Doktori értekezés tézisei

Moduláris és féligmoduláris hálók

Skublics Benedek

Témavezető:
Dr. Czédli Gábor egyetemi tanár

Matematika- és Számítástudományok
Doktori Iskola

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

2013
Szeged

,,Csillaghálóban hányódunk
partravont halak. . . ”
(Pilinszky J.)

Előzmények

Modularitás. A moduláris hálók fogalma egy idős a hálók fogalmával, és mindkettő Dedekind nevéhez köthető. Egy hálót modulárisnak hívunk, ha kielégíti az alábbi azonosságot:

$$x \vee \big(y \wedge (x \vee z)\big) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Dedekindnek köszönhetően kb. 1900 óta ismert, hogy egy modulus részmodulusai a tartalmazásra nézve moduláris hálót alkotnak. Számos további algebrai struktúra is közeli kapcsolatban van a moduláris hálókkal: csoportok normálosztói, valamint gyűrűk ideáljai is moduláris hálót alkotnak; másrészt a disztributív hálók (így például a Boole algebrák is) speciális moduláris hálók. Később kiderült, hogy moduláris hálókkal az algebra mellett a matematika más területein is találkozhatunk, például a geometriában vagy a kombinatorikában.

1. Fejezet. A disszertáció első fejezete *Neumann-keretekkel* – röviden keretekkel – foglalkozik, amely fogalom Neumann János nevéhez kötődik. Habár Neumann csak néhány évig foglalkozott hálóelmélettel (1935 és 1937 között), sok hálóelmélész – köztük Grätzer [27, 292. o.] – szerint eredményei mai napig a hálóelmélet egyik legmélyebb részét alkotják. Érdemes megemlíteni, hogy Birkhoff, akit bizonyos értelemben a hálóelmélet és az univerzális algebra alapítójának tekintenek, egy cikkében [5] így nyilatkozott Neumannról: ,,Neumann János brilliáns elméje üstökösként lángolt a hálóelmélet egén.” Szintén Birkhoff volt az, aki Neumann érdeklődését a hálóelmélet felé irányította. Neumann abban az időben modern fizikával foglalkozott. Birkoffal való találkozása után úgy gondolta, hogy a hálóelmélet esetleg segítségére lehet egy olyan térfogalom kialakításában, amelyben olyan dimenziófüggvény található, ami a korábbi diszkrét értékkészlet $(0, 1, 2, \dots)$ helyett folytonos értékkészlettel rendelkezik. Így jutott el a *folytonos geometriák* fogalmához, amelyek speciális komplementumos moduláris hálók. Jegyezzük meg, hogy Neumann ekkori eredményeit együtt, teljes terjedelmükben csak halála után adták ki [41].

Neumann folytonos geometriákkal kapcsolatos munkája során vezette be a keretek fogalmát. Arra használta őket, hogy a projektív geometriákat koordinátázó Veblen–Young tételt [49, 50] általánosítsa komplementumos moduláris hálókra. Ennek során definiálta a kerethez tartozó *koordinátagyűrű* fogalmát. Észrevette, hogy komplementumos moduláris hálók esetén ez a gyűrű kielégít egy bizonyos feltételt, amit ma *Neumann-regularitásnak* neveznek. Érdemes megemlíteni, hogy mára a Neumann-reguláris gyűrűk területe önálló diszciplinává nőtte ki magát.

Miután a moduláris geometriai hálók és a projektív terek között kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn, nem meglepő, hogy számos projektív terekre vonatkozó állítás – például a Desargues-tétel – megfogalmazható a hálók nyelvén, vö. Grätzer [28, Section V.5]. Neumann munkája is bizonyítja, hogy a hálóelmélet eszköztára hasznos lehet geometriai problémák kezelésében. Később további publikációk is megerősítették ezt a feltételezést. Például Jónsson [36] mutatott olyan hálóazonosságokat, amik pontosan akkor teljesülnek egy moduláris geometriai hálóban, ha a hozzá tartozó projektív térben igaz a Desargues-tétel. Jegyezzük meg, hogy hasonló eredményre jutott Day [20] a Pappus-tétellel kapcsolatban.

Visszatérve a keretekhez emeljük ki, hogy bár Neumann olyan L *komplementumos* moduláris hálót vizsgált, aminek a magassága $n \geq 4$, a koordinátagyűrű konstrukciója tetszőleges moduláris hálóban is működik, ld. Artmann [1] és Freese [23], sőt, akkor is, ha $n = 3$ és L Desargues-féle, ld. Day és Pickering [21].

