SZEGEDI TUDOMÁNYEGYETEM

TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉS INFORMATIKAI KAR

ELMÉLETI FIZIKAI TANSZÉK

FIZIKA DOKTORI ISKOLA

Integrálható sokrészecske rendszerek vizsgálata hamiltoni szimmetria-redukciós módszerrel

Ph.D. értekezés tézisei

Szerző:

Ayadi Viktor

Témavezető:

Dr. Fehér László Gyula

egyetemi tanár

SZEGED

2013

1. Bevezetés

Az elmúlt évtizedek során az integrálható, egzaktul megoldható rendszerek vizsgálata a matematikai fizika egy jelentős ágává vált. Számos példát találhatunk integrálható rendszerekre a hidrodinamika, a nemlineáris optika, a részecskefizika és az általános relativitáselmélet területén. Fontosságuk egyik oka az, hogy gyakorta alkalmas kiinduló pontot nyújtanak bonyolultabb nemlineáris jelenségek vizsgálatához. Realisztikus modellek gyakran tárgyalhatók egzaktul megoldható problémák perturbációiként. Az integrálható rendszerek felhasználhatók numerikus módszerek pontosságának ellenőrzésére is.

Az integrálhatóságot egyszerűbb példákkal illusztrálni, mint precízen definiálni. Klasszikus térelméleti integrálható modellre jól ismert példa a Korteweg–de Vries (KdV) egyenlet [5, 14]. A KdV egyenlet sekély csatornában mozgó egydimenziósnak tekinthető vízhullámokat ír le. Ilyen hullámokat először Scott–Russell figyelt meg 1834-ben [5]. A térben lokalizált hullámok állandó sebességgel haladtak, miközben magasságuk és alakjuk változatlan maradt. Az ilyen megoldásokat szolitonoknak nevezzük. A KdV egyenletben a nemlineáris tag kompenzálja a diszperzív tag hatását, így a hullámcsomag nem folyik szét. Egy másik nevezetes, szoliton megoldásokkal rendelkező integrálható modell a sine-Gordon egyenlet, amely először a konstans negatív görbületű felületek elméletében jelent meg. A sine-Gordon egyenlet rugalmas gumiszalaghoz rögzített fizikai ingák sorozatával is modellezhető. A sokszoliton megoldások egy érdekes tulajdonsága, hogy a szolitonok képesek „áthaladni” egymáson, az áthaladás után a kölcsönható szolitonok fázisa megváltozhat, de az alakjuk változatlan marad.

A két legismertebb klasszikus fizikai integrálható rendszer a harmonikus oszcillátor és a Kepler probléma. Integrálható sokrészecske rendszerekre jól ismert példát jelentenek a Toda láncok, Calogero–Sutherland és Ruijsenaars–Schneider típusú rendszerek [3, 9]. Az említett sokrészecske rendszerek számos fontos esetben származtathatóak szimmetria redukció segítségével.

A Calogero–Sutherland típusú modellek a véges dimenziós dinamikai rendszerek azon csoportjába tartoznak, amelyek integrálhatóak mind klasszikus, mind kvantum szinten [3, 9, 15]. Ezek a modellek tetszőleges számú ($n \geq 2$) pontszerű részecskét írnak le, melyek egyenesen vagy körön mozognak és egymással párkölcsönhatásban állnak. A köztük fellépő kölcsönhatás többféle alakú függvény lehet. A legfontosabb esetekben ez a kölcsönhatás a részecske koordináta különbségek racionális, hiperbolikus, trigonometrikus vagy elliptikus függvénye. Az n részecskés racionális modell integrálhatóságával Calogero először kvantummechanikai kontextusban foglalkozott [2], később Moser bizonyította a klasszikus modell integrálhatóságát [7]. A Ruijsenaars–Schneider modellek [3, 13] szintén n darab egy térdimenzióban mozgó kölcsönható részecskét írnak le. A részecskék közti általánosított párpotenciál a legfontosabb esetekben ugyancsak a pozíció változók racionális, trigonometrikus, hiperbolikus vagy elliptikus függvénye. A Ruijsenaars–Schneider Hamilton-függvények nem-relativisztikus limeszeként visszakapjuk az Calogero–Sutherland Hamilton-függvényeket. Ezek a modellek rendelkeznek egy eltolás és egy „boost" generátorral, amelyek a Hamilton-függvénnyel együtt az $1+1$ dimenziós Poincaré algebrát generálják a Poisson zárójelen keresztül. A fenti modellek egyes változatai alkalmasak szoliton egyenletek megoldásainak vizsgálatára. A „Calogero-részecskék" mozgásának megfeleltethető bizonyos KdV megoldások pólusainak és zéróhelyeinek időfejlődése [4]. A Ruijsenaars–Schneider modell is kapcsolatba hozható integrálható parciális differenciálegyenletek szoliton megoldásaival. Például az n részecskés hiperbolikus Ruijsenaars–Schneider modell alkalmas a sine-Gordon modell n-szoliton megoldásainak leírására [11, 13].

