

Informatikai Tanszékcsoporth
Szegedi Tudományegyetem

**Vetületek információtartalma és
objektumok rekonstrukciója a
diszkrét tomográfiában**

PhD értekezés tézisei

Varga László

Témavezetők:

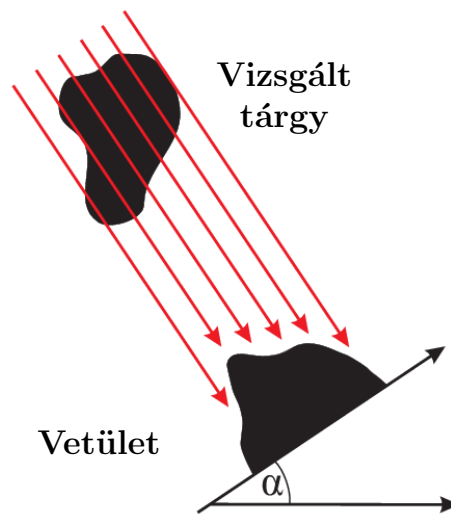
**Dr. Balázs Péter
Dr. Nagy Antal**

**Szeged
2013**

1. Bevezetés

A *tomográfia* egy széleskörűen alkalmazott eszköztár tárgyak belső szerkezetének vetületekből történő vizsgálatához, amelynek számos felhasználási lehetősége adódik, többek között az orvosi alkalmazásokban, a kristályszerkezet vizsgálatban, az ipari nem-roncsoló tesztelésben, valamint a geológiában.

A *transzmissziós tomográfiában* [7, 11] a vetületképzéshez általában a vizsgált tárgyat adott irányú áthatoló sugárzásnak teszik ki, majd mérik az áthaladó sugarak gyengülését. Az így begyűjtött adatokból következtetni lehet a tárgy adott belső pontjain elhelyezkedő anyagok elnyelődési együtthatóira, és így az anyagi jellemzőkre, vagyis lehetőség nyílik a tárgy belső szerkezetének rekonstrukciójára. Egy tárgy és a vetületének illusztrációja az 1. ábrán látható.



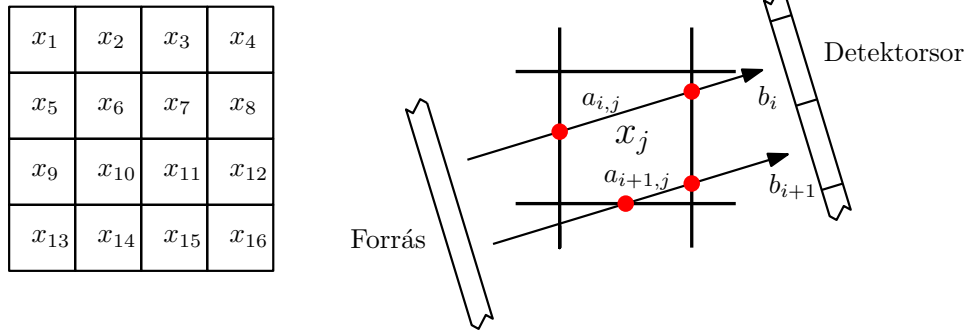
1. ábra. Egy tárgy vetületének szemléltetése.

A *diszkrét tomográfia* [8, 9] területén feltesszük, hogy a vizsgált tárgy csak néhány ismert anyagból állhat. Ezzel az előzetes információval elérhető, hogy a rekonstrukcióhoz csekély számú vetület is elegendő legyen. A *bináris tomográfia* esetében pedig feltételezhetjük, hogy a rekonstruált tárgy egyetlen homogén anyagból áll. Speciális esetekben viszont még így is előfordulhat, hogy nem lehet a rekonstrukcióhoz elegendő számú vetületet képezni. Ilyen esetekben szükség lehet a vetületi adatok új megközelítéssel történő vizsgálatára.

Az értekezés a Szerző diszkrét tomográfiában végzett munkásságát foglalja össze. A kutatás fő célja a vetületi adatok információtartalmának és azok szerkezetének vizsgálata volt, amely felhasználható a rekonstrukció témakörében alkalmazható hatékony új technikák kifejlesztéséhez, és új megközelítéseknek nyithat utat a kutatásban.

2. A diszkrét rekonstrukciós probléma modellezése

A diszkrét rekonstrukciós probléma algebrai modelljét alkalmazva (lásd, például [11]-ben) feltesszük, hogy a rekonstruálni kívánt objektum egy kétdimenziós szelete egy $n \times n$ méretű digitális képpel van reprezentálva. Mindemellett vonalmenti integrálon alapuló párhuzamos vetületi geometriai modellt alkalmazunk, ahol a vetületi értékek a vetítési sugarak által metszett pixelek értékeinek súlyozott átlagaként állnak elő. Ezekkel a feltételezésekkel a diszkrét rekonstrukciós



2. ábra. Az algebrai rekonstrukció modelljének szemléltetése.

probléma reprezentálható egy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{x} \in \Phi^{n^2} \quad (1)$$

alakú egyenletrendszerrel, ahol

- \mathbf{x} : a képen található n^2 darab képpont intenzitásának vektora,
- \mathbf{b} : az m darab mért vetületi értékből képzett vektor,
- \mathbf{A} : az $m \times n^2$ méretű vetítési együttható mátrix, ahol minden a_{ij} elem megadja az i -dik vetítési sugár j -dik pixelen belül haladó szakaszának hosszát,
- $\Phi = \{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_c\}$: a képen megjelenő lehetséges diszkrét intenzitások halmaza (feltéve, hogy $\phi_0 < \phi_1 < \dots < \phi_c$).

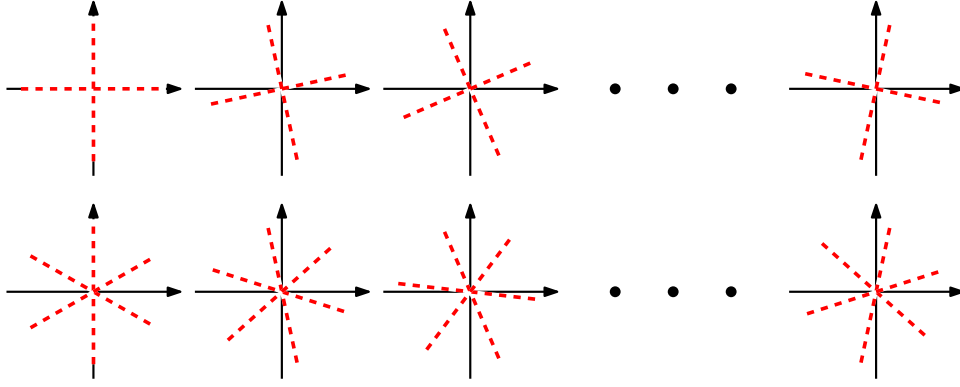
A vetületi geometriát szemlélteti a 2. ábra. A fenti formalizmus mellett a rekonstrukciós probléma megoldásához az (1) egyenletrendszer megoldásával juthatunk el.

