tételek segítségével, a második gondolatmenet is generátorfüggvényekre támaszkodik, a harmadik megoldás pedig kombinatorikus, amely a szerző megjegyzése szerint „nem nehéz (csak fárasztó) módon bijektív bizonyítássá transzformálható”.

2012-ben sikerült elemi kombinatorikai eszközökkel igazolnom Shapiro formuláját [16], továbbá a bizonyítás egyetlen nem bijektív lépését is bijektívvé tettük Hajnal Péterrel 2013-ban [12]. A bizonyítások speciális utak összeszámlálásán alapulnak. Ezek e fejezet fő eredményei, melyeket a 2.2. és 2.3. alfejezetekben részletesen ismertetek. Ezután néhány alkalmazást mutatok be a 2.4. alfejezetben, végül megfogalmazok egy sejtést a 2.5. alfejezetben, amely a bijektív bizonyítás kidolgozása után természetes módon vetődött fel.

Mielőtt rátérnénk a bizonyításokra, megjegyezzük, hogy a (2.1) és (2.2) összefüggések ismeretében könnyen kiszámolható a páratlan indexű Catalan-számok konvolúciója:

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2k+1}C_{2n-2k-1} = \sum_{i=0}^{2n} C_i C_{2n-i} - \sum_{k=0}^n C_{2k}C_{2n-2k} = C_{2n+1} - 4^n C_n,$$

amely tovább nem egyszerűsíthető „algebrailag”, tehát nem várható a fenti érvelésnél egyszerűbb zárt alakra hozás. Ez azt sugallja, hogy Shapiro azonosságának bizonyításához az indexek párosságát fel kell használni.

2.2. A kombinatorikus bizonyítás

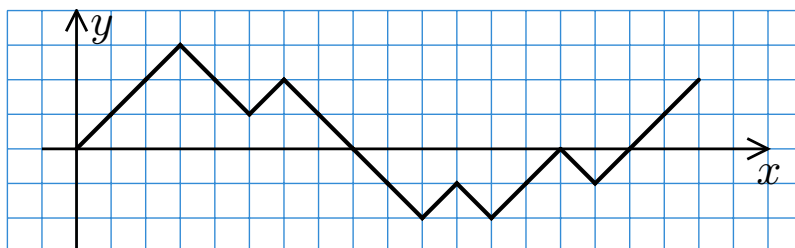
Bizonyos utak kettős leszámlálásával fogjuk igazolni Shapiro formuláját. Ehhez bevezetjük a páros-metsző utak fogalmát, amiből a páros indexű Catalan-számok olyan nemstandard kombinatorikus értelmezését kapjuk, amely közvetlenül elvezet egy alkalmas összeszámlálási problémához. A nem hivatkozott eredmények a [16] cikkemben kerültek publikálásra.

Formuláinkban többször megjelennek majd $\binom{2n}{n}$ alakú binomiális együtthatók a Catalan-számok mellett, így a könnyebb áttekinthetőség érdekében a $B_n := \binom{2n}{n}$ jelöléssel élünk, és azt mondjuk, hogy B_n az n -edik *középső binomiális együttható*.

Először definiáljuk az alfejezet alapfogalmait:

Definíció. Egy *út* felfelé (\nearrow) és lefelé (\searrow) lépések véges sorozata. Egy út *hosszán* a lépései számát értjük. A 0 hosszú utat ε -nal jelöljük. \diamond

Megjegyzés. Az utakat 2-dimenzióban szemléltetjük a 2.1. ábrán látható módon a standard koordináta-rendszerben. Tehát a definícióban szereplő \nearrow megfelelője egy $(1, 1)$ lépés, a \searrow megfelelője pedig egy $(1, -1)$ lépés. Használni fogjuk a szemléletes jelentésből eredő fogalmakat (például x -tengelymetszet, végpont stb.). A szemléltetéshez az út kezdőpontját tetszőlegesen megválaszthatjuk; amennyiben másként nem jelezzük, az utak az origóból indulnak. \diamond



2.1. ábra: Példa egy útra

A „(2-dimenziós) út” helyett élhetnénk az „1-dimenziós séta” szóhasználattal is, ahol az x -tengely megfelelője a diszkrét idő, az y -tengelyé pedig az aktuális pozíció lenne. Így talán koherensebbé válna a dolgozat nyelvezete, mégis inkább a szakirodalomban elterjedt elnevezéseket választottam.

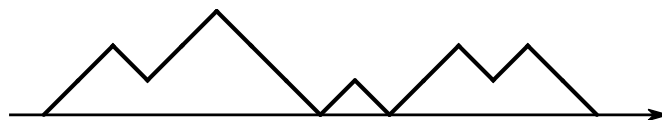
Egy n hosszú (absztrakt) út felfogható úgy is, mint egy n elemű alaphalmaz egy részhalmazának karakterisztikus vektora, csak 0 és 1 számok helyett a \nearrow és \searrow szimbólumokkal kódolva. Tehát az utakkal voltaképpen csupán szokatlan módon vizualizáljuk a véges halmazokat. És mint látni fogjuk, ez a szemléltetés sokszor hasznosnak bizonyul mind problémamegoldás, mind leírás szempontjából. (Például a 2.4. alfejezetben ismertetett, középső binomiális együtthatókra vonatkozó (2.5) konvolúciós formula esetén is utak segítségével érvel a legelémibb kombinatorikus bizonyítás, ami meglepőbb, mint Catalan-számokat tartalmazó formulák esetén.)

Az utak (illetve lépések) összefűzésére intuitív jelölést használunk: Például ha L és R egy út, akkor a $\nearrow L \searrow R$ út a következő lépéssorozatot jelenti: felfelé lépés, L lépései, lefelé lépés, R lépései (természetesen ebben a sorrendben, valamint az L -beli, illetve R -beli lépések sorrendjének megtartásával).

Az alábbiakban néhány speciális útosztályt definiálunk:

Definíció. Egy út

- *kiegyensúlyozott*, ha az x -tengelyen végződik, azaz ha ugyanannyi felfelé lépést tartalmaz, mint lefelé lépést;
- *nemnegatív*, ha soha nem megy az x -tengely alá;
- *sehósem-zéró*, ha soha sem lép rá az x -tengelyre (a kezdőpontot leszámítva);
- *Dyck-út*, ha nemnegatív és kiegyensúlyozott.



2.2. ábra: Egy Dyck-út

Ha egy P kiegyensúlyozott út hossza $2k$, akkor azt is mondjuk, hogy P félhossza k . (Minden kiegyensúlyozott út páros sok lépésből áll, hiszen a felfelé és lefelé lépések száma megegyezik.) \diamond

Az imént definiált speciális utak száma ismert tetszőleges rögzített hosszra:

2.2. Állítás.

- a) A $2n$ hosszú (n félhosszú) kiegyensúlyozott utak száma B_n .
- b) A $2n$ hosszú nemnegatív utak száma B_n .
- c) A $2n$ hosszú sehohsem-zéró utak száma B_n .

Bizonyítás. a) Triviális, hiszen az n felfelé és n lefelé lépés sorrendjét tetszőlegesen megválaszthatjuk.

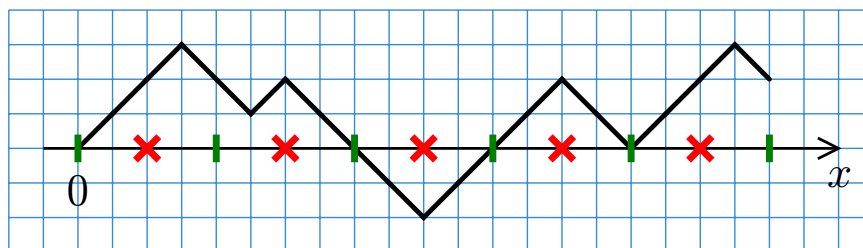
b-c) Folklor állítások, több bizonyításuk is olvasható például [6]-ban. Bijekció megadásával igazolható, hogy a $2n$ hosszú nemnegatív utak száma megegyezik a $2n$ hosszú kiegyensúlyozott utak számával. Az pedig könnyen látható (szintén bijektíven), hogy a b)-beli és c)-beli utak száma megegyezik. \square

A következő állítás a BSc kombinatorika tananyag része, melyet a Catalan-számok kombinatorikus definíciójának tekintünk:

2.3. Állítás. A $2n$ hosszú (n félhosszú) Dyck-utak száma C_n .

A bevezető alfejezetben említettük, hogy Stanley több mint 200 másik interpretációt gyűjtött össze. Shapiro azonosságán gondolkodva azonban előbb-utóbb úgy érezzük, hogy egyik sem segít közvetlenül (néhány sorban) megtalálni a bijektív bizonyítást. A megoldáshoz elvezető interpretáció abban különbözik ezektől, hogy csak páros indexű Catalan-számokra vonatkozik, azaz megragadja az indexek párosságát. Nézzük tehát a kulcsdefiníciót és a főlemmát:

Definíció. Egy út páros-metsző, ha az x -tengelyt csak 4-gyel osztható (abszcisszájú) pontokban metszi. \diamond



2.3. ábra: Egy páros-metsző út

Megjegyzés. Metszéspont alatt nemcsak átmetszést értünk, hanem annak tekintünk minden x -tengelyre lépést. Egy (origóból induló) út x -tengelymetszetei természetesen csak páros számok lehetnek, hiszen minden lépés után megváltozik az aktuális magasság paritása. Páros-metsző utak esetén tehát minden második lehetséges x -tengelymetszet tiltott (lásd 2.3. ábra). Innen ered a kissé mesterkéltné páros-metsző elnevezés is: csak a párosodik metszéspontok megengedettek a szóba jöhetőek közül. \diamond

A következő lemmában adjuk meg a páros indexű Catalan-számok ígért kombinatorikus leírását. A lemma története kalandos: 1981-ben American Mathematical Monthly problémaként [25] tűzték ki. (Megfogalmazása csak annyiban tér el lemmánkétól, hogy 45° -kal elforgatott szemléletben dolgozik.) 1983-ban közöltek

egy hibás, majd 1985-ben egy kombinatorikus, de nem bijektív megoldást [3]. Ekkor a szerkesztők újra kitűzték a feladatot, bijektív bizonyítást kérve, és 1987-ben megjelent Nichols et al. bijektív bizonyítása [19]. Ezután a lemma elfelejtődött, legalábbis erre utal, hogy Shapiro formuláját sokáig nem sikerült kombinatorikusan igazolni. (Ugyanis ahogy a legtöbb ilyen problémánál, itt is a megfelelő összeszámlálási feladat megtalálása a nagyobb nehézség, nem a megoldása.) Érdekesség, hogy a lemmát Monthly-feladatként szintén Shapiro tűzte ki, és Stanley Enumerative Combinatorics könyvében is szerepel [32; 230. o., 6.22], csak nem a Catalan-számok ekvivalens definícióit tartalmazó hosszú listában, amely talán a legolvasottabb összefoglaló a témában, hanem külön feladatként. A 2012-es [16] cikkem írásakor ezekről az előzményekről nem volt tudomásom, és sajnos hivatkozás nélkül fogalmaztam meg és bizonyítottam a lemmát (amely bizonyítás egyébként megegyezik Nicholsék megoldásával), és így is jelent meg; ez a 2014-ben megjelent [12] cikkünkben tisztázásra került.

2.4. Lemma. (Nichols et al. [19]) *A $4n$ hosszú ($2n$ félhosszú) kiegyensúlyozott páros-metsző utak száma C_{2n} .*

Bizonyítás. $n = 0$ esetén nyilvánvalóan teljesül az állítás, rögzítsünk tehát egy tetszőleges $n \geq 1$ számot. Jelölje a $4n$ hosszú Dyck-utak halmazát \mathcal{D} , a lemmabeli utak halmazát pedig \mathcal{E} . Mivel $|\mathcal{D}| = C_{2n}$ a Catalan-számok standard interpretációja (2.3. Állítás) szerint, ezért elegendő egy bijekciót megadnunk \mathcal{D} és \mathcal{E} között.

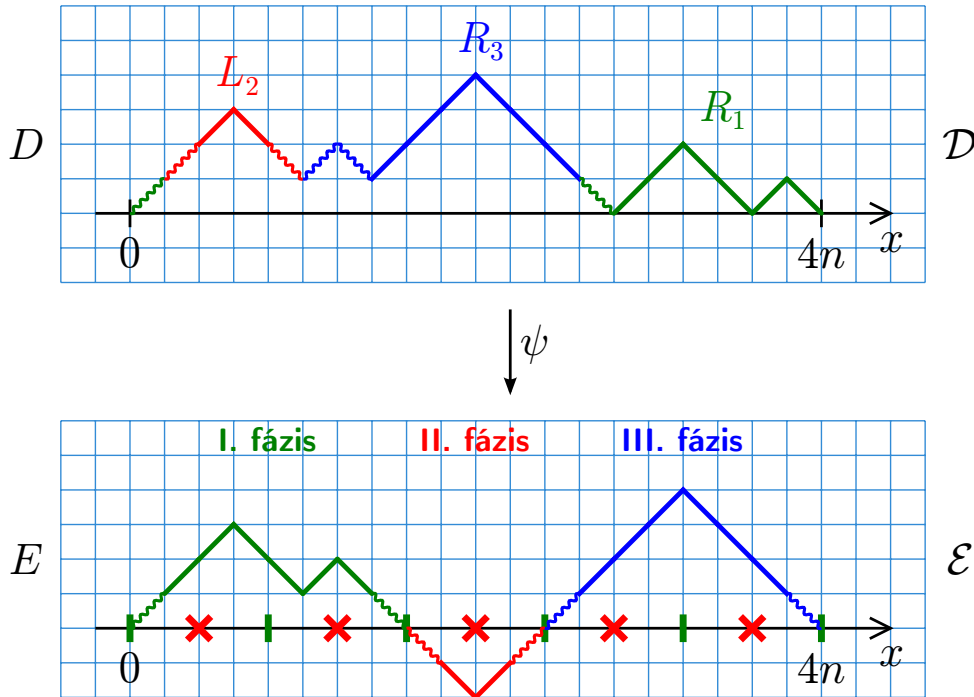
Tekintsünk egy tetszőleges \mathcal{D} -beli D Dyck-utat. D képének definiálásához először keressük meg az első olyan lefelé lépést D -ben, amellyel az út visszatér az x -tengelyhez. Ha ezt a lépést a kezdőlépéssel együtt eltávolítjuk D -ből, akkor D két Dyck-útra esik szét: Jelölje L a bal oldalt, R pedig a jobb oldalt. (Például L azért Dyck-út, mert egyrészt nyilván kiegyensúlyozott, másrészt az eltávolított lefelé lépés volt az első olyan lépés D -ben, mely az 1 magasság alá lép, így a nemnegativitás is teljesül.) Mivel D félhossza páros ($2n$), és egy lépéspárt eltávolítottunk D -ből, ezért L és R közül az egyik félhossza páros, a másiké páratlan (mert ezen félhosszok összege páratlan, $2n - 1$).

1. eset: Ha R a páratlan félhosszú Dyck-út, akkor D képe legyen $\phi(D) := \nearrow R \searrow \phi(L)$, ahol $\phi(L)$ -t úgy kapjuk, hogy a fenti eljárást rekurzív módon megismételjük az L páros félhosszú Dyck-útra (mint „új D ”-re) mindaddig, amíg a 0 hosszú úthoz nem jutunk, amelyre $\phi(\varepsilon) := \varepsilon$. (A fenti L - R -felbontást minden páros, de nem nulla félhosszú Dyck-útra el tudjuk végezni.)

2. eset: Ha L a páratlan félhosszú Dyck-út, akkor D képe legyen $\phi(D) := \searrow \bar{L} \nearrow \phi(R)$, ahol \bar{L} az L út x -tengelyre vonatkozó tükörképe (azaz \bar{L} -t a felfelé és lefelé lépések felcserélésével nyerjük L -ből), és $\phi(R)$ -et úgy kapjuk, hogy a fenti eljárást rekurzív módon megismételjük a páros félhosszú R -re.

Tehát az imént tulajdonképpen egy, a páros félhosszú Dyck-utak halmazán értelmezett ϕ függvényt definiáltunk rekurzív módon. (A definíció értelmes, mert az 1. és 2. esetben is páros félhosszú az a Dyck-út, amelyre újból kiértékeljük ϕ -t.) A $\psi := \phi|_{\mathcal{D}}$ függvény lesz a keresett bijekció. ψ definíciója és a bijektivitás ellenőrzése legkönnyebben a 2.4. ábra alapján követhető (a felső D út képe az alsó E út):

A kódolás I. fázisában a zöld hullámos lépéspárral osztjuk fel D -t L_1 -re és R_1 -re (a fenti L és R jelöléshez hozzávettük a fázis sorszámát indexként, de L_1 -et nem jelöltük az ábrán), melyek közül a zöld hagyományos vonallal rajzolt R_1 Dyck-út a páratlan félhosszú, így az 1. eset alapján végezzük el a kódolást, mellyel a képként adódó E út zöld lépéseit kapjuk meg, és következik a II. fázis. A II. fázisban a D -ből megmaradó (nem zöld) útban a piros hullámos lépéspár adja az L_2 - R_2 -felbontást, melyek közül az L_2 a páratlan félhosszú, így most a 2. eset alapján kódolunk. Végül a III. fázisban ismét egy 1. esetbeli kódolás következik a D -ből megmaradt útra, kék színekkel jelölve, és ezzel „átdaraboltuk” az egész D utat az E úttá ($L_3 = \varepsilon$), az algoritmus leáll.



2.4. ábra: A lemmát bizonyító bijekció

Hátravan még annak végiggondolása, hogy ψ valóban $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ bijekció. Könnyű látni, hogy tetszőleges $D \in \mathcal{D}$ esetén $\psi(D) \in \mathcal{E}$ teljesül: ψ hossztartása világos (azaz $4n$ hosszú utat kapunk a kódolás végén), minden fázisban az L - R -felosztást adó lépéspárt és a páratlan félhosszú utat „másoljuk át” $\psi(D)$ -be, akár az 1. eset, akár a 2. eset szerint kódolunk. (Formálisan: ϕ hossztartása az argumentum félhossza szerinti indukcióval egyszerűen igazolható. Hasonlóan bizonyítható a ψ bijektivitásához szükséges összes többi tulajdonság, mi azonban indukcióra való hivatkozás helyett inkább a szemléletesebb megfogalmazásokat választjuk.) $\psi(D)$ felépítésekor minden fázisban egy kiegyensúlyozott utat „ragasztunk” a már felépített részhez, ezért egy kiegyensúlyozott utat kapunk végeredményül is. Mivel minden fázisban olyan (hagyományos vagy tükrözött) Dyck-utat ragasztunk, amely a kezdő- és végpontot leszámítva nem metszi az x -tengelyt, ezért minden fázisban két szomszédos x -tengelymetszet közötti részt építünk fel $\psi(D)$ -ben. Az algoritmus minden

fázisban páratlan félhosszú Dyck-utat választ, tehát bármely két zérushely között a hozzáadott („hullámos”) lépéspárral együtt páros félhosszú, azaz 4-gyel osztható hosszúságú Dyck-út áll (esetleg tükrözve). Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $\psi(D)$ páros-metsző út is, azaz $\psi(D) \in \mathcal{E}$.

Belátjuk, hogy tetszőleges $E \in \mathcal{E}$ útnak egyetlen inverz képe van. Az x -tengelymetszetek felosztják a E -t (esetleg tükrözött) Dyck-utakra, melyek első és utolsó lépését eltávolítva páratlan félhosszú Dyck-utakat kapunk, amelyek a fázisoknak felelnek meg. Abból, hogy egy ilyen Dyck-út tükrözött vagy sem, kitalálhatjuk, hogy a feltételezett ősképbeli megfelelője bal oldali vagy jobb oldali út volt-e az adott fázisban (azaz az 1. vagy 2. eset szerint kódoltunk-e), és ennek segítségével balról jobbra haladva egyértelműen felépíthetjük az inverz képet. Például a 2.4. ábrán látható E út esetén tudjuk, hogy az első x -tengelymetszetig tartó rész felel meg az 1. fázisnak, amelyben 1. esetbeli konverzió történt (mivel nem volt tükrözés), ebből ψ definíciója alapján világos, hogy ezt a „kezdőszeletet” akkor és csak akkor kaphatjuk meg, ha a feltételezett ősképvonatkozó része megegyezik az ábra felső felén látható D Dyck-út zöld színű részével, és a két zöld hullámos lépés között nincs x -tengelyre vivő lépés benne. (Itt felhasználjuk azt is, hogy a zöld hagyományos vonallal rajzolt út félhossza páratlan, máskülönben a kódoló algoritmus a másik részutat választaná a fázisban.) Ezután a kék lépések „ősét” tudjuk egyértelműen meghatározni, és így tovább balról jobbra (fázisról fázisra) haladva megtalálhatjuk az inverz képet, unicitási érveléssel együtt. Ezzel beláttuk ψ bijektivitását, így bizonyításunk teljes. \square

Megjegyzés. Informálisan fogalmazva, a \mathcal{D} -beli és az \mathcal{E} -beli utakat is páratlan félhosszú Dyck-utakból építhetjük fel, és bijekciónk a \mathcal{D} -beli utak felépítésének „balra/jobbra” döntéseit konvertálja át az \mathcal{E} -beli utak felépítésének „felfelé/lefelé” döntéseivé.

A lemmabeli utak számát X_n -nel, a C_{2n} Catalan-számot Y_n -nel jelölve könnyen látható, hogy az $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ és $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat is kielégíti a következő rekurziót (és emiatt megegyeznek):

$$\begin{aligned} Z_0 &= 1; \\ Z_n &= 2 \sum_{k=1}^n C_{2k-1} Z_{n-k}, \quad \text{ha } n \geq 1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

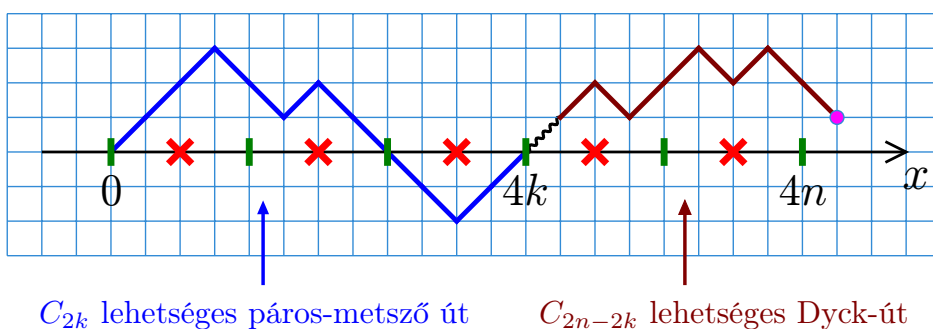
Ugyanis a lemmabeli utakat első nem-origó x -tengelymetszetük szerint osztályozva azonnal megkapjuk, hogy $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ valóban kielégíti a rekurziót, az $(Y_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatra vonatkozóan pedig (2.3) csak a standard (2.1) Catalan-rekurzió átfogalmazása. Ez egy rekurzív bizonyítás, melyre azonban jóval egyszerűbb rátalálni, hiszen (2.3) természetes módon adódik, amikor megpróbáljuk összeszámolni a lemmabeli utakat. (A lemma történeti áttekintésében említett első kombinatorikus bizonyítás is így érvel [3].) Valójában ψ kódolásunk ezt a rekurzív gondolatmenetet „bijektivizálja”. \diamond

A fenti lemmából azonnal következik a páros indexű Catalan-számok konvolúciójának egy kombinatorikus interpretációja:

2.5. Következmény.

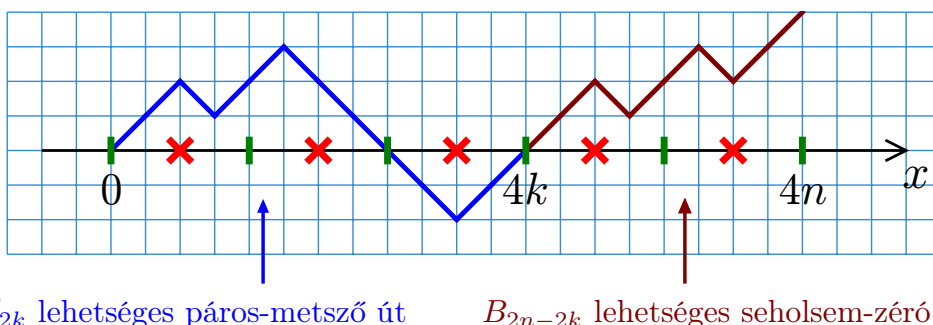
- a) $\sum_{k=0}^n C_{2k}C_{2n-2k}$ az origóból a $(4n + 1, 1)$ pontba menő páros-metsző utakat számolja meg.
 b) $\sum_{k=0}^n C_{2k}B_{2n-2k}$ a $4n$ hosszú páros-metsző utakat számolja meg.

Bizonyítás. a) Csoportosítsuk a szóban forgó utakat az utolsó x -tengelymetszetük szerint. (Ez értelmes, hiszen az origó mindig x -tengelymetszet.) $C_{2k}C_{2n-2k}$ azon lemmabeli utakat számolja meg, melyek utolsó x -tengelymetszete $4k$, hiszen C_{2k} lehetőség van páros-metsző módon eljutni az origóból a $(4k, 0)$ pontba a 2.4. Lemma alapján, majd ezután felfelé lépésnek kell következnie (hiszen az x -tengelyre inntől nem léphetünk rá, és a végpont az x -tengely fölött van), végül a $(4k + 1, 1)$ pontból C_{2n-2k} -féleképpen juthatunk el a $(4n + 1, 1)$ pontba x -tengelyre lépés nélkül a 2.3. Állítás szerint (hiszen ez a szakasz nyilvánvalóan egy $4n - 4k$ hosszú Dyck-út további megkötés nélkül). A formula valóban a lemmabeli utakat számolja meg, mivel a páros-metsző tulajdonság miatt az utolsó x -tengelymetszet mindig $4k$ alakú valamely $k \in \{0, \dots, n\}$ számra.