Ezen a ponton érdemes megemlíteni egy, a keretekkel ekvivalens fogalmat, a *Huhn-gyémántok* fogalmát, ld. [32]. A disztributív hálók kezdetektől fogva kiemelkedően fontos szerepet játszottak a hálóelméletben, vö. Grätzer [28, p. xix]. Huhn eredeti motivációja az volt, hogy megpróbálja általánosítani a disztributivitás fogalmát. Ugyanekkor általánosítani akarta a disztributív hálókra vonatkozó jelentősebb eredményeket is. Ezen törekvése közben jutott el az *n-disztributivitás* fogalmához, ami a későbbiekben igen gyümölcsöző általánosításnak bizonyult. Míg a moduláris hálók közül pontosan azok disztributívak, amik részhálóként nem tartalmazzák M_3-at (Birkhoff-kritérium), addig Huhn megmutatta, hogy az n-disztributív hálók hasonló kritériumml jellemezhetők, ahol M_3 szerepét a Huhn-gyémántok veszik át. Huhn-gyémántokhoz számos érdekes tétel kötődik, például Huhn ezek segítségével bizonyította, hogy egy végesen prezentált moduláris háló automorfizmus csoportja nem feltétlenül véges, ld. [33].

A Neumann-keretek és a Huhn-gyémántok számos mély hálóelméleti eredmény bizonyításában szerepelnek. Ezek az eredmények arról tanúskodnak, hogy a moduláris hálók sokszor igen bonyolultak lehetnek. Elég megemlíteni Freese [23], Huhn [33] és Hutchinson [34] publikációit. Kereteket illetve gyémántokat használtak más területeken is: például kongruencia varietások vizsgálatánál, ld. Hutchinson és Czédli [35], Czédli [13], illetve

Freese, Herrmann és Huhn [24]; vagy a kommutátorelméletben, ld. Freese és McKenzie [25, XIII. Fejezet].

A *szorzatkeret* fogalmát Czédli [14] vezette be, miközben kvázi-fraktálok által generált nem disztributív, moduláris varietásokkal foglalkozott. A disszertáció első fejezete egy Czédlivel közös eredményünkön alapul [18]. Megmutatjuk, hogy a szorzatkeretek fogalma közeli rokonságban van a mátrixok fogalmával. Pontosabban, a szorzatkerethez tartozó ún. *külső keret* koordinátagyűrűje az ún. *belső keret* koordinátagyűrűje feletti mátrixgyűrű, ld. az 1. Tételt.

Féligmodularitás. A modularitás egyik leghasznosabbnak bizonyult általánosítása a féligmodularitás. Egy hálót (felülről) *féligmodulárisnak* hívunk, ha kielégíti az alábbi Horn-formulát:

$$x \prec y \Rightarrow x \vee z \preceq y \vee z.$$

A moduláris hálókkal ellentétben a féligmoduláris hálók osztálya azonosságokkal nem definiálható. Féligmoduláris Hálók című könyvének előszavában Stern [47] a féligmodularitás absztrakt fogalmát Birkhoffnak tulajdonítja. Azt is megemlíti, hogy eredetileg a féligmoduláris hálók olyan speciális lezárási operátorok kísérőhálójaként jelentek meg, amik kielégítik az ún. Steinitz–Mac Lane kicserélési tulajdonságot, vö. [47, ix., 2. és 40. o.]. A féligmoduláris hálók talán legfontosabb osztálya a *geometriai hálók* osztálya. Ezek definíció szerint féligmoduláris atomisztikus algebrai hálók, vö. Birkhoff [6, IV. Fejezet] valamint Crawley és Dilworth [9, 14. Fejezet]. Miután a véges geometriai hálók és az (egyszerű) matroidok lényegében megegyeznek, nem meglepő, hogy a féligmoduláris hálók és a matroidok elmélete kezdetektől fogva együtt fejlődik, vö. Stern [47] könyvének előszavával.

2. Fejezet. A disszertáció második fejezete hálók geometriai hálókba történő beágyazásával foglalkozik. Különféle hálóbeágyazásokkal már a hálóelmélet kezdetétől fogva intenzíven foglalkoztak. Az első említésre méltó eredményt Birkhoff [4] publikálta 1935-ben. Megmutatta, hogy *minden partícióháló beágyazható egy csoport részcsoporthálójába.* Később, 1946-ban Whitman [51] belátta, hogy *minden háló beágyazható egy partícióhálóba.* A fenti két eredményt összefésülve kapjuk, hogy *minden háló beágyazható egy csoport részcsoporthálójába.* Ezeknek a beágyazásoknak figyelemreméltó következményei vannak. Például azonnal adódik, hogy nincs olyan nemtriviális hálóazonosság, amit minden partícióháló vagy minden részcsoportháló kielégít.