3. Vetületi irányfüggőség a diszkrét tomográfiában

A diszkrét tomográfia alkalmazásával lehetőség nyílik a tárgyak belső szerkezetének kevés számú vetületből (általában 2-10 vetületből) történő vizsgálatára. Ebben az esetben azonban a vetületek kis száma nagy szabadságot ad a vetítéshez felhasználható irányok megválasztásában. Ezt szemlélteti a 3. ábra.

Egy korábbi munkában [15] a szerzők röviden bemutatták, hogy a vetületi irányválasztás hatással lehet a rekonstrukció pontosságára is. A vetületi irányfüggőség további vizsgálatával megadtuk a korábbi eredmények egy átfogóbb kiterjesztését. A célunk annak vizsgálata volt, hogy milyen mértékben hathat a vetületek megválasztása a rekonstrukció eredményeire, valamint hogy a jelenség behatárolható-e a vetületek alapján.

A vizsgálatok motivációját gyakorlati problémák adták. A diszkrét és bináris tomográfia számos alkalmazásában korlátozások jelentkeznek a felhasználható vetületek számára. Előfordulhat, hogy a nagyszámú vetület képzése nagy költséggel jár, illetve a vizsgálathoz használt sugárzás nagy dózisban nemkívánatos roncsoló hatással van a vizsgált tárgyra. Ilyen esetekben profitálni lehet abból, ha a vetítési irányok pontosabb megválasztásával csökkentjük a szükséges vetületek számát, vagy adott vetületszám mellett javítunk a rekonstrukció eredményének pontosságán.



3. ábra. A vetületképzésben felhasználható néhány irányhalmaz megjelenítése. A szaggatott vonalak jelölik az egyes vetületek sugarainak irányait.

3.1. Kísérleti vizsgálatok

Egy olyan kísérleti keretrendszert terveztünk és valósítottunk meg, amelyben vizsgálni tudtuk a vetületi irányfüggőség jelenségét a bináris tomográfia területén. A vizsgálatokban 22 fantomkép különböző irányokból vett vetületehalmazait szimuláltuk, majd rekonstruáltuk a fantomokat a szimulált adatból. A rekonstrukciók elvégzése után összehasonlítottuk az azonos számú, de különböző irányú vetületekből nyert kimeneteket, hogy megállapíthassuk, hogy a vetületi irány megválasztása milyen hatással van a rekonstrukció minőségére.

3.1.1. Irányfüggőség ekvianguláris vetületehalmazokkal

Először ekvianguláris vetületehalmazokkal végeztünk vizsgálatokat. Ezen vetületi irányhalmazokat úgy kapjuk, hogy adott számú vetülettel egyenlő közkre osztjuk a félkörívet. Ebben az esetben egy vetületi irányhalmazt a p vetületszámmal és az α_0 kezdőszöggel egyértelműen jellemezhetünk a következő módon:

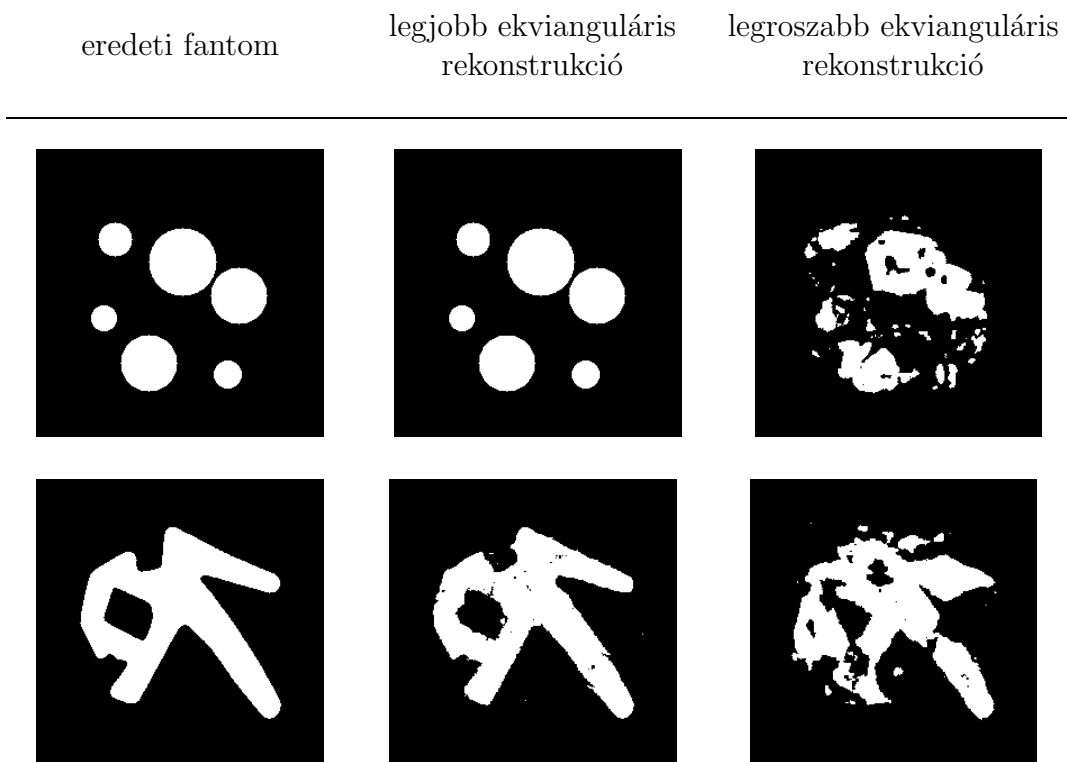
$$S(p, \alpha_0) = \left\{ \alpha_0 + i \frac{180^\circ}{p} \mid i = 0, \dots, p-1 \right\}. \quad (2)$$

A fenti formalizmust használva a rekonstrukciókat különböző $S(p, \alpha_0)$ vetületi irányhalmazok mellett végeztük. Minden kép esetén a vetületszámok 2 és 18 közötti értékeket vettek fel, és minden egyes vetületehalmazhoz megvizsgáltuk a 0° és $\left[\frac{180^\circ}{p} - 1^\circ \right]$ tartomány közé eső egész α_0 kezdőszögeket. Ezáltal szimulálni tudtuk az vizsgált objektum forgását (irányultságának változását) a leképezést végző szkennerek berendezésben.