2.5. ábra: Az a) állítás bizonyítása

b) Analóg módon adódik az állítás. $C_{2k}B_{2n-2k}$ azon lemmabeli utakat számolja meg, amelyek utolsó x -tengelymetszete $4k$, ugyanis ezen utak $(0, 0) \rightsquigarrow (4k, 0)$ szakasza ismét C_{2k} -féleképpen valósulhat meg (2.4. Lemma), majd a $(4k, 0)$ ponttól B_{2n-2k} -féleképpen folytatódhatnak seholsem-zéró módon (2.2. Állítás). \square



2.6. ábra: A b) állítás bizonyítása

A 2.5. Következményben szereplő két konvolúció között szoros kapcsolat van:

2.6. Lemma.

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} B_{2n-2k} = (n+1) \sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k}.$$

Bizonyítás. Felhasználva a $B_j = (j+1)C_j$ összefüggést,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n C_{2k} B_{2n-2k} &= \sum_{k=0}^n C_{2k} (2n-2k+1) C_{2n-2k} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n C_{2k} (2n-2k+1) C_{2n-2k} + \sum_{k=0}^n C_{2n-2k} (2k+1) C_{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (2n+2) C_{2k} C_{2n-2k} = (n+1) \sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k}. \quad \square \end{aligned}$$

Megjegyzés. B_j -t és C_j -t alkalmas összeszámlálási problémára adott válaszként értelmezve (2.2. és 2.3. Állítás) a fenti számolás átkonvertálható bijektív bizonyítássá, ha felhasználjuk a $B_j = (j+1)C_j$ tény egy bijektív – pl. [6]-ban olvasható – bizonyítását. Erre azonban nincs szükség, ugyanis Shapiro azonosságának bijektív bizonyításakor nem fogjuk használni ezt a lemmát a 2.3. alfejezetben; kombinatorikus bizonyításunkban pedig a fő nem bijektív gondolat a 2.7. Lemma lesz, így a fenti számolás kiküszöbölése sem segítene. \diamond

Shapiro (2.2) konvolúciós formuláját $(n+1)$ -gyel szorozva, a 2.6. Lemma és az $(n+1)C_n = B_n$ összefüggés alapján a

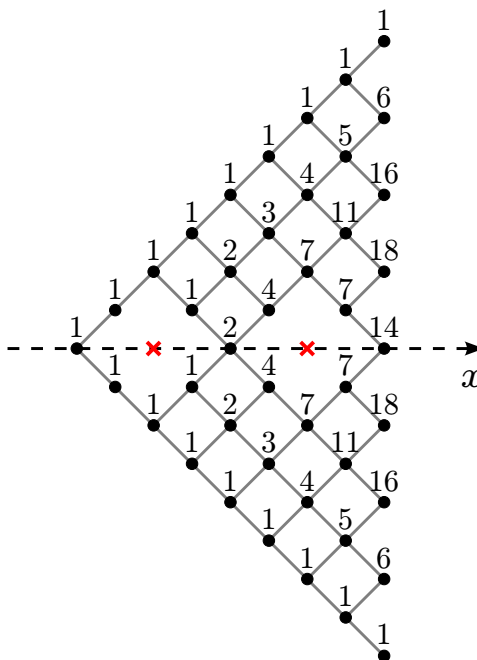
$$\sum_{k=0}^n C_{2k} B_{2n-2k} = 4^n B_n \tag{2.4}$$

ekvivalens alakot kapjuk.

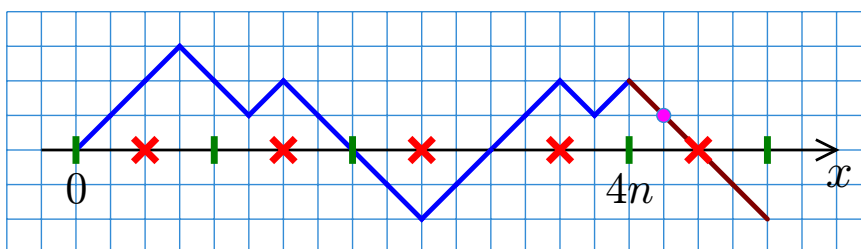
A Shapiro-formula igazolásához elegendő a 2.5. Következmény a) pontjában szereplő utakat másképp megszámlolni, $4^n C_n$ választ eredményező módon. Hasonlóan, a (2.4) ekvivalens alakhoz pedig a b) pontban szereplő utak számáról kell belátni, hogy $4^n B_n$.

Tulajdonképpen a 2.7. ábrán szemléltetett középiskolás módszerrel számoljuk össze a kérdéses utakat: Ha az ábrán látható módon minden szóba jöhető rácspontra fel akarjuk jegyezni, hogy hányféleképpen lehet oda páros-metsző módon eljutni az origóból, akkor az ábra balról jobbra haladva „kitölthető”, ugyanis minden pont címkéje a bal oldali szomszédok címkéinek összege (a szomszédságot a berajzolt vonalak szemléltetik), hiszen először ezen szomszédok valamelyikébe kell eljutni, és utána egy egyértelműen meghatározott lépés következik a vizsgált pontba. (Ez az egyszerű gondolat elvezet egy hatékony algoritmushoz, mellyel gyorsan ki lehet számolni számítógép segítségével ezeket az értékeket nagyobb koordinátájú rácspontokra is. De erre nem lesz szükségünk.) Eddigi eredményeink a következőképpen

foglalhatók össze: Tudjuk, hogy a $(4n, 0)$ pont címkéje C_{2n} a 2.4. Lemma szerint; a $(4n + 1, \pm 1)$ pont címkéje $L_n := \sum_{k=0}^n C_{2k}C_{2n-2k}$, a $4n$ -edik oszlopban lévő címkék összege pedig $S_n := \sum_{k=0}^n C_{2k}B_{2n-2k}$ a 2.5. Következmény szerint. Azt kell megmutatnunk, hogy $L_n = 4^n C_n$, vagy ami ezzel ekvivalens, hogy $S_n = 4^n B_n$. A fő észrevétel az, hogy S_{n+1} kiszámolható S_n és L_n segítségével, azaz a 2.6. Lemma $L_n = \frac{1}{n+1}S_n$ összefüggését figyelembe véve S_n segítségével, amiből egy rekurzív kiszámítási módot kapunk a keresett S_n , illetve L_n értékekre.



$16S_n$ különböző utat kapunk. Ezek közül pontosan azok nincsenek \mathcal{P}_{n+1} -ben, melyek rálépnek a $(4n + 2, 0)$ pontra. (Hiszen ezen utak első $4n$ lépése \mathcal{P}_n -beli utat alkot, így ott soha nem következhet be tiltott x -tengelyre lépés.) A $(4n + 2, 0)$ pontra a $(4n + 1, 1)$ és $(4n + 1, -1)$ pontok valamelyikéről lehet lehet rálépni. Tehát a „rossz” meghosszabbítások pontosan azok az utak, amelyek először *páros-metsző módon* eljutnak a $(4n + 1, 1)$ pontba, majd egy (tiltott) lefelé lépés és két tetszőleges lépés következik; továbbá ezen utak x -tengelyre vonatkozó tükörképei – utóbbiak adják meg azokat a rossz utakat, amelyek a $(4n + 1, -1)$ pontból lépnek a tiltott $(4n + 2, 0)$ pontra.



2.8. ábra: Egy rossz meghosszabbítás

Az első bekezdésben végiggondoltuk, hogy az origóból a $(4n + 1, 1)$ pontba menő páros-metsző utak száma $\frac{1}{n+1}S_n$, tehát a rossz meghosszabbítások száma $\frac{8}{n+1}S_n$. (A 8-as szorzó a két tetszőleges záró lépésből és a tükrözött utak miatti duplázódásból jön.) Eddigi észrevételeinket összegezve, az $S_n = 4^n B_n$ indukciós feltevés felhasználásával

$$S_{n+1} = 16S_n - \frac{8}{n+1}S_n = 16 \cdot 4^n B_n - \frac{8}{n+1}4^n B_n = 4^{n+1} B_{n+1}$$

adódik, amit bizonyítani kellett. (Az utolsó egyenlőség egyszerű számolással ellenőrizhető a $B_n = \binom{2n}{n}$ „számszerűsített” definícióból.) \square

2.3. A bijektív bizonyítás

A következőkben a (2.2) Shapiro-azonosság bijektív bizonyítását ismertetjük. Érvelésünk következményeként a Catalan-számok egy új interpretációját is megkapjuk, melyet az alfejezet végén külön állításban is megfogalmazunk. Ezeket az eredményeket témavezetőmmel, Hajnal Péterrel közös cikkben publikáltam [12].

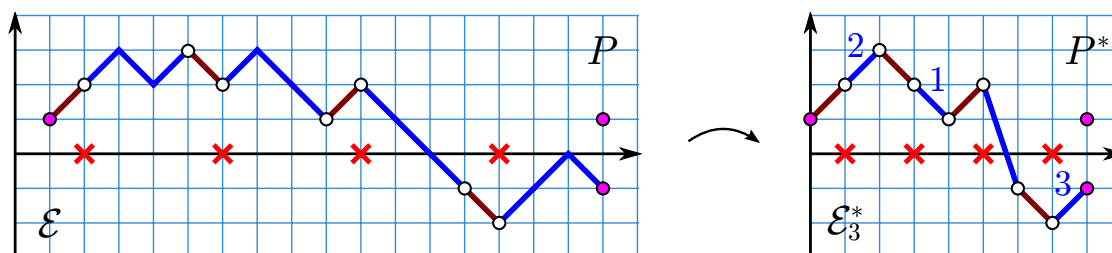
Az előző alfejezet kombinatorikus gondolatmenetét tesszük teljesen bijektívvé. A Catalan-számok Dyck-utas kombinatorikus definíciójából (2.3. Állítás) kiindulva bijektív módon igazoltuk a 2.5.a Következményt (a lényegi rész a 2.4. Lemma bizonyítása volt), tehát már csak a 2.7.a Lemma bijektív bizonyítása maradt hátra. Ez több lépésből fog állni, és előrebocsátjuk, hogy mindig bijekció megadásával fogunk érvelni, de ezt nem hangsúlyozzuk a továbbiakban. Az „elegendő a következőt bizonyítani” célokat lemmaként fogalmazzuk meg, melyek bizonyítása a hosszú gondolatmenet végén, a 2.10. Lemma igazolásával zárul majd le. Természetesen továbbra is használjuk az előző alfejezetben bevezetett fogalmakat és jelöléseket,

ezenfelül élünk az „ $A \rightsquigarrow B$ út” rövidítéssel is az „ A pontból B pontba menő út” leírására.

Rögzítsük n -et. Azt kell igazolnunk bijektíven, hogy az origóból a $(4n + 1, 1)$ pontba menő páros-metsző utak száma $4^n C_n$. Célunkat technikai okokból átfogalmazzuk. Ha eltekintünk az első lépéstől, azt is mondhatjuk, hogy azt kell belátni, hogy az $(1, 1) \rightsquigarrow (4n + 1, 1)$ páros-metsző és az $(1, -1) \rightsquigarrow (4n + 1, 1)$ páros-metsző utak száma összesen $4^n C_n$. Az $(1, -1) \rightsquigarrow (4n + 1, 1)$ páros-metsző utak száma szimmetriai okokból nyilvánvalóan megegyezik az $(1, 1) \rightsquigarrow (4n + 1, -1)$ páros-metsző utak számával. (Az x -tengelyre való tükrözés bijekciót létesít a két úthalmaz között.) Tehát a következő alakban is megfogalmazhatjuk a bizonyítandót (a két lehetséges végpont tömör jelölésével):

2.8. Lemma. *Az $(1, 1) \rightsquigarrow (4n + 1, \pm 1)$ páros-metsző utak száma $4^n C_n$.*

A lemmabeli utak halmazát \mathcal{E} jelöli a továbbiakban; a 2.9. ábra bal oldalán \mathcal{E} egy útja látható ($n = 4$ esetén). Csak minden negyedik lépés tudja megsérteni a páros-metsző tulajdonságot: az első, ötödik, kilencedik stb. lépések azok, amelyekkel az x -tengely egy tiltott pontjára léphetünk az $(1, 1)$ pontból indulva. Ez motiválja a lépések következő felosztását és tömörítési eljárásunkat: Egy tetszőleges, $(1, 1)$ kezdőpontú, $4n$ hosszú P útra $o_1 e_1 o_2 e_2 \dots o_n e_n$ alakban tekintünk, ahol o_i egy hagyományos felfelé vagy lefelé lépés, e_i pedig egy három lépésből álló út, azaz $o_i \in \{\nearrow, \searrow\}$ és $e_i \in \{\nearrow, \searrow\}^3$. Minden e_i lépéshármaszt egyetlen e_i^* szimbólummal (általánosított lépéssel) kódolunk: a $\searrow \nearrow \nearrow$, $\nearrow \searrow \nearrow$ és $\nearrow \nearrow \searrow$ lépéssorozatokat rendre a \nearrow_1 , \nearrow_2 és \nearrow_3 általánosított lépésekkel; a $\nearrow \searrow \searrow$, $\searrow \nearrow \searrow$ és $\searrow \searrow \nearrow$ lépéssorozatokat a \searrow_1 , \searrow_2 és \searrow_3 általánosított lépésekkel; továbbá a $\nearrow \nearrow \nearrow$ és $\searrow \searrow \searrow$ lépéssorozatokat rendre az $(1, 3)$ és $(1, -3)$ általánosított lépésekkel helyettesítjük; így a $P^* := o_1 e_1^* o_2 e_2^* \dots o_n e_n^*$ általánosított úthoz jutunk. Az $\nearrow_1, \dots, \searrow_3$ lépéseket (*3-címkézett rövid lépéseknek*), az $(1, 3)$ és $(1, -3)$ lépéseket pedig *hosszú lépéseknek* nevezzük. Azokat az általánosított utakat, amelyekben minden *párosadik* lépés vagy hosszú lépés, vagy 3-címkézett rövid lépés (és minden páratlanadik lépés címkézetlen rövid lépés), *tömörített utaknak* nevezzük. Eljárásunk tehát a P úthoz egy P^* tömörített utat rendel, sőt, bijekciót létesít a $4n$ hosszú utak halmaza és a $2n$ hosszú tömörített utak halmaza között, mivel az $e_i \mapsto e_i^*$ átalakításokat definiáló szabály invertálható. (Értelemszerűen az általánosított utak hossza alatt is a lépések számát értjük.)



2.9. ábra: Tömörítés

A fenti tömörítési eljárást a 2.9. ábra illusztrálja (egy \mathcal{E} -beli útra). Természetesen az ábra jobb oldalán látható módon szemléltetjük (és értelmezzük) az eredményül kapott P^* általánosított utat. (P^* -ot a $(0, 1)$ pontból indítva rajzoljuk le, tehát P kiindulópontjához képest 1 egységgel eltoljuk balra.) Informálisan, a P^* tömörített útban megtartjuk P „veszélyes” lépéseit, azaz a bordó színnel jelölt, $(4t + 1)$ -edik lépéseket ($t \in \mathbb{N}_0$); a veszélyes lépések 3 lépésből álló (kék színnel jelölt) blokkokra osztják P -t, ezeket tömören írjuk le P^* -ban: „összenyomjuk” őket 1 lépéssé (a blokkok kezdő magasságáról egyetlen lépéssel a végpontbeli magasságra lépünk), a címkék pedig azt az információt tárolják, hogy egy rövid lépés a három szóba jöhető blokk közül melyikből jött létre. Tehát tulajdonképpen P^* csupán P egy másfajta „lerajzolása”.

Az \mathcal{E} -beli utakat jellemezhetjük tömörített alakjukkal is. Egy $4n$ hosszú P út pontosan akkor \mathcal{E} -beli, ha P^* -ra teljesülnek a következők:

- (i) A $(0, 1)$ pontból indulva a $(2n, 1)$ vagy $(2n, -1)$ pontban végződik;
- (ii) minden párosadik lépése vagy hosszú lépés, vagy 3-címkézett rövid lépés (és minden páratlanadik lépése címkézetlen rövid lépés);
- (iii) soha nem lép az x -tengelyre (de „átugorhatja”).

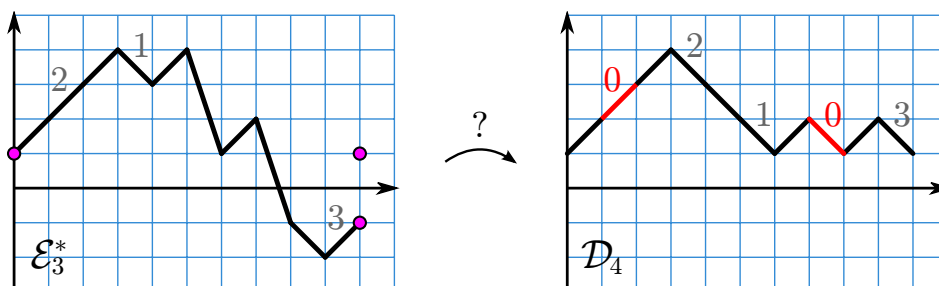
A (ii) feltételben csak elismételtük a tömörített út definíciójául szolgáló alaptulajdonságokat. Eljárásunk egy $4n$ hosszú útból $2n$ hosszú tömörített utat készít, és P^* végpontjának magassága megegyezik P végpontjának magasságával, ebből kapjuk az (i) feltételt. A (iii) feltétel pedig a páros-metsző tulajdonság megfogalmazása a P^* tömörített útra: P pontosan akkor páros-metsző, ha a $(4t + 1)$ -edik („bordó”) lépések nem lépnek rá az x -tengelyre, azaz ha P^* -ban a páratlanadik („bordó”) lépések nem lépnek rá az x -tengelyre (a párosadik lépések paritási okok miatt soha nem léphetnek rá).

Az (i)-(iii) feltételeknek eleget tevő utak halmazát \mathcal{E}_3^* jelöli a továbbiakban. A fentiek alapján tömörítési eljárásunk bijekciót létesít \mathcal{E} és \mathcal{E}_3^* között, így elegendő az $|\mathcal{E}_3^*| = 4^n C_n$ egyenlőséget bizonyítani a 2.8. Lemma igazolásához:

2.9. Lemma. *Az (i)-(iii) feltételeknek eleget tevő (általánosított) utak száma $4^n C_n$.*

A bijektív bizonyításhoz szükséges $4^n C_n$ elemű halmazt címkézett Dyck-utak segítségével definiáljuk. Azt mondjuk, hogy egy Dyck-út *4-címkézett*, ha minden *párosadik* lépése meg van címkézve a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmazból (a páratlanadik lépések pedig címkézetlenek). Jelölje a $2n$ hosszú 4-címkézett Dyck-utak halmazát \mathcal{D}_4 . Mivel egy $2n$ hosszú Dyck-út n darab páros pozícióban álló lépését 4^n -féleképpen címkézhetjük meg 4 címkével, ezért $|\mathcal{D}_4| = 4^n C_n$, tehát elegendő megadnunk egy bijekciót \mathcal{E}_3^* és \mathcal{D}_4 között a 2.9. Lemma bizonyításához. (Egy lépés *pozíciója* alatt azt értjük, hogy a lépés hányadik az utat meghatározó lépéssorozatban.) \mathcal{E}_3^* útjai már tartalmaznak címkézett rövid lépéseket bizonyos páros pozíciókban. Bijekciónk egy \mathcal{E}_3^* -beli T tömörített úthoz oly módon fog egy D_T $2n$ hosszú 4-címkézett Dyck-utat rendelni, hogy D_T „alakja” (a címkék eltávolítása után kapott Dyck-út) és a 0 címkéi *együtt* kódolják T „alakját”, továbbá D_T 1-2-3 címkéi T címkéit kódolják (az 1-2-3 címkéket balról jobbra elolvasva ugyanazt a sorozatot kapjuk D_T -ben, mint

T -ben), lásd 2.10. ábra. (A 4-címkezett Dyck-utakat a hagyományos lerajzoláshoz képest 1 egységgel eltoljuk felfelé. Látni fogjuk, hogy kódolásunkhoz ez a lerajzolás lesz természetes.)



2.10. ábra: A keresett alakú bijekció illusztrációja

Persze ahhoz, hogy így tudjuk tárolni T címkeit D_T -ben, szükséges, hogy a T alakját kódoló (részlegesen címkezett) Dyck-útban a címkétlen (0 címket nem kapott) párosadik lépések száma megegyezzen a T -beli címkek számával (azaz T páros pozícióban álló rövid lépései számával), más szóval a T alakját kódoló Dyck-útra ugyanannyi 0 címket szeretnénk kiosztani, mint ahány hosszú lépés van T -ben.

A fentiek precíz megfogalmazásához jelölje \mathcal{E}^* az \mathcal{E}_3^* -beli utak alakjainak halmazát, azaz azon $(0, 1) \rightsquigarrow (2n, \pm 1)$ (címkétlen) utak halmazát, amelyek soha nem lépnek rá az x -tengelyre, továbbá a hagyományos $(1, \pm 1)$ rövid lépéseken túl tartalmazhatnak $(1, \pm 3)$ hosszú lépéseket is, kizárólag páros pozíciókban. \mathcal{D}_2 pedig legyen azon $2n$ hosszú Dyck-utak halmaza, amelyekben minden párosadik lépés vagy jelölt (0 címkejű) vagy jelöletlen (címkétlen). A \mathcal{D}_2 -beli utakat *jelölt Dyck-utaknak* nevezzük. (Ábráinkon a jelölt lépések piros színűek.) A fentieket összegezve, a 2.9. Lemma következik az alábbi célkitűzésből:

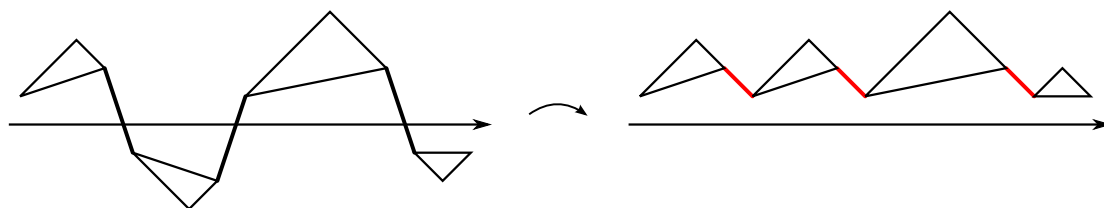
2.10. Lemma. *Létezik olyan $\phi: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{D}_2$ bijekció, hogy minden $E \in \mathcal{E}^*$ útra a $\phi(E)$ jelölt Dyck-útban ugyanannyi jelölt lépés van, mint ahány hosszú lépés szerepel E -ben.*

A lemmabeli bijekció segítségével valóban azonnal megadható egy keresett $\psi: \mathcal{E}_3^* \rightarrow \mathcal{D}_4$ bijekció. Tetszőleges $Q \in \mathcal{E}_3^*$ útra a Q -ból a címkei elhagyásával kapott (\mathcal{E}^* -beli) utat Q^- -szal jelölve, a $\psi(Q)$ kép legyen az az út, amelyet $\phi(Q^-)$ -ből kapunk oly módon, hogy a jelölt lépéseit 0 címkével látjuk el, majd a (páros pozíciókban álló) jelöletlen lépéseire átmásoljuk Q címkeit, balról jobbra haladva. (A cíkmásolás a ϕ -re vonatkozó feltétel miatt lehetséges.) Egyszerűen meggondolható, hogy az így definiált ψ függvény valóban $\mathcal{E}_3^* \rightarrow \mathcal{D}_4$ bijekció lesz.

Megjegyezzük, hogy a 2.10. Lemma állítása tovább nem erősíthető a kézenfekvő módon: ϕ -től nem követelhetjük meg, hogy a $\phi(E)$ -beli jelölt lépések pozíciói megegyezzenek az E -beli hosszú lépések pozícióival. Például könnyen ellenőrizhető, hogy $n = 2$ esetén \mathcal{D}_2 -ben két olyan jelölt Dyck-út van, amelyben a második lépés az egyetlen jelölt lépés; míg \mathcal{E}^* -ban csak egy olyan út van, amelyben a második lépés az egyetlen hosszú lépés. Ez is mutatja a kódolás nehézségét; ha egy hosszú lépést rövid lépésre cserélünk, az út hátralévő része függőlegesen eltolódik, amit nehéz

kontrollálni. Az általunk megadott bijekció sem lesz kézenfekvő, sőt, egyes elemei akár intuícióellenesnek is mondhatók. Ha az olvasó szeretné jobban megismerni a megtaláláshoz vezető utat, akkor azt javasoljuk, hogy próbálja meg először csak az 1 (illetve 2) hosszú lépést tartalmazó \mathcal{E}^* -beli utakat kódolni 1 (illetve 2) jelölt lépést tartalmazó D_2 -beli utakkal (bijektíven); vagy utólag, az általunk bemutatott általános eljárás megismerése után térjen vissza ezekhez a speciális esetekhez, és nézze meg, hogy ϕ kódolásunk megszorítása milyen megoldást ad a részproblémára. Ezen egyszerűbb esetek kezelése viszonylag természetes, melyekből általánosítással született a lemmát bizonyító bijekció.

Most rátérünk a 2.10. Lemma bizonyítására. Tekintsünk egy tetszőleges E utat \mathcal{E}^* -ből. Mivel minden lépés során az aktuális magasság paritása megváltozik (akár hosszú, akár rövid lépést teszünk meg), ezért a páros pozícióban álló lépések pontosan azok, amelyek kezdő magassága páros paritású. Tehát E hosszú lépéseinek kezdő magassága páros. Először az x -tengelyt átugró (hosszú) lépéseket alakítjuk át, melyek a paritásfeltétel miatt csak 2 magasságról -1 magasságra, illetve -2 magasságról 1 magasságra ugró hosszú lépések lehetnek. Világos, hogy ezek a lépéstípusok felváltva követik egymást, és E -t olyan részutakra osztják fel, amelyek mindig szigorúan az x -tengely alatt vagy fölött haladnak, és végpontjuk 1 egységgel távolabb van az x -tengelytől, mint a kezdőpontjuk (leszámítva az utolsó – esetleg üres – részutat, ahol megegyezik a kezdő és befejező magasság). Tehát ha minden második ilyen – a 2.11. ábrán háromszögekkel jelölt – részutat tükrözzük az x -tengelyre, és az összes x -tengelyugró lépést lecseréljük egy 2 magasságról 1 magasságra lépő jelölt lépésre, akkor egy végig szigorúan az x -tengely fölött haladó $(0, 1) \rightsquigarrow (2n, 1)$ utat kapunk, amelyben a páros pozíciókban állhatnak hosszú lépések, illetve a 2 magasságról 1 magasságra vivő lépések között lehetnek (páros pozícióban álló) jelölt lépések is.

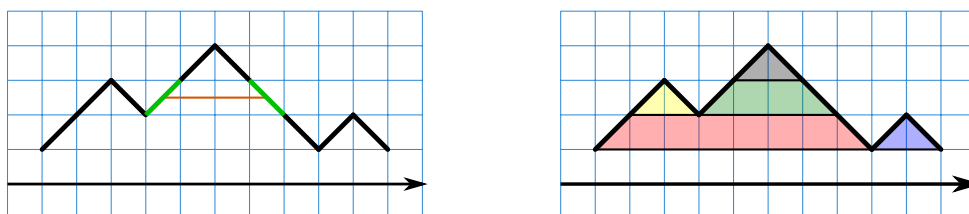


2.11. ábra: A tengelyt átugró lépések átalakítása

Ez a kódolás első fázisa, a kapott utat jelölje E^+ . Annyi jelölt lépést hoztunk létre (megengedett pozíciókban), mint ahány hosszú lépést megszüntettünk, tehát eddig figyelembe vettük a ϕ -re vonatkozó követelményt. Az első fázis invertálható: Minden fenti tulajdonságú E^+ útra egyetlen olyan $E \in \mathcal{E}^*$ út létezik, amelyet az első fázis E^+ -szá alakít át, ugyanis E^+ jelölt lépései megadják az x -tengelyt átugró lépéseket, és így a köztes részutakat is, amelyekből egyértelműen kitalálható az \mathcal{E}^* -beli inverz kép.

Mielőtt rátérnénk a második, lényegi fázisra, ismertetjük E^+ lépéseinek egy csoportosítását, amelyre kódolásunk során szükségünk lesz. Ezt először a Dyck-utak lépéseinek csoportosításával motiváljuk. (Előrebocsátjuk, hogy ha E^+ Dyck-

út, akkor a második fázis nem végez további átalakításokat E^+ -on.) Egy $2n$ hosszú Dyck-út lépéseinek egy természetes párbaállítását a következő: Egy s felfelé lépés párja legyen a lépés után következő első olyan lefelé lépés, amely visszatér s kiinduló szintjére, lásd 2.12. ábra. Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ez jó definíció, mellyel n lépéspárba soroljuk a lépéseket. (Ha a Dyck-útra „értelmes” zárójelsorozatként tekintünk a közismert módon, a felfelé lépéseket nyitó zárójelekre, a lefelé lépéseket csukó zárójelekre cserélve, akkor a kapott zárójelzésben az összetartozó nyitó és csukó zárójelek adják meg a lépések párbaállítását.) A standard Catalan-rekurzió Dyck-utakkal történő szokásos bizonyítása is ehhez a párbaállításhoz vezet.