2. Kutatási célok és módszerek

Munkám fő célja a klasszikus integrálható sokrészecske rendszerek néhány érdekes aspektusának tanulmányozása volt. Vizsgálataim középpontjában a Calogero–Sutherland és a Ruijsenaars–Schneider típusú integrálható rendszerek egyes változatai álltak. Munkámban konkrét rendszerek szuperintegrálhatóságára, hamiltoni redukciós származtatására, valamint dualitási tulajdonságaira koncentráltam.

A sokrészecske rendszerek leírása során a szimmetria redukcióra támaszkodtam. A tanulmányozott rendszereket kivétel nélkül valamilyen magasabb dimenziós „szabad rendszer" redukciójával nyertem. Az így kapott redukált rendszer megfelelő feltételek teljesülése mellett integrálható. A redukciós módszer a dolgozatban kulcsszerepet tölt be, ezért néhány mondat erejéig kitérünk a szimmetria értelmezésére. A szimmetria különösen fontos szerepet játszik az elméleti fizikában, azon túl, hogy matematikai szépséggel is rendelkezik. Sok esetben megmaradási törvényeket eredményez és redukció révén gyakran összetett problémák lényeges egyszerűsítését teszi lehetővé. A szimmetria szót a Hamilton-féle dinamikai rendszerek vonatkozásában fogjuk használni, azaz feltételezzük, hogy a rendszer Hamilton-függvénye és Poisson zárójel struktúrája invariáns valamely Lie-csoport fázistéren értelmezett hatására nézve. Ilyenkor a szimmetriát generáló megmaradó mennyiség, a momentum leképezés értékét rögzítve a rendszert a Marsden–Weinstein-féle redukció alkalmazásával egy alacsonyabb dimenziójú faktortérre vetíthetjük [1], így csökkentve a szabadsági fokok számát. Másként szólva: a szimmetria „kifaktorizálásával" nyerjük a redukált rendszert.

3. Vizsgált témakörök

1. Az olyan Liouville integrálható rendszereket nevezik szuperintegrálhatónak, amelyek a Poisson kommutáló mozgásállandókon kívül extra időfüggetlen mozgásállandókkal rendelkeznek [16]. Egy nevezetes klasszikus fizikai szuperintegrálható rendszer a Kepler probléma. Az irodalomban gyakran idézett érdekes példát képvisel a racionális Calogero modell szuperintegrálhatósága [17]. A dolgozatban tanulmányoztam a racionális Calogero modell relativisztikus általánosításának tekinthető racionális Ruijsenaars–Schneider modell szuperintegrálhatóságát. A vizsgálathoz felhasználtam a racionális Ruijsenaars–Schneider modell szimmetria-redukciós tárgyalását [6]. A redukció által nyújtott geometriai nézőpontot felhasználtam mind az extra mozgásállandók explicit konstrukciójánál, mind a globális nem-kompakt hatás-szög leképezésen alapuló érvelésnél.