A vizsgálatokhoz bevezettünk egy irányfüggőségi mérőszámot is, amellyel az irányfüggőség extrém eseteit tudtuk felderíteni. Ezt olyan esetek jelentették, amikor egy tárgyat egy adott vetületszám mellett tökéletesen is lehet rekonstruálni a vetületi irányok helyes megválasztása mellett, de ugyanolyan vetületszám mellett elfogadhatatlanul pontatlan rekonstrukció is kapható, ha a vetületi irányokat rosszul választjuk meg. A vetületi irányfüggőség mérésére a következő formulát használtuk:

$$D_{Alg}^\sigma(\mathbf{x}^*, p) = (E_{Alg}^{max}(\mathbf{x}^*, p) - E_{Alg}^{min}(\mathbf{x}^*, p)) \cdot \exp \left(-\frac{(E_{Alg}^{min}(\mathbf{x}^*, p))^2}{\sigma^2} \right), \quad (3)$$

ahol $E_{Alg}^{min}(\mathbf{x}^*, p)$ és $E_{Alg}^{max}(\mathbf{x}^*, p)$ rendre megadják az \mathbf{x}^* kép adott p vetületszám, de változó α_0



4. ábra. Példa egy rekonstrukció eredményének változására a vetületi irányok megváltoztatása mellett. A rekonstrukciók 4 vetületet tartalmazó, de különböző irányokkal készített vetülethalmazokból származnak.

kezdőszög mellett kapott legjobb és legroszabb rekonstrukciójának hibáját (RME értékben mérve [10]), abban az esetben, ha a rekonstrukciót egy adott Alg algoritmus végzi.

Azt találtuk, hogy a rekonstrukció eredménye nagyban függ a vetületi irányok megválasztásától, és a vizsgált tárgy irányultságának megváltoztatásával nagymértékű változás állhat be az eredményben. Az irányok megváltozásából eredő minőség változásra ad két példát a 4. ábra.

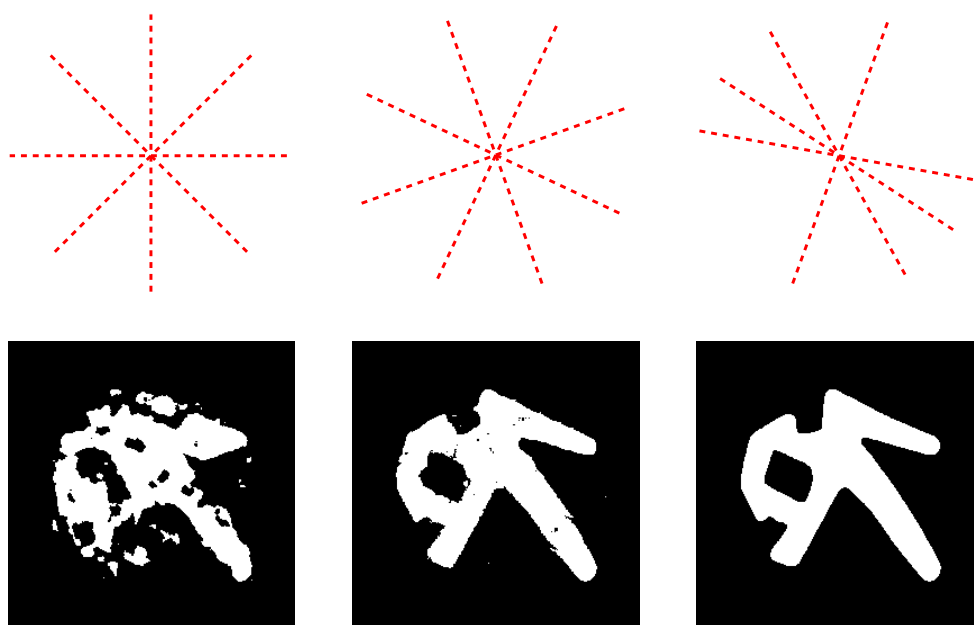
3.1.2. Irányfüggőség nem-ekvianguláris vetülethalmazok mellett

Az ekvianguláris kísérletek után megvizsgáltuk azt is, hogy elérhető-e további javulás az eredmény minőségében azáltal, hogy tetszőleges vetületi irányhalmazokat engedünk meg. Definiáltunk két nem-ekvianguláris irányválasztó stratégiát, amelyek minden egyes vetületi irányt külön-külön próbálnak meghatározni az optimális rekonstrukciós eredmény elérése érdekében.

Az egyik irányválasztási stratégia mohó vetületbeszúrásos alapú. A módszer alapötlete az volt, hogy egy üres vetülethalmazból indulunk ki. Ezután iteratívan vesszük a lehetséges vetületek egy halmazát, és megnézzük, hogy az egyes vetületek beszúrása a már meglévők mellé milyen változást hozna a rekonstrukció pontosságában. Azt a vetületet választjuk ki a vetülethalmaz végleges bővítésére, amelyiknek a beszúrása a legjobb rekonstrukciós eredményt hozza.

Egy másik nem-ekvianguláris irányválasztási stratégia alapját a szimulált hűtés [14] adta, ami egy véletlen-alapú metaheurisztika az optimalizálásban. Ebben a módszerben egy előre meghatározott $S(p, 0^\circ)$ ekvianguláris vetülethalmazból kiindulva minimalizáltuk a rekonstrukciós hibát a vetítési irányok szimulált hűtéssel való módosításával.

Az eredmények alapján azt állíthatjuk, hogy a rekonstrukció minősége az ekvianguláris esethez képest tovább javítható azáltal, hogy minden egyes vetítési irányt külön-külön határoztuk



5. ábra. Egy fantom rekonstrukciói balról jobbra rendre az $S(4, 0^\circ)$, $S(4, 19^\circ)$, és $S = \{29^\circ, 57^\circ, 80^\circ, 160^\circ\}$ vetülethalmazokból. A felső sorban a szaggatott vonalak jelzik a felhasznált vetítési irányokat, az irányok alatt a kapcsolódó rekonstrukciók láthatóak.

meg. Az ilyen jellegű javulásra ad példát a 5. ábra.

3.1.3. Irányfüggőség a rekonstrukció körülményeinek módosulása mellett

Megvizsgáltuk azt is, hogy a rekonstrukció körülményeinek változása, és a rekonstruált adat módosulása hogyan hat az irányfüggőségre. A vizsgálatok annak a kérdésnek a megválaszolására irányultak, hogy a különböző rekonstrukciós algoritmusok használatakor, illetve a vetületi adatokon megjelenő zaj, és a rekonstruálandó fantom apró módosulása esetén is ugyanazok maradnak-e az ideális vetítési irányok. Ebben az esetben az irányfüggőség vélhetően a vetületek különböző információtartalmától függ, vagyis egyes vetületek több információt hordoznak a rekonstrukcióhoz, mint mások. Így a jelenség bizonyos mértékig kiszámítható lenne, és felhasználható a gyakorlati alkalmazásokban, vagyis a vetületi irányok helyes megválasztásával lehetőség adódik a rekonstrukció minőségének javítására.