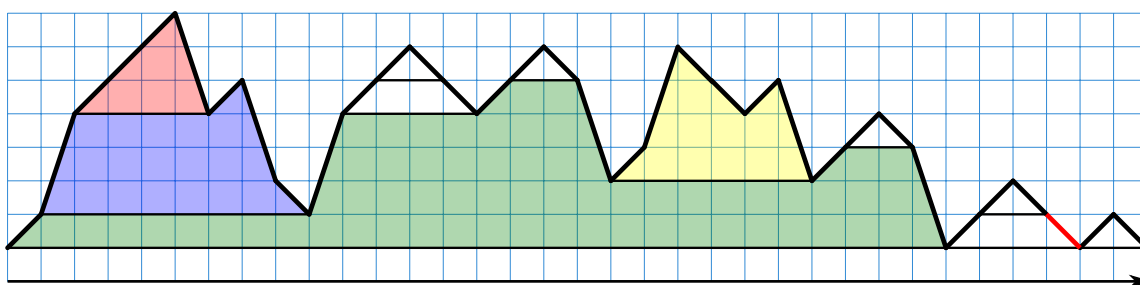


2.12. ábra: A Dyck-utak lépéseinek párbaállításása

A lépéspárokra bontást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy két lépés akkor alkot egy párt, ha az úthoz tartozó (a 2.12. ábra bal oldalán szemléltetett) grafikonon a két lépés megfelelő belső pontjai összeköthetők egy vízszintes (x -tengellyel párhuzamos) szakasszal úgy, hogy a szakasz végig az útnak megfelelő töröttvonal alatt haladjon, a végpontjait leszámítva. (Egy lépés *belső pontján* a lépésnek megfelelő grafikonszakasz egy olyan pontját értjük, amelynek magassága nem egész. Tehát hosszú lépések esetén két szokásos értelemben vett belső pontot nem tekintünk annak a továbbiakban.) Az egy párba tartozást bizonyító szakaszok összessége minden kialakult lépéspárra egy trapézt határoz meg (amely esetleg háromszöggé fajulhat), és így a lépéspárok az út grafikonja és az $y = 1$ egyenes által közrezárt tartományt trapézokra darabolják az ábra jobb oldalán látható módon. (A trapézok határvonaláival nem foglalkozunk.) A későbbiekben is így fogjuk szemléltetni az egy osztályba sorolt lépéseket, sőt, a definícióknál és bizonyításoknál is erre a vizualizációra támaszkodunk, a megértést megkönnyítendő.

Most áttérünk az általános esetre. Tekintsünk egy tetszőleges E^+ utat, amelyet az első fázis után megkaphattunk. A fenti speciális eset analógiájára két E^+ -beli lépés álljon relációban („tartozzon egy osztályba”), ha van olyan vízszintes szakasz, amely a két lépés egy-egy belső pontját köti össze, és végig az út grafikonja alatt halad. (Ha a két lépés egybeesik, akkor relációban állnak definíció szerint. Különböző lépések esetén mindig egy felfelé és egy lefelé lépés áll relációban az út grafikonjának folytonossága miatt.) Ez a bináris reláció nem ekvivalenciareláció, csak szimmetrikus és reflexív; a reláció tranzitív lezártjának ekvivalencia-osztályait E^+ *építőelemeinek* nevezzük. (Tehát az s és t lépések pontosan akkor tartoznak egy építőelemhez, ha van olyan l_1, \dots, l_m lépéssorozat E^+ -ban, hogy $l_1 = s$ és $l_m = t$, továbbá a sorozatban egymás mellett álló lépések relációban állnak.) Ha a különböző s és t lépések relációban állnak, azt úgy is mondjuk, hogy az s lépés egy *párja* t . (Egy hosszú lépésnek több párja lehet, sőt, a paritásfeltétel miatt valójában mindig

több párja is van.) Az építőelem szóhasználatot az motiválta, hogy az egy építőelemhez tartozó „bizonyító szakaszok” a fentiekhez hasonlóan ismét egy felosztását adják az E^+ út grafikonja alatti tartománynak, ezért a 2.13. ábrán látható módon is szemléltethetjük az építőelemeket. (Világos, hogy az egész magasságú pontoktól eltekintve, az E^+ grafikonja alatti tartomány tetszőleges A pontján egyetlen bizonyító szakasz halad át, a vizsgált ponton átmenő egyenesből az E^+ grafikonja által kimetszett, A -t tartalmazó szakasz. Az E^+ út folytonos grafikonja nyilván metszi a szóban forgó egyenest a vizsgált A pont előtt és után is, hiszen E^+ két végpontja az egyenes alatt helyezkedik el, míg az A abszcisszájának megfelelő „időpontban” E^+ az egyenes fölött halad.) Ez a szemlélet nagyban segíti a megértést a továbbiakban, a kialakult sokszögekre az építőelemekhez *társított sokszögekként* hivatkozunk.



2.13. ábra: Építőelemekre bontás

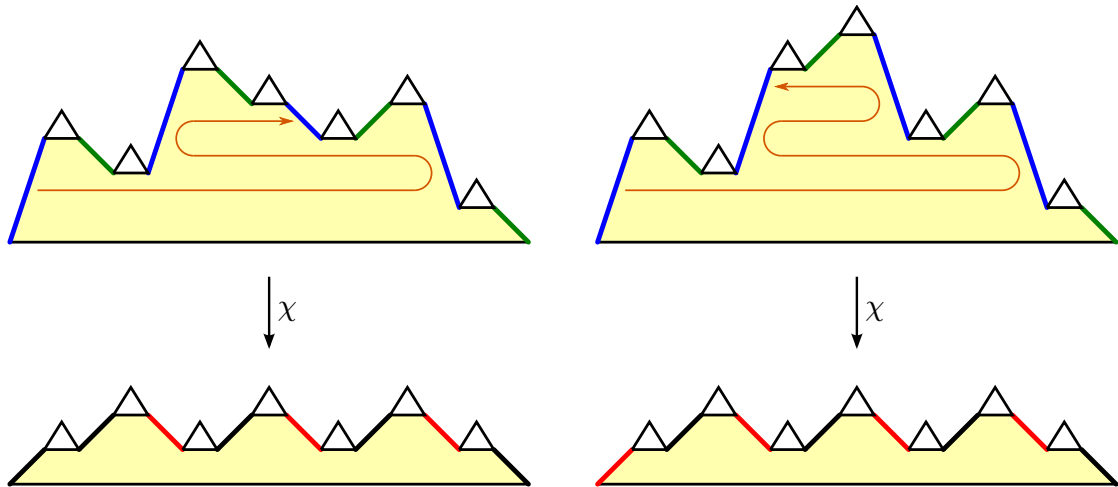
Összefoglaljuk az építőelemek néhány könnyen ellenőrizhető tulajdonságát. Minden lépésnek van párja, vagyis minden építőelem legalább két lépésből áll: Egy s lépés tetszőleges belső pontjából a megfelelő irányba (felfelé lépés esetén jobbra, lefelé lépés esetén balra) indított vízszintes nyílt félegyenes első E^+ -szal vett metszéspontját tartalmazó \hat{s} lépés az s párja. (A metszéspont létezik, ugyanis E^+ megfelelő végpontja alacsonyabban fekszik, mint a vizsgált belső pont.) A továbbiakban többször fogunk még ezzel a módszerrel párt keresni, ezért a körülményes leírás megismétlése helyett a továbbiakban úgy fogalmazzunk, hogy s egy adott belső pontjából \hat{s} -ot látjuk (mindig vízszintesen, az E^+ út alatti rész felé „nézünk”, és \hat{s} mindig létezik). Nyilvánvaló, hogy egy lépés párhoz pontosan a lépés $h + 0,5$ alakú ($h \in \mathbb{Z}$) belső pontjaiból látható E^+ -beli lépések. Így egy rövid lépésnek pontosan 1, egy hosszú lépésnek pedig 2 vagy 3 párja van; utóbbi esetben azért nem lehet pontosan 1, mert nem fordulhat elő, hogy egy hosszú s felfelé lépés összes pontjából ugyanazt a hosszú \hat{s} lefelé lépést látjuk, ugyanis \hat{s} kezdőpontja nem lehet 3 egységgel magasabban, mint s kezdőpontja, lévén a kezdőpontok magasságának paritása megegyezik (páros) \mathcal{E}^* definíciója alapján. Emiatt a két lépésből álló építőelemek mindkét lépése rövid; ezeket az építőelemeket *trapézoknak* nevezzük (a 2.13. ábrán fehér színnel jelöltük őket). Most a nem trapéz építőelemeket vizsgáljuk meg. Tekintsünk egy tetszőleges ilyen \mathcal{E} építőelemet, és abban a legalacsonyabban fekvő hosszú lépést, amelyet s_1 -gyel jelölünk. (Két lépés magasságának összehasonlításánál a lépéseket reprezentáló szakaszok legalacsonyabb pontjait vesszük figyelembe.) Tegyük fel, hogy ez a lépés felfelé lépés, és a kiinduló magassága h . Ha s_1 párjai között van hosszú (lefelé) lépés, akkor ez csak a $h + 4$ magasságról indulhat (a $h + 1$

szemléltettük; a háromszögek helyén pedig tetszőleges (akár 0 hosszú) utak állhatnak, amelyek nem mennek a kiinduló (és egyben befejező) szintjük alá, feltéve, hogy az E^+ útra kirótt tulajdonságok alapján megengedettek. A kék és zöld lépések váltakozva követik egymást balról jobbra haladva, és egy építőelem lépéseinek száma mindig páros. Például a 2.13. ábrán a piros és sárga színnel jelölt építőelemek rövid zárólépésű tornyok, a kék és zöld építőelemek pedig hosszú zárólépésű tornyok.

Most az építőelemek egymáshoz viszonyított elhelyezkedését vizsgáljuk meg. Tekintsünk egy tetszőleges \mathfrak{E} építőelemet, melynek lépései az E^+ útban balról jobbra haladva legyenek t_1, \dots, t_m , és egy \mathfrak{E}' építőelemet, melynek lépései ebben a sorrendben t'_1, \dots, t'_l . Azt állítjuk, az építőelemek vagy egymás mellett helyezkednek el (az egyik összes lépése megelőzi a másik összes lépését E^+ -ban), vagy *egymásba ágyazottak*; utóbbi alatt azt értjük, hogy az egyik építőelem összes lépése a másik építőelem két (előző felsorolásban) szomszédos lépése között áll E^+ -ban, azaz \mathfrak{E} összes lépése t'_i után és t'_{i+1} előtt áll valamely i -re, vagy fordítva, \mathfrak{E} és \mathfrak{E}' szerepének felcserélésével. Ezt csak torony építőelemekre gondoljuk végig (a többi eset még egyszerűbb): Ha a két építőelem nem egymás mellett helyezkedik el, akkor az egyik építőelem valamely lépése az E^+ út egy olyan (a 2.14. ábrán háromszöggel jelölt) R részútjához tartozik, amelyet a másik építőelem valamely két „szomszédos” lépése határol. Az R útszakasz kezdő és befejező magassága megegyezik, mely magasság alá soha nem lép, így minden R -beli lépés párizsai is R -beliek, ami pontosan azt jelenti, hogy az első építőelem összes lépése R -ben van, vagyis a két építőelem valóban egymásba ágyazott. Az egymásba ágyazottság az építőelemekhez társított sokszögek segítségével úgy is megfogalmazható, hogy \mathfrak{E} és \mathfrak{E}' közül az egyiknek megfelelő sokszög valamelyik felső (azaz nem a legalsó) vízszintes oldala felett helyezkedik el teljes egészében a másiknak megfelelő sokszög (úgy, hogy pontjainak abszcisszái a szóban forgó oldal által kijelölt intervallumban maradnak). Mivel az E^+ alatti tartománynak csak az alsó, a $(0, 1)$ és $(2n, 1)$ pontokat összekötő oldala vízszintes, és az építőelemekhez társított sokszögek felbontják ezt a tartományt, ezért mindegyik ilyen sokszög „alapoldala” (azaz vízszintes legalsó oldala) vagy további építőelem(ek)et határol, vagy része az $y = 1$ egyenesnek. Az egymásba ágyazottság szerint mindegyik alapoldalnak csak egyetlen másik (alsóbb) sokszög határával lehet közös szakasza, azaz tulajdonképpen az építőelemekre bontás során az E^+ út alatti tartományt trapézokból és a 2.14. ábrán sárgával színezett speciális alakú sokszögekből „LEGO-szerűen” építjük fel úgy, hogy a $(0, 1)$ és $(2n, 1)$ pontokat összekötő szakaszra és a már elhelyezett sokszögek felső vízszintes oldalaira kerülhetnek további sokszögek mindaddig, amíg ezen „szabad” vízszintes szakaszok el nem fogynak (vö. 2.13. ábra). Az építőelemek strukturális jellemzésének zárásaként kiemeljük, hogy E^+ első fázisban létrehozott, 2 magasságról 1 magasságra lépő jelölt lépései mindig trapéz építőelemhez tartoznak, ugyanis egy ilyen lépés párja mindig rövid, hiszen nincs 1 magasságról induló hosszú felfelé lépés E^+ -ban a paritásfeltétel miatt (az 1 magasság alá pedig soha nem kerül E^+).

Ezen előkészületek után definiáljuk az $E \in \mathcal{E}^*$ út $\phi(E)$ képét. E -n először végrehajtjuk az első fázis átalakításait, majd az így kapott E^+ utat alakítjuk tovább. (Emlékeztetőül, az E^+ út egy végig szigorúan az x -tengely felett haladó

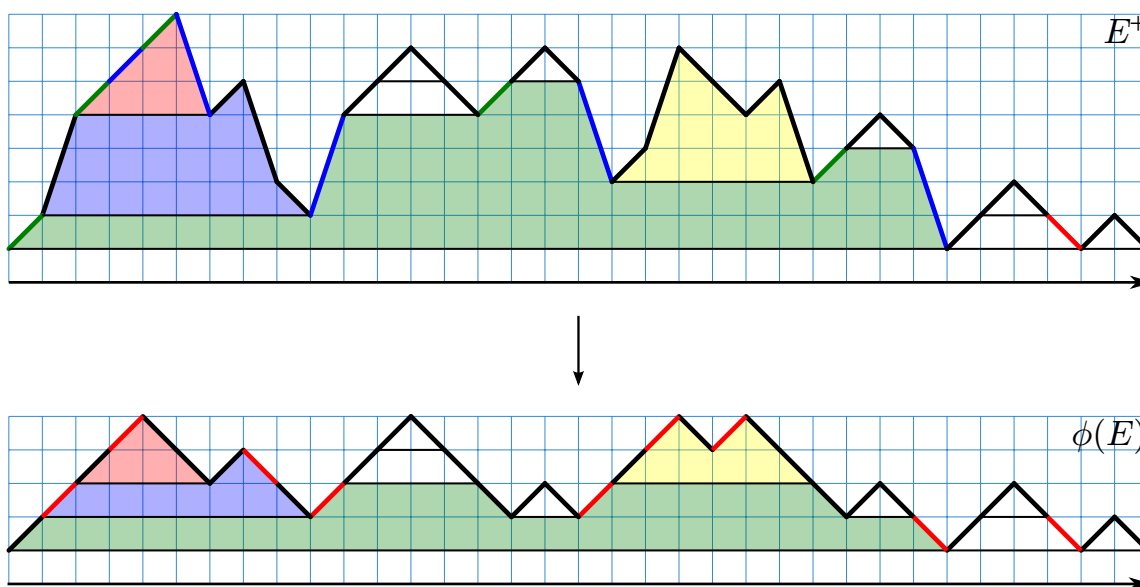
$(0, 1) \rightsquigarrow (2n, 1)$ út, melyben a páros pozíciókban állhatnak hosszú lépések, illetve a legalsó szinten jelölt rövid lefelé lépések. Az ilyen tulajdonságú utak halmazát a továbbiakban \mathcal{E}^+ -szal jelöljük.) E^+ -t az előzőekben leírt módon építőelemekre bontjuk, és alkalmazzuk a 2.15. ábrán látható átalakítást az összes torony építőelemre (a trapéz építőelemeket változatlanul hagyjuk). Tehát a \mathfrak{T} torony építőelemet a következőképpen alakítjuk át, ha lépései balról jobbra haladva t_1, \dots, t_{2m} (egy építőelem mindig páros sok lépést tartalmaz): Ha \mathfrak{T} rövid zárólépésű, és a legalacsonyabban fekvő hosszú lépése a t_1 felfelé lépés (ld. az ábra bal oldalát), akkor \mathfrak{T} lépéseit balról jobbra haladva rendre a $\nearrow, \nearrow, \searrow, \dots, \nearrow, \searrow, \searrow$ rövid lépésekre cseréljük. (Az első és utolsó lépést törölve a \nearrow, \searrow „minta” ismétlődik $(m - 1)$ -szer, ahol a jelölt lépéseket pirossal írjuk.) Ha \mathfrak{T} rövid zárólépésű, és a legalacsonyabban fekvő hosszú lépése a t_{2m} lefelé lépés (ez a „tükrözött” eset), akkor a minta (és a szemléltető ábra) is tükröződik, azaz a $\nearrow, \nearrow, \searrow, \dots, \nearrow, \searrow, \searrow$ lépéssorozatra cserélünk. Ha \mathfrak{T} hosszú zárólépésű (ld. az ábra jobb oldalát), akkor annyiban módosul a fenti konverzió, hogy az első (nem tükrözött) esetben a t_1 lépést lecserélő felfelé lépés is jelölt lesz, a második (tükrözött) esetben pedig ehelyett a t_{2m} -et lecserélő lefelé lépést változtatjuk jelöltté. Ezt a konverziót χ -vel jelöljük. Megjegyezzük, hogy ábráinkon a lépések kék, illetve zöld színének nincs többletjelentése, ezek csupán a lépés pozíciójának páros, illetve páratlan paritását mutatják, ezen lépések mindig jelöletlenek (a jelölt lépések továbbra is piros színűek lesznek).



2.15. ábra: A torony építőelemek átalakítása

$\phi(E)$ legyen az átalakítások után kapott jelölt út, ld. 2.16. ábra. Ez értelmes definíció, mert E^+ lépéseit osztályoztuk, és megadtuk, hogy az egyes osztályok lépéseit hogyan alakítjuk át. Akkor is ugyanehhez a $\phi(E)$ úthoz jutunk, ha a torony építőelemeket egymás után (tetszőleges sorrendben) egyesével alakítjuk át a fentiek szerint. Ez alatt azt értjük, hogy ha E^+ -ban egy tetszőleges torony építőelemet átalakítunk, majd az átalakítás után kapott út egy újabb építőelemére is alkalmazzuk χ -t, és így tovább, addig folytatva az eljárást, amíg el nem fogynak a torony építőelemek (hosszú lépések), akkor végül $\phi(E)$ -hez jutunk. Bizonyításként

induljunk ki abból, hogy az E^+ út alatti részt „LEGO-szerűen” felosztják az építőelemeknek megfelelő sokszögek, és egy torony építőelem konverziójára gondoljuk úgy, hogy a hozzá társított sokszöget lecseréljük a 2.15. ábra megfelelő alsó sárga sokszögére. Egy ilyen építőelem-konverzió (sokszögkonverzió) nem változtatja meg a többi építőelemet (sokszöget), ez az egymásba ágyazottságból (a „LEGO-szerű” elrendezésből) könnyen látszik: Egy építőelem átalakítása során csak annyi történik, hogy a 2.15. ábrán háromszögekkel jelölt útszakaszok (a sokszög felső oldalai), és így a háromszögekkel jelölt útszakaszok építőelemei (az ezen oldalakra „pakolt” további sokszögek) eltolódnak függőlegesen (és az épp átalakított torony szétesik trapéz építőelemekre). Itt kimondatlanul felhasználtuk azt is, hogy a χ konverzió változatlanul hagyja a sárga sokszög vízszintes alapoldalát – tehát a háromszöggel jelölt útszakaszokat nem toljuk ezen szint alá –, így az alsóbb építőelemek sem módosulnak. Ez azt jelenti, hogy egy E^+ -beli \mathfrak{C} torony építőelemre néhány más építőelem átalakítása után is végrehajthatjuk χ -t, mert \mathfrak{C} még akkor is építőelem lesz, és lépéseinek pozíciói megegyeznek az eredeti pozíciójukkal (csak más lépések változtatása miatt esetleg függőlegesen eltolva jelennek meg az út grafikonjában), így lépései pontosan a ϕ definíciójában előírt módon változnak. Egy \mathfrak{T} torony építőelemhez tartozó eredeti és átalakított sokszögek egymásba ágyazottság szempontjából ekvivalensek, mivel vízszintes oldalaik (x -tengelyre eső vetületei) megegyeznek, így valójában azt is végiggondoltuk, hogy az átalakított sokszögeket sem változtatja meg a további építőelemek későbbi átalakítása, ezek a folyamat legvégéig megmaradnak, megőrizve a ferde oldalaknak megfelelő (bizonyos építőelem átalakításával nyert) lépések egymáshoz viszonyított helyzetét a végső $\phi(E)$ út grafikonjában is. Az elmondottakat is szemlélteti a 2.16. ábra.



2.16. ábra: A második fázis illusztrációja

Most igazoljuk, hogy ϕ egy megfelelő bijekció. $\phi(E)$ egy végig szigorúan az x -tengely felett haladó $(0, 1) \rightsquigarrow (2n, 1)$ út, hiszen E^+ is ilyen, és világos, hogy

egy torony építőelem átalakításával az út két végpontja, valamint az út minimális magassága változatlan marad. E^+ összes hosszú lépését rövid lépésre cseréltük $\phi(E)$ -ben, ugyanis minden hosszú lépés egy torony építőelem része, és egy építőelem átalakításakor annak összes lépését rövidre cseréli χ . Az eddigieket egybevetve azt kaptuk, hogy a lépések jelöltségétől eltekintve $\phi(E)$ egy $2n$ hosszú Dyck-út (1 egységgel felfelé tolva). Mivel E^+ (E tengelyugró lépéseit kódoló) jelölt lépései páros pozíciókban álltak, illetve jelölt lépéseket mindig páros pozíciókban hoztunk létre az átalakítások során (vö. 2.15. ábra), ezért $\phi(E) \in \mathcal{D}_2$. Az is teljesül, hogy $\phi(E)$ -ben ugyanannyi jelölt lépés van, mint ahány hosszú lépés E -ben: Az első fázis (x -tengelyugró) hosszú lépéseket alakított át jelölt lépésekké, a második fázisban pedig minden torony építőelem átalakítása során az építőelem lépéseit lecserélő lépések között ugyanannyi jelölt lépést hoztunk létre, mint ahány hosszú lépés volt az építőelemen. Itt felhasználtuk azt is, hogy E^+ kiinduló jelölt lépései trapéz építőelemekhez tartoznak, ezért a 2.15. ábra bal oldalán látható torony építőelem rövid (záró)lépése jelöletlen. Ezzel beláttuk, hogy ϕ egy $\mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{D}_2$ függvény, amely teljesíti a rá kiszabott számosságfeltételt. Már csak azt kell igazolni, hogy ϕ bijekció. Ehhez vegyünk egy tetszőleges $F \in \mathcal{D}_2$ utat, például a 2.16. ábra alsó útját, és határozzuk meg az összes olyan $E \in \mathcal{E}^*$ utat, amelyre $\phi(E) = F$. Kódolásunk első fázisa nyilvánvalóan bijekciót létesít \mathcal{E}^* és \mathcal{E}^+ között, így valójában az összes olyan $E^+ \in \mathcal{E}^+$ utat keressük, amelyet a második fázis F -fé alakít. Láttuk, hogy egy E^+ utat úgy alakít át a második fázis, hogy a torony építőelemeknek megfelelő sokszöget a χ konverzió szerint átalakítjuk, majd a kapott sokszögeket (és a változatlanul hagyott trapézokat) megfelelő függőleges eltolásokkal összeillesztjük az $y = 1$ egyenesre „építkezve” (ez megvalósítható), és a kapott tartomány határvonala (a vízszintes alsó szakasztól eltekintve) megadja az átalakítás után kapott utat. A továbbiakban χ -sokszögeknek nevezzük azokat a sokszögeket, amelyeket megkaphatunk valamely torony építőelemhez tartozó sokszögből a χ átalakítással, továbbá a sokszög ferde oldalai jelöltek vagy jelöletlenek az átalakítási szabálynak megfelelően (ld. a 2.15. ábra alsó részét). A második fázis végén tehát az E^+ -ből kapott utat az út alatti tartomány sokszögekre bontásával együtt kapjuk meg, ahol minden sokszög χ -sokszög vagy trapéz, és bizonyos legalsó szinten álló trapézokat leszámítva a trapézok szárai jelöletlen lépéseknek felelnek meg. Az ilyen tulajdonságú sokszögekre bontást röviden csak χ -sokszögekre bontásnak nevezzük. Az F út alatti tartomány minden \mathcal{S} χ -sokszögekre bontásához pontosan egy olyan $E^+ \in \mathcal{E}^+$ -beli út található, amelyből a második fázis F -et készít, méghozzá az \mathcal{S} felbontásból „felépítve”. Ez az E^+ út csak az az út lehet, amelyet úgy kapunk, hogy \mathcal{S} χ -sokszögeire alkalmazzuk a χ átalakítás inverzét (az invertálhatóság világos), a trapézokat változatlanul hagyjuk, és a kapott sokszögekből a szokásos módon függőleges eltolások után felépítjük E^+ -t. A második fázis elemzéséhez hasonlóan végiggondolható, hogy ez értelmes definíció, és az is könnyen látszik, hogy a kapott E^+ út \mathcal{E}^+ -beli, lévén az F -beli jelölt lépések páros pozícióban álltak (és így az E^+ -beli hosszú lépések páros is pozícióban állnak), illetve \mathcal{S} trapézaira olyan feltételeket szabtuk, hogy csak a legalsó szinten lehetnek jelölt lépések E^+ -ben (páros pozíciókban). Az pedig világos, hogy ez az E^+ út megfelelő lesz, így állításunkat igazoltuk.