A Whitman-tételre a legismertebb bizonyítás Jónssontól [36] származik. Azonban mind Whitman mind Jónsson bizonyítása során a megkonstruált partícióháló lényegesen nagyobb, mint az eredeti beágyazandó háló. Például mindkét esetben akkor is végtelen partícióhálót kapunk, ha az eredeti háló véges. Már Whitmanban [51] is felmerült a kérdés, hogy beágyazható-e minden véges háló egy véges partícióhálóba. Úgy sejtette, hogy a kérdésre a válasz pozitív.

A partícióhálók a geometriai hálók osztályába tartoznak. Mivel minden véges háló algebrai, ezért a *véges* geometriai hálók atomisztikus féligmoduláris hálók. Ennek fényében az első lépést a Whitman-sejtés bizonyítása felé Finkbeiner [22] tette, amikor igazolta, hogy *minden véges háló beágyazható egy véges féligmoduláris hálóba.* Bizonyítása két részre bontható. Egyrészt megmutatta, hogy minden *pszeudorang függvénnyel* rendelkező véges háló beágyazható egy véges féligmoduláris hálóba. Másrészt belátta, hogy minden véges hálóhoz konstruálható egy pszeudorang függvény. Ezen felül a megadott beágyazás ,,megőrzi" a pszeudorang függvényt. Ez azt jelenti, hogy ha feltesszük, hogy az L háló be van ágyazva az S féligmoduláris hálóba, továbbá p az L pszeudorang függvénye és h az S magasságfüggvénye, akkor p és h megegyeznek L-en. Érdemes megemlíteni, hogy Finkbeiner az általa közölt bizonyítást Dilworthnek tulajdonítja. A második lépést a Whitman-sejtés bizonyításához Dilworth tette, amikor megmutatta, hogy *minden véges háló beágyazható egy véges geometriai hálóba*, ld. Crawley és Dilworth [9]. A probléma megoldása Pudlák és Tůma [43, 44] nevéhez kötődik, akik 1977-ben igazolták a Whitman-sejtést.

Habár Finkbeinernek nem sikerült belátnia a Whitman-sejtést, konstrukciója olyan beágyazásokra irányította a figyelmet, amik megőrzik a pszeudorang függvényt. Az ilyen beágyazást *izometrikus* beágyazásnak nevezzük, vö. Grätzer és Kiss [29]. 1986-ban Finkbeiner és Dilworth eredményeit ötvözve Grätzer és Kiss [29] megmutatták, hogy *minden pszeudorang függvénnyel rendelkező véges háló beágyazható izometrikusan egy véges geometriai hálóba.* Ezen a ponton érdemes megjegyezni, hogy a kérdés, vajon a fenti izometrikus beágyazásban a geometriai háló kicserélhető-e partícióhálóra, még mindig nyitott. A Grätzer–Kiss-tételnek van egy közvetlen következménye féligmoduláris hálókra. Mivel minden véges féligmoduláris háló magasságfüggvénye pszeudorang függvény, ebben az esetben tekinthető a magasságfüggvényre vonatkozó izometrikus beágyazás. Ezek éppen azok a beágyazások, amik minden elem magasságát megőrzik. Mivel a szóban forgó hálók mind végesek, ez azzal ekvivalens, hogy a beágyazás *fedésőrző*, azaz megőrzi a fedés relációt. Tehát a Grätzer–Kiss-tételbő következik, hogy *minden véges féligmoduláris hálónak van fedésőrző beágyazása egy geometriai hálóba.* Jegyezzük meg, hogy a fenti következményből és Finkbeiner eredményéből visszakapható a Grätzer–Kiss-tétel.

Finkbeiner, Grätzer és Kiss véges hálókat vizsgáltak. Természetes módon merül fel a kérdés, általánosíthatók-e az eredmények végtelen hálókra is. Czédli és Schmidt [17] megmutatták, hogy a Grätzer–Kiss-tétel fent említett következménye kiterjeszthető véges hosszúságú féligmoduláris hálókra. A disszertáció második fejezete a [46] publikáción alapul, melyben megmutattuk, hogy a Grätzer–Kiss-tétel kiterjeszthető hálók egy nagyobb osztályára, melynek elemeit *majdnem alacsony* hálóknak neveztük, ld. a 2. Tételt.