Először a különböző rekonstrukciós algoritmusok használatából adódó különbségeket vizsgáltuk. Ehhez a képi tesztadatbázis elemeit ekvianguláris vetülethalmazokból rekonstruáltuk három különböző rekonstrukciós algoritmussal, a Simultaneous Iterative Reconstruction Technique (SIRT – lásd, [11]) eredményének küszöbölésével kapott módszerrel, a Discrete Algebraic Reconstruction Technique-el (DART [2]), valamint egy D.C. programozáson alapuló energia minimalizációs módszerrel (amire ezentúl DC algoritmusként fogunk hivatkozni [24]). Összehasonlítottuk a különböző rekonstrukciós módszerekkel azonos vetülethalmazokból kapott eredményeket, hogy kiderüljön, hogy ugyanazok a vetítési irányok adják-e a legpontosabb eredményeket minden algoritmus esetén. Azt találtuk, hogy az alapvető tendenciák a rekonstrukciók minőségében hasonlóak voltak a különböző módszerek esetén, és az ideális vetítési irányok helyzete független volt a felhasznált rekonstrukciós módszertől. Ez arra enged következtetni, hogy a vetületi irányfüggőség a különböző vetületek különböző információtartalmából adódó jelenség, amely független a rekonstrukcióban használt algoritmus megválasztásától.

Vizsgáltuk továbbá a vetületeken megjelenő véletlen zaj hatásait is. A vetületi adatokat

három különböző mértékű additív Gauss zajjal terheltük. Az eredmények alapján a vetületi zaj nem befolyásolta a különböző irányhalmazokból készített vetületek eredményei közötti különbséget, vagyis ugyanazok a vetítési irányok adták az ideális rekonstruált eredményt zajos adatok mellett is.

Végül megvizsgáltuk, hogy a rekonstruált tárgy apró módosulása milyen hatással lesz az irányfüggőségi karakterisztikára. Ehhez a fantom képeken apró, pár képpont méretű módosításokat végeztünk, amelyekkel az anyagban megjelenő buborékokat, illetve repedéseket szimuláltuk. Azt találtuk, hogy a rekonstruált tárgy ilyen formájú apró módosulása nem befolyásolja az ideális vetítési irányokat.

Az eredményeket összefoglalva megállapítottuk, hogy a tárgyak bináris rekonstrukciójának eredménye nagyban javítható az vetületek képzéséhez felhasznált irányok helyes megválasztásával. Felfedtük, hogy ez a jelenség a különböző vetületek különböző információtartalmából származik, és független a rekonstrukcióhoz használt algoritmustól, illetve a vetületeken megjelenő véletlen zajtól, és a rekonstruált tárgy apró módosulásaitól. Ezek a szabályszerűségek alkalmassá teszik a vetületi irányfüggőséget a valós alkalmazásban történő kiaknázásra is.

A téziscsoport eredményei két konferencia kiadványban [16, 17], illetve két folyóiratban jelentek meg [18, 19]. Az értekezés kiadásának időpontjáig, a kapcsolódó eredményekre három független hivatkozást kaptunk [4, 6, 13].

4. Egy energia minimalizáción alapuló diszkrét rekonstrukciós eljárás

A diszkrét rekonstrukciós algoritmusok a tomográfia számos nehézségével kell, hogy megküzdjenek. A rekonstrukció elvégzéséhez gyakran hiányos adatok állnak rendelkezésre, amelyek a probléma diszkrét formalizálásából, illetve a vetületeken megjelenő véletlen zajból eredő torzításokat tartalmazhatnak. Továbbá a diszkrét rekonstrukciós probléma általános esete bizonyítottan NP-teljes, és hatékony algoritmusok csak bizonyos speciális esetekre állnak rendelkezésre [3, 5].

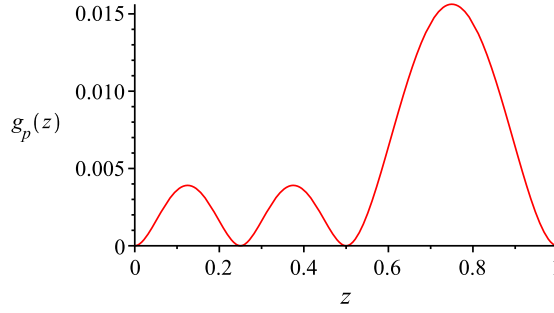
A fenti problémák kezelésére számos különböző megközelítés létezik. Néhány módszer folytonos rekonstrukciók eredményének diszkrétizációjával ad heurisztikus közelítést a probléma megoldására (lásd, pl., [2]), más módszerek pedig a rekonstrukciós feladatot egy energia függvény minimalizálására írják át, amit különböző metaheurisztikákkal optimalizálnak [1, 12].

Megadunk egy rekonstrukciós algoritmust a diszkrét tomográfia általános esetére, amely egy megfelelően definiált energiafüggvény minimalizációjával végzi a rekonstrukciót. A módszer alapötletét a DC algoritmus [24] adta. Sajnálatos módon az eredeti DC módszer csak bináris képek rekonstrukcióját képes elvégezni. A célunk az algoritmus egy általános kiterjesztésének előállítása volt, amely képes a többszintű képek rekonstrukciójára, és felveszi a versenyt a szakirodalomban jelenleg fellelhető rekonstrukciós algoritmusokkal.

4.1. Az algoritmus energia függvénye

Az energiafüggvényt úgy terveztük meg, hogy az a minimumpontjait a diszkrét rekonstrukciós probléma megoldásainak megfeleltethető helyeken veszi fel. A függvény formája a következő:

$$\mathcal{E}_\mu(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}) + \mu \cdot g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [\phi_0, \phi_c]^{n^2}, \quad (4)$$



6. ábra. Példa a $g_p(z)$ pixelekre felírt diszkretizáló függvény alakjára, $\Phi = \{0, 0.25, 0.5, 1\}$ elvárt intenzitások mellett.

ahol $f(\mathbf{x})$ a folytonos rekonstrukciós problémát reprezentálja, és a $\mu \cdot g(\mathbf{x})$ egy diszkretizáló tag. Részletesebben megvizsgálva az első tag az

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Lx} \quad (5)$$

alakban írható fel, ahol $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2$ a vetületi helyességi tag, amely a rekonstrukció \mathbf{x} eredményének vetületei, és az elvárt vetületek közötti különbséget méri. Az $f(\mathbf{x})$ tartalmaz egy $\frac{\alpha}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Lx}$ alakú simasági tagot is, amelyben \mathbf{L} az

$$\mathbf{x}^T \mathbf{Lx} = \sum_{i=1}^{n^2} \sum_{j \in N_4(i)} (x_i - x_j)^2 \quad (6)$$

egyenlőséget kielégítő mátrix. A fenti tagban $N_4(i)$ jelöli az i -dik képponttal a képen 4-szomszédságban álló pixelek halmazát. A simasági tag α szorzójával hangolni lehet a tag súlyát az energiafüggvényben. Ennek segítségével előnyben tudunk részesíteni olyan rekonstrukciókat, amelyek nagyobb homogén régiókat tartalmaznak.