Most már csak azt kell belátni ϕ bijektivitásához, hogy minden $F \in \mathcal{D}_2$ jelölt Dyck-útra az F grafikonja alatti tartománynak pontosan egy χ -sokszögre bontása van. Ez „felülről lefelé haladva” igazolható, amelyet egy konkrét példán keresztül mutatunk be. Legyen F a 2.16. ábra alsó útja. Végiggondoljuk, hogy csak az ábrán látható χ -sokszögre bontás létezik F -hez. (És így $\phi^{-1}(F)$ az az út lesz, amelyet az ábra felső útjából nyerünk úgy, hogy a jelölt lépését lecseréljük egy hosszú lefelé lépésre, és a két hátralévő lépést tükrözzük az x -tengelyre.) Bizonyos legalsó szinten álló jelölt lépéseket leszámítva, mindegyik jelölt lépés egy χ -sokszög oldala F tetszőleges χ -sokszögre bontásában. A felbontás unicitása első ránézésre nem triviális, mert egy jelölt lépés tartozhat egy χ -sokszög alsó szintjéhez, illetve egy másik χ -sokszög felső szintjéhez is. (Minden χ -sokszög egy „alsó szinten” álló trapéz és az erre helyezett „felső szinten álló” további trapézok egyesítése.) Ezért haladunk felülről lefelé. Az F út legmagasabban elhelyezkedő jelölt lépései nyilvánvalóan csak az őket tartalmazó χ -sokszögek felső szintjén állhatnak, és egy ilyen lépés trapéz építőeleme megadja a lépést tartalmazó χ -sokszög egyik felső szinten álló trapézát, valamint tudjuk, hogy az ezen trapéz alatt álló trapéz építőelem lesz a χ -sokszög alsó szintje. Ezáltal egyértelműen meghatározható az összes olyan χ -sokszög a keresett felbontásban, amelynek van lépése (ferde oldala) F grafikonjának legmagasabb szintjén. (Egy χ -sokszög felső szintjén ugyanis mindegyik trapéz megfelelő paritású lépése jelölt, így F legmagasabb szintjén a két jelöletlen lépésből álló trapézok biztosan nem tartoznak χ -sokszög felső szintjéhez.) A konkrét példában 3 legmagasabb jelölt lépés van, ezek egyértelműen kijelölik az őket tartalmazó piros és sárga χ -sokszögeket, és azáltal azt is, hogy F eggyel alacsonyabb szintjén pontosan mely trapéz építőelemek alkotják ezek közül valamely χ -sokszög alsó szintjét. A második legmagasabb szinten tehát minden jelölt lépésről tudjuk, hogy egy, a legmagasabb szinten „kezdődő” χ -sokszög alsó szintjéhez, vagy egy, a második legmagasabb szinten „kezdődő” χ -sokszög felső szintjéhez tartozik-e. Utóbbi esetekben a felső szinthez hasonló módon egyértelműen meg tudjuk határozni a második szinten kezdődő χ -sokszögeket, példánkban az egyetlen második legmagasabb jelölt lépés kijelöli a kék χ -sokszöget. És így tovább, szintről szintre haladva lefelé F -ben, mindig meg tudjuk határozni az adott szinten kezdődő χ -sokszögeket egyértelműen, példánkban a második szint 3 jelölt lépése közül az elsőről már tudjuk, hogy a kék χ -sokszöghöz tartozik, a másik két lépés pedig kijelöli a zöld χ -sokszöget. A folyamat akkor áll meg, amikor elértük F legalacsonyabb szintjét, ahol maradhatnak a második legalacsonyabb szinten kezdődő χ -sokszögek által nem tartalmazott jelölt lépések (lefelé lépések a 2 magasságról az 1 magasságra). Mivel egyértelműen meghatároztuk az összes χ -sokszöget, a χ -sokszögekhez nem rendelt lépések (trapéz építőelemek) csak a χ -sokszögre bontás trapézai lehetnek, amelyekre eljárásunk miatt teljesül, hogy csak a legalsó szinten állóknak lehet jelölt oldala. Ezzel a χ -sokszögre bontás egyértelműségét beláttuk. A felbontás létezése könnyen adódik az F út grafikonjának folytonosságából („diszjunkt” χ -sokszögeket kapunk), a trapéz építőelemek nyilvánvaló egymásba ágyazottságából (van értelme arról beszélni, hogy egy trapéz építőelem alatti trapéz építőelem), illetve abból a tényből, hogy a jelölt lépések páros pozícióban állnak (a kapott χ -sokszögek ferde oldalai úgy van-

nak megjelölve, ahogy szükséges). Ezzel a 2.10. Lemma – és így a Shapiro-azonosság – bijektív bizonyítása véget ért. \square

Megjegyzés. A 2.10. Lemma kimondása után megmutattuk, hogy a lemmabeli $\phi: \mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{D}_2$ bijekció hogyan terjeszthető ki egy, a 2.9. Lemmát bizonyító $\mathcal{E}_3^* \rightarrow \mathcal{D}_4$ bijekcióvá. Természetesebb kiterjesztést kapunk, ha az \mathcal{E}_3^* -beli utak címkéinek balról jobbra haladó másolása helyett figyelembe vesszük ϕ konstrukcióját, és egy $Q \in \mathcal{E}_3^*$ út \mathcal{D}_4 -beli képét úgy definiáljuk, hogy a Q 3-címkézett útra végrehajtjuk a 2.10. Lemma bizonyításában bemutatott konstrukciót (mintha címkézetlen lenne Q), és a páros pozícióban álló rövid lépések „mozgatásával” együtt mozgatjuk a címkéiket is. Azaz az első fázisban a címkézett rövid lépések megtartják címkéjüket, akár tükrözzük őket, akár nem; a második fázisban ha a kapott útban egy címkézett rövid lépés trapéz építőelem része, akkor a lépéssel együtt a címkéje is változatlanul marad, a rövid zárólépésű tornyok (záró)lépéseinek címkéi pedig rendre átkerülnek a torony építőelemből a χ konverzió végrehajtása után kapott lépéssorozat egyetlen páros pozícióban álló jelöletlen lépésére (amely mindig a torony lépéseiből kialakult konfiguráció alsó szintjén álló valamelyik „szélső” lépés, ld. a 2.15. ábra bal oldalát), és ezzel felsoroltuk az összes lehetséges esetet. A jelölt lépéseket természetesen most is 0 címkeként értelmezve, az átalakítások után kapott \mathcal{D}_4 -beli utat rendeljük Q -hoz. Könnyen ellenőrizhető, hogy így egy $\mathcal{E}_3^* \rightarrow \mathcal{D}_4$ bijekciót kapunk. \diamond

Az alábbiakban a fenti bizonyítás néhány egyszerű következményét foglaljuk össze, köztük a Catalan-számok egy új interpretációjával.

2.11. Következmény. Jelölje $\mathcal{E}^*(n)$ azon $(0, 1) \rightsquigarrow (2n, \pm 1)$ (címkézetlen) utak halmazát, amelyek soha nem lépnek az x -tengelyre, és a páros pozíciókban állhatnak hosszú lépések is. (Ez a korábbi \mathcal{E}^* halmaz, csak megjelenítjük n -et a jelölésben.)

- Az $\mathcal{E}^*(n)$ -beli utak száma $2^n C_n$.
- Azon $\mathcal{E}^*(n)$ -beli utak száma, amelyekben k hosszú lépés van, $\binom{n}{k} C_n$.
- Speciálisan, azon $\mathcal{E}^*(n)$ -beli utak száma, amelyekben n hosszú lépés van (tehát váltakozva követik egymást rövid és hosszú lépések), C_n .
- $n \geq 1$ esetén a C_n Catalan-szám megszámlálja azon $(0, 0) \rightsquigarrow (n, 1)$ utakat, amelyek megengedett lépései $(1, \pm 1)$ és $(1, \pm 2)$, továbbá a kezdőpontot leszámítva soha nem lépnek az x -tengelyre.

Bizonyítás. Az a-b) állítás a 2.10. Lemma azonnali következménye, felhasználva, hogy a $2n$ hosszú jelölt Dyck-utak száma nyilvánvalóan $2^n C_n$, illetve hogy közülük $\binom{n}{k} C_n$ útnak van pontosan k jelölt lépése. A c) állítás pedig a b) speciális esete.

A d) állítás a c) átfogalmazása. Egy hosszú és egy rövid lépésből álló rendezett pár egyértelműen megadható a két lépés (mint vektor) összegével, mely $(2, \pm 2)$ vagy $(2, \pm 4)$ lehet. Tehát ha töröljük a c)-beli utak kezdő felfelé lépését, majd az utakhoz hozzáveszünk egy utolsó, x -tengelyre lépő lefelé lépést, és a kapott $2n$ hosszú út n darab hosszú-rövid lépéspárját az összegükkel helyettesítjük, akkor 1/2-es skálázás és függőleges tengelyre való tükrözés után (bijektív módon) megkapjuk a d)-beli utakat a c)-beliekből. Ez egyszerűen ellenőrizhető. Így a két pontban szereplő utak száma megegyezik. Ezzel a d) állítást is beláttuk. \square

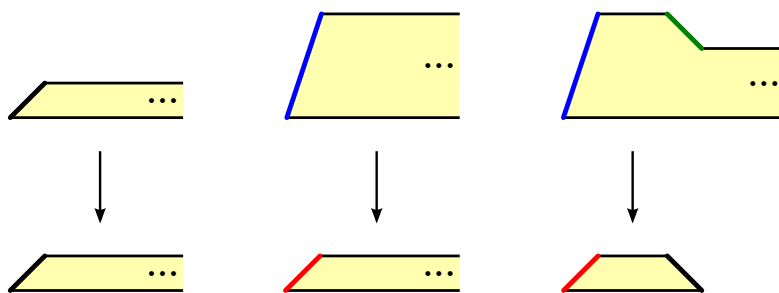
Zárásként a 2.7.b Lemma – és így a Shapiro-azonosság (2.4) ekvivalens alakjának – bijektív bizonyításával foglalkozunk, azaz az origóból induló, $4n$ hosszú páros-metsző utakat szeretnénk megszámlálni bijektív érveléssel. Láttuk, hogy ez a feladat ekvivalens a 2.7.a Lemmabeli állítással (a 2.5. Következmény és a 2.6. Lemma szerint), melyet ebben az fejezetben már igazoltunk bijektív gondolatmenettel. Ezen ekvivalencia elmondható úgy is, hogy a 2.7.a Lemmabeli utak halmazát \mathcal{P} -vel, a bizonyításául szolgáló bijekció érkezési halmazát \mathcal{R} -rel jelölve ($|\mathcal{R}| = 4^n C_n$), a 2.7.b Lemmabeli utak halmaza és a $\mathcal{P} \times \{1, \dots, n+1\}$ halmaz között bijekciót adunk meg, valamint bijektíven igazolható az is, hogy $|\mathcal{R} \times \{1, \dots, n+1\}| = 4^n B_n$. (A részleteket mellőzzük.) Ez azt jelenti, hogy a 2.7.a Lemmát bizonyító $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R}$ bijekció kiterjeszthető a 2.7.b Lemmát bizonyító bijekcióvá. (A fordított irányú visszavezetés nem működik automatikusan, így az utóbbi lemma a „gyengébb” állítás a bijektív kombinatorika szemszögéből.) Amiért mégis vázoljuk a 2.7.b Lemma bijektív bizonyítását, az az, hogy egy, a 2.11. Következményhez hasonló állítás nyerhető belőle.

A bizonyítás a 2.7.a Lemma bizonyításával analóg. Hasonlóan a 2.8. Lemmában megfogalmazott célkitűzéshez, könnyű látni, hogy elég azt igazolni, hogy az $(1, 1)$ pontból induló, $4n$ hosszú páros-metsző utak száma $4^n B_n$. A korábban alkalmazott tömörítési eljárást végrehajtva a megszámlolandó utakra, a következő, 2.9. Lemmával analóg feladathoz jutunk: Azon $(0, 1)$ pontból induló, $2n$ hosszú utak száma, amelyekben minden párosadik lépés vagy hosszú lépés, vagy 3-címkézett rövid lépés, és soha nem lépnek az x -tengelyre, $4^n B_n$. Elegendő az ezen tulajdonságú utakból a címkék elhagyásával nyert utak \mathcal{E}' halmaza és a $2n$ hosszú *jelölt* nemnegatív utak \mathcal{N}_2 halmaza között olyan bijekciót megadni, amely egy $E' \in \mathcal{E}'$ -beli úthoz mindig olyan \mathcal{N}_2 -beli utat rendel, hogy abban a jelölt lépések száma megegyezik az E' út hosszú lépéseinek számával, a 2.10. Lemma mintájára. (A nemnegatív utak definíciója a 8. oldalon olvasható. A $2n$ hosszú nemnegatív utak száma B_n a 2.2. Állítás szerint. A jelölt Dyck-utakhoz hasonlóan most is csak páros pozíciókban álló jelölt lépések megengedettek.) A keresett $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{N}_2$ bijekció megadása a 2.10. Lemma bizonyításához hasonlóan történhet. Egy $E' \in \mathcal{E}'$ út képeznek meghatározása az x -tengelyugró hosszú lépések „lerövidítésével” és jelöltté tételével (valamint a szükséges tükrözések végrehajtásával) kezdődik. Így egy végig szigorúan az x -tengely felett haladó utat kapunk, amelyet építőelemekre bontunk a második fázisban. A már megismert trapéz és torony építőelemeken felül újfajta építőelemek is megjelennek, mivel lehetnek olyan (felfelé) lépések E' -ben, amelyek valamely belső pontjából nem látunk másik lépést (mert a pontból jobbra indított vízszintes félegyenes nem metszi E' grafikonját). A χ átalakításhoz hasonló konverziót végrehajtva az építőelemeken (a trapéz és torony építőelemeket ugyanúgy alakítjuk át, mint korábban, az új építőelemeket pedig a 2.17. és 2.18. ábrákon látható módon), egy alkalmas $\phi': \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{N}_2$ bijekcióhoz jutunk. (A jelölt nemnegatív utat a megszokott ábrázoláshoz képest 1 egységgel felfelé tolva kapjuk meg.) A részletek kidolgozását az olvasóra bízunk. \square

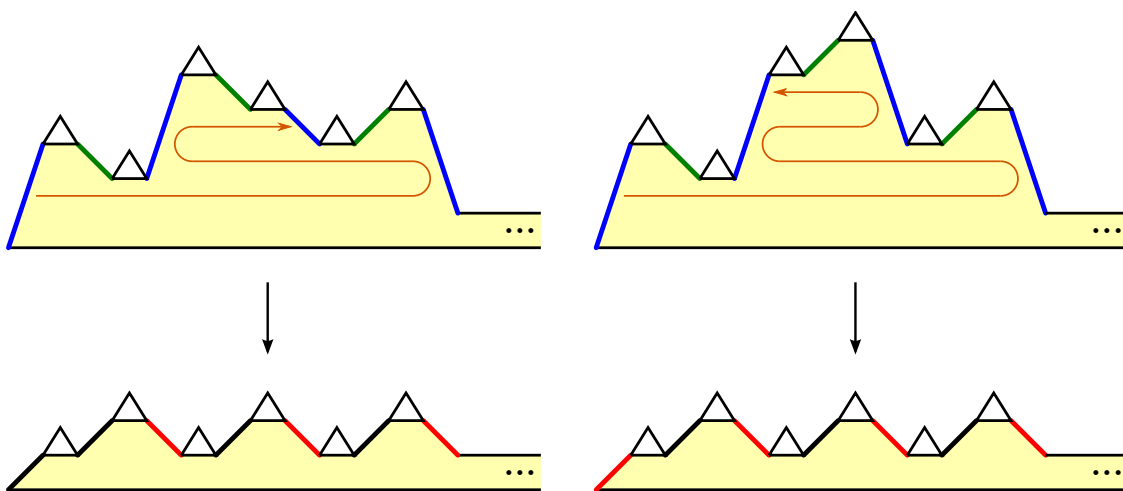
2.12. Következmény. Jelölje $\mathcal{E}'(n)$ azon $(0, 1)$ -ből induló, $2n$ hosszú (címkézetlen)

utak halmazát, amelyek soha nem lépnek az x -tengelyre, és a páros pozíciókban állhatnak hosszú lépések is.

- a) Az $\mathcal{E}'(n)$ -beli utak száma $2^n B_n$.
- b) Azon $\mathcal{E}'(n)$ -beli utak száma, amelyekben k hosszú lépés van, $\binom{n}{k} B_n$.



2.17. ábra: A „végtelen” trapéz építőelemek átalakítása



2.18. ábra: A „végtelen” torony építőelemek átalakítása

2.4. Alkalmazások

Ebben az alfejezetben a kidolgozott technikák néhány alkalmazását mutatom be. Áttekintjük a B_n és C_n számok különböző konvolúciós formuláit, illetve azok páros indexű változatait, kombinatorikus bizonyításokkal együtt. (Generátorfüggvényekkel egyik állítást sem nehéz belátni.) Végül kombinatorikus módon megmutatjuk a Shapiro-azonosság és a középső binomiális együtthatók alternáló konvolúciós formulájának ekvivalenciáját, illetve ismertetjük az utóbbi formula egy szép, Spiveytől származó friss bizonyítását [28], mely véletlen színezett permutációk segítségével érvel. A nem hivatkozott (és nem is nyilvánvaló) eredményeket a [16] cikkben publikáltam. Innentől kezdve csak hagyományos, azaz $(1, \pm 1)$ lépésekből álló utakkal foglalkozunk a fejezetben.

A következő állításban a $B_n = \binom{2n}{n}$ és $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ számokra vonatkozó standard konvolúciós formulákat foglaljuk össze (ezek mindegyike ismert, vö. [6]):

2.13. Állítás.

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \sum_{k=0}^n C_k C_{n-k} = C_{n+1}. \\
\text{b)} \quad & \sum_{k=0}^n C_k B_{n-k} = \frac{1}{2} B_{n+1}. \\
\text{c)} \quad & \sum_{k=0}^n B_k B_{n-k} = 4^n. \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Bizonyítás. a) Csak a közismert (2.1) Catalan-rekurziót ismételtük meg.

b) A formula a felfelé lépéssel kezdődő $2n + 2$ hosszú kiegyensúlyozott utakat számolja össze. Ezek száma nyilván a jobb oldal, vö. 2.2.a Állítás. A bal oldal az első nem-origó x -tengelymetszet szerint csoportosítja a megszámlalható utakat: $C_k B_{n-k}$ olyan $2n + 2$ hosszú kiegyensúlyozott út van, amelyre az első nem-origó x -tengelymetszet a $2k + 2$ pont (csak ilyen alakú lehet valamely $k \in \{0, \dots, n\}$ -re), mert C_k -féle módon lehet a kezdő felfelé lépés után Dyck-útként eljutni az $(1, 1)$ pontból a $(2k + 1, 1)$ pontba, majd ezután lefelé lépés következik, és egy tetszőleges $2n - 2k$ hosszú kiegyensúlyozott út, mely megválasztására B_{n-k} lehetőség van.

c) A folklór kombinatorikus bizonyítás szerint a formula a $2n$ hosszú utakat számolja meg (számuk nyilván 2^{2n} , a jobb oldal), ahol a bal oldal az utolsó x -tengelymetszet aszerint csoportosítja az utakat: $B_k B_{n-k}$ olyan $2n$ hosszú út van, melynek utolsó x -tengelymetszete $2k$, ugyanis addig a pontig B_k -féleképpen juthatunk el (2.2.a Állítás), és onnantól B_{n-k} -féleképpen folytatódhat az út $2n - 2k$ hosszú sehohsem-zéró útként (2.2.c Állítás). \square

Megjegyzés. Bár a középső binomiális együtthatók (2.5) konvolúciós formulájára adott kombinatorikus bizonyításunk az eddigiek után természetesnek tűnhet, korántsem magától értetődő, hogy utakkal célszerű dolgozni, Stanley Bijective Proof Problems feladatsorában a „nehéz” besorolást kapta az azonosság. Formális hatványsorokkal szinte triviális igazolni, meglepő módon azonban a kombinatorikus bizonyítások közül az imént ismerttetett a legegyszerűbb. Erdős Veress Pálnak és Hajós Györgynek tulajdonította a formulát, Marta Sved [33] összefoglaló cikkében további részleteket olvashatunk a háttéréről. \diamond

A fenti állítás alapján a standard konvolúciós formulák kombinatorikus bizonyítása egyszerű vagy ismert. A következő (bijektíven bizonyított) lemma segítségével ezekben a formulákban a páratlan indexű középső binomiális együtthatók „lecserélhetők” páros indexű Catalan-számokra és középső binomiális együtthatókra, így módon közelebb kerülhetünk a Shapiro-azonossághoz hasonló, páros indexű számokra vonatkozó formulák kombinatorikus megértéséhez. A lemmában az indexek szimmetrikus szerepét jobban kifejező \sum jelöléseket használunk az egyszerűbb leírás kedvéért; a \sum -jel alatti feltételben a rögzített változó jellemzően az egyenlőségjel jobb oldalán áll (de ez mindig kiderül a szövegkörnyezetből), továbbá a futó indexek *nemnegatív egész* értékeket vehetnek fel.

2.14. Lemma. *Tetszőleges rögzített n esetén*

$$2 \cdot \sum_{i+j+k=n} C_{2i}C_{2j}B_{2k} = B_{2n+1}. \quad (2.6)$$

Bizonyítás. Mindkét oldal a $2n+1$ félhosszú kiegyensúlyozott utakat számolja meg. A jobb oldalra ez világos.

Az x -tengely minden kiegyensúlyozott utat (hagyományos vagy tükrözött) Dyck-utakra vág szét, amelyek a kezdő- és végpontjukat leszámítva nem lépnek rá az x -tengelyre. (Ezekre a szegmens elnevezést használjuk.) Ha a kiegyensúlyozott út félhossza $2n+1$, akkor ezen szegmensek között lesz páratlan félhosszú, hiszen félhosszaik összege $2n+1$, páratlan. A bal oldalon $2C_{2i}C_{2j}B_{2k}$ azokat a $2n+1$ félhosszú kiegyensúlyozott utakat számolja meg, melyekre az x -tengely által levágott szegmensek közül az első páratlan félhosszú szegmens félhossza $2j+1$, és ezt a szegmenst egy $2i$ félhosszú kiegyensúlyozott út előzi meg összességében, valamint egy $2k$ félhosszú kiegyensúlyozott út követi ($i+j+k=n$). Ez könnyen meggondolható: A szóban forgó szegmens megválasztására $2C_{2j}$ lehetőség van (hiszen ez a szegmens egy $\nearrow D \searrow$ alakú út, tükrözve vagy anélkül, ahol D egy tetszőleges $2j$ félhosszú Dyck-út lehet); a szegmenst megelőző $2i$ félhosszú *páros-metsző* kiegyensúlyozott út megválasztására C_{2i} lehetőség van a 2.4. Lemma szerint (a páros-metsző tulajdonság annak átfogalmazása, hogy a korábbi szegmensek mind páros félhosszúak); a befejező $2k$ félhosszú kiegyensúlyozott útra nincs megkötés, így az B_{2k} -féle lehet. Mivel az összegzés az összes lehetőségen végigfut, a bal oldal is valóban a $2n+1$ félhosszú kiegyensúlyozott utakat számolja meg. \square

Egy alkalmazásként megmutatjuk, hogy Shapiro azonosságának (2.4) ekvivalens alakja hogyan bizonyítható a lemma segítségével rekurzív módon. Belátjuk, hogy mindkét oldal kielégíti a következő rekurziót (következésképp a két oldal minden n -re egyenlő).

$$X_0 = 1; \\ \sum_{s+t=n} X_s X_t = 16^n.$$

A jobb oldalra ez azonnal következik a középső binomiális együtthatók konvolúciójának (2.5) zárt alakjából:

$$\sum_{s+t=n} 4^s B_s \cdot 4^t B_t = 4^n \cdot \sum_{s+t=n} B_s B_t = 4^n \cdot 4^n = 16^n.$$

A bal oldalra pedig a következő számolás mutatja (2.6), valamint (2.5) ismételt

felhasználásával:

$$\begin{aligned}
 \sum_{s+t=n} \left(\sum_{i+k=s} C_{2i} B_{2k} \right) \left(\sum_{j+l=t} C_{2j} B_{2l} \right) &= \sum_{i+j+k+l=n} C_{2i} C_{2j} B_{2k} B_{2l} \\
 &= \sum_{m+l=n} \left(\sum_{i+j+k=m} C_{2i} C_{2j} B_{2k} \right) B_{2l} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m+l=n} B_{2m+1} B_{2l} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{u+v=2n+1} B_u B_v \right) = \frac{1}{4} \cdot 4^{2n+1} = 16^n.
 \end{aligned}$$

A 2.13. Állításban szereplő konvolúciók páros indexű számokra vonatkozó változatait tárgyalja a következő tétel:

2.15. Tétel.

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n. \quad (2.7)$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^n C_{2k} B_{2n-2k} = 4^n B_n. \quad (2.8)$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^n B_{2k} B_{2n-2k} = \frac{16^n + 4^n B_n}{2}. \quad (2.9)$$

Bizonyítás. a-b) Csak a (2.2) Shapiro-azonosságot és (2.4) ekvivalens alakját ismételtük meg.

c) Mivel a B_n számok (2.5) konvolúciós formulája szerint

$$\sum_{k=0}^n B_{2k} B_{2n-2k} + \sum_{k=0}^{n-1} B_{2k+1} B_{2n-2k-1} = 16^n,$$

az állítás ekvivalens a középső binomiális együtthatók (2.10) *alternáló* konvolúciós formulájával, melyet fontossága miatt a következő tételben külön tárgyalunk. \square

Az alábbi formulát Spivey bizonyította először kombinatorikusan 2002-ben [28]; tetszetős érvelésében a két oldalt véletlen színezett permutációkra vonatkozó valószínűségeként értelmezi (megfelelő normálás után). Mi más utat követünk; a problémát bijektív módon visszavezetjük a már (bijektíven) bizonyított (2.8) „vegyes” konvolúciós formulára:

2.16. Tétel.

$$\sum_{k=0}^n B_{2k} B_{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} B_{2k+1} B_{2n-2k-1} = 4^n B_n. \quad (2.10)$$

Bizonyítás. A közvetlen út helyett a

$$\sum_{k=0}^n B_{2k} B_{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} B_{2k+1} B_{2n-2k-1} = \sum_{k=0}^n C_{2k} B_{2n-2k} \quad (2.11)$$

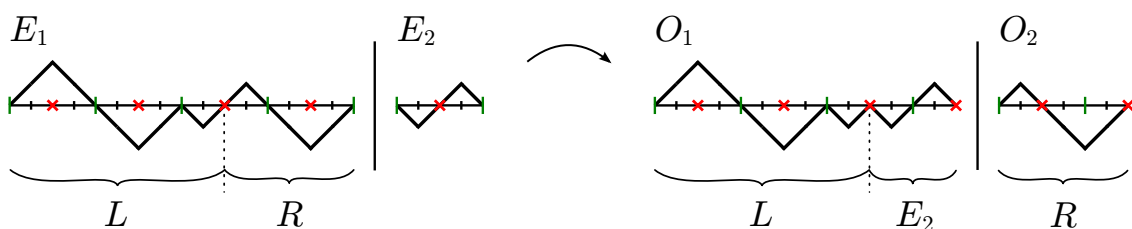
állítás igazoljuk, amelyből (2.8) alapján azonnal következik a bizonyítandó. A rendezéssel kapott

$$\sum_{k=0}^n (B_{2k} - C_{2k}) B_{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n-1} B_{2k+1} B_{2n-2k-1} \quad (2.12)$$

egyenlőséget látjuk be kettős leszámlálással.

Rögzítsük n -et. A jobb oldal azokat az (O_1, O_2) rendezett párokat számolja meg, amelyekre O_1 és O_2 két olyan tetszőleges *páratlan* félhosszú kiegyensúlyozott út, melyek félhosszjai összege $2n$. Jelölje ezen (O_1, O_2) párok halmazát \mathcal{O} . A 2.4. Lemma figyelembevételével a bal oldal azokat az (E_1, E_2) párokat számolja meg, amelyekre E_1 és E_2 két olyan *páros* félhosszú kiegyensúlyozott út, melyek félhosszjai összege $2n$, továbbá E_1 *nem* páros-metsző, azaz van $4t+2$ alakú x -tengelymetszete. Jelölje ezen (E_1, E_2) párok halmazát \mathcal{E} .