3. Fejezet. A disszertáció harmadik fejezete Mal'cev feltételekkel foglalkozik. Mal'cev [39] immár klasszikusnak számító tétele azt állítja, hogy egy $\mathcal{V}$ varietás algebráinak kongruenciái pontosan akkor felcserélhetők, ha létezik olyan p háromváltozós kifejezés, amire $\mathcal{V}$ kielégíti az alábbi azonosságot:

$$p(x,y,y) = x \text{ and } p(x,x,y) = y.$$

Jónsson [37] és Day [19] hasonló feltételeket talált egy varietás kongruenciahálóinak disztributivitására valamint modularitására. A fenti eredmények vezették Grätzert a Mal'cev (típusú) feltételek absztrakt definíciójához, ld. [26]. Grätzer terminológiáját használva Jónsson és Day fent említett eredményei rendre a következőképpen hangzanak: mind a kongruencia-disztributív mind a kongruencia-moduláris varietások osztálya jellemezhető Mal'cev feltétellel. Később a Mal'cev feltétel fogalma mellett megjelent az erős ill. a gyenge Mal'cev feltétel fogalma is, vö. Taylor [48].

Mal'cev, Jónsson és Day eredményei után varietások számos egyéb osztályáról is bebizonyosodott, hogy definiálhatók (erős/gyenge) Mal'cev feltétellel. Vegyük például a felcserélhetőség és a disztributivitás általánosításait: az n-felcserélhetőséget valamint az n-disztributivitást ($n \geq 2$). Hagemann és Mitschke [31] megmutatták, hogy a kongruencia-n-felcserélhetőség jellemezhető Mal'cev feltétellel. Másrészt a kongruencia-n-disztributivitásról kiderült, hogy ekvivalens a kongruencia-disztributivitással, vö. Nation [40], így Jónsson eredményéből következik, hogy ez is jellemezhető Mal'cev feltétellel. Jegyezzük meg, hogy általában az n-disztributivitás és a disztributivitás nem ekvivalensek. Míg a disztributivitásból következik az n-disztributivitás, addig például M_3 olyan háló, ami n-disztributív, de nem disztributív, ha $n > 2$.

Ami a kongruencia-modularitást illeti, Gumm [30] javított Day Mal'cev feltételén, amikor olyan feltételt adott, amiben négy helyett háromváltozós kifejezések szerepelnek, vö. Lakser, Taylor and Tschantz [38]. A modularitással kapcsolatban szintén érdemes megemlíteni Czédli és Horváth [15] nevét, akiknek sikerült belátniuk, hogy minden olyan azonosság, amiből következik kongruencia-varietásokban a modularitás, jellemezhető Mal'cev feltétellel. Bizonyításuk erősen támaszkodik egy Radeleczkivel [16] közös cikkükre. Jegyezzük meg, hogy a probléma még mindig nyitott, hogy vajon minden hálóazonosság jellemezhető-e Mal'cev feltétellel. Másrészről a Wille–Pixley-algoritmus [52, 42] mutatja, hogy minden kongruencia-azonosság jellemezhető gyenge Mal'cev feltétellel.

Végül fontos megemlíteni, hogy Szegeden Csákány Professzor honosította meg a Mal'cev feltételek vizsgálatát. Számos Mal'cev típusú eredménye közül kiemelném például azt, amelyben megmutatta, hogy a reguláris varietások definiálhatók Mal'cev feltétellel [10]. Másrészt nem utolsó sorban nagydoktori értekezését is Mal'cev feltételekről írta [11].

Manapság az univerzális algebrában és a hozzá kapcsolódó egyik legfontosabb tudományterületen, amit röviden CSP-nek hívnak, a Mal'cev feltételek (különösen a Jónsson és Day kifejezések) fontos szerepet játszanak, vö. például Barto és Kozik [2, 3].

Habár csoportok, gyűrűk és modulusok esetében rendre a normálosztók, ideálok és részmodulusok egyértelműen meghatározzák a hozzájuk tartozó kongruenciákat, általános algebrák esetén ez egyáltalán nem igaz. Mégis pont a fenti példák motiválják, hogy bizonyos algebrákban, melyek típusa tartalmaz konstans műveleti jelet, olyan kongruenciaosztályokat vizsgáljunk, amik az adott konstanst tartalmazzák. Ahhoz, hogy a fenti észrevételt pontosabban körüljárjuk, szükségünk lesz egy Chajda [7] által definiált fogalomra. Legyen $\lambda : p(x_1, \dots, x_n) \leq q(x_1, \dots, x_n)$ rögzített hálóazonosság, és legyen $\mathcal{V}$ olyan varietás, aminek típusában szerepel egy konstans műveleti jel, amit 0-val jelölünk. Azt mondjuk, hogy a λ hálóazonosság teljesül a $\mathcal{V}$ kongruenciáira a 0-nál, ha tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra minden $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ kongruenciájára $[0]p(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \subseteq [0]q(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ teljesül. Például ha λ rendre az $x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \leq (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$ illetve $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \leq x_1 \vee (x_2 \wedge (x_1 \vee x_3))$ azonosságokat jelöli, akkor azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}$ varietás kongruencia-disztributív illetve kongruencia-moduláris a 0-nál.