Az energiafüggvény $g(\mathbf{x})$ tagja az eredmény diszkretizálásáért felelős és képpontonként felírt diszkretizáló tagok összegeként van megalkotva. A formája

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^2} g_p(x_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, n^2\}, \quad (7)$$

ahol a g_p függvény az elvárt intenzitások tartományának szakaszaira felírt negyedfokú függvények kompozíciójaként áll elő, vagyis

$$g_p(z) = \begin{cases} \frac{[(z - \phi_{j-1}) \cdot (z - \phi_j)]^2}{2 \cdot (\phi_j - \phi_{j-1})^2}, & \text{ha } z \in [\phi_{j-1}, \phi_j], \text{ minden } j \in \{1, \dots, c\}\text{-re,} \\ \text{definiálatlan,} & \text{különben.} \end{cases}$$

A g_p függvény formájára ad példát a 6. ábra. Ez a diszkretizáló függvény egy alacsony, nulla közeli értéket rendel minden pixel értékhez, ha az közel esik egy elvárt intenzitáshoz, és az intenzitásoktól való távolság növekedésével a függvény értéke is növekedni fog.

4.2. Az optimalizálási eljárás

Az $\mathcal{E}_\mu(\mathbf{x})$ energiafüggvény minimalizálására az alábbi folyamatot javasoltuk. Az energiafüggvényt két részre osztjuk, és feltesszük, hogy a folytonos rekonstrukció formalizálásáért felelős rész – vagyis a vetületi helyesség – fontosabb, mint a diszkretizáló tag.

Ezen az alapon az algoritmus egy vetített szubgradiens eljárás közben automatikus súlyozást végez az energiafüggvény tagjai között. Az iterációs folyamat minden egyes lépésében, az $\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})$ vektor adja meg a $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ vetületi helyességi tag képpontonként vett gradiensét. Ez a vektor minden egyes képpontra tartalmaz egy explicit helyességi mértéket, amely azt fejezi ki, hogy az adott vetület milyen mértékben vesz részt az elvárt vetületek helyességének torzításában. Ha egy képponton a gradiens abszolút értéke nagy, akkor az adott képpont több helytelen vetületen fekszik, és az intenzitása módosításra szorul. A gradiens abszolút értékének nagysága a kapcsolódó vetületek helyességének mértékével áll összhangban. Ha a kinyert pixelenként vett gradiens értéken alkalmazunk egy Gauss függvényt, akkor megkaphatunk egy olyan súlyt, ami kisebb értéket vesz fel, ha a kapcsolódó képpont további módosítást igényel a vetületek helyességének elérésére, és alacsonyabb, ha a vetületek többé-kevésbé helyesek. Ezt a súlyt használtuk a diszkretizáló tag erősségének megadására, így egy olyan eljáráshoz jutunk, amely automatikusan gyengíti a diszkretizáló tagot, amíg a rekonstrukció közbenső eredménye csak kevésbé felel meg a vetületeknek, és fokozatosan erősíti a diszkretizálást, ha a vetületi helyesség növekszik.

A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a módszer egy előre megadott kezdőpontból indulva először a folytonos rekonstrukció eredményét kezdi el közelíteni. Később viszont, ahogy az eredmény vetületei közelednek az elvárthoz, a diszkretizáló tag felerősödik és fokozatosan eltolja az eredményen található intenzitásokat a Φ diszkrét halmaz elemei felé. A módszer formális leírását az Algoritmus 1 adja meg, ahol $\mathcal{T}_\Phi(\mathbf{x})$ jelölést alkalmazunk az \mathbf{x} kép Φ halmazra történő küszöbölésének megadására, amely az eredmény végső diszkretizálását hivatott szolgálni, azaz

$$(\mathcal{T}_\Phi(\mathbf{x}))_i = \begin{cases} \phi_0, & \text{ha } x_i < (\phi_0 + \phi_1)/2, \\ \phi_j, & \text{ha } (\phi_{j-1} + \phi_j)/2 \leq x_i < (\phi_j + \phi_{j+1})/2, \quad j \in \{2, \dots, c-1\} \\ \phi_c, & \text{ha } (\phi_{c-1} + \phi_c)/2 \leq x_i. \end{cases} \quad (8)$$

Algoritmus 1 Energia minimalizáción alapuló diszkrét rekonstrukciós algoritmus

Input: \mathbf{A} vetületleíró mátrix; \mathbf{b} elvárt vetületi értékek halmaza; $\mathbf{x}^{(0)}$ kezdő állapot; $\gamma, \mu, \sigma \geq 0$ konstansok; Φ elvárt intenzitások halmaza; ϵ lépésköz korlát; k_{max} maximális iteráció szám.

- 1: $\lambda \leftarrow$ egy felső korlát az $(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{L})$ mátrix sajátértékeire.
 - 2: $k \leftarrow 0$
 - 3: **repeat**
 - 4: $\mathbf{v} \leftarrow \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b})$
 - 5: $\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{L}\mathbf{x}^{(k)}$
 - 6: **for** each $i \in \{1, 2, \dots, n^2\}$ **do**
 - 7: $y_i^{(k+1)} \leftarrow x_i^{(k)} - \frac{v_i + \gamma \cdot w_i + \mu \cdot G_{0,\sigma}(v_i) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(k)}}}{\lambda + \mu}$
 - 8: $x_i^{(k+1)} \leftarrow \begin{cases} \theta_0, & \text{ha } y_i^{(k+1)} < \phi_0, \\ y_i^{(k+1)}, & \text{ha } \phi_0 \leq y_i^{(k+1)} \leq \phi_c, \\ \theta_c, & \text{ha } \phi_c < y_i^{(k+1)}. \end{cases}$
 - 9: **end for**
 - 10: $k \leftarrow k + 1$
 - 11: **until** $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_2^2 < \epsilon$ or $k > k_{max}$
 - 12: **return** $\mathcal{T}_\Phi(\mathbf{x}^{(k)})$
-

4.3. Eredmények

A javasolt algoritmus viselkedését tesztekkel vizsgáltuk, melyek során a működését összehasonlítottuk a szakirodalomban fellelhető más rekonstrukciós eljárásokéval. Az összehasonlított módszerek között voltak a fentebb említett DART [2] és DC [24] rekonstrukciós algoritmusok.