Megadunk egy bijekciót \mathcal{E} és \mathcal{O} között, ami bizonyítja az állítást. Bijekciónkat a 2.19. ábra szemlélteti. Válasszunk egy tetszőleges (E_1, E_2) útpárt \mathcal{E} -ből. Az E_1 útnak az origótól az első $4t+2$ alakú x -tengelymetszetig tartó részét jelölje L , és legyen R az út többi része (tehát $E_1 = LR$). Az (E_1, E_2) útpár képe legyen az (LE_2, R) útpár, mely \mathcal{O} -beli, mivel L és R páratlan félhosszú, E_2 pedig páros félhosszú kiegyensúlyozott út, és a félhosszok összege nyilván továbbra is $2n$. Tehát egy $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}$ leképezést definiáltunk, amelyről könnyű meggondolni, hogy bijekció: Az inverze az a leképezés, amely az $(O_1, O_2) \in \mathcal{O}$ úthoz az $(L'O_2, R') \in \mathcal{E}$ utat rendeli, ahol L' az O_1 út első $4t+2$ alakú x -tengelymetszetig tartó része (ilyen alakú tengelymetszet mindig van, mert O_1 végpontja is ilyen), R' pedig az O_1 fennmaradó része. \square



2.19. ábra: Egy bijekció az \mathcal{E} és \mathcal{O} halmazok között

Megjegyzés. A bijektíven bizonyított (2.11) alak a (2.8) és (2.10) formulák ekvivalenciáját mutatja, tehát (2.10) minden kombinatorikus bizonyítása egyúttal (2.8), vagyis a (2.7) Shapiro-azonosság kombinatorikus bizonyításaként is felfogható, így például Spivey eredeti bizonyítása is. \diamond

$B_{2k} - C_{2k} = \binom{4k}{2k-1}$, tehát (2.12) mindegyik tényezője binomiális együttható:

2.17. Következmény.

$$\sum_{k=1}^n \binom{4k}{2k-1} \binom{4n-4k}{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{4k+2}{2k+1} \binom{4n-4k-2}{2n-2k-1}.$$

Megjegyzés. Kiemeljük, hogy a fenti bizonyításban felhasználtuk azt a tényt, hogy $B_{2k} - C_{2k}$ a $2k$ félhosszú kiegyensúlyozott, nem páros-metsző utakat számolja meg. Ezt tekinthetjük a $\binom{4k}{2k-1}$ binomiális együttható szokatlan kombinatorikus leírásának is. (Hozzáteesszük, hogy a $B_{2k} - C_{2k} = \binom{4k}{2k-1}$ egyenlőség könnyen igazolható kombinatorikusan; a $2k$ félhosszú Dyck-utak számát $B_{2k} - \binom{4k}{2k-1}$ különbségként adja meg a standard tükrözéses érvelés.) \diamond

Végezetül a teljesség kedvéért ismertetjük Spivey (2.10)-re adott elegáns bizonyítását [28]. Ehhez szükségünk lesz a következő definíciókra. *2-(ciklus)színezett permutáció* alatt a továbbiakban olyan permutációt értünk, amelynek minden ciklusához hozzárendeltünk egy színt, pirosat van kéket. (Az alaphalmaz elemei megkapják a ciklusuk színét.) A *véletlen 2-színezett permutációkat* uniform módon „generáljuk”: egy rögzített alaphalmaz permutációi közül véletlenül választunk egyet uniform módon, majd a kapott permutáció ciklusait pirosra vagy kékre színezzük $1/2-1/2$ valószínűséggel, egymástól függetlenül. Tehát ha az alaphalmaz mérete n , akkor egy konkrét 2-színezett permutációt $\frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^s}$ valószínűséggel kapunk meg, ha s ciklusa van. Egy n elemű halmaz s ciklusból álló permutációinak számát $c(n, s)$ -sel jelöljük.

A következő lemma kapcsolja össze a véletlen 2-színezett permutációkat és a középső binomiális együtthatók konvolúcióit. A lemma Spivey eredménye előtt is ismert volt, megtalálható például [29]-ben feladatként (60. probléma).

2.18. Lemma. *Legyen $0 \leq k \leq n$. Annak a valószínűsége, hogy az $\{1, \dots, n\}$ alaphalmaz egy véletlen 2-színezett permutációjában pontosan k elem piros, $\frac{1}{4^n} B_k B_{n-k}$.*

Bizonyítás. $\binom{n}{k}$ -féleképpen tudjuk megválasztani a piros elemek P halmazát. Minden k elemű P halmazra $c(k, i)c(n-k, j)$ olyan 2-színezett permutáció van, amelyben a piros elemek halmaza P , és a piros ciklusok száma i , a kék ciklusok száma j . Ezen 2-színezett permutációk mindegyikét $\frac{1}{n!2^{i+j}}$ valószínűséggel kaphatjuk meg, így az összes lehetséges P halmazra és (i, j) párra összegezve az adódik, hogy a lemmabeli valószínűség

$$\binom{n}{k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n-k} \frac{c(k, i)c(n-k, j)}{n!2^{i+j}} = \frac{\binom{n}{k}}{n!} \left(\sum_{i=1}^k \frac{c(k, i)}{2^i} \right) \left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{c(n-k, j)}{2^j} \right).$$

A $c(k, i)$ számok generátorfüggvénye ismert:

$$\sum_{i=1}^k c(k, i)x^i = x(x+1)\dots(x+k-1),$$

melyet pozitív egész x értékekre éppen színezett permutációk segítségével a legkönnyebb kombinatorikusan igazolni (mindkét oldal a ciklusszínezett permutációkat számolja meg egy k elemű alaphalmazon, ha a színpaletta mérete x ; bővebben lásd például a [11] tankönyvben). Ennek felhasználásával, $x = \frac{1}{2}$ helyettesítéssel,

$$\sum_{i=1}^k \frac{c(k, i)}{2^i} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{2} + k - 1\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1)}{2^k} = \frac{(2k)!}{4^k k!},$$

és ugyanígy

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{c(n-k, j)}{2^j} = \frac{(2n-2k)!}{4^{n-k} (n-k)!}.$$

Tehát a fent kiszámolt valószínűség a következő alakba írható:

$$\frac{\binom{n}{k}}{n!} \cdot \frac{(2k)!}{4^k k!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{4^{n-k} (n-k)!} = \frac{1}{4^n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k},$$

amit bizonyítani kellett. □

Megjegyzés. A lemmabeli valószínűségeket k lehetséges értékeire összeadva 1-et kapunk, ami a középső binomiális együtthatók (2.5) konvolúciós formulájának egy újabb bizonyítását adja. \diamond

Ezen előkészületek után ismertetjük (2.10) eredeti bizonyítását:

A 2.16. Tétel második bizonyítása. (Spivey [28]) Mindkét oldalt 4^{2n} -nel osztva, a bizonyítandó (2.10) azonosság a következő alakot ölti:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{4^{2n}} B_{2k} B_{2n-2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^{2n}} B_{2k+1} B_{2n-2k-1} = \frac{1}{4^n} B_n. \quad (2.13)$$

A 2.18. Lemma szerint a bal oldal $p_0 - p_1$, ahol p_0 (illetve p_1) annak a valószínűsége, hogy az $\{1, \dots, 2n\}$ alaphalmaz egy véletlen 2-színezett permutációjában páros (illetve páratlan) sok piros elem van. A $p_0 - p_1$ különbség $\sum p_\pi I_\pi$, ahol az összegzés végigfut a $2n$ elemű alaphalmaz összes 2-színezett π permutációján, és p_π a π „bekövetkezésének” valószínűsége; továbbá I_π értéke 1, ha π -ben páros sok piros elem van, és -1 , ha páratlan sok.

Meghatározzuk egy rögzített ρ (színezetlen) permutáció 2-(ciklus)színezéseinek együttes hozzájárulását a $\sum p_\pi I_\pi$ összeghez. Ha ρ mindegyik ciklusa páros hosszú, akkor nyilván minden 2-színezésében páros sok piros elem lesz, tehát ekkor az összhozzájárulás $2^s \frac{1}{(2n)! 2^s} \cdot 1 = \frac{1}{(2n)!}$, azaz természetesen ρ „kiválasztásának” valószínűsége. (Itt s ismét a ciklusok számát jelölte.) Ha ρ -nak van páratlan hosszú ciklusa, akkor egy tetszőleges rögzített páratlan hosszú ciklus színének „invertálásával” olyan párokba rendezhetjük ρ 2-színezéseit, hogy minden párban az egyik 2-színezett ciklus páros sok piros elemet tartalmaz, a másik pedig páratlan sokat. Tehát minden

pár 0-val járul hozzá az összeghez, vagyis a ρ -hoz tartozó összhozzájárulás ebben az esetben 0.

Az eddigi meggondolások alapján (2.13) bal oldala $|\Pi_{2n}|/(2n)!$, ahol Π_{2n} az $\{1, \dots, 2n\}$ alaphalmaz csak páros hosszú ciklusokat tartalmazó permutációinak halmaza. $|\Pi_{2n}|$ meghatározásához építsük fel Π_{2n} permutációit ciklusonként a szokásos módon: Először az '1' elem képét választjuk meg, majd az '1' elem képének képét, és így tovább, záródó ciklus esetén a még nem ciklusba rendezett elemek közül a legkisebb elem képének (és egész ciklusának) meghatározásával folytatjuk az eljárást mindaddig, amíg a permutációt teljesen nem definiáljuk. Ebből

$$|\Pi_{2n}| = (2n - 1) \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1,$$

mert az i -edik lépésben az aktuális elem képe vagy a még „érintetlen” $2n - i$ elem közül kerülhet ki, vagy az épp felépítés alatt lévő ciklust zárhatjuk be, de utóbbi csak akkor engedélyezett, ha i páros (az első ciklust csak valamelyik párosodik lépésben zárhatjuk be, majd ismét páros sok lépésnek kell elteltnie a következő ciklus bezárásáig stb.). Itt hallgatólagosan felhasználtuk azt a könnyen ellenőrizhető ténytet, hogy a leírt felépítési eljárások halmaza és a Π_{2n} halmaz között bijektív kapcsolat van.

Összegezve tehát (2.13) bal oldala

$$\frac{|\Pi_{2n}|}{(2n)!} = \frac{(2n - 1) \cdot (2n - 1) \cdot (2n - 3) \cdot (2n - 3) \cdot \dots \cdot 1 \cdot 1}{(2n)!} = \frac{(2n)!(2n)!}{(2n)!2^n n! 2^n n!} = \frac{B_n}{4^n},$$

amit bizonyítani kellett. □

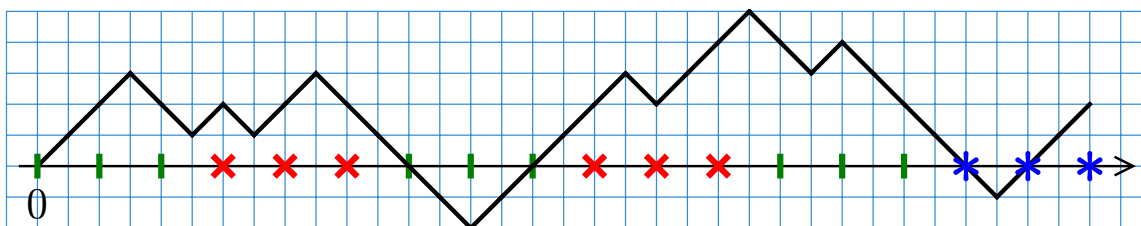
2.5. További problémák

Ebben az alfejezetben sejtésként fogalmazzuk meg a 2.7. Lemma egy általánosítását. A páros-metsző utak definiálásakor az x -tengelyen a lehetséges tengelymetszetek közül minden másodikat megtiltottunk, a többit pedig engedélyeztük. Most más „tiltásmintákat” is megvizsgálunk.

A különböző tiltásminták megadhatók egy-egy sorozattal, amelyek a szóba jöhető tengelymetszetekre balról jobbra haladva felsorolják, hogy a metszéspont tiltott vagy engedélyezett-e. Kiderül, hogy akkor jutunk érdekes sejtésekhez, ha bevezetünk egy harmadik fajta előírást is.

Definíció. Egy b_0, b_1, \dots, b_n 0-1-2 sorozatra jelölje $\mathcal{P}[b_0 b_1 \dots b_n]$ azon $2n$ hosszú, origóból induló (hagyományos) utak halmazát, amelyek elkerülik a $\{(2i, 0) : b_i = 0\}$ halmaz összes pontját, ugyanakkor a $\{(2i, 0) : b_i = 2\}$ halmaz legalább egy pontjára rálépnek. (Figyeljük meg, hogy a sorozat (hossza) kijelöli az utak hosszát is.) \diamond

A tömörebb írásmód kedvéért egy 0-1-2 sorozat megadásakor az ismétlődő részeket hatványozásszerűen jelöljük, például az 110110110 bitsorozatot írhatjunk $(1^2 0)^3$ -ként is.



2.20. ábra: A $\mathcal{P}[(1^3 0^3)^2 1^3 2^3]$ halmaz egy útja ($0 = \times$, $1 = |$, $2 = *$)

Minden ilyen előírás-sorozathoz tartozik egy összeszámlálási probléma, a kijelölt utak számának meghatározása. Ez a feladat a 14. oldalon ismertetett egyszerű algoritmus analógiájára hatékonyan megoldható számítógép segítségével. A később megfogalmazott sejtéseket leellenőriztük ezzel a módszerrel „kezelhető” úthosszok (definiáló sorozathosszok) esetén, ám teljes bizonyításuk még várat magára. (A kombinatorikus bizonyítás a cél, de egyéb bizonyítást sem ismerünk.)

A következő sejtés a 2.7. Lemma általánosítása. Ez az általános sejtés azt sugallja, hogy a lemmára adott, 2.3. alfejezetben bemutatott bizonyításunk talán egyszerűsíthető. (Mivel a konstrukció nem vihető át az általános esetre, vagy legalábbis nem nyilvánvaló módon.)

2.19. Sejtés.

$$\text{a) } |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^{n-1} 1^k 2^k]| = |\mathcal{P}[10^{n-1} 21^{2kn-n-1}]| = 4^{2kn-n-1} 2C_{n-1},$$

$$\text{b) } |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]| = |\mathcal{P}[10^n 1^{2kn-n-1}]| = 4^{2kn-n-1} B_n.$$

Megjegyzés. Az állításokban szereplő halmazok mindegyike $4kn - 2$ hosszú utakat tartalmaz. A második egyenlőség mindkét esetben nyilvánvaló: A b) pontban $\mathcal{P}[10^n]$ a $2n$ hosszú sehohsem-zéró utak halmaza (ld. 8. oldal); így a 2.2. Állítás szerint $|\mathcal{P}[10^n]| = B_n$, és egy utolsó 1-es hozzáadása egy \mathbf{b} 0-1-2 sorozathoz két tetszőleges befejező lépés hozzávételét jelenti a $\mathcal{P}[\mathbf{b}]$ -beli utak halmazához, ami a számosságokat tekintve egy 4-szeres szorzónak felel meg; tehát valóban adódik b) utolsó egyenlősége. Az a) pontban pedig a $\mathcal{P}[10^{n-1} 2]$ -beli utak éppen a $2n-2$ hosszú Dyck-utak, egy kezdő felfelé és záró lefelé lépéssel ellátva, valamint ezek x -tengelyre vonatkozó tükörképei; tehát $|\mathcal{P}[10^{n-1} 2]| = 2C_{n-1}$, vagyis a második egyenlőség ismét egyszerűen következik. Az igazi feladat tehát a $\mathcal{P}[(1^k 0^k)^{n-1} 1^k 2^k]$ és $\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]$ halmazok elemszámának meghatározása; a $\mathcal{P}[10^{n-1} 21^{2kn-n-1}]$ és $\mathcal{P}[10^n 1^{2kn-n-1}]$ halmazok szerepeltetésével csupán egy-egy lehetséges „célhalmazt” adtunk egy bijektív bizonyításhoz, illetve kiemeltük vele, hogy a tiltásmintában a blokkok száma „lényegesebbnek tűnik”, mint a blokkok mérete. \diamond

Vegyük észre, hogy $k = 1$ választással valóban visszkapjuk a 2.7. Lemmát. A sejtés b) pontja szerint $|\mathcal{P}[(10)^n]| = 4^{n-1} B_n$, és tekintve, hogy a $4n$ hosszú páros-metsző utak éppen $\mathcal{P}[(10)^n]$ útjaiból nyerhetők 2 tetszőleges befejező lépés hozzáfűzésével, az állítás valóban a lemma b) pontjának felel meg. Az a) pontok ekvivalenciája pedig abból következik, hogy a $\mathcal{P}[(10)^n 12]$ útjai éppen az origóból a $(4n + 1, 1)$ pontba menő páros-metsző utak és tükörképeik (egy x -tengelyre vivő lépés hozzáfűzésével).

Valójában a sejtés két pontja is ekvivalens, bár ezt nem teljesen kombinatorikus úton látjuk be. Ha $\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]$ útjait úgy számoljuk meg, hogy az összes $4kn - 2$ hosszú utak számából kivonjuk az x -tengelyt tiltott pontban metsző utak számát (a „rossz” utakat aszerint csoportosítva, hogy melyik tiltott blokkra léptek rá először), akkor a

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]| &= 2^{4kn-2} - \sum_{i=1}^n |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^{i-1} 1^k 2^k 1^{2k(n-i)}]| \\ &= 2^{4kn-2} - \sum_{i=1}^n |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^{i-1} 1^k 2^k]| 4^{2k(n-i)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

összefüggéshez jutunk. Feltéve, hogy a sejtés a) állításának első egyenlősége igaz, és felhasználva, hogy ekkor nyilvánvalóan úgy is igaz, ha a két úthalmazt definiáló sorozathoz ugyanannyi záró 1-es bitet hozzáveszünk, (2.14) első egyenlőségéből a

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]| &= 2^{4kn-2} - \sum_{i=1}^n |\mathcal{P}[10^{i-1} 21^{2ki-i-1} 1^{2k(n-i)}]| \\ &= 2^{4kn-2} - \sum_{i=1}^n |\mathcal{P}[10^{i-1} 21^{2kn-i-1}]| = |\mathcal{P}[10^n 1^{2kn-n-1}]| \end{aligned}$$

alakot kapjuk, ahogy a b) pont állítja. Az utolsó egyenlőség azért teljesül, mert az egyenlőség jobb oldalán álló mennyiséget ismét úgy számoljuk meg, hogy az összes szóba jöhető utak számából kivonjuk a „rossz” utak számát. Megfordítva, a b) állításból rekurzívan következik a), mert k -t rögzítve, (2.14) rendezés után egy rekurzív kiszámítási módot ad az $a_n := |\mathcal{P}[(1^k 0^k)^{n-1} 1^k 2^k]|$ sorozat elemeire a kisebb indexű a_i értékekből és a $|\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]|$ értékéből, amely rekurziót egyetlen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat elégíti ki; és a $|\mathcal{P}[(1^k 0^k)^n]| = |\mathcal{P}[10^n 1^{2kn-n-1}]|$ feltételezéssel élve a $\{|\mathcal{P}[10^{n-1} 21^{2kn-n-1}]\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat ilyen, ezt láttuk be az előbb.

Befejezésként ismertetünk egy hasonló sejtést, amelyet számítógépes vizsgálataink során fogalmaztunk meg. (A két alpont ekvivalenciája a fentiekhez hasonlóan igazolható.) A második úthalmazt definiáló tiltássorozatban az ‘1’ kitevője mindkét állításban az az érték, amellyel a sorozat ugyanolyan hosszú lesz, mint az első tiltássorozat.

2.20. Sejtés.

- $|\mathcal{P}[1(1^k 0^{k+1})^{n-1} 1^k 2^{k+1}]| = |\mathcal{P}[10^{n-1} 21^{2kn}]| = 4^{2kn} 2C_{n-1}$,
- $|\mathcal{P}[1(1^k 0^{k+1})^n]| = |\mathcal{P}[10^n 1^{2kn}]| = 4^{2kn} B_n$.

Diszkrét véletlen séták egy konvexitási tulajdonsága

3.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben diszkrét véletlen sétákkal foglalkozunk a síkon, illetve magasabb dimenziókban. Megvizsgáljuk a \mathbb{Z}^2 négyzetrács egy rögzített pontjából indított véletlen séta x -tengellyel vett első metszéspontjának eloszlását konvexitás szempontjából, majd tekintjük a probléma \mathbb{Z}^d -beli megfelelőjét.

A bemutatásra kerülő eredmények előzménye Benkő Dávid, Peter D. Dragnev és Totik Vilmos 2012-ben megjelent [2] cikke, melyben a szerzők egyebek mellett iterált kisöprés („balayage”) alkalmazásával bizonyítják, hogy a komplex sík valós egyenesének tetszőleges kompakt halmazához társított harmonikus mérték sűrűségfüggvénye konvex (a halmaz részintervallumain). A harmonikus mértékek alapvető szerepet töltenek be a harmonikus analízisben (a témakört részletesen tárgyalja például a [7] monográfia); mi a standard definíció helyett az értekezés témájához kapcsolódó ekvivalens módon vezetjük be az idézett tételben szereplő harmonikus mértéket: Adott egy, az origót nem tartalmazó $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz a komplex sík valós egyenesén, és legyen ω_K az a mérték, amely minden $H \subseteq K$ mérhető részhalmazhoz annak az eseménynek a valószínűséget rendeli, hogy az origóból induló 2-dimenziós Brown-mozgás meglátogatja K -t, és az első meglátogatott pont H -beli. (A valószínűségelmélet és a harmonikus analízis kapcsolatáról bővebben olvashatunk például az [5] könyvben.) A fenti eredmény állítása szerint ez az ω_K mérték abszolút folytonos, és (alkalmas) sűrűségfüggvénye konvex minden $I \subseteq K$ intervallumon. Totik professzorral közös [18] cikkünkben erre a tételre egy új bizonyítást adunk, amely azon a jól ismert tényen alapul, hogy a 2-dimenziós Brown-mozgás közelíthető (egyre finomodó négyzetrácson tekintett) diszkrét véletlen sétákkal. Az én hozzájárulásom ehhez a bizonyításhoz a diszkrétizált változatban felmerülő kombinatorikus probléma, a 3.1. Tétel elemi megoldása volt, ezért ezzel foglalkozunk majd részletesebben. (Ezt a tételt Totik Vilmos igazolta először, más eszközökkel.) A következőkben a szükséges fogalmak bevezetése után ismertetjük a tételt, melyet a 3.2. alfejezetben bizonyítunk majd. A 3.3. alfejezet Szalai Attilával közös eredményeket tartalmaz [17]: Egy általánosítással foglalkozunk, melyet Totik Vilmos ajánlott figyelmünkbe, a folytonos analógia által sugallt iránymutatásokkal együtt. Itt megvizsgáljuk módszerünk korlátait is. Végül a 3.4. alfejezetben eredményeink magasabb dimenziós megfelelőit tárgyaljuk.

Most bevezetjük a fejezetben használt fogalmakat. Egy $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ rácspont (\mathbb{Z}^2 -beli) *szomszédain* az $(m + 1, n)$, $(m - 1, n)$, $(m, n + 1)$ és $(m, n - 1)$ pontokat értjük.

Definíció. Egy \mathbb{Z}^2 -beli (rács)pontokból álló Q_0, Q_1, Q_2, \dots (véges vagy végtelen)

véletlen séta 1 valószínűséggel rálép az x -tengelyre, és így a tételbeli p_k valószínűségek összege 1. (Bár ezt a tényt nem fogjuk használni.) \diamond

A 3.1. Tételt a következő alfejezetben bizonyítjuk. Most két másik lehetséges bizonyítási módot vázolunk.

Először Totik Vilmos gondolatmenetét mutatjuk be. A $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sorozathoz mint együtttható-sorozathoz tartozó (komplex) Fourier-sor összege könnyen meghatározható (lásd pl. [18]-ban, vagy a [27] monográfia 156. oldalán, illetve vázlatosan a következő alfejezetben):

$$g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikx} = 2 - \cos x - \sqrt{(1 - \cos x)(3 - \cos x)}. \quad (3.1)$$

A 3.1. Tétel bizonyításához a $g(x)$ elemi függvény nemnegatív indexű Fourier-együtthatóira kell igazolni a konvexitáshoz szükséges egyenlőtlenségeket. Ez a megközelítés a Fourier-együtthatók kiszámítási módja alapján elemi függvények határozott integráljai között fennálló egyenlőtlenségekhez vezet. Amely egyenlőtlenségek bizonyítása elvégezhető, de nem egyszerű feladat. (Ez a nehezebb technikai rész végül nem került publikálásra.)

A 3.3. alfejezetben látni fogjuk, hogy a 3.1. Tétel igazolható a szép kombinatorikus ötlettel nyerhető (korábban is ismert) 3.8. Következményből kiindulva egy kevésbé szép, de elemi számolással. Ez tételünk egy újabb bizonyítását adja.

A következő alfejezetben egy számolásmentes módszert ismertetünk, melyben a bizonyítandó egyenlőtlenséget injektív függvény megadásával igazoljuk.

3.2. A diszkrét konvexitási lemma elemi bizonyítása

Ebben az alfejezetben a [18] cikkben publikált módon igazoljuk a 3.1. Tételt. Először bevezetünk néhány elnevezést és jelölést. Legyen $p_{k_2}^{(k_1, h)}$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a (k_1, h) pontból indított \mathbb{Z}^2 -beli véletlen séta a $(k_2, 0)$ pontban lép először az x -tengelyre. Ezzel a jelöléssel feladatunk a $(p_k^{(0,1)})_{k=0}^{\infty}$ sorozat konvexitásának igazolása. Megjegyezzük, hogy szimmetriai okokból nyilván fennáll, hogy $p_{k_2}^{(k_1, h)} = p_{k_2 - k_1}^{(0, h)}$ és $p_k^{(0, h)} = p_{-k}^{(0, h)}$. Megmutatható, hogy intuíciónkkal összhangban a $(p_k^{(0, h)})_{k=0}^{\infty}$ sorozat szigorúan monoton csökken tetszőleges pozitív h -ra. (Ez utóbbi tényt nem fogjuk használni.)

A $p_{k_2}^{(k_1, h)}$ valószínűségek becsléséhez az alábbi sétákra lesz szükségünk:

Definíció. Legyen $h > 0$. Azt mondjuk, hogy egy \mathbb{Z}^2 -beli (véges, nem véletlen) $(k_1, h) \rightsquigarrow (k_2, 0)$ séta *pozitív*, ha az utolsó lépését megelőzően mindig szigorúan az x -tengely fölött tartózkodik. A továbbiakban $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}$ jelöli a \mathbb{Z}^2 -beli pozitív $(k_1, h) \rightsquigarrow (k_2, 0)$ séták (végtelen) halmazát, továbbá $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}[l]$ jelöli az l hosszú $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}$ -beli séták (véges) halmazát. \diamond

Visszatérve a 3.1. Tétel $p_k := p_k^{(0,1)}$ jelöléséhez, $k \geq 1$ esetén

$$p_k = \frac{1}{4}p_k^{(1,1)} + \frac{1}{4}p_k^{(-1,1)} + \frac{1}{4}p_k^{(0,2)} = \frac{1}{4}p_{k-1} + \frac{1}{4}p_{k+1} + \frac{1}{4}p_k^{(0,2)}, \quad (3.2)$$

hiszen $\frac{1}{4}p_k^{(1,1)}$ (illetve $\frac{1}{4}p_k^{(-1,1)}$ és $\frac{1}{4}p_k^{(0,2)}$) annak a valószínűsége, hogy a $(0, 1)$ pontból induló véletlen séta első lépése \rightarrow (illetve \leftarrow, \uparrow), és a séta a $(k, 0)$ pontban lép először az x -tengelyre. (Ha az első lépés lefelé lépés, akkor nem következik be a vizsgált esemény $k \geq 1$ esetén.) Ugyanis $1/4$ valószínűséggel lesz az első lépés jobbra lépés, illetve $p_k^{(1,1)}$ a valószínűsége annak, hogy a séta többi lépése, az $(1, 1)$ pontból indított véletlen séta olyan, hogy az első x -tengelymetszet a $(k, 0)$ pontban történik meg. (A $\frac{1}{4}p_k^{(-1,1)}$ és $\frac{1}{4}p_k^{(0,2)}$ tagokat hasonlóan kapjuk.) A második egyenlőség a $p_k^{(1,1)} = p_{k-1}$ és $p_k^{(-1,1)} = p_{k+1}$ összefüggésekből következik.