Bár a fenti fogalom elsőre triviálisnak tűnhet, Czédli [12] következő példája az ellenkezőjét sejteti: mig az alulról korlátos metszetfélhálók $\mathcal{S}$ varietása kongruencia-disztributív a 0-nál, addig a disztributivitás duálisa nem teljesül $\mathcal{S}$ kongruenciáira a 0-nál.

Visszatérve a Mal'cev feltételekhez, Chajda [7] jellemezte a 0-nál vett kongruencia-disztributivitást Mal'cev feltétellel. Másrészről Czédli [12] megmutatta, hogy tetszőleges λ hálóazonosságra az, hogy egy varietás kongruenciáira λ teljesül-e a 0-nál jellemezhető *gyenge* Mal'cev feltétellel. Később Chajda és Halaš [8] megpróbálta a 0-nál vett kongruencia-modularitást jellemezni. A disszertáció harmadik fejezete a [45] publikáción alapul, melyben Chajda és Halaš sejtését igazoljuk, ld. 4. Tétel.

Elért eredmények

A következőkben fejezetenként röviden ismertetem az értekezésben található eredményeimet.

Neumann-féle keretek

Rögzítsünk egy L korlátos moduláris hálót és egy $m \geq 2$ egész számot, továbbá legyen $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in L^m$ és $\vec{c} = (c_{12}, \ldots, c_{1m}) \in L^{m-1}$. Azt mondjuk, hogy $(\vec{a}, \vec{c}) = (a_1, \ldots, a_m, c_{12}, \ldots, c_{1m})$ az L háló *feszítő m-kerete*, ha $a_1 \neq a_2$ és minden $j \leq m$ és $2 \leq k \leq m$ indexre teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\sum_{i \leq m} a_i = 1, \qquad a_j \sum_{i \leq m,\, i \neq j} a_i = 0,$$

$$a_1 + c_{1k} = a_k + c_{1k} = a_1 + a_k, \qquad a_1 c_{1k} = a_k c_{1k} = 0.$$

Ezen a ponton érdemes megjegyezni, hogy a koordinátázáselméletben a hálóműveleteket ($\vee$ és $\wedge$) hagyományosan rendre összeadás ($+$) és szorzás ($\cdot$) jelöli.

Ahhoz, hogy a Neumann-féle keretek fogalmát jobban megértsük, tekintsük a következő példát. Legyen K egységelemes gyűrű. Ekkor rögzített $m \geq 2$ egész számra K^m tekinthető K feletti baloldali modulusnak. Jelölje v_i a $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in K^m$ vektort, ahol az 1 az i-edik koordinátában szerepel. Könnyen ellenőrizhető, hogy a K^m (baloldali) részmodulusai által alkotott (korlátos, moduláris) hálóban az $a_i = Kv_i$ és $c_{1j} = K(v_1 - v_j)$ elemek feszítő m-keretet alkotnak. Ezt a keretet nevezik *kanonikus m-keretnek*.

A későbbiekben szükségünk lesz még a koordinátagyűrű fogalmára. Ha $m \geq 4$ és $(\vec{a}, \vec{c}) = (a_1, \ldots, a_m,\ c_{12}, \ldots, c_{1m})$ az L moduláris háló feszítő m-kerete, akkor az $R\langle 1, 2\rangle = \{x \in L : x + a_2 = a_1 + a_2,\ xa_2 = 0\}$ halmazon definiálható egy összeadás és egy szorzás művelet, melyre nézve $R\langle 1, 2\rangle$ egységelemes gyűrűt alkot. Ezt nevezzük az $(\vec{a}, \vec{c})$ keret *koordinátagyűrűjének*. Mindez akkor is érvényben marad, ha $m = 3$ és L Désargues-féle.

A fent felsorolt fogalmak segítségével már megfogalmazható az értekezés első fejezetének fő eredménye.