2. A Sutherland modell bizonyos általánosításai „töltött” részecskéket írnak le, melyekben az azonos töltésű részecskék között vonzó, míg az ellentétes töltésűek között taszító kölcsönhatás lép fel. Az első ilyen általánosítás Calogero nevéhez fűződik [3], melyet úgy ért el, hogy az n részecskés hiperbolikus modellben $m < n$ részecske koordinátáját $(\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2})$-vel eltolta. Ebben a modellben az ellentétes töltésű részecskék között a pozíció különbségek $\cosh^{-2}$ függvényével arányos vonzó, míg a megegyező töltésű részecskék között a pozíció különbségek $\sinh^{-2}$ függvényével arányos taszító potenciál lép fel. Ezt a modellt később Olshanetsky és Rogov tárgyalta szimmetria-redukciós nézőpontból [8]. A dolgozatban bemutattam egy három független csatolási állandót tartalmazó, töltött részecskéket leíró általánosított Sutherland modellt, melynek levezetéséhez a hamiltoni szimmetria redukciót használtam fel.

3. Ruijsenaars nagy hatású [10, 11, 12] cikksorozatában különböző Calogero típusú integrálható rendszerek dinamikáját és dualitási relációit vizsgálta. A duális párok között létezik egy olyan szimplektomorfizmus, ami azonosítja az egyik rendszer hatás változóit a másik rendszer részecske koordinátáival és fordítva; ezt a transzformációt dualitási transzformációnak nevezzük. Ismert, hogy az n részecskés trigonometrikus Sutherland modell három különböző fizikai interpretációt enged meg attól függően, hogy miképpen választjuk meg a pozíció változók értelmezési tartományát. A modell által leírt részecskékre tekinthetünk n megkülönböztethetetlen részecskeként a körön, illetve megkülönböztethető részecskékként a körön vagy az egyenesen. Az említett konfigurációs tereknek a következő három halmaz felel meg

$$Q(n), \quad U(1) \times SQ(n), \quad \mathbb{R} \times SQ(n).$$

Ruijsenaars egy direkt módszert alkalmazva megkonstruálta a trigonometrikus Sutherland modell három lehetséges konfigurációs teréhez tartozó fázisterek és duálisaik közti kanonikus transzformációkat, valamint az említett három fizikai interpretációhoz tartozó fázisterek közti fedőleképezéseket [12]. Munkámban részletesen megvizsgáltam ezen dualitási és fedőleképezések hálójának csoportelméleti értelmezését.

4. Új tudományos eredmények

Az integrálható sokrészecske rendszerekkel kapcsolatos, főként szimmetria-redukciós módszerekkel kapott eredményeim a következőképpen foglalhatók össze a vizsgált témakörök szerint.

1. Leírtam a racionális Ruijsenaars–Schneider modell maximális szuperintegrálhatóságát garantáló extra mozgásállandók explicit konstrukcióját [A1]. Az ismertetett konstrukció a Wojciechowski [17] által a racionális Calogero modell esetén megfigyelt

$$\{I_k, I_j\}_M = 0\,, \quad \{I^1_k, I^1_j\}_M = (j-k)I^1_{k+j}\,, \quad \{I^1_k, I_j\}_M = jI_{j+k}$$

Poisson algebra általánosításán alapszik. Bemutattam, hogyan használható fel a fenti algebra további mozgásállandók előállítására, amennyiben a Hamilton-függvény kifejezhető a Liouville integrálhatóságot biztosító Poisson kommutáló I_k függvényekkel. A fenti Poisson zárójel relációknak a racionális Ruijsenaars–Schneider modell esetén egy új realizációját találtam. A Poisson zárójel relációk ellenőrzéséhez a Ruijsenaars–Schneider modell szimmetria-redukciós levezetését hívtam segítségül, amely a $T^*GL(n,\mathbb{C})$ koérintő nyaláb redukcióját használja. Az eljárás során alkalmas invariáns függvények Poisson zárójeleit vizsgáltam. Továbbá az [A1,A2] publikációk alapján bemutattam, hogyan következik a globális nem-kompakt hatás-szög leképezés létezéséből a szuperintegrálhatóság, és leírtam tisztán szórási mozgásokkal rendelkező Calogero–Sutherland típusú rendszerek dualitásának és szuperintegrálhatóságának kapcsolatát.