Azt találtuk, hogy a javasolt algoritmusunk többszintű (legalább 3 intenzitást tartalmazó) képek kis vetületszám melletti rekonstrukciójában konzisztensen jobb eredményt adott, mint a másik két módszer. Habár más esetekben az új algoritmusunk nem mindig adta a módszerek közül a legpontosabb eredményt, a pontossága nem maradt el jelentősen a többi módszerétől. A fentiekén túl, a módszerünk nagyban robusztusnak mutatkozott zajjal terhelt vetületek esetén, és jobban teljesített, mint a többi algoritmus, amennyiben a vetületi adatokat véletlen zajjal terheltük. Végezetül az algoritmusok futási időinek vizsgálatakor azt találtuk, hogy azok többé-kevésbé megegyeztek. A fenti megállapítások alapján azt mondhatjuk, hogy a javasolt módszer egy használható alternatívát jelent a diszkrét rekonstrukció elvégzésében.

A téziscsoport eredményei két konferencia kiadványban [20, 21] jelentek meg.

5. Bináris rekonstrukciók lokális és globális bizonytalansága

Habár a bináris tomográfia lehetővé teszi a tárgyak kis számú vetületből történő rekonstrukcióját, a vetületek számára vonatkozó korlátozások szigorúsága még ebben az esetben is lehetetlenné teheti a pontos eredményhez szükséges mennyiségű adat begyűjtését. Ezekre az esetekre kifejlesztettünk egy olyan módszert, amely képes mérni a vetületek információtartalmát, és felderíteni a rekonstrukciókban jelentkező bizonytalanságokat, vagyis megállapíthatja, hogy a vetületek a rekonstruált kép egyes képpontjait milyen mértékben határozzák meg.

5.1. A rekonstrukció lokális bizonytalanságának mérése

Az elégtelen adatmennyiségből történő rekonstrukció esetén a bináris rekonstrukciót valószínűségi számítási alapokra helyezhetjük. Ilyen esetekben általában a vetületi adatok nem határozzák meg teljesen az eredményt, és a vetületeknek több kép is eleget tehet. Ezzel szemben feltehetjük, hogy csak az eredeti objektum képe fogadható el pontos rekonstrukcióként, amit további ismeret híján a vetületeknek megfelelő rekonstrukciók közül egy véletlen elemként foghatunk fel. Ilyenkor minden $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{n^2}$ bináris rekonstrukcióhoz hozzárendelhetünk egy

$$P(\mathbf{x} | \mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{9}$$

valószínűséget, amely megadja, hogy a rendelkezésre álló vetületek alapján mennyire valószínű, hogy az adott \mathbf{x} eredmény helyes. A fenti valószínűségekből ugyancsak ki lehet számítani, hogy mi a valószínűsége, hogy a helyes rekonstrukcióban egy adott i indexen szereplő pixel értéke 1 lesz

$$P(x_i = 1 | \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \sum_{\substack{\mathbf{y} \in \{0,1\}^{n^2} \\ y_i = 1}} P(\mathbf{y} | \mathbf{A}, \mathbf{b}) . \tag{10}$$

Hasonlóan a $P(x_i = 0 | \mathbf{A}, \mathbf{b}) = 1 - P(x_i = 1 | \mathbf{A}, \mathbf{b})$ érték is meghatározható. Innen tovább lépve kiszámíthatjuk az egyes képpontokra értelmezett entrópiát

$$H(x_i) = - P(x_i = 0 | \mathbf{A}, \mathbf{b}) \cdot \log_2(P(x_i = 0 | \mathbf{A}, \mathbf{b})) - \\ - P(x_i = 1 | \mathbf{A}, \mathbf{b}) \cdot \log_2(P(x_i = 1 | \mathbf{A}, \mathbf{b})), \tag{11}$$

ami leírja a vetületek alapján az egyes képpontok bizonytalanságait. Ez az érték kizárólag a vetületi adatokból, és a vetületi információból ered. A magas entrópiával rendelkező képpontok bizonytalanok, és a pontos értékük meghatározása nem lehetséges további információ felhasználása nélkül. Ehhez a vetületek nem tartalmaznak elegendő adatot. Habár a modell egyszerű, egy direkt megvalósítás az entrópia értékének kiszámítására a lehetséges bináris rekonstrukciók exponenciális száma miatt általában lehetetlen. Másfelől viszont megadhatók olyan heurisztikák, amelyek megbízhatóan tudják közelíteni ezeket az értékeket.

A bináris tomográfiában olyan eredményeket keresünk, amelyek kielégítik a vetületeket, és a bináris tartományból származnak. Ha keresünk egy olyan rekonstrukciót, amely megfelel a vetületeknek, de amelyben a képpont értékek a lehető legtávolabb esnek a bináristól, azzal mérhetjük, hogy mennyire könnyű megváltoztatni az egyes képpontok értékeit (vagyis mennyire könnyű kimozdítani az értéket a binárisból). Ha egy képpont értékét egyszerűen el tudjuk tolni a 0.5 érték felé, akkor az a képpont megközelítőleg megegyező valószínűséggel vehet fel 0 vagy 1 értéket az eredményben. Ezzel az ötlettel a rekonstruált képre vonatkozó előzetes információ nélkül, pusztán a vetületi adatból vizsgálhatjuk a képpontok bizonytalanságát.

Az 1. algoritmus felhasználásával ez úgy oldható meg, ha megadunk egy diszkrétizáló tagot, ami bünteti a bináris eredményeket. Ezt többek között a következő formájú függvényvel oldhatjuk meg:

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \mathbf{x} - \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e} \right\|_2^2, \quad (12)$$

ahol \mathbf{e} egy csupa 1-es értéket tartalmazó oszlopvektort jelöl. Amikor a rekonstruált \mathbf{x} előállt, a

$$H(x_i) = -(x_i \cdot \log_2(x_i) + (1 - x_i) \cdot \log_2(1 - x_i)) \quad (13)$$

entrópia érték kiszámításával közelíthetjük a (11) képlettel kapcsolatban álló, képpontokra vonatkozó bizonytalansági térképet.