Megjegyzés. A $(0, 2)$ pontból induló véletlen séta $y = 1$ egyenessel vett első metszéspontját vizsgálva kapjuk, hogy

$$p_k^{(0,2)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} p_j p_{k-j}. \quad (3.3)$$

Nem nehéz meggondolni, hogy ebből és (3.2)-ből következik (3.1), összefüggéseink ugyanis megfogalmazhatók a $g(x)$ Fourier-sor segítségével:

$$g(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})g(x) + \frac{1}{4}g^2(x).$$

Itt felhasználtuk, hogy (3.2) valójában minden $k \neq 0$ -ra igaz, $k = 0$ esetén pedig minden lefelé lépéssel kezdődő véletlen séta is hozzájárul a p_k valószínűséghez, így (3.2) ebben az esetben a $p_0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_{-1} + \frac{1}{4}p_1 + \frac{1}{4}p_0^{(0,2)}$ összefüggésre módosul. A kapott függvényegyenlet ($|g(x)| \leq 1$ figyelembevételével) egyértelmű megoldása adja a (3.1)-beli zárt alakot. Megjegyezzük, hogy elemi bizonyításunk nem támaszkodik a (3.3) konvolúciós formulára, csupán közbevetésként vázoltuk az analitikus megközelítések kiindulópontjául szolgáló (3.1) sorösszeg levezetését. \diamond

Ha $k \geq 1$, akkor a bizonyítandó

$$p_k \leq \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})$$

egyenlőtlenség (3.2) szerint ekvivalens a következővel (amely, mint látni fogjuk, $k = 0$ esetén is teljesül):

$$p_k^{(0,2)} \leq p_{k-1} + p_{k+1}. \quad (3.4)$$

Ismét használva, hogy $p_{k-1} = p_k^{(1,1)}$ és $p_{k+1} = p_k^{(-1,1)}$, ezen egyenlőtlenséget a

$$p_k^{(0,2)} \leq p_k^{(1,1)} + p_k^{(-1,1)} \quad (3.5)$$

alakban látjuk be (tetszőleges k -ra). A vizsgált eseményt realizáló sétákat az első x -tengelymetszetig tartó szakaszuk szerint osztályozva kapjuk, hogy

$$p_{k_2}^{(k_1, h)} = \sum_{W \in \mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}} \left(\frac{1}{4}\right)^{|W|} = \sum_{l=1}^{\infty} \left| \mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}[l] \right| \left(\frac{1}{4}\right)^l, \quad (3.6)$$

így a bizonyítandó (3.5) egyenlőtlenség adódik a következő lemmából (a (3.5)-beli valószínűséget (3.6) szerint végtelen sorként felírva, tagonként becsülhetünk):

3.2. Lemma. *Bármely k egész számra létezik hossztartó $\mathcal{W}_k^{(0,2)} \rightarrow \mathcal{W}_k^{(1,1)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ injektív leképezés. Vagyis tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$ és $l \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left| \mathcal{W}_k^{(0,2)}[l] \right| \leq \left| \mathcal{W}_k^{(1,1)}[l] \right| + \left| \mathcal{W}_k^{(-1,1)}[l] \right|.$$

Bizonyítás. Megadunk egy alkalmas ϕ leképezést. Legyen $W \in \mathcal{W}_k^{(0,2)}$ egy tetszőleges $(0, 2) \rightsquigarrow (k, 0)$ pozitív séta.

Először egy természetes „első próbálkozást” mutatunk be. Ha W jobbra lépéssel kezdődik, akkor ezt a lépést felfelé lépésre cserélve egy $\mathcal{W}_k^{(1,1)}$ -beli séta-hoz jutunk; ha W lefelé lépéssel kezdődik, akkor ezt a lépést jobbra lépésre cserélve egy $\mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ -beli séta-hoz jutunk. Ezek az átalakítások nyilván hossztartók és injektívek. Ezt a naiv elindulást fogjuk kiterjeszteni (általánosítani) az összes $\mathcal{W}_k^{(0,2)}$ -beli séta-ra.

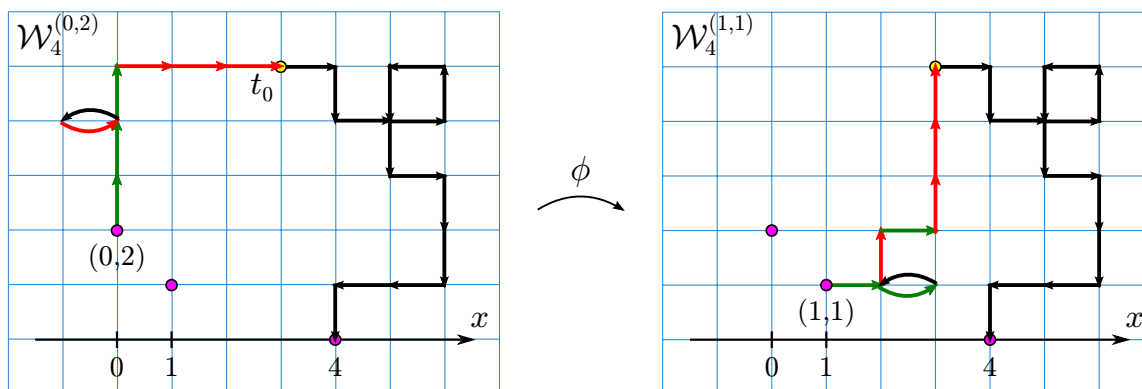
Eljárásunk a következő. Jelölje rendre \uparrow_t, \downarrow_t , illetve \rightarrow_t a W séta első t lépése között előforduló felfelé, lefelé, illetve jobbra lépések számát. Legyen t_0 a legkisebb olyan t természetes szám („időpont”), amelyre a következők valamelyike teljesül:

$$\rightarrow_t = \uparrow_t + 1, \quad (3.9)$$

$$\downarrow_t = \rightarrow_t + 1. \quad (3.10)$$

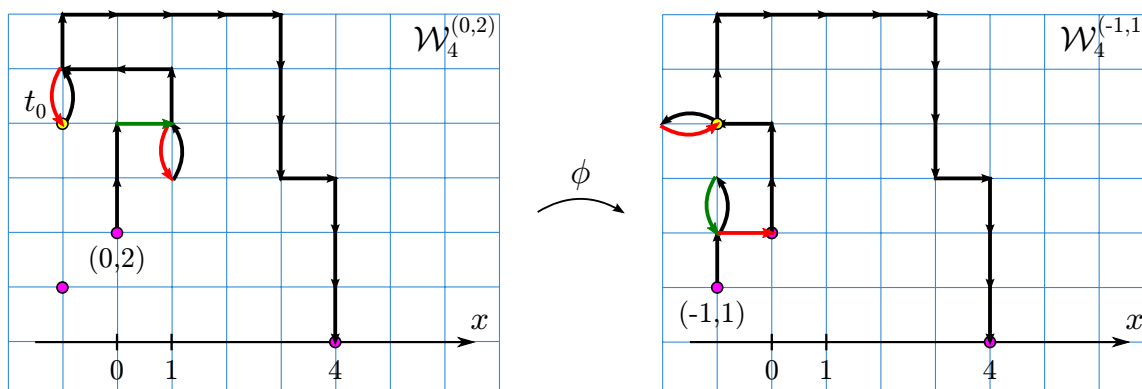
Ilyen t_0 létezik: Kezdetben, $t = 0$ -ra, $\rightarrow_t \leq \uparrow_t$ és $\downarrow_t \leq \rightarrow_t$ áll fenn (mindegyik érték 0). Egy lépés megtételével (t értékének 1-gyel való növelésével) a három megfigyelt lépésszám közül legfeljebb az egyik 1-gyel nő, a többi nem változik. Tehát t_0 az első olyan időpont, amikor a jobbra lépések száma meghaladja (1-gyel) a felfelé lépések számát, vagy a lefelé lépések száma meghaladja (1-gyel) a jobbra lépések számát. Ilyen időpont létezik, mert $\uparrow_{|W|-1} < \downarrow_{|W|-1}$, hiszen közvetlenül az utolsó (lefelé) lépés előtt a $(k, 1)$ pontban tartózkodik W , a kiinduló magasságánál 1 egységgel alacsonyabban, emiatt $t = |W| - 1$ -re nem állhat fenn $\uparrow_t \geq \rightarrow_t$ és $\rightarrow_t \geq \downarrow_t$ mindegyike, mert abból $\uparrow_t \geq \downarrow_t$ következne. Egyúttal azt is megkaptuk, hogy $t_0 \leq |W| - 1$. (A lemmabeli \mathcal{W} halmazok sétáinak utolsó lépése mindig lefelé lépés, ezeket természetesen változatlanul hagyjuk majd.) A (3.9) és (3.10) feltételek közül nyilván csak az egyiket elégíti ki t_0 ; az első esetben a t_0 -adik lépés jobbra lépés, a második esetben lefelé lépés.

1. eset: Ha t_0 a (3.9) feltételt teljesíti, akkor a $\phi(W)$ képet úgy definiáljuk, hogy W első t_0 lépése között a jobbra lépéseket felfelé lépésekre, a felfelé lépéseket pedig jobbra lépésekre cseréljük, a többi lépést változatlanul hagyjuk, és a kapott sétát az $(1, 1)$ pontból indítjuk (ld. 3.2. ábra).



3.2. ábra: Kódolás az 1. esetben

Világos, hogy $|\phi(W)| = |W|$. Belátjuk, hogy $\phi(W) \in \mathcal{W}_k^{(1,1)}$ is teljesül. Mivel a cserékkel az első t_0 lépés között a jobbra lépések száma 1-gyel csökkent, a felfelé lépések száma 1-gyel nőtt (és a többi lépésszám nem változott), ezért a $\phi(W)$ séta első t_0 lépése által alkotott $\phi(W)_{\leq t_0}$ részséta végpontja megegyezik a W séta első t_0 lépése által alkotott $W_{\leq t_0}$ részséta végpontjával. (Amely végpont $t_0 \leq |W| - 1$ miatt az x -tengely felett helyezkedik el.) Tehát a t_0 -adik lépés után $\phi(W)$ egybeesik W -vel, mivel ezen a szakaszon $\phi(W)$ -ben megtartottuk W lépéseit. Speciálisan, $\phi(W)$ végpontja $(k, 0)$, és a t_0 -adik lépés után végig az x -tengely fölött halad (a végpontot leszámítva). Annak igazolásához, hogy a $\phi(W)_{\leq t_0}$ szakasz is végig az x -tengely fölött halad, azt kell megmutatni, hogy $\downarrow_t^\phi \leq \uparrow_t^\phi$ fennáll, ha $t \leq t_0$. (A $\phi(W)$ -beli lépésszámokat a W sétánál bevezetett módon jelöljük, csak ϕ felső indexszel ellátva.) Ez pedig t_0 definíciójából következik: W -ben $\downarrow_t \leq \rightarrow_t$ teljesül minden $t \leq t_0$ -ra (emlékeztetünk, hogy t_0 az *első* olyan időpont, amelyre a fenti két feltétel valamelyike – esetünkben (3.9) – teljesül), ami az első t_0 lépés között végrehajtott \rightarrow/\uparrow lépéscserék következtében éppen a kívánt $\downarrow_t^\phi \leq \uparrow_t^\phi$ egyenlőtlenséghez vezet $t \leq t_0$ esetén. Ezzel beláttuk, hogy $\phi(W) \in \mathcal{W}_k^{(1,1)}$, vagyis ebben az esetben ϕ jóldefiniált.



3.3. ábra: Kódolás a 2. esetben

2. eset: Ha t_0 a (3.10) feltételt teljesíti, akkor analóg módon járunk el (ld. 3.3. ábra): Ebben az esetben W első t_0 lépése között a lefelé és a jobbra lépéseket

cseréljük meg (a többi lépés változatlanul hagyásával); így kapjuk $\phi(W)$ -t, melyet a $(-1, 1)$ pontból indítunk, és $\mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ -beli séta lesz. Ugyanis az 1. esethez hasonlóan könnyen látható, hogy $\phi(W)$ egybeesik W -vel a t_0 -adik lépés után. A $\phi(W)_{\leq t_0}$ szakasz pozitivitása pedig abból következik, hogy t_0 definíciója szerint $t \leq t_0$ esetén $\rightarrow_t \leq \uparrow_t$ áll fenn W -ben, amiből $\phi(W)$ -re a kívánt $\downarrow_t^\phi \leq \uparrow_t^\phi$ adódik a \downarrow/\rightarrow lépéscserék után. Megjegyezzük, hogy „első próbálkozásunk” éppen az imént definiált ϕ kódolás végrehajtása volt azokra a speciális sétákra, melyekre $t_0 = 1$.

A lemma bizonyításához már csak azt kell belátni, hogy ϕ injektív. Ehhez válasszunk egy tetszőleges $W' \in \mathcal{W}_k^{(1,1)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ sétát, melyre megmutatjuk, hogy legfeljebb egy őse lehet. Ha $W' \in \mathcal{W}_k^{(1,1)}$, akkor ezt a sétát csak az 1. esetnek megfelelő átalakítással kaphatjuk meg. Egy 1. eset szerint kódolt W sétához tartozó t_0 érték kiolvasható $\phi(W)$ -ből ϕ definíciója alapján: t_0 a legkisebb olyan t , amelyre $\uparrow_t^\phi = \rightarrow_t^\phi + 1$ teljesül $\phi(W)$ -ben; ez t_0 definíciója és a t_0 -adik lépésig tartó \rightarrow/\downarrow lépéscserék alapján nyilvánvaló. Tehát W' őse nem lehet más, mint az a séta, amelyet W' -ből kapunk oly módon, hogy a fentiek szerint meghatározott t_0 időpontig megcseréljük a felfelé és jobbra lépéseket. Persze előfordulhat, hogy ilyen t_0 nem létezik W' -höz (ekkor biztosan nincs őse), illetve azt sem ellenőriztük, hogy ha t_0 létezik, akkor az egyetlen lehetséges ős valóban $\mathcal{W}_k^{(0,2)}$ -ban van-e, de az világos, hogy legfeljebb egy ős lehet. Hasonlóan járhatunk el akkor is, ha $W' \in \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$. Ezzel ϕ injektivitását, és így a teljes lemmát, valamint a belőle következő 3.1. Tételt is igazoltuk. \square

Megjegyzés. A fenti bizonyítás alapján úgy tűnhet, hogy ϕ kódolásunk nehezen vizualizálható. Ezért megjegyezzük, hogy például az 1. esetben definiált séta-transzformáció a következőképpen is megfogalmazható: W -nek valójában csak a felfelé és jobbra lépéseivel foglalkozunk, és az ezen lépésekből (a W -beli sorrend megtartásával) nyert $W_{\uparrow, \rightarrow}$ útnak az $y = x + 1$ egyenesre vett első metszéspontjáig tartó részét tükrözzük az egyenesre. Mindezt persze úgy értjük, hogy bár $W_{\uparrow, \rightarrow}$ -re egy $(0, 2)$ pontból induló sétaként gondolunk (amikor az $y = x + 1$ egyenesre való tükrözésről beszélünk), természetesen csak a $W_{\uparrow, \rightarrow}$ -nek megfelelő lépéssorozatot alakítjuk át W -ben, W többi lépését fixen hagyva (vö. 3.2. ábra). A 2. eset kódolása hasonlóan fogalmazható át; ebben az esetben a jobbra és lefelé lépések által alkotott utat tükrözzük az $y = -x + 1$ egyenesre. Tehát a két eset kódolása valójában egy-egy standard tükrözéses gondolat (például a Dyck-utak összeszámlálása is hasonló módon kézenfekő), mely szemléletben ϕ injektivitása nyilvánvaló. Konstrukciónk nemtriviális része az, ahogy ez a két tükrözés „összeáll” egy $\mathcal{W}_k^{(0,2)} \rightarrow \mathcal{W}_k^{(1,1)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ leképezéssé. \diamond

Végezetül kiemeljük, hogy a 3.2. Lemmát bizonyító injektív leképezésünk fixen hagyja a balra lépéseket. Ez azt jelenti, hogy a lemma következő erősítése is igaz: Tetszőleges $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{N}$ és $S \subseteq \{1, \dots, l - 1\}$ esetén

$$\left| \mathcal{W}_k^{(0,2)}[l; S] \right| \leq \left| \mathcal{W}_k^{(1,1)}[l; S] \right| + \left| \mathcal{W}_k^{(-1,1)}[l; S] \right|, \quad (3.11)$$

ahol a $\mathcal{W}[l; S]$ azon \mathcal{W} -beli, l hosszú séták halmazát jelöli, melyekben a balra lépések pozícióinak halmaza éppen S . Az állításban szereplő séták száma explicit módon meghatározható zárt alakban, mindhárom sétatípusra: A balra lépések pozíciói adottak; $|S|$, k és l ismeretében a jobbra lépések, és így a „függőleges” lépések száma is adott; az utolsó lépés mindig lefelé lépés; a függőleges lépések egy olyan *utat* alkotnak (az előző fejezet szerinti értelemben), melyek a 2 (illetve 1) magasságról indulva az utolsó lépéssel lépnek először az x -tengelyre; más feltétel nincs. (A függőleges lépések által alkotott lehetséges utak száma meghatározható, ez az ismert „ballot problem” [23], amely mindhárom sétahalmaz esetén egy-egy Catalan-számhoz vezet. Tehát a függőleges és jobbra lépések összes lehetséges sorrendjének figyelembevételével a (3.11)-beli $\mathcal{W}[l; S]$ halmazok elemszáma kiszámolható.) A kapott számosságokra elemi számolással is ellenőrizhető a (3.11) egyenlőtlenség, amely a 3.2. Lemma egy újabb bizonyítását adja. (A részletek kidolgozását az olvasóra bízunk.)

3.3. Magasabbról indított véletlen séták

A 3.1. Tétel ismeretében természetes módon vetődik fel annak vizsgálata, hogy a $(0, 1)$ pontnál magasabbról indított véletlen séták esetén mit mondhatunk a $(p_k^{(0,h)})_{k=0}^\infty$ sorozat konvexitásáról. A kérdést Totik Vilmos fogalmazta meg. A továbbiakban bemutatom a témában elért, Szalai Attilával közös eredményeinket, majd ismertetem a folytonos eset alapján megfogalmazott célokat, egy kombinatorikus módon megoldatlan eredménnyel együtt, amely módszerünk korlátaira is rávilágít. Az alfejezet egésze a Szalai Attilával közös, 2014-ben elfogadott [17] publikáción alapul.

Az alfejezet fő eredménye a következő:

3.3. Tétel. *Jelölje p_k^h annak a valószínűségét, hogy a $(0, h)$ pontból induló \mathbb{Z}^2 -beli véletlen séta a $(k, 0)$ pontban lép először az x -tengelyre, és legyen $h \geq 2$ rögzített. Ekkor a $(p_k^h)_{k=h-2}^\infty$ sorozat konvex, vagyis $p_k^h \leq \frac{1}{2}(p_{k-1}^h + p_{k+1}^h)$ teljesül $k \geq h - 1$ esetén.*

Bizonyítás. Használjuk az előző alfejezet jelöléseit (tehát például $p_k^h = p_k^{(0,h)}$). A realizáló séták első lépését vizsgálva, (3.2) analógiájára most a

$$p_k^h = \frac{1}{4}p_k^{h-1} + \frac{1}{4}p_k^{h+1} + \frac{1}{4}p_k^{(1,h)} + \frac{1}{4}p_k^{(-1,h)} = \frac{1}{4}p_k^{h-1} + \frac{1}{4}p_k^{h+1} + \frac{1}{4}p_{k-1}^h + \frac{1}{4}p_{k+1}^h$$

összefüggéshez jutunk, ahol felhasználtuk, hogy $p_k^{(1,h)} = p_{k-1}^h$ és $p_k^{(-1,h)} = p_{k+1}^h$. Tehát a tételben szereplő konvexitási egyenlőtlenséghez azt kell megmutatni, hogy $k \geq h - 1$ esetén

$$p_k^{h-1} + p_k^{h+1} \leq p_{k-1}^h + p_{k+1}^h. \quad (3.12)$$

Ehhez $p_{k-1}^h + p_{k+1}^h = p_k^{(1,h)} + p_k^{(-1,h)}$, valamint (3.6) ismételt figyelembevételével elegendő belátni, hogy létezik hossztartó $\mathcal{W}_k^{(0,h-1)} \cup \mathcal{W}_k^{(0,h+1)} \rightarrow \mathcal{W}_k^{(1,h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,h)}$

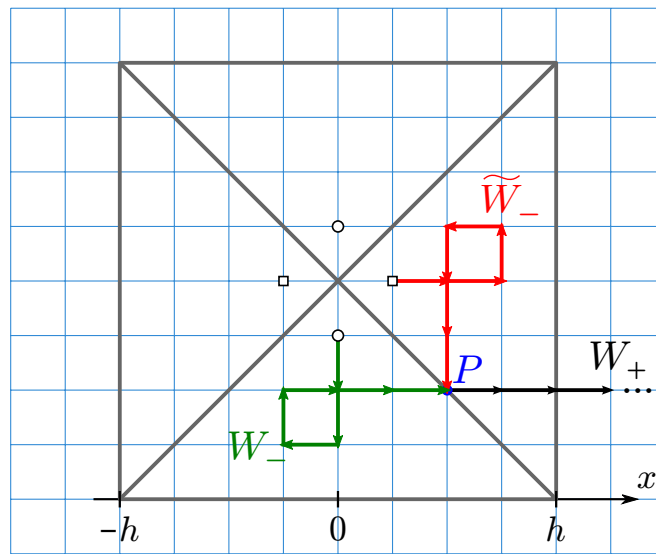
injektív leképezés. Ezt a következő lemmában tárgyaljuk. (Később kiszámoljuk a $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}$ halmazok elemszámának pontos értékét is – lásd 3.8. Következmény –, ennek ismeretében bizonyításunk „számolással” is befejezhető.) \square

3.4. Lemma. *Legyen adott $h \geq 2$ és $k \geq h - 1$. Ekkor létezik hossztartó, injektív $\mathcal{W}_k^{(0, h-1)} \cup \mathcal{W}_k^{(0, h+1)} \rightarrow \mathcal{W}_k^{(1, h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1, h)}$ leképezés. Vagyis tetszőleges $l \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\left| \mathcal{W}_k^{(0, h-1)}[l] \right| + \left| \mathcal{W}_k^{(0, h+1)}[l] \right| \leq \left| \mathcal{W}_k^{(1, h)}[l] \right| + \left| \mathcal{W}_k^{(-1, h)}[l] \right|. \quad (3.13)$$

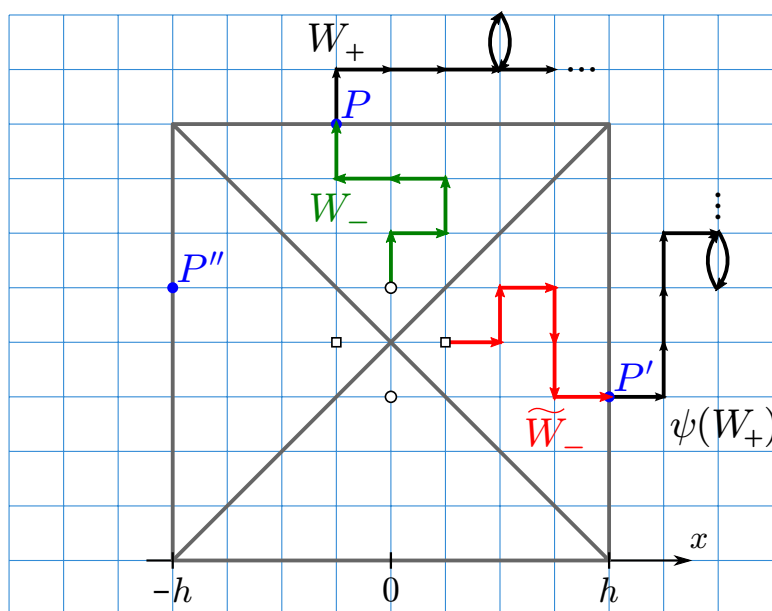
Bizonyítás. Megadunk egy alkalmas ϕ leképezést. Tekintsünk egy tetszőleges W sétát a $\mathcal{W}_k^{(0, h-1)} \cup \mathcal{W}_k^{(0, h+1)}$ halmazból. Legyen P az első olyan rácspont, ahol W rálép a $(h, 0)$, $(h, 2h)$, $(-h, 2h)$ és $(-h, 0)$ csúcsok által meghatározott négyzet valamelyik oldalára vagy átlójára. (Ilyen P pont nyilván létezik.) Ez a P pont két részre osztja a W sétát; jelölje W_- a kezdőponttól a P pontig (pontosabban annak első meglátogatásáig) tartó szakaszt, és jelölje W_+ a séta hátralévő részét.

Ha $W \in \mathcal{W}_k^{(0, h-1)}$, akkor P az egyik átló pontja, mert a $(0, h)$, $(-h, 0)$ és $(h, 0)$ csúcsok által meghatározott „alsó” háromszöget metszi először a $(0, h - 1)$ belső pontból induló, x -tengelyen végződő W séta, és ez a metszés pont nem lehet az x -tengelyen a $k \geq h - 1$ feltétel miatt. Ebben az esetben $\phi(W)$ legyen az a séta, amelyet úgy kapunk W -ből, hogy W_- -t tükrözzük arra a négyzetátlóra, amelyik tartalmazza P -t, és W_+ -t változatlanul hagyjuk, lásd 3.4. ábra. (Ha $P = (0, h)$, akkor válasszuk a pozitív meredekségű átlót a tükrözéshez.) Világos, hogy ekkor $\phi(W)$ kezdőpontja $(-1, h)$ vagy $(1, h)$ lesz, és mivel W_- a négyzeten belül haladva jutott el a P pontig, ezért $\phi(W)$ -nek a W_- -ből tükrözéssel nyert szakasza is így fog eljutni oda; onnantól pedig $\phi(W)$ egybeesik W -vel. Tehát $\phi(W)$ is pozitív séta lesz, vagyis ebben az esetben $\phi(W) \in \mathcal{W}_k^{(1, h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1, h)}$ teljesül.