1. Tétel (Theorem 1.1 [18]).

(a) *Legyen L korlátos háló, és legyenek $m, n \geq 2$ egész számok. Tegyük fel, hogy*

$$L \text{ moduláris és } m \geq 4. \tag{a1}$$

Legyen $(\vec{a}, \vec{c}) = (a_1, \ldots, a_m, c_{12}, \ldots, c_{1m})$ *az* L *háló feszítő* m*-kerete és* $(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1, \ldots, u_n, v_{12}, \ldots, v_{1n})$ *a* $[0, a_1]$ *intervallum feszítő* n*-kerete. Jelölje* R^* *az* $(\vec{a}, \vec{c})$ *kerethez tartozó koordinátagyűrűt. Ekkor létezik olyan* S^* *gyűrű, amire* R^* *izomorf az* S^* *feletti* $(n \times n)$*-es mátrixok gyűrűjével. Ha*

$$n \geq 4, \tag{a2}$$

akkor S^* *választható az* $(\vec{u}, \vec{v})$ *kerethez tartozó koordinátagyűrűnek.*

(b) *A tétel előző része érvényben marad akkor is, ha az* (a1) *és* (a2) *feltételeket rendre a következőkre cseréljük*

$$L \text{ Désargues-féle és } m \geq 3, \tag{b1}$$

valamint

$$n \geq 3. \tag{b2}$$

Bár a tétel megfogalmazásához nem szükséges ismerni a már említett szorzatkeret valamint a külső és belső keret fogalmát, jegyezzük meg, hogy a tételben szereplő $(\vec{a}, \vec{c})$ m-keretet nevezzük *külső*, az $(\vec{u}, \vec{v})$ n-keretet pedig *belső* keretnek. Érdemes azt is megemlíteni a szorzatkeret tényleges definíciója nélkül, hogy az S^* gyűrű lényegében a szorzatkerethez tartozó koordinátagyűrűt jelöli.

Izometrikus beágyazások

Adott L alulról korlátos háló esetén a $p\colon L \to \mathbb{N}_\infty = \{0, 1, \ldots, \infty\}$ függvényt *pszeudorang függvénynek* nevezzük, ha teljesülnek rá az alábbi feltételek:

(i) $p(0) = 0$;
(ii) minden $a \leq b$ elemre $p(a) \leq p(b)$;
(iii) minden $a < b$ véges magasságú elemre $p(a) < p(b)$;
(iv) $p(a \wedge b) + p(a \vee b) \leq p(a) + p(b)$ minden a, b elemre és
(v) $p(a) < \infty$ pontosan akkor teljesül, ha a véges magasságú elem.

A fenti definíció véges hálók esetén megegyezik Finkbeiner [22] valamint Stern [47] definíciójával. Vegyük észre, hogy ha L féligmoduláris, akkor a Jordan–Hölder-láncfeltétel közvetlen következménye, hogy a magasságfüggvény teljesíti a fenti feltételeket, ezért pszeudorang függvény.

Legyen adott egy (alulról korlátos) L háló, egy $p\colon L \to \mathbb{N}_\infty$ pszeudorang függvény és egy G geometriai háló, melynek magasságfüggvényét jelölje h. Azt mondjuk, hogy L *izometrikusan beágyazható* G-be, ha létezik olyan $\varphi\colon L \to G$ beágyazás, amire $p = h \circ \varphi$ teljesül, vö. Grätzer és Kiss [29].

Ahhoz, hogy megfogalmazzuk az értekezés második fejezetének fő eredményét, amely Grätzer és Kiss [29] véges hálókra vonatkozó hasonló eredményét általánosítja, szükségünk van még egy fogalomra. Egy teljes hálót nevezzünk *majdnem alacsonynak*, ha minden eleme előáll véges magasságú elemek egyesítéseként. Például $\mathbb{N}_\infty$ a szokásos rendezésre nézve majdnem alacsony.

2. Tétel (Theorem 1 [46]). *Minden majdnem alacsony pszeudorang függvénnyel rendelkező algebrai háló beágyazható izometrikusan egy geometriai hálóba.*

Az előző tételnek megfogalmazható féligmoduláris hálókra egy közvetlen következménye. Nevezzünk egy hálóbeágyazást *fedésőrzőnek*, ha megőrzi a fedés relációt.

3. Következmény (Corollary 2 [46]). *Minden majdnem alacsony féligmodulárs algebrai hálónak létezik fedésőrző beágyazása egy geometriai hálóba.*

Mal'cev feltételek

Legyen $\mathcal{V}$ olyan varietás, aminek a típusában szerepel a 0 konstans műveleti jel. Ekkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{V}$ *kongruencia-moduláris a 0-nál*, ha tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ algebra bármely α, β és γ kongruenciájára teljesül a következő összefüggés: $[0]\alpha \vee (\beta \wedge (\alpha \vee \gamma)) = [0](\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$, vö. Chajda [7] valamint Chajda és Halaš [8]. Jegyezzük meg, hogy a kongruencia-modularitásból következik a kongruencia-modularitás a 0-nál, például bármilyen csoport- vagy gyűrűvarietás mindig kongruencia-moduláris a 0-nál, hiszen kongruencia-moduláris. Ezzel szemben a kongruencia-modularitás nem feltétlenül következik a 0-nál vett kongruencia-modularitásból.