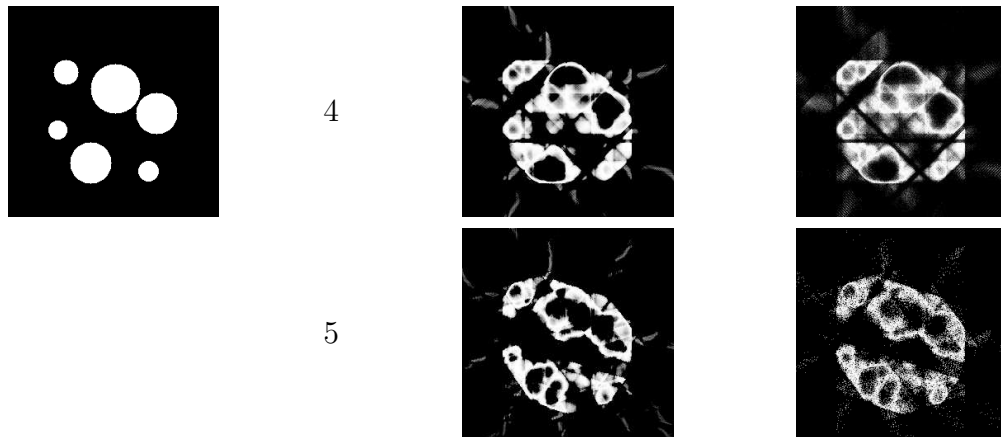
A módszer igazolására kísérleti vizsgálatokat végeztünk egy képi adatbázis elemein. 22 tesztkép különböző vetületszám mellett vett szimulált vetületeit képeztük és minden vetülethalmazra a lehetséges rekonstrukciók halmazán egy véletlen mintavételezést végeztünk. Ezzel egy statisztikát kaptunk a lehetséges rekonstrukciókban szereplő képpontok intenzitásairól, amelyből következtetni lehetett a képpont bizonytalanságokra. Ezt a mértéket hasonlítottuk össze az általunk tervezett bizonytalansági mértékkel, hogy egyezést találunk-e. A módszerek eredményeire ad példát a 7. ábra. Az összehasonlítás során arra a következtetésre jutottunk, hogy a bizonytalansági mérték valóban megfelelően közelíti a képpont bizonytalanságokat.

5.2. Bináris rekonstrukciók globális bizonytalansága

A lokális bizonytalanságokat összegezni lehet egy globális mérőszámmá is, ami jellemzést ad a vetülethalmaz általános információtartalmáról. Ehhez a következő formulát definiáltuk:

$$\mathcal{U}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n H(x_i)}{\frac{1}{p} \sum_{j=1}^m b_j}. \quad (14)$$

A megadott képlet összegzi a képpontonként vett $H(x_i)$ bizonytalansági mérőszámot, és az összeget a képen megjelenő objektum pixelek közelítő számával normalizálja. Ideális esetben az objektum képpontok száma az egyes vetületekben a vetületi értékek összegével lenne megegyező, de egy számítógépes implementációban kerekítési és reprezentációs hibák miatt ez az érték nem pontos, így a vetületenként vett vetületi összegek átlagát használtuk a pontosabb eredmény elérése érdekében.



7. ábra. Vetületi halmazokból számított bizonytalansági térképek. A sötét területek meghatározottak a vetületek által, míg a világosabb területek nem, és bizonytalanságot hordoznak.

A globális bizonytalansági mértéket empirikus úton validáltuk úgy, hogy vettük tesztképek egy adatbázisát, és a bizonytalansági mértéket az irányfüggőségnél leírthoz hasonló tesztekben hasonlítottuk össze számos, különböző vetülethalmazokból végzett rekonstrukció eredményével. A bizonytalansági mérőszám akkor helyes, ha a kisebb bizonytalansághoz tartozó vetületekből pontosabb rekonstruált eredményt lehet kapni, és egy kapcsolat körvonalazódik a bizonytalanság, és rekonstrukciók pontossága között. Az eredményeink alapján valóban ez volt a helyzet, és a globális bizonytalansági mérték valóban leírta a vetülethalmazok információtartalmát.

5.3. Lehetséges alkalmazások

Végezetül a lokális és globális bizonytalansági mérőszámok több lehetséges felhasználási területét is megvizsgáltuk. Először is a lokális bizonytalansági mérőszám felhasználható a rekonstrukciós algoritmusokban, mint a DART, hogy felderítsük a képek problémás részeit. A DART által használt folyamat egy kezdeti diszkrét rekonstrukció határvonalainak deformálásán alapul. A módszer koncepciójából adódóan nehezen talál meg apró képződményeket (pl.: repedéseket és buborékokat) ha azok nagyobb régió belsejében, élektől távol helyezkednek el. Megterveztük a DART egy módosított változatát, amely az eredeti módszer gyengeségét a bizonytalansági térképek használatával oldja fel.

A fentiekén túl, a globális és lokális bizonytalansági mértékek felhasználhatóak a rekonstrukció pontosságának mérésére, és értékelésére, így segíthetnek ipari környezetben a tárgyak nem-roncsoló vizsgálatában, a pontatlan eredményekből adódó hamis következtetések elkerülésében. A globális bizonytalanság továbbá pontosan leírja a vetületi adatok információtartalmát, így alkalmazható lehet a vetületképzésben felhasználható ideális (maximális információtartalmú) vetületek megtalálásában, abban az esetben, ha a vizsgált tárgynak rendelkezésre áll egy tervrajza.

A tézis csoport eredményei egy konferencia kiadványban [22] kerültek publikálásra, továbbá egy leadott folyóirat cikk [23] jelenleg elbírálás alatt áll.

Az eredmények tézisszerű összefoglalása

Az értekezés eredményei három csoportba sorolhatók. Az eredmények és a kapcsolódó publikációk viszonyát az 1. táblázat foglalja össze.

Az első téziscsoport a vetületi irányfüggőség problémájával foglalkozik a bináris rekonstrukcióban. A téziscsoport eredményei két konferencia kiadványban [16, 17], illetve két folyóirat publikációban [18, 19] jelentek meg.

- I/1. Megterveztem egy keretrendszert, amellyel különböző szempontok alapján vizsgálható a kapcsolat a diszkrét rekonstrukció minősége és a rekonstrukcióhoz felhasznált vetületek irányai között. Megmutattam, hogy a vetületek képzéséhez felhasznált irányok megválasztása nagyban befolyásolja a rekonstrukció eredményét. Azt találtam, hogy egyes vetület-halmazok jobb rekonstruált eredményekhez vezetnek, mint mások.
- I/2. Több új vetületi irányválasztó stratégiát javasoltam, amelyek képesek javítani a rekonstrukcióban felhasznált vetületek irányain, amennyiben rendelkezésre áll a vizsgált tárgy egy tervrajza.
- I/3. Ugyancsak megmutattam, hogy a vetületi irányfüggőség a különböző vetületek eltérő információtartalmából fakad, és független a rekonstrukcióhoz használt algoritmus megválasztásától, illetve a vetületi adatok torzulásától, így egy kiszámítható és következetes jelenség, ami kihasználható a rekonstrukciós módszerek pontosságának javításában.

A második téziscsoportban egy új rekonstrukciós algoritmust javaslok a diszkrét tomográfia többszintű esetére. A téziscsoport eredményei két konferencia kiadványban [20, 21] jelentek meg.