3.4. ábra: A kódolás menete, ha P valamelyik négyzetátlón helyezkedik el

Ha $W \in \mathcal{W}_k^{(0,h+1)}$, akkor a séta a $(0, h)$, $(h, 2h)$ és $(-h, 2h)$ csúcsok által meghatározott „felső” háromszöget metszi először. Amennyiben P valamelyik átlón helyezkedik el, ugyanúgy járunk el, mint az előbb, és hasonlóan kapjuk, hogy ez jó definíció, azaz ily módon W -hez $\mathcal{W}_k^{(1,h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,h)}$ -beli sétát rendelünk. Amennyiben P a négyzet felső oldalán helyezkedik el, tehát ha $P = (m, 2h)$, ahol $m \in \{-(h-2), \dots, h-2\}$, akkor a soron következő 3.5. Lemmára támaszkodunk, mely szerint létezik hossztartó $\psi_m: \mathcal{W}_k^{(m,2h)} \rightarrow \mathcal{W}_k^{(h,h+m)} \cup \mathcal{W}_k^{(-h,h-m)}$ injekció. (A továbbiakban ezt az injekciót röviden ψ -vel jelöljük.) A $W_+ \in \mathcal{W}_k^{(m,2h)}$ séta $\psi(W_+)$ képének kezdőpontja, $(h, h+m)$ vagy $(-h, h-m)$, megkapható P valamelyik négyzetátlóra való tükrözésével. (A 3.5. ábrán P' -vel, illetve P'' -vel jelöltük a két szóban forgó pontot.) Tehát $\phi(W)$ -t definiálhatjuk a \widetilde{W}_- és $\psi(W_+)$ séták konkatenációjaként, ahol \widetilde{W}_- a W_- séta alkalmas négyzetátlóra való tükröképe. (Azt a tükrözést választjuk, mely P -t, a W_- séta végpontját, $\psi(W_+)$ kezdőpontjába viszi, lásd 3.5. ábra.) Mivel \widetilde{W}_- egy x -tengely felett (a négyzetben) haladó, $(-1, h)$ vagy $(1, h)$ kezdőpontú séta, és $\psi(W_+)$ egy $(k, 0)$ pontban végződő pozitív séta, ezért $\phi(W) \in \mathcal{W}_k^{(1,h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,h)}$ ismét fennáll.



3.5. ábra: A kódolás menete, ha P a négyzet felső oldalán helyezkedik el

Leképezésünk hossztartása nyilvánvaló, már csak az injektivitás meggondolása maradt hátra. Mindegyik alesetben úgy definiáltuk W képét, hogy egy-egy átalakítást hajtottunk végre a W_- és W_+ részsétákon (W_- -t tükröztük, W_+ -ot pedig változatlanul hagytuk, vagy $\psi(W_+)$ -ra cseréltük). Az átalakítások után kapott részsétákat rendre \widetilde{W}_- -szal és \widehat{W}_+ -szal jelölve, konstrukciónkból adódóan a $\phi(W)$ képből kiolvasható, hogy $\phi(W)$ -ben meddig tart a \widetilde{W}_- szakasz: Addig a $P_{\phi(W)}$ pontig, ahol $\phi(W)$ először lép az eddig is tekintett négyzet valamelyik átlójára vagy oldalára. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges V és W sétákra $V_- \neq W_-$

esetén $\widehat{V}_- \neq \widehat{W}_-$, illetve $V_+ \neq W_+$ esetén $\widehat{V}_+ \neq \widehat{W}_+$ áll fenn (a tükrözések és a ψ_m leképezések injektivitása miatt). Ezekből következik, hogy egy tetszőleges $W' \in \mathcal{W}_k^{(1,h)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,h)}$ sétának legfeljebb egy őse lehet: A W' sétahoz tartozó $P_{W'}$ pont kijelöli a keresett W ő(sök)höz tartozó \widehat{W}_- és \widehat{W}_+ szakaszokat W' -ben, amiből az iménti „injektivitási tulajdonság” alapján kapjuk, hogy legfeljebb egy W_- és W_+ , azaz legfeljebb egy W ő(s) létezik. Ezzel ϕ injektivitását igazoltuk. \square

Most rátérünk a bizonyításban megígért lemmára, amelynek speciális esete a $(0, 1)$ pontból indított véletlen sétákra vonatkozó főlemma, a 3.2. Lemma (amely a $h = 1, m = 0$ esetnek felel meg). Nem egyszerűen csak általánosítjuk korábbi lemmánk állítását, a bizonyítás alap gondolatát is átültetjük az általánosabb környezetbe, ezért ezt a bizonyítást kevésbé részletesen tárgyaljuk.

3.5. Lemma. *Tetszőleges olyan h, k, m egészekre, melyekre $h \geq 1$ és $-h < m < h$, létezik hossz tartó $\mathcal{W}_k^{(m,2h)} \rightarrow \mathcal{W}_k^{(h,h+m)} \cup \mathcal{W}_k^{(-h,h-m)}$ injekció.*

Bizonyítás. Megadunk egy ilyen ψ leképezést. Legyen $W \in \mathcal{W}_k^{(m,2h)}$ tetszőleges. Használjuk a 3.2. Lemma bizonyításában bevezetett jelöléseket: $W_{\leq t}$ jelöli a W első t lépése által alkotott sétát, és rendre \uparrow_t, \downarrow_t és \rightarrow_t jelöli a felfelé, lefelé és jobbra lépések számát $W_{\leq t}$ -ben. Legyen t_0 legkisebb olyan t természetes szám („időpont”), amelyre a következők valamelyike teljesül:

$$\rightarrow_t = \uparrow_t + h - m, \quad (3.16)$$

$$\downarrow_t = \rightarrow_t + h + m. \quad (3.17)$$

Mivel $h - m > 0$ és $h + m > 0$, kezdetben ($t = 0$ esetén) mindkét feltételben a bal oldal szigorúan kisebb, mint a jobb oldal. A feltételekben a két oldal különbsége legfeljebb 1-gyel változhat t értékének 1-gyel való növelésével, ezért a két egyenlőségjel helyett írhatnánk \geq jeleket is a feltételekben, azzal ugyanazt a t_0 értéket definiálnánk. A $t = |W| - 1$ időpontban $\rightarrow_t \geq \uparrow_t + h - m$ vagy $\downarrow_t \geq \rightarrow_t + h + m$ teljesül, ellenkező esetben arra jutnánk, hogy

$$\downarrow_t \leq \rightarrow_t + h + m - 1 \leq (\uparrow_t + h - m - 1) + h + m - 1 = \uparrow_t + 2h - 2,$$

ami azonban lehetetlen, ugyanis ebben az időpontban a W séta a $(k, 1)$ pontban tartózkodik (közvetlenül az x -tengelyre lépés előtt), azaz a kiinduló $2h$ magasságnál $(2h - 1)$ -gyel alacsonyabban, más szóval $\downarrow_t = \uparrow_t + 2h - 1$. Kaptuk tehát, hogy t_0 létezik (és $t_0 \leq |W| - 1$).

Ha t_0 a (3.16) feltételt elégíti ki (1. eset), akkor $\psi(W)$ legyen az a $(h, h + m)$ pontból induló séta, amelyet úgy kapunk W -ből, hogy W első t_0 lépése között megcseréljük a jobbra és felfelé lépéseket. Ha t_0 a (3.17) feltételt elégíti ki (2. eset), akkor $\psi(W)$ legyen az a $(-h, h - m)$ pontból induló séta, amelyet úgy kapunk W -ből, hogy W első t_0 lépése között megcseréljük a lefelé és jobbra lépéseket. (A két feltétel közül csak az egyiket elégíti ki t_0 .) Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\psi(W)$ mindkét esetben egybeesik W -vel a t_0 -adik lépés után. A $\psi(W)_{\leq t_0}$ szakasz pedig

végig az x -tengely fölött halad, mert t_0 definíciója miatt a $t \leq t_0$ értékekre az 1. esetben $\downarrow_t < \rightarrow_t + h + m$ adódik, és így a \rightarrow/\uparrow lépéscserék miatt a bizonyítandó $\downarrow_t^\psi < \uparrow_t^\psi + h + m$; a 2. esetben pedig $\rightarrow_t < \uparrow_t + h - m$ és a \downarrow/\rightarrow lépéscserék figyelembevételével kapjuk a bizonyítandó $\downarrow_t^\psi < \uparrow_t^\psi + h - m$ egyenlőtlenséget. Ezek alapján $\psi(W) \in \mathcal{W}_k^{(h,h+m)} \cup \mathcal{W}_k^{(-h,h-m)}$, tehát ψ jóldefiniált. Az injektivitás a 3.2. Lemma bizonyításában látottakhoz hasonlóan könnyen meggondolható, a hossztartás pedig nyilvánvaló. \square

Most a 3.3. Tétel lehetséges élesítéseit vizsgáljuk meg. Egy $(0, h)$ pontból induló $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -beli véletlen sétára tekinthetünk úgy is, mint egy $(0, 1)$ pontból induló véletlen sétára a $h^{-1}\mathbb{Z} \times h^{-1}\mathbb{Z}$ négyzetrácson (h^{-1} arányú skálázás után). Ismert, hogy a sík egy rögzített pontjából induló $h^{-1}\mathbb{Z} \times h^{-1}\mathbb{Z}$ -beli véletlen séták a négyzetrács finomításával (vagyis $h^{-1} \rightarrow 0$ esetén) a 2-dimenziós Brown-mozgáshoz tartanak; ennek szabatos tárgyalása megtalálható [14] 3. fejezetében. Az a véletlen pont (abszcissza), ahol a $(0, 1)$ pontból induló 2-dimenziós Brown-mozgás először metszi az x -tengelyt, standard Cauchy-eloszlást követ [15; 2.37. tétel], melynek sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$. A $(0, h)$ pontból induló \mathbb{Z}^2 -beli véletlen sétára h^{-1} arányú skálázás, majd „visszaskálázás” után tekintve, az eddigiek alapján azt kapjuk, hogy tetszőleges rögzített x -re

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\lfloor hx \rfloor} p_k^h = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt.$$

Ennek precíz bizonyítása megtalálható a [27] monográfia 3. fejezetében (a 15. alfejezetben). Mivel az $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sűrűségfüggvény a $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ intervallumon konkáv, az $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ intervallumon konvex, a határeloszlás ismeretében azt sejtethetjük, hogy nagy h értékekre a $(p_k^h)_{k=0}^K$ sorozat konkáv, a $(p_k^h)_{k=K}^\infty$ sorozat konvex valamely $K \sim \frac{h}{\sqrt{3}}$ küszöbértékre.

A 3.3. Tétel után a kézenfekvő következő lépés az lehetne, hogy bizonyítsuk a konkávitást a $k \leq \alpha h$ intervallumon, valamely $\alpha > 0$ konstansra, ezzel igazolva, hogy tételünk konstans szorzó erejéig éles. Úgy gondoljuk, hogy a bizonyított konvexitási intervallum alsó határa, $h - 2$ is javítható βh -ra, 1-nél kisebb β konstanssal. Az alábbi tételből következik, hogy eddigi módszerünkkel nem érünk célt. (Erre még visszatérünk a tételt követően.)

3.6. Tétel. *Legyen $h \geq 2$ és k rögzített, valamint jelölje rendre V_l , illetve F_l azon l hosszú, $\mathcal{W}_k^{(0,h)}$ -beli séták számát, amelyek kezdő lépése vízszintes (balra vagy jobbra lépés), illetve függőleges (felfelé vagy lefelé lépés). Ekkor*

- $l = h^2 - k^2$ esetén $V_l = F_l$;
- $l \geq h^2 - k^2$ esetén $V_l \geq F_l$;
- $l \leq h^2 - k^2$ esetén $V_l \leq F_l$.

Továbbá, ha $l \neq h^2 - k^2$, akkor $V_l = F_l$ csak $V_l = F_l = 0$ esetén fordulhat elő, azaz csak akkor, ha l olyan, hogy $\mathcal{W}_k^{(0,h)}[l] = \emptyset$.

Bizonyításunk a következő lemmán alapul, melynek segítségével V_l és F_l explicit módon felírható zárt alakban. Ez az elemi lemma nem meglepő módon korábban is ismert volt (ld. például a [4] és [10] cikkeket), mégis vázoljuk a bizonyítását a gondolatmenet eleganciája miatt.

3.7. Lemma. *Legyen $b, d > 0$, és jelölje $W_{(c,d)}^{(a,b)}[n]$ az n hosszú $(a, b) \rightsquigarrow (c, d)$ pozitív séták számát \mathbb{Z}^2 -n. Ekkor*

$$W_{(c,d)}^{(a,b)}[n] = \binom{n}{r} \binom{n}{s} - \binom{n}{r+b} \binom{n}{s-b}, \quad (3.18)$$

ahol éltünk az $r = \frac{1}{2}(n - a - b + c + d)$ és $s = \frac{1}{2}(n - a + b + c - d)$ jelölésekkel. (Az $\binom{n}{t}$ binomiális együtthatót természetesen 0-nak definiáljuk, ha $t \notin \{0, \dots, n\}$.)

Bizonyítás. Az első tag, $\binom{n}{r} \binom{n}{s}$, az összes $(a, b) \rightsquigarrow (c, d)$ séták száma \mathbb{Z}^2 -n. Ennek belátásához a standard koordináta-rendszer helyett 45° -kal elforgatott koordináta-rendszerben dolgozunk. A \mathbb{Z}^2 -beli séták 4 megengedett lépése egyértelműen felírható $\gamma(1/2, 1/2) + \delta(1/2, -1/2)$ alakban, ahol $\gamma, \delta \in \{-1, 1\}$. Egy n hosszú $(a, b) \rightsquigarrow (c, d)$ séta lépéssorozatában ezek a γ_i és δ_i együtthatók tetszőlegesen megválaszthatók ± 1 -nek ($i = 1, \dots, n$), csak annak kell teljesülnie, hogy az (a, b) kezdőpont és (c, d) végpont közötti $(c - a, d - b)$ összelmozdulás-vektort adja ki a lépések összege. Könnyen ellenőrizhető, hogy ez két feltételhez vezet: Ahhoz, hogy a γ_i együtthatók között pontosan r darab 1-es, a δ_i együtthatók között pedig pontosan s darab 1-es legyen. Tehát az együtthatósorozat megválasztására $\binom{n}{r} \binom{n}{s}$ lehetőség van, ahogy állítottuk. (Még nem használtuk b és d pozitivitását, ez a zárt alak bármely a, b, c, d egészekre érvényes.) A „rossz” sétákat számolja meg (3.18) második tagja: Azon $(a, b) \rightsquigarrow (c, d)$ séták száma, amelyek rálépnek az x -tengelyre, megegyezik az összes $(a, -b) \rightsquigarrow (c, d)$ séták számával. (Bijekciót kapunk a két halmaz között, ha a rossz séták első x -tengelymetszetig tartó szakaszát tükrözzük az x -tengelyre.) Az összes $(a, -b) \rightsquigarrow (c, d)$ séták száma az előzőek alapján $\binom{n}{r+b} \binom{n}{s-b}$, ezzel a (3.18) zárt alak helyességét igazoltuk. \square

A 3.6. Tétel bizonyítása. (Vázlat.) Az első és utolsó lépések elhagyása mutatja, hogy

$$\begin{aligned} V_l &= W_{(k,1)}^{(-1,h)}[l-2] + W_{(k,1)}^{(1,h)}[l-2], \\ F_l &= W_{(k,1)}^{(0,h-1)}[l-2] + W_{(k,1)}^{(0,h+1)}[l-2], \end{aligned}$$

a 3.7. Lemma jelöléseit használva. Ebből (3.18) szerint V_l és F_l kifejezhető binomiális együtthatókkal. Ezután a tételben szereplő állítások mindegyike ellenőrizhető fázasztó, de elemi számolással. A számolás részleteit mellőzzük. \square

Megjegyzés. Meglepőnek találjuk, hogy a 3.6. Tételben szereplő kritikus hossza szép, egész érték adódott, $h^2 - k^2$. Ennek nem látjuk szemléletes kombinatorikus okát.

A tétel utolsó állításához kiegészítésként megjegyezzük, hogy $\mathcal{W}_k^{(0,h)}[l]$ pontosan akkor nem üres, ha l ugyanolyan paritású, mint $h + k$, továbbá $l \geq h + |k|$. \diamond

Figyelembe véve, hogy $|\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}[l]| = W_{(k_2, 1)}^{(k_1, h)}[l - 1]$, a 3.7. Lemma megadja az alfejezetben tekintett \mathcal{W} halmazok számosságát:

3.8. Következmény. A $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}[l]$ -beli séták száma, $k = k_2 - k_1$ jelöléssel élve,

$$\binom{l-1}{(l+k-h)/2} \binom{l-1}{(l+k+h-2)/2} - \binom{l-1}{(l+k-h-2)/2} \binom{l-1}{(l+k+h)/2}.$$

A következmény felhasználásával eddigi tételeinkre „számolás” bizonyítások is adhatók, így például a 3.2. Lemmára, és a belőle következő 3.1. Tételre is.

Ahogy előrevetítettük, a 3.6. Tétel valóban azt mutatja, hogy a $(p_k^h)_{k \geq 0}$ sorozat konvexitásával kapcsolatos további eredményekhez új megközelítésre van szükség. Világos, hogy a tételben szereplő számosságok valójában az alfejezet főlemmájában, a 3.4. Lemmában szereplő számosságok (tekintsünk el a séták első lépésétől):

$$\begin{aligned} F_l &= |\mathcal{W}_k^{(0, h-1)}[l-1]| + |\mathcal{W}_k^{(0, h+1)}[l-1]|, \\ V_l &= |\mathcal{W}_k^{(1, h)}[l-1]| + |\mathcal{W}_k^{(-1, h)}[l-1]|. \end{aligned}$$

(Tehát a tételből azonnal következik a 3.4. Lemma, ugyanis $k \geq h - 1$ esetén $h^2 - k^2 \leq k + h$, tehát $F_l \leq V_l$ áll fenn minden l hosszra, mert $(k + h)$ -nál kisebb l -ekre nyilván $F_l = V_l = 0$, ha pedig $l \geq k + h$, akkor egyben $l \geq h^2 - k^2$ is, és így hivatkozhatunk a tételre.) Azonban $0 \leq k < h - 1$ esetén $h^2 - k^2 > h + k$, ezért ekkor az l hossz változtatásával $V_l > F_l$ és $V_l < F_l$ is előfordulhat. Ugyanis a 3.6. Tétel szerint $V_l > F_l$ mindig teljesül, ha l elég nagy, és megfelelő paritású (azaz ha l a kritikus hosszánál nagyobb, és olyan, hogy $\mathcal{W}_k^{(0, h)}[l] \neq \emptyset$); továbbá $V_l < F_l$ teljesül például az $l = h + k$ hosszra (l ekkor rövidebb, mint a $h^2 - k^2$ kritikus hossz, és $\mathcal{W}_k^{(0, h)}[l] \neq \emptyset$, mert például tartalmazza a k jobbra lépésből, majd l lefelé lépésből álló sétát). Ez azt jelenti, hogy $0 \leq k < h - 1$ esetén sem a 3.4. Lemmában szereplő (3.13) egyenlőtlenség, sem annak az egyenlőtlenséggel megfordításával nyert változata nem igaz minden l hosszra. Tehát a $p_k^h \leq \frac{1}{2}(p_{k-1}^h + p_{k+1}^h)$ konvexitási egyenlőtlenség (3.12) ekvivalens alakját nem tudjuk becsülni a 3.4. Lemmával, ahogy eddig (azaz a benne szereplő valószínűségeket (3.6) szerint végtelen sorként felírva, majd tagonként igazolva az egyenlőtlenséget). A konkávitásnak megfelelő fordított irányú egyenlőtlenségre ugyanez az érvelés mutatja módszerünk korlátait. Nem elég tehát a p_k^h valószínűségekhez hozzájáruló sétákat az első x -tengelymetszetig tartó szakaszuk hossza szerint osztályozni, a $[0, h - 2]$ intervallumon kifinomultabb megközelítés kell a $(p_k^h)_{k \geq 0}$ sorozat konvexitásvizsgálatához. Megjegyezzük, hogy a 3.8. Következményben meghatároztuk a $|\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}[l]|$ számosságot, ezzel a (3.6) végtelen sort explicit módon is definiáltuk.

Zárásként egy, az előző tételhez hasonló, szintén meglepő lemmát közlünk, mely a 3.7. Lemma felhasználásával számolással igazolható. (Szemléletesebb kombinatorikus bizonyítást nem ismerünk.)

3.9. Lemma. *Legyen $h \geq 2$ és k rögzített, valamint jelölje J_l (illetve L_l) azon l hosszú, $\mathcal{W}_k^{(0,h)}$ -beli séták számát, amelyek kezdő lépése jobbra lépés (illetve lefelé lépés). Ekkor*

- $l = (h - k)(2h - 1)$ esetén $J_l = L_l$;
- $l \geq (h - k)(2h - 1)$ esetén $J_l \geq L_l$;
- $l \leq (h - k)(2h - 1)$ esetén $J_l \leq L_l$.

Továbbá, ha $l \neq (h - k)(2h - 1)$, akkor $J_l = L_l$ csak $J_l = L_l = 0$ esetén fordulhat elő.

Megjegyzés. A lemma $k < 0$ esetén is igaz, így függőleges tengelyre vonatkozó szimmetria alapján a balra, illetve lefelé lépésekkel kezdődő $\mathcal{W}_k^{(0,h)}$ -beli séták száma is összehasonlítható a lemma segítségével, ebben az esetben a $(h + k)(2h - 1)$ kritikus hossz adódik. Az analóg balra/fel (és jobbra/fel) kezdő irányok összehasonlítása nyilvánvalóan visszavezethető a $\mathcal{W}_k^{(-1,h+1)}$ -beli sétákra vonatkozó jobbra/le (és a $\mathcal{W}_k^{(1,h+1)}$ -beli sétákra vonatkozó balra/le) összehasonlításra, amelyet már megoldotunk, csak más koordinátázásban. A balra/jobbra, illetve fel/le összehasonlítások nem vezetnek érdekes problémákhoz; az első egyszerű, a második esetben pedig számítógépes vizsgálatok szerint jellemzően nincs olyan hossz, amelyre a két fajta séták száma megegyezik. \diamond

3.4. Analóg eredmények magasabb dimenziókban

Ebben az alfejezetben eddigi eredményeinket kiterjesztjük magasabb dimenziókra is. A \mathbb{Z}^d -beli véletlen sétákra megvizsgáljuk az x_1, \dots, x_{d-1} koordinátatengelyek által kifeszített hipersíkkal vett első metszéspont eloszlásának szubharmonikuságát. Az alapesetet – a 3.10. Tételt – Totik Vilmos oldotta meg, melyet közös [18] cikkünkben publikáltunk; az általános esetre vonatkozó részeredmény – a 3.11. Tétel – teljesen hasonlóan igazolható, ezt Szalai Attilával közösen végeztük el [17]. Mindkét esetben síkbeli eredményeinkre vezetjük vissza a problémát.

Először a szükséges fogalmakat és jelöléseket tárgyaljuk. Az n -dimenziós tér standard bázisvektorait $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jelöli a továbbiakban, ahol az \mathbf{e}_i vektor i -edik koordinátája 1, a többi 0. Egy $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ pontnak $2n$ szomszédja van \mathbb{Z}^n -ben, az $N(\mathbf{k}) := \{\mathbf{k} \pm \mathbf{e}_i : i = 1, \dots, n\}$ halmaz pontjai. A sorozatok konvexitásának alábbi általánosításával fogunk dolgozni:

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét függvény (lokálisan) *szubharmonikus* a $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ pontban, ha

$$f(\mathbf{k}) \leq \frac{1}{2n} \sum_{\mathbf{j} \in N(\mathbf{k})} f(\mathbf{j}). \quad (3.19)$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $d \geq 2$ dimenziót. A \mathbb{Z}^d -beli sétákat a 2-dimenziós eset mintájára definiáljuk; egy pontból mindig valamelyik szomszédos pontra léphetünk, tehát egy lépés a $\pm \mathbf{e}_i$ vektorok valamelyike lehet. A \mathbb{Z}^d -beli véletlen séták

lépései most is uniform módon, egymástól függetlenül kerülnek ki a $2d$ lehetséges lépés közül. Adott $h \in \mathbb{N}$ és $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ esetén legyen $p_{\mathbf{k}}^h$ annak az eseménynek a valószínűsége, hogy \mathbb{Z}^d -ben a $(0, \dots, 0, h)$ pontból induló véletlen séta a $(k_1, \dots, k_{d-1}, 0)$ pontban lép először az $x_d = 0$ hipersíkra; $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^h$ pedig legyen azon \mathbb{Z}^d -beli $(0, \dots, 0, h) \rightsquigarrow (k_1, \dots, k_{d-1}, 0)$ véges séták halmaza, melyek a végpontjukkal lépnek először az $x_d = 0$ hipersíkra (tehát a végpontot leszámítva a séta minden pontja az $x_d = 0$ hipersík „felett” marad). Annak a valószínűsége, hogy az $A \in \mathbb{Z}^d$ pontból induló véletlen séta a $B \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}$ pontban lép először az $x_d = 0$ hipersíkra, szimmetriai okokból nyilvánvalóan megegyezik annak a valószínűségével, hogy az $A + \mathbf{v}$ pontból indított véletlen séta a $B + \mathbf{v}$ pontban lép először az x -tengelyre, ahol $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}$ egy tetszőleges, az $x_d = 0$ hipersíkkal párhuzamos eltolásvektor. Így az egyszerűbb jelölésrendszer kedvéért most csak $(0, \dots, 0, h)$ alakú pontokból induló véletlen sétákkal foglalkozunk; a más kezdőpontból indított véletlen séták $x_d = 0$ hipersíkra vonatkozó „találati eloszlásának” vizsgálatakor automatikusan eltoljuk a „problémát” (átkoordinátázunk) a fenti értelemben úgy, hogy a kezdőpont az x_d -tengelyre kerüljön.

A következő eredmény a 3.1. Tételt általánosítja:

3.10. Tétel. $A \mathbb{Z}^{d-1} \ni \mathbf{k} \mapsto p_{\mathbf{k}}^1$ függvény szubharmonikus minden $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ pontban.

Bizonyítás. Ugyanazt az utat követjük, mint a 3.1. Tétel bizonyításában. Első lépésük szerint osztályozva a $(0, \dots, 0, 1)$ pontból induló véletlen sétákat, világos, hogy $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ esetén

$$p_{\mathbf{k}}^1 = \frac{1}{2d} \left(\sum_{j \in N(\mathbf{k})} p_j^1 + p_{\mathbf{k}}^2 \right). \quad (3.20)$$

A bizonyítandó

$$p_{\mathbf{k}}^1 \leq \frac{1}{2(d-1)} \sum_{j \in N(\mathbf{k})} p_j^1$$

egyenlőtlenség (3.20) behelyettesítése és rendezés után a

$$(d-1)p_{\mathbf{k}}^2 \leq \sum_{j \in N(\mathbf{k})} p_j^1 \quad (3.21)$$

alakot ölti (ha $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$). Azt mutatjuk meg, hogy $i = 1, \dots, d-1$ esetén

$$p_{\mathbf{k}}^2 \leq p_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i}^1 + p_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}^1 \quad (3.22)$$

teljesül (minden \mathbf{k} -ra); és így a $d-1$ egyenlőtlenség összegzésével adódik (3.21). Figyelembe véve, hogy

$$p_{\mathbf{k}}^h = \sum_{V \in \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^h} \left(\frac{1}{2d} \right)^{|V|},$$

elegendő egy hossztartó $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i}^1 \cup \mathcal{V}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}^1$ injektív leképezést megadnunk (3.22) bizonyításaként.