2. Az [A3] cikkben a hiperbolikus Sutherland modell egy általánosítását vizsgáltam, amely „töltött” részecskéket ír le és három független csatolási állandóval rendelkezik. A modellt a $G = SU(n,n)$ csoporton történő szabad geodetikus mozgás hamiltoni redukciójával nyertem. A vizsgálatokhoz a G csoporton két kommutáló involúciót vezettünk be, melyekhez a G_+ és G^+ fixpont csoportok tartoznak. A redukcióhoz a $G_+ \times G^+$ szimmetria csoportot használtam fel, ahol G_+ a G maximális kompakt részcsoportja. A T^*G koérintő nyaláb redukciójának leírásához felhasználtuk a G csoport általánosított Cartan felbontását. A redukált modell Hamilton-függvénye n darab töltött részecskét ír le, melyek mozgása megszorítható a pozitív félegyenesre és kölcsönhatnak a tükörképeikkel, valamint egy az origóban lerögzített töltéssel is. Az ellentétes töltésű részecskék között a pozíció különbségek $\cosh^{-2}$ függvényével arányos vonzó, míg az azonos töltésű részecskék között a $\sinh^{-2}$ függvénnyel arányos taszító potenciál lép fel. Megmutattam, hogy a modell Liouville integrálhatósága a szimmetria-redukciós eljárás direkt következménye. A szabad folyamokhoz kötődő geometria kép segítségével egy lineáris algebrai eljárást adtam a részecske pozíciók és a kanonikusan konjugált impulzusok időfejlődésének meghatározására.

3. Az [A4] cikkben egy csoportelméleti nézőpontból megvizsgáltam a trigonometrikus Sutherland modell három lehetséges fizikai interpretációjához tartozó duális párokat, és leírtam a Ruijsenaars [12] munkájában direkt módon megkonstruált fedőleképezések kapcsolatát a

$$G_2 := \mathbb{R} \times SU(n) \longrightarrow G_1 := U(1) \times SU(n) \longrightarrow G := U(n)$$

csoportelméleti homomorfizmusokkal. Ehhez levezettem a megfelelő modellpárokat a T^*G, T^*G_1, T^*G_2 fázisterek szimplektikus redukciójával, melyhez a $\bar{G} = G/\mathbb{Z}_G \simeq G_1/\mathbb{Z}_{G_1} \simeq G_2/\mathbb{Z}_{G_2}$ szimmetria csoportot használtam fel (ahol $\mathbb{Z}_G$ a G csoport centruma). Fő eredményem az alábbi kommutatív diagramm csoportelméleti értelmezése:

$$\begin{tikzcd}
T^*\mathbb{R} \times T^*SQ(n) \arrow[r, "\mathrm{id}_2 \times \mathcal{R}_0"] \arrow[d, "\psi_2^{\mathrm{I}}"'] & T^*\mathbb{R} \times \mathbb{C}^{n-1} \arrow[d, "\psi_2^{\mathrm{II}}"] \\
T^*U(1) \times T^*SQ(n) \arrow[r, "\mathrm{id}_1 \times \mathcal{R}_0"] \arrow[d, "\psi_1^{\mathrm{I}}"'] & T^*U(1) \times \mathbb{C}^{n-1} \arrow[d, "\psi_1^{\mathrm{II}}"] \\
P = T^*Q(n) \arrow[r, "\mathcal{R}"] & \hat{P}_c = \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}^{\times}
\end{tikzcd}$$

A diagramm baloldalán a lehetséges Sutherland fázisterek láthatóak, míg a jobboldalon a megfelelő Ruijsenaars–Schneider fázisterek. A függőleges nyilak jelölik a szimplektikus fedőleképezéseket és a vízszintes nyilak a duális modellpárok közti szimplektomorfizmusokat. Az első sorban az egyenesen mozgó megkülönböztethető, a második sorban a körön mozgó megkülönböztethető, míg a harmadik sorban az körön mozgó megkülönböztethetetlen részecskéket leíró Sutherland modellhez tartozó duális párok szerepelnek. A diagrammot eredetileg Ruijsenaars konstruálta meg [12] direkt módszerek segítségével. Munkámban megadtam a diagrammon szereplő leképezések csoportelméleti-geometriai interpretációját, ami nagyban egyszerűsítette a dualitási transzformációk Poisson zárójel őrző tulajdonságának bizonyítását.