- II/1. Kifejlesztettem egy rekonstrukciós algoritmust a diszkrét rekonstrukció általános esetére, amely egy energiafüggvény minimalizálásával képes a vizsgált objektumok szerkezetének rekonstrukcióját elvégezni. Az algoritmus helyességét tesztekkel igazoltam azáltal, hogy a működését a szakirodalomban fellelhető rekonstrukciós módszerekkel hasonlítottam össze. A vizsgálatok alapján a javasolt algoritmus mind sebességben, mind pedig az eredmény pontosságában felveszi a versenyt a jelenleg használatos más rekonstrukciós algoritmusokkal. Az eredmények alapján ugyancsak igazolást nyert, hogy a javasolt módszer rendkívül jól viselkedik zajos vetületi adatok használata esetén.

A harmadik téziscsoport a bináris rekonstrukciók lokális és globális bizonytalanságait taglalja. Az eredmények egy része egy konferencia kiadványban [22] került publikálásra, továbbá benyújtásra került egy folyóirat cikk [23] is.

- III/1. Bevezettem egy valószínűségen alapuló módszert a bináris rekonstrukciókban eredményül kapott képpontok bizonytalanságának jellemzésére, amely megadja, hogy az egyes pixelek milyen mértékig vannak meghatározva a vetületi adatok által. Megadtam továbbá egy olyan módszert, amellyel a gyakorlatban is közelíteni lehet a képpont-bizonytalanságokat.
- III/2. Megadtam egy formulát, amellyel a képpontokra felírt lokális bizonytalanságok összegezhetőek egy globális mérőszámmá, amely képes előrevetíteni a rekonstrukciók várható hibáját.
- III/3. Végül megadtam, hogy a bizonytalansági mérőszám miképpen használható fel a DART rekonstrukciós algoritmus működésének javítására, illetve a bináris tomográfiát alkalmazó vizsgálati technikák fejlesztésére.

| | [16] | [17] | [18] | [19] | [20] | [21] | [22] | [23] |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| I/1. | • | | | | | | | |
| I/2. | | • | | | | | | |
| I/3. | | | • | • | | | | |
| II/1. | | | | | • | • | | |
| III/1. | | | | | | | • | • |
| III/2. | | | | | | | | • |
| III/3. | | | | | | | | • |

1. táblázat. A tézispontok és a Szerző publikációinak kapcsolata.

Hivatkozások

- [1] P. Balázs, M. Gara, *An evolutionary approach for object-based image reconstruction using learnt priors*, Lecture Notes in Computer Science, 5575, 520–529 (2009).
- [2] K.J. Batenburg, J. Sijbers, *DART: a fast heuristic algebraic reconstruction algorithm for discrete tomography*, IEEE Conference on Image Processing IV, 133–136 (2007).
- [3] S. Brunetti, A. Del Lungo, F. Del Ristoro, A Kuba, M. Nivat, *Reconstruction of 4- and 8-connected convex discrete sets from row and column projections*, Lin. Alg. Appl. 339, 37–57 (2001).
- [4] J. Chen, A. Gao, C. Zhang, *An efficient algorithm for reconstruction of discrete sets from horizontal projections with absorption*, Communications in Computer and Information Science CCIS 307:(PART 1), 762–772 (2012).
- [5] A. Daurat, *Determination of q -convex sets by X-rays*, Theoretical Computer Science, 332(1-3), 19–45 (2005).
- [6] A. Frost, E. Renners, M. Hotter, J. Ostermann, *Probabilistic evaluation of three-dimensional reconstructions from X-ray images spanning a limited angle*, SENSORS 13:(1), 137–151 (2013).
- [7] G.T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography, Image Reconstruction from Projections*, 2nd edition, Springer-Verlag, London, 2009.
- [8] G.T. Herman, A. Kuba (Eds.), *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [9] G.T. Herman, A. Kuba (Eds.), *Advances in Discrete Tomography and Its Applications*, Birkhäuser, Boston, 2007.
- [10] A. Kuba, G.T. Herman, S. Matej, A. Todd-Pokropek: *Medical applications of discrete tomography*, Discrete Mathematical Problems with Medical Applications, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, AMS, 55, 195–208 (2000).
- [11] A.C. Kak, M. Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE Press, New York, 1999.
- [12] T. Lukić, *Discrete tomography reconstruction based on the multi-well potential*, Lecture Notes in Computer Science 6636, 335–345 (2011).

- [13] T. Lukić, B. Nagy, *Energy-minimization based discrete tomography reconstruction method for images on triangular grid*, Lecture Notes in Computer Science vol. 7655, 274–284 (2012).
- [14] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, E. Teller, *Equation of state calculation by fast computing machines*, J. Chem. Phys. 21, 1087–1092 (1953).
- [15] A. Nagy, A. Kuba, *Reconstruction of binary matrices from fan-beam projections*, Acta Cybernetica, 17(2), 359–385 (2005).
- [16] L. Varga, P. Balázs, A. Nagy, *Direction-dependency of a binary tomographic reconstruction algorithm*, Lecture Notes in Computer Science 6026, 242–253 (2010).
- [17] L. Varga, P. Balázs, A. Nagy, *Projection selection algorithms for discrete tomography*, Lecture Notes in Computer Science 6474, 390–401 (2010).
- [18] L. Varga, P. Balázs, A. Nagy, *Projection selection dependency in binary tomography*, Acta Cybernetica, 20, 167–187 (2011).
- [19] L. Varga, P. Balázs, A. Nagy, *Direction-dependency of binary tomographic reconstruction algorithms*, Graphical Models 73(6), 365–375 (2011).
- [20] L. Varga, P. Balázs, A. Nagy, *An energy minimization reconstruction algorithm for multivalued discrete tomography*, 3rd International Symposium on Computational Modelling of Objects Represented in Images, Rome, Italy, Proceedings (Taylor & Francis): 179–185 (2012).
- [21] L. Varga, P. Balázs, A. Nagy, *Gradiens módszerek automatikus súlyozásán alapuló diszkrét tomográfiai eljárás*, A Képfeldolgozók és Alakfelismerők Társaságának 9. országos konferenciája - KÉPAF 2013, 210–223, (2013).
- [22] L. Varga, L.G. Nyúl, A. Nagy, P. Balázs, *Local uncertainty in binary tomographic reconstruction*, Proceedings of the 10th IASTED International Conference on Signal Processing, Pattern Recognition and Applications, IASTED - Acta Press, 490–496 (2013).
- [23] L. Varga, L.G. Nyúl, A. Nagy, P. Balázs, *Local and global uncertainty in binary tomographic reconstruction*, Submitted to IEEE Transactions on Image Processing.
- [24] S. Weber, *Discrete tomography by convex concave regularization using linear and quadratic optimization*, PhD thesis, Heidelberg University, 2009.