Legyen $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{d-1})$. A $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^h$ -beli sétákat a következőképpen jellemezhetjük. Ahhoz, hogy a $(0, \dots, 0, h)$ pontból indított séta végpontja $(k_1, \dots, k_{d-1}, 0)$ legyen, a $\pm \mathbf{e}_i$ lépések összege nyilván $k_i \mathbf{e}_i$ kell legyen minden $1 \leq i \leq d-1$ irányra, és $-h\mathbf{e}_d$ kell legyen az $i = d$ „függőleges” irányra; ezekből a $+\mathbf{e}_i$ és $-\mathbf{e}_i$ lépések számának különbségére vonatkozó feltételeket kapunk minden i -re. Ezen túl csak a függőleges lépések sorrendjére van megkötés: Egy $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^h$ -beli séta utolsó lépése mindig $-\mathbf{e}_d$ „lefelé” lépés, illetve a $\pm \mathbf{e}_d$ lépések sorozata olyan 1-dimenziós sétát határoz meg, mely a h „magasságról” oly módon jut el a 0 magasságra, hogy a végpont előtt mindig pozitív magasságon tartózkodik. (Itt jegyezzük meg, hogy jelölésünk kissé pontatlan. Míg például a (3.22) formulában \mathbf{e}_i formálisan egy $(d-1)$ -dimenziós vektor, az imént d -dimenziós vektort értettünk alatta. Ezért \mathbb{Z}^{d-1} -re általában $\mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}$ -ként tekintünk, \mathbb{Z}^d -be ágyazva.)

Megadunk egy alkalmas $\phi: \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^2 \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i}^1 \cup \mathcal{V}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}^1$ injekciót, ahol $1 \leq i \leq d-1$ rögzített. Legyen $V \in \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^2$ tetszőleges. A d -dimenziós $\mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_d, -\mathbf{e}_i$ és \mathbf{e}_i lépésekre rendre 2-dimenziós felfelé, lefelé, balra és jobbra lépésként tekintve, V ezen lépései egy 2-dimenziós $\mathcal{W}_{k_i}^{(0,2)}$ -beli V^* sétát alkotnak. A 3.2. Lemma szerint létezik hossztartó $\psi: \mathcal{W}_{k_i}^{(0,2)} \rightarrow \mathcal{W}_{k_i-1}^{(0,1)} \cup \mathcal{W}_{k_i+1}^{(0,1)}$ injekció (a képként kapott sétákat az y -tengelyről indítva). Ennek felhasználásával V képe legyen az a \mathbb{Z}^d -beli $\phi(V)$ séta, amelyet úgy kapunk, hogy V -ben V^* lépéseit lecseréljük $\psi(V^*)$ lépéseire (pontosabban a 2-dimenziós lépéseknek megfelelően d -dimenziós lépésekre), természetesen a $\psi(V^*)$ -beli sorrend megőrzésével, V többi lépését változatlanul hagyva. Ez értelmes definíció ψ hossztartása miatt, és nyilván $|\phi(V)| = |V|$. A $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}^h$ -beli séták fenti jellemzése alapján azonnal adódik, hogy $\phi(V) \in \mathcal{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i}^1 \cup \mathcal{V}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}^1$. Mivel ϕ injektivitása ψ injektivitásából nyilvánvaló, az imént definiált ϕ leképezés rendelkezik a kívánt tulajdonságokkal. \square

Az előző tétel bizonyításának analógiájára kapjuk a 3.3. Tétel általánosítását:

3.11. Tétel. *Tetszőleges rögzített $h \geq 2$ esetén a $\mathbb{Z}^{d-1} \ni \mathbf{k} \mapsto p_{\mathbf{k}}^h$ függvény szubharmonikus a $[h-1, \infty)^{d-1} \cap \mathbb{Z}^{d-1}$ halmaz pontjaiban.*

Bizonyítás. (Vázlat.) Tekintsünk egy tetszőleges rögzített $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{d-1}) \in \mathbb{Z}^d$ pontot, melynek koordinátáira $k_i \geq h-1$ teljesül. Az előző tétel gondolatmenetét megismételve (p_m^1 -et mindig p_m^h -re, illetve p_m^2 -et mindig a $p_m^{h-1} + p_m^{h+1}$ összegre cserélve) arra jutunk, hogy elegendő azt igazolni, hogy minden $1 \leq i \leq d-1$ irányra létezik hossztartó $\phi_i: \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^{h-1} \cup \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^{h+1} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbf{k}-\mathbf{e}_i}^h \cup \mathcal{V}_{\mathbf{k}+\mathbf{e}_i}^h$ injekció. Adott i -re az előzőekhez hasonlóan konstruálhatunk alkalmas ϕ_i -t: Egy $V \in \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^{h-1} \cup \mathcal{V}_{\mathbf{k}}^{h+1}$ séta képe legyen az a séta, amelyet V -ből kapunk oly módon, hogy a $\pm \mathbf{e}_i$ és $\pm \mathbf{e}_d$ lépései által alkotott $\mathcal{W}_{k_i}^{(0,h-1)} \cup \mathcal{W}_{k_i}^{(0,h+1)}$ -beli sétát átalakítjuk $\mathcal{W}_{k_i-1}^{(0,h)} \cup \mathcal{W}_{k_i+1}^{(0,h)}$ -beli sétává a 3.4. Lemma szerint létező hossztartó, injektív leképezéssel. (A lemmát alkalmazhatjuk, mert $k_i \geq h-1$.) Könnyen ellenőrizhető, hogy a kapott ϕ_i leképezés megfelelő lesz. \square

Összefoglalás

A dolgozat két fő részből áll. A 2. fejezetben Shapiro páros indexű Catalan-számokra vonatkozó konvolúciós formulájával foglalkozunk [13; 123. o.], mely szerint

$$\sum_{k=0}^n C_{2k}C_{2n-2k} = 4^n C_n,$$

ahol C_n az n -edik Catalan-számot jelöli, vagyis $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Ez az elegáns azonosság Stanley *Bijjective Proof Problems* gyűjteményében megoldatlanként szerepel [29; 194. probléma]. Bár a generátorfüggvény-módszer egy kézenfekvő bizonyítást szolgáltat, meglehetősen nehéz feladat kombinatorikus érveléssel igazolni a formulát. (Megjegyezzük, hogy Andrews [1] megfogalmazta az azonosság egy q -analóg változatát, melyre kombinatorikus bizonyítást is adott.)

A 2.2. alfejezetben ismertetünk egy egyszerű kombinatorikus bizonyítást, mely speciális utak összeszámlálásán alapul. A kombinatorikus interpretáció kulcsa egy régi *Monthly*-problémaként kitűzött észrevétel [25, 3, 19], mely szerint C_{2n} az origóból a $(4n, 0)$ pontba menő páros-metsző utakat számolja meg. (A páros-metsző utak olyan $(1, 1)$ és $(1, -1)$ lépésekből álló utak \mathbb{Z}^2 -n, amelyek soha nem metszik az x -tengelyt $(4k + 2, 0)$ alakú pontban, ahol $k \in \mathbb{Z}$.) Ez a tény bizonyítható bijekció megadásával a szóban forgó utak halmaza és a $4n$ hosszú Dyck-utak halmaza között, lásd 2.4. Lemma. Ebből közvetlen következményként adódik, hogy a Shapiro-azonosság bal oldala, a $\sum_{k=0}^n C_{2k}C_{2n-2k}$ összeg, az origóból a $(4n + 1, 1)$ pontba menő páros-metsző utakat számolja meg (2.5. Következmény). Kombinatorikus bizonyításunk befejező lépéseként megmutatjuk a 2.7. Lemmában, hogy az origóból a $(4n + 1, 1)$ pontba menő páros-metsző utak száma egyben a jobb oldal is, $4^n C_n$. Ezen a ponton indukcióval érvelünk, és felhasználjuk, hogy a Shapiro-formula mindkét oldalát $(n + 1)$ -gyel szorozva, és a $B_n = \binom{2n}{n}$ jelöléssel élve a

$$\sum_{k=0}^n C_{2k}B_{2n-2k} = 4^n B_n$$

ekvivalens alakot kapjuk, amely értelmezhető egy eddigiekhez hasonló útlészámlálási problémára adott válaszként is.

A 2.3. alfejezetben az utolsó lépés induktív érvelését is bijektívvé tesszük, és így egy teljes egészében bijektív bizonyításhoz jutunk, mellyel megoldjuk Stanley feladatát. Ez a 2. fejezet fő eredménye, mely Hajnal Péterrel közös munka gyümölcse. Ebben az alfejezetben tehát egy összetett bijekciót konstruálunk a $(0, 0) \rightsquigarrow (4n + 1, 1)$ páros-metsző utak halmaza és egy alkalmas $4^n C_n$ elemű halmaz

között. (Ez utóbbi halmaznak a $2n$ hosszú 4-címkézett Dyck-utak halmazát választjuk, amely formális megfogalmazásban nem más, mint a $2n$ hosszú Dyck-utak halmazának és az $\{1, 2, 3, 4\}^n$ halmaznak a direkt szorzata.) Az alfejezetet konstrukciónk néhány következményével zárjuk (2.11. és 2.12. Következmény). Ezek egyike a Catalan-számok egy új interpretációja, mely szerint $n \geq 1$ esetén C_n megszámlolja azon $(1, \pm 1)$ és $(1, \pm 2)$ lépésekből álló $(0, 0) \rightsquigarrow (n, 1)$ utakat, amelyek a kezdőpont után soha nem lépnek az x -tengelyre.

A 2.4. alfejezetben módszerünk néhány alkalmazását mutatjuk be. A legfontosabb ezek közül a középső binomiális együtthatók alternáló konvolúciós formulájának új elemi bizonyítása, a 2.16. Tétel. (A formulát Spivey [28] bizonyította először kombinatorikusan a közelmúltban, más eszközökkel, véletlen színezett permutációk segítségével.) Végül a fejezet zárásaként két sejtést fogalmazunk meg számítógépes vizsgálatok alapján a 2.5. alfejezetben.

A 3. fejezetben szimmetrikus véletlen séták egy konvexitási tulajdonságával foglalkozunk. A fejezet Totik Vilmosossal és Szalai Attilával közös munkákon alapul. Az alaprobléma egy harmonikus mértékekkel kapcsolatos friss eredmény [2] új bizonyításának főlemmája [18]: Ha p_k jelöli annak a valószínűségét, hogy a $(0, 1)$ pontból induló \mathbb{Z}^2 -beli (szimmetrikus) véletlen séta a $(k, 0)$ pontban lép először az x -tengelyre ($k \in \mathbb{Z}$), akkor a $(p_k)_{k=0}^\infty$ sorozat konvex, vagyis $p_k \leq \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})$ teljesül $k \geq 1$ esetén. A p_k valószínűséghez hozzájáruló sétákat az első lépésük, illetve az első x -tengelymetszetig tartó szakaszuk szerint osztályozva, nem nehéz látni, hogy az állítás igazolásához elegendő megadni egy hossztartó injektív leképezést a $\mathcal{W}_k^{(0,2)}$ halmazból a $\mathcal{W}_k^{(1,1)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$ halmazba, ahol $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}$ azon \mathbb{Z}^2 -beli véges $(k_1, h) \rightsquigarrow (k_2, 0)$ séták halmazát jelöli, melyek a végpontot leszámítva soha nem lépnek az x -tengelyre.

A 3.2. alfejezetben ismertetünk egy alkalmas injekciót, és ezzel egy számolásmentes elemi bizonyítást adunk az állításra. (A 3.1. és 3.3. alfejezetekben vázolunk más megközelítéseket is.)

A 3.3. alfejezetben más kezdőpontú véletlen sétákat is megvizsgálunk. Az eddigiek általánosításaként megmutatjuk, hogy ha p_k^h jelöli annak a valószínűségét, hogy a $(0, h)$ pontból induló véletlen séta a $(k, 0)$ pontban lép először az x -tengelyre, akkor a $(p_k^h)_{k=h-2}^\infty$ sorozat konvex (rögzített $h \geq 2$ esetén). Bizonyításunkban a $h = 1$ esethez hasonlóan járunk el, azonban további ötletekre is szükség van. Ezután a folytonos eset alapján célként fogalmazzuk meg eredményünk lehetséges élesítési irányait, majd tárgyalunk elemi módszerünk korlátait is. Eközben a bijektív kombinatorika szemszögéből érdekes megoldatlan összefüggéseket találunk (3.6. Tétel és 3.9. Lemma).

Végezetül a 3.4. alfejezetben a probléma magasabb dimenziós megfelelőjét tekintjük. A d -dimenziós diszkrét véletlen séta $x_d = 0$ hipersíkkal vett első metszéspontjának eloszlását (diszkrét) szubharmonikusság szempontjából vizsgálva a síkbeli esethez hasonló eredményekhez jutunk tetszőleges $d \geq 2$ dimenzióra (ld. 3.10. és 3.11. Tétel). Ezeket a tételeket a $d = 2$ alapesetre történő visszavezetéssel igazoljuk.

A disszertáció a szerző alábbi négy publikációján alapul:

- G. V. NAGY: A combinatorial proof of Shapiro's Catalan convolution, *Adv. in Appl. Math.* **49** (2012), 391–396.
- P. HAJNAL & G. V. NAGY: A bijective proof of Shapiro's Catalan convolution, *Electron. J. Combin.* **21** (2014), Issue 2, Paper #P2.42, 1–10.
- G. V. NAGY & V. TOTIK: A convexity property of discrete random walks, *benyújtva* (2014).
- G. V. NAGY & A. SZALAI: On the convexity of a hitting distribution for discrete random walks, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, *elfogadva* (2014).

Summary

This thesis consists of two main parts. In Chapter 2, we deal with Shapiro's convolution formula involving Catalan numbers of even index [13; p. 123], that is,

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k} = 4^n C_n,$$

where C_n denotes the n th Catalan number, i.e. $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. This elegant identity is listed in Stanley's *Bijjective Proof Problems* as unsolved [29; Problem 194]. It is straightforward to prove it using generating functions, but it is quite difficult to find a combinatorial proof. (We note that Andrews [1] formulated a q -analog of Shapiro's identity, and he managed to prove it combinatorially.)

A simple combinatorial proof is presented in Section 2.2, based on a path-counting argument. The following observation, that has been posed as a Monthly problem [25, 3, 19], is the key to the combinatorial interpretation of the formula: C_{2n} counts the number of even-zeroed paths from the origin to the point $(4n, 0)$, where an even-zeroed path is defined as a path on \mathbb{Z}^2 with steps $(1, 1)$ and $(1, -1)$ such that it never hits the x -axis at a point of the form $(4k + 2, 0)$ for $k \in \mathbb{Z}$. This can be proved by giving a bijection between the set of these paths and the set of Dyck paths of length $4n$, see Lemma 2.4. As a direct corollary, we obtain that the left-hand side of Shapiro's identity, the sum $\sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2n-2k}$, counts the number of even-zeroed paths from the origin to $(4n + 1, 1)$, see Corollary 2.5. As the final step of the combinatorial proof, we show in Lemma 2.7 that $4^n C_n$, the right-hand side, also counts the number of even-zeroed paths from the origin to $(4n + 1, 1)$. This is done by an inductive argument based on the fact that, after multiplying both sides by $(n + 1)$, Shapiro's formula can be written in the form

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} B_{2n-2k} = 4^n B_n,$$

which can be interpreted as an answer to a path-counting problem analogous to the above. (Here we used the notation $B_n = \binom{2n}{n}$.)

In Section 2.3, we replace the inductive argument in the final step with a bijective one, thus we obtain an entirely bijective proof, a solution to Stanley's problem. This is the main result of Chapter 2, which is joint work with Péter Hajnal. So in this section we construct a sophisticated bijection between the set of $(0, 0) \rightsquigarrow (4n + 1, 1)$ even-zeroed paths and an appropriate set with $4^n C_n$ elements. (The latter set is chosen to be the set of 4-labeled Dyck paths of length $2n$, i.e. the

Cartesian product of the set of Dyck paths of length $2n$ and the set $\{1, 2, 3, 4\}^n$.) We end the section with some corollaries of our construction, see Corollaries 2.11 and 2.12. One of them is a new interpretation of Catalan numbers: We obtained that, for $n \geq 1$, C_n counts the number of such $(0, 0) \rightsquigarrow (n, 1)$ paths in which every step is either $(1, \pm 1)$ or $(1, \pm 2)$ and that never hit the x -axis after the starting point.

We present some applications of the main lemma in Section 2.4. The most important of these is Theorem 2.16, a simple direct combinatorial proof of the alternating convolution formula of central binomial coefficients. (We note that this formula has been first proved combinatorially by Spivey recently. He uses a different approach, his proof is based on random colored permutations.) Finally, we end the chapter by posing two conjectures, based on computational experience, in Section 2.5.

In Chapter 3, we deal with a convexity property of symmetric random walks. The chapter is based on joint works with Vilmos Totik and Attila Szalai. The basic result here is the main lemma of a new proof [18] of a recent result [2] about harmonic measures: If p_k denotes the probability that a (symmetric) random walk on the integer lattice \mathbb{Z}^2 starting from the point $(0, 1)$ first hits the x -axis at $(k, 0)$, then the sequence $(p_k)_{k=0}^\infty$ is convex, that is, $p_k \leq \frac{1}{2}(p_{k-1} + p_{k+1})$ holds for all $k \geq 1$. By grouping the walks corresponding to p_k by their first step and by their initial part until the first intersection with the x -axis, it is not hard to see that in order to prove the statement, it is enough to give a length-preserving injection from the set $\mathcal{W}_k^{(0,2)}$ into the set $\mathcal{W}_k^{(1,1)} \cup \mathcal{W}_k^{(-1,1)}$, where $\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}$ denotes the set of such finite $(k_1, h) \rightsquigarrow (k_2, 0)$ walks on \mathbb{Z}^2 that never hit the x -axis before their last step.

We present a suitable injection in Section 3.2, thus giving elementary proof of the statement, without involving any calculations. (We also sketch some other approaches in Sections 3.1 and 3.3.)

In Section 3.3, we consider random walks with arbitrary starting point. As a generalization of the above, we show that if p_k^h denotes the probability that a random walk starting from the point $(0, h)$ first hits the x -axis at $(k, 0)$, then the sequence $(p_k^h)_{k=h-2}^\infty$ is convex (for a fixed $h \geq 2$). The proof is analogous to the case $h = 1$, but additional ideas are involved as well. Next, we discuss some possible directions of future improvement, suggested by the continuous case, then we examine the limit of our elementary method. As a corollary, we obtain two interesting facts (Theorem 3.6 and Lemma 3.9) for which we do not know any combinatorial proof.

Finally, we consider the higher dimensional analogue of the problem in Section 3.4. We investigate the (discrete) subharmonicity of the hitting distribution of the $x_d = 0$ hyperplane for discrete d -dimensional random walks ($d \geq 2$). The presented results, Theorems 3.10 and 3.11, are analogous to the 2-dimensional ones, moreover, they can be deduced from the base case $d = 2$.

The dissertation is based on the following four papers of the author:

- G. V. NAGY: A combinatorial proof of Shapiro's Catalan convolution, *Adv. in Appl. Math.* **49** (2012), 391–396.
- P. HAJNAL & G. V. NAGY: A bijective proof of Shapiro's Catalan convolution, *Electron. J. Combin.* **21** (2014), Issue 2, Paper #P2.42, 1–10.
- G. V. NAGY & V. TOTIK: A convexity property of discrete random walks, *submitted* (2014).
- G. V. NAGY & A. SZALAI: On the convexity of a hitting distribution for discrete random walks, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, *accepted* (2014).

Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Hajnal Péternek, kinek szakmai segítségére és támogatására hallgató korom óta számíthatok. Észrevételeire, problémafelvetéseire és javaslataira e disszertáció megírása során is támaszkodhattam. Az ő élvezetes egyetemi előadásai és szemináriumai ismertették meg velem a kombinatorika szépségét; előadásmódjával és személyiségével nemcsak matematikai gondolkodásomat formálta.

Köszönettel tartozom további társszerzőimnek is. Nagymértékben hozzájárult a dolgozat megszületéséhez, hogy Totik Vilmos professzor bevont a 3. fejezetben ismertetett probléma megoldásába, illetve hogy közös cikkünk elkészítésekor a hozzám tartozó részek gondos átolvasása után hasznos tanácsokkal látott el. Szalai Attilával pedig jó hangulatú közös munka keretében sikerült további eredményeket elérni a témakörben.

Szeretném megköszönni a Bolyai Intézetnek, hogy biztosította a disszertáció elkészítéséhez szükséges körülményeket – nemcsak az intézményi feltételeket, hanem a magas szakmai színvonalat és kellemes munkahelyi légkört is ideértve. Továbbá köszönöm a Jedlik Ányos Doktorjelölti Ösztöndíj anyagi támogatását.

Köszönet illeti édesapámat, egyben általános iskolai matematika tanáromat, valamint középiskolai tanárait, Biczóné Lengyel Beátát és Terlaky Editet, akiktől a matematika alapjait tanultam.

Végül, de nem utolsósorban, hálás vagyok családomnak és barátaimnak a sok támogatásért, valamint a nehezebb időszakokban nyújtott biztatásért.

Jelölések, fogalmak

B_n :	az n -edik középső binomiális együttható, azaz $\binom{2n}{n}$
C_n :	az n -edik Catalan-szám, azaz $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$
ε :	a 0 hosszú út (ld. 7. oldal)
\mathbb{N} :	a természetes számok halmaza, azaz $\{1, 2, 3, \dots\}$
\mathbb{N}_0 :	a nemnegatív egészek halmaza, azaz $\{0, 1, 2, \dots\}$
$ W $:	a W út vagy séta hossza (lépéseinek száma), illetve a W halmaz elemszáma
$\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}$:	a \mathbb{Z}^2 -beli pozitív $(k_1, h) \rightsquigarrow (k_2, 0)$ séták halmaza (ld. 43. oldal)
$\mathcal{W}_{k_2}^{(k_1, h)}[l]$:	a \mathbb{Z}^2 -beli pozitív, l hosszú $(k_1, h) \rightsquigarrow (k_2, 0)$ séták halmaza (ld. 43. oldal)
\rightsquigarrow :	az „ A pontból B pontba menő út” (vagy séta) rövidített írásmódja $A \rightsquigarrow B$

Az alábbi definíciókban az utakat az origóból indítjuk. (A pozitív sétákat nem.)

4-címkézett Dyck-út: Olyan Dyck-út, amelynek minden párosadik lépése meg van címkézve a $\{0, 1, 2, 3\}$ halmazból, a páratlanadik lépések pedig címkézetlenek (18. oldal).

Dyck-út: Olyan út, amely az x -tengelyen végződik, de soha nem megy az x -tengely alá (8. oldal).

jelölt Dyck-út: Olyan Dyck-út, amelyben minden párosadik lépés vagy jelölt vagy jelöletlen, a páratlanadik lépések pedig jelöletlenek (19. oldal).

kiegyensúlyozott út: Olyan út, amely az x -tengelyen végződik, azaz ugyanannyi felfelé lépést tartalmaz, mint lefelé lépést (8. oldal).

nemnegatív út: Olyan út, amely soha nem megy az x -tengely alá (8. oldal).

páros-metsző út: Olyan út, amely az x -tengelyt csak 4-gyel osztható (abszcisszájú) pontokban metszi (9. oldal).

pozitív séta: Olyan \mathbb{Z}^2 -beli séta, amely az utolsó lépését megelőzően mindig szigorúan az x -tengely fölött tartózkodik; a végpont lehet az x -tengelyen (43. oldal).

sehosem-zéró út: Olyan út, amely soha sem lép az x -tengelyre, a kezdőpontot leszámítva (8. oldal).

tömörített út: Olyan általánosított út, amelyben minden párosadik lépés vagy hosszú lépés, vagy 3-címkézett rövid lépés, és minden páratlanadik lépés címkézetlen rövid lépés (17. oldal).

Irodalomjegyzék

- [1] G. E. ANDREWS: On Shapiro's Catalan convolution, *Adv. in Appl. Math.* **46** (2011), 15–24.
- [2] D. BENKO, P. DRAGNEV & V. TOTIK: Convexity of harmonic densities, *Rev. Mat. Iberoam.* **28** (2012), 947–960.
- [3] D. M. BLOOM & L. W. SHAPIRO: Random Walks and Catalan Numbers, *Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 430.
- [4] W. BRECKENRIDGE, H. GASTINEAU-HILLS, A. NELSON, P. BOS, G. CALVERT & K. WEHRHAHN: Lattice paths and Catalan numbers, *Bull. Inst. Combin. Appl.* **1** (1991), 41–55.
- [5] J. L. DOOB: *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 262, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [6] Ö. EĞECIOĞLU & A. KING: Random walks and Catalan factorization, *Congr. Numer.* **138** (1999), 129–140.
- [7] J. B. GARNETT & D. E. MARSHALL: *Harmonic measure*, New Mathematical Monographs, Vol. 2, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [8] A. M. GARSIA & S. C. MILNE: Method for constructing bijections for classical partition identities, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **78** (1981), 2026–2028.
- [9] A. M. GARSIA & S. C. MILNE: A Rogers-Ramanujan bijection, *J. Combin. Theory Ser. A* **31** (1981), 289–339.
- [10] R. K. GUY, C. KRATTENTHALER & B. E. SAGAN: Lattice paths, reflections, & dimension-changing bijections, *Ars Combin.* **34** (1992), 3–15.
- [11] P. HAJNAL: *Összeszámlálási problémák*, Polygon, Szeged, 1997.
- [12] P. HAJNAL & G. V. NAGY: A bijective proof of Shapiro's Catalan convolution, *Electron. J. Combin.* **21** (2014), Issue 2, Paper #P2.42, 1–10.
- [13] T. KOSHY: *Catalan numbers with applications*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
- [14] G. F. LAWLER & V. LIMIC: *Random walk: a modern introduction*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 123, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [15] P. MÖRTERS & Y. PERES: *Brownian motion*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

- [16] G. V. NAGY: A combinatorial proof of Shapiro's Catalan convolution, *Adv. in Appl. Math.* **49** (2012), 391–396.
- [17] G. V. NAGY & A. SZALAI: On the convexity of a hitting distribution for discrete random walks, *Acta Sci. Math. (Szeged), elfogadva* (2014).
- [18] G. V. NAGY & V. TOTIK: A convexity property of discrete random walks, *benyújtva* (2014).
- [19] W. NICHOLS: A path bijection, *Amer. Math. Monthly* **94** (1987), 465–466.
- [20] I. PAK: Partition bijections, a survey, 2002.
<http://www.math.ucla.edu/~pak/papers/psurvey.pdf>
- [21] M. PETKOVŠEK, H. S. WILF & D. ZEILBERGER: *A = B*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.
- [22] S. RAMANUJAN: Proof of certain identities in combinatory analysis, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **19** (1919), 214–216.
- [23] M. RENAULT: Four proofs of the ballot theorem, *Math. Mag.* **80** (2007), 345–352.
- [24] L. J. ROGERS: Second Memoir on the Expansion of certain Infinite Products, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1894), 318–343.
- [25] L. W. SHAPIRO: Problem E2903, *Amer. Math. Monthly* **88** (1981), 619.
- [26] N. J. A. SLOANE & S. PLOUFFE: *The encyclopedia of integer sequences*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1995.
- [27] F. SPITZER: *Principles of random walk, Second edition*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 34, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [28] M. Z. SPIVEY: Combinatorial interpretation of the alternating convolution of the central binomial coefficients, 2012.
<http://mikespivey.wordpress.com/2012/03/16/altconvcentralbinom/>
- [29] R. P. STANLEY: Bijective proof problems, 2009.
<http://www-math.mit.edu/~rstan/bij.pdf>
- [30] R. P. STANLEY: Catalan addendum, 2013.
<http://www-math.mit.edu/~rstan/ec/catadd.pdf>
- [31] R. P. STANLEY: *Enumerative combinatorics, Vol. 1, Second edition*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [32] R. P. STANLEY: *Enumerative combinatorics, Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [33] M. SVED: Counting and recounting: the aftermath, *Math. Intell.* **6** (1984), 44–45.

- [34] H. S. WILF: Lectures on integer partitions, 2000.
www.math.upenn.edu/~wilf/PIMS/PIMSLectures.pdf