5. Publikációk

A tézis pontokban felsorolt eredményeimet az alábbi közlemények tartalmazzák:

[A1] V. Ayadi, L. Fehér, *On the superintegrability of the rational Ruijsenaars–Schneider model,* Phys. Lett. A **374**, 1913 (2010)

[A2] V. Ayadi, L. Fehér, T.F. Görbe, *Superintegrability of rational Ruijsenaars–Schneider systems and their action-angle duals,* J. Geom. Symmetry Phys. **27**, 27 (2012)

[A3] V. Ayadi, L. Fehér, *An integrable BC(n) Sutherland model with two types of particles*, J. Math. Phys. **52**, 103506 (2011)

[A4] L. Fehér, V. Ayadi, *Trigonometric Sutherland systems and their Ruijsenaars duals from symplectic reduction,* J. Math. Phys. **51**, 103511 (2010)

Hivatkozások

[1] R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Second Edition, Benjamin/Cummings, Reading, 1978

[2] F. Calogero, *Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials,* J. Math. Phys. **12**, 419 (1971)

[3] F. Calogero, *Exactly solvable one-dimensional many-body problems,* Lett. Nuovo Cim. **13**, 411 (1975)

[4] F. Calogero, *Motion of Poles and Zeros of Special Solutions of Nonlinear and Linear Partial Differential Equations, and Related "Solvable" Many Body Problems,* Nuovo Cimento **43B**, 177 (1978)

[5] P.G. Drazin, R.S. Johnson, *Solitons: an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996

[6] L. Fehér, C. Klimčík, *On the duality between the hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars–Schneider models*, J. Phys. A **42**, 185202 (2009)

[7] J. Moser, *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16**, 197 (1975)

[8] M.A. Olshanetsky, V.-B. K. Rogov, *Bound states in completely integrable systems with two types of particles,* Ann. Inst. H. Poincaré **XXIX**, 169 (1978)

[9] M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras*, Invent. Math. **37**, 93 (1976)

[10] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems I. The pure soliton case*, Commun. Math. Phys. **115**, 127 (1988)

[11] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems II. Solitons, antisolitons and their bound states*, Publ. RIMS **30**, 865 (1994)

[12] S.N.M. Ruijsenaars, *Action-angle maps and scattering theory for some finite-dimensional integrable systems III. Sutherland type systems and their duals*, Publ. RIMS **31**, 247 (1995)

[13] S.N.M. Ruijsenaars, H. Schneider, *A new class of integrable models and their relation to solitons*, Ann. Phys. **170**, 370 (1986)

[14] A.C. Scott, *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, Taylor and Francis Group, New York, 2005

[15] B. Sutherland, *Beautiful Models*, World Scientific, Singapore, 2004

[16] P. Tempesta, P. Winternitz *et al* (Editors), *Superintegrability in Classical and Quantum Systems, CRM Proceedings and Lecture Notes*, **37**, Amer. Math. Soc., Providence, 2004

[17] S. Wojciechowski, *Superintegrability of the Calogero–Moser system*, Phys. Lett. A **95**, 279 (1983)

Társszerzői nyilatkozat

Alulírott, mint társszerző, nyilatkozom arról, hogy **Ayadi Viktor**: **Integrálható sokrészecske rendszerek vizsgálata hamiltoni szimmetria-redukciós módszerrel** című doktori értekezéséhez felhasznált, a fentiekben részletezett [A1]-[A4] angol nyelvű szakcikkekben szereplő, közös publikációkban közölt, az értekezés konkrét tézispontjaiban összefoglalt eredményekben Ayadi Viktor szerepe meghatározó fontosságú volt. Az említett eredményeket nem használtam fel és a jövőben sem kívánom tudományos fokozat megszerzésére felhasználni.

Fehér László Gyula

Görbe Tamás Ferenc