Az értekezés harmadik fejezetének fő eredménye Day [19] kongruencia-modularitásra vonatkozó eredményének megfelelőjeként a 0-nál vett kongruencia-modularitást jellemzi Mal'cev feltétellel.

4. Tétel (Theorem 1 [45]). *Legyen $\mathcal{V}$ olyan varietás, aminek a típusában szerepel a 0 konstans műveleti jel. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) *$\mathcal{V}$ kongruencia-moduláris a 0-nál;*

(ii) *létezik n természetes szám és léteznek m_i $(i = 0, \ldots, n)$ háromváltozós* *kifejezések úgy, hogy $\mathcal{V}$-ben teljesülnek az alábbi azonosságok:*

$$m_0(x,y,z) = 0 \text{ és } m_n(x,y,z) = z; \tag{m1}$$

$$m_i(x,x,0) = 0 \quad \text{minden } i \text{ indexre;} \tag{m2}$$

$$m_i(x,x,z) = m_{i+1}(x,x,z) \quad \text{minden páratlan } i \text{ indexre;} \tag{m3}$$

$$m_i(0,z,z) = m_{i+1}(0,z,z) \quad \text{minden páros } i \text{ indexre.} \tag{m4}$$

Hivatkozások

[1] Artmann, B.: *On coordinates in modular lattices with a homogeneous basis.* Illinois J. Math. **12**, 626–648 (1968)

[2] Barto, L., Kozik, M.: *New conditions for Taylor varieties and CSP.* 25th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science LICS 2010, 100–109, IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA (2010)

[3] Barto, L., Kozik, M.: *Absorbing subalgebras, cyclic terms and the constraint satisfaction problem.* Log. Methods in Comput. Sci. **8**, 1:07, 1–26 (2012)

[4] Birkhoff, G.: *On the structure of abstract algebras.* Proc. Cam. Phil. Soc. **31**, 433–454 (1935)

[5] Birkhoff, G.: *Von Neumann and Lattice Theory.* Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 50–56 (1958)

[6] Birkhoff, G.: *Lattice Theory.* Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 25, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1967)

[7] Chajda, I.: *Congruence distributivity in varieties with constants.* Arch. Math. (Brno) **22**, 121–124 (1986)

[8] Chajda, I., Halaš, R.: *Congruence modularity at* 0. Discuss. Math. Algebra and Stochastic Methods **17**, no. 1, 57–65 (1997)

[9] Crawley, P., Dilworth, R.P.: *Algebraic theory of lattices.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1973)

[10] Csákány, B.: *Characterizations of regular varieties.* Acta Sci. Math. (Szeged) **31**, 187–189 (1970)

[11] Csákány, B.: *Mal'cev típusú tulajdonságok és alkalmazásaik.* thesis for the doctor of science degree, Szeged (1974) (Hungarian)

[12] Czédli, G.: *Notes on congruence implication.* Archivum Math. Brno **27**, 149–153 (1991)

[13] Czédli, G.: *How are diamond identities implied in congruence varieties.* Algebra Universalis **30**, 291–293 (1993)

[14] Czédli, G.: *The product of von Neumann n-frames, its characteristic, and modular fractal lattices.* Algebra Universalis **60**, 217–230 (2009)

[15] Czédli, G., Horváth, E.K.: *All congruence lattice identities implying modularity have Mal'tsev conditions.* Algebra Universalis **50**, 69–74 (2003)

[16] Czédli, G., Horváth, E.K., Radeleczki, S.: *On tolerance lattices of algebras in congruence modular varieties.* Acta Math. Hungar. **100**, 9–17 (2003)

[17] Czédli, G., Schmidt, E.T.: *A cover-preserving embedding of semimodular lattices into geometric lattices.* Advances in Mathematics **225**, 2455–2463 (2010)

[18] Czédli, G., Skublics, B.: *The ring of an outer von Neumann frame in modular lattices.* Algebra Universalis **64**, 187–202 (2010)

[19] Day, A.: *A characterization of modularity for congruence lattices of algebras.* Canad. Math. Bull. **12**, 167–173 (1969)

[20] Day, A.: *In search of a Pappian lattice identity.* Canad. Math. Bull. **24**, 187–198 (1981)

[21] Day, A., Pickering, D.: *The coordinatization of Arguesian lattices.* Trans. Amer. Math. Soc. **278**, 507-522 (1983)

[22] Finkbeiner, D.T.: *A semimodular imbedding of lattices.* Canad. J. Math. **12**, 582–591 (1960)

[23] Freese, R.: *The variety of modular lattices is not generated by its finite members.* Trans. Amer. Math. Soc. **255**, 277–300 (1979)

[24] Freese, R., Herrmann, C., Huhn, A.P.: *On some identities valid in modular congruence varieties.* Algebra Universalis **12**, 322–334 (1981)

[25] Freese, R., McKenzie, R.: *Commutator theory for congruence modular varieties.* London Mathematical Society Lecture Notes Series **125**, Cambridge University Press, Cambridge (1987)

[26] Grätzer, G.: *Two Mal'cev-type theorems in universal algebra.* J. Combinatorial Theory **8**, 334–342 (1970)

[27] Grätzer, G.: *General Lattice Theory.* Birkhäuser Verlag, Basel-Stuttgart (1978); Second edition: Birkhäuser Verlag (1998)

[28] Grätzer, G.: *Lattice Theory: foundation.* Birkhäuser Verlag, Basel (2011)

[29] Grätzer, G., Kiss, E.W.: *A construction of semimodular lattices.* Order **2**, 351–365 (1986)

[30] Gumm, H.P.: *Congruence modularity is permutability composed with distributivity.* Arch. Math. (Basel) **36**, 569-576 (1981)

[31] Hagemann, J., Mitschke, A.: *On n-permutable congruences.* Algebra Universalis **3**, 8–12 (1973)

[32] Huhn, A.P.: *Schwach distributive Verbände. I.* Acta Sci. Math. (Szeged) **33**, 297–305 (1972)

[33] Huhn, A.P.: *On G. Grätzer's problem concerning automorphisms of a finitely presented lattice.* Algebra Universalis **5**, 65–71 (1975)

[34] Hutchinson, G.: *Embedding and unsolvability theorems for modular lattices.* Algebra Universalis **7**, 47–84 (1977)

[35] Hutchinson, G., Czédli, G.: *A test for identities satisfied in lattices of submodules.* Algebra Universalis **8**, 269–309 (1978)

[36] Jónsson, B.: *On the representation of lattices.* Math. Scand. **1**, 193–206 (1953)

[37] Jónsson, B.: *Algebras whose congruence lattices are distributive.* Math. Scand. **21**, 110–121 (1967)

[38] Lakser, H., Taylor, W., Tschantz, S.T.: *A new proof of Gumm's Theorem.* Algebra Universalis **20**, 115–122 (1985)

[39] Mal'cev, A.I.: *On the General Theory of Algebraic Systems.* Mat. Sb. N.S. **35(77)**, 3–20 (1954) (Russian)

[40] Nation, J.B.: *Varieties whose congruences satisfy certain lattice identities.* Algebra Universalis **4**, 78–88 (1974)

[41] Neumann, J. von: *Continuous Geometry.* (Foreword by Israel Halperin), Princeton University Press, Princeton (1960, 1998)

[42] Pixley, A.F.: *Local Mal'cev conditions.* Canad. Math. Bull. **15**, 559–568 (1972)

[43] Pudlák, P., Tůma, J.: *Every finite lattice can be embedded in the lattice of all equivalences over a finite set.* Comment. Math. Carolin. **18**, 409–414 (1977)

[44] Pudlák, P., Tůma, J.: *Every lattice can be embedded in a finite partition lattice.* Algebra Universalis **10**, 74–95 (1980)

[45] Skublics, B.: *Congruence modularity at 0.* Algebra Universalis **66**, 63–67 (2011)

[46] Skublics, B.: *Isometrical embeddings of lattices into geometric lattices.* Order, published online November 9, 2012

[47] Stern, M.: *Semimodular Lattices: Theory and Applications.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 73, Cambridge University Press (1999)

[48] Taylor, W.: *Characterizing Mal'cev conditions.* Algebra Universalis **3**, 351–395 (1973)

[49] Veblen, O., Young, J.W.: *A Set of Assumptions for Projective Geometry.* American Journal of Mathematics **30**, 347-–380 (1908)

[50] Veblen, O., Young, J.W.: *Projective Geometry Volume I and II.* Ginn and Co., Boston (1910, 1917)

[51] Whitman, P.M.: *Lattices, equivalence relations, and subgroups.* Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 507–522 (1946)

[52] Wille, R.: *Kongruenzklassengeometrien.* Lecture Notes in Mathematics, vol. 113, Springer-Verlag, Berlin-New York (1970) (German)

Társszerzői nyilatkozat a

G. Czédli and B. Skublics:
,,The ring of an outer von Neumann frame in modular lattices"

cikkről, a második szerző doktori fokozatszerzése kapcsán

A fent nevezett cikkben Skublics Benedek részesedése – amennyire ez egyáltalán meghatározható – kb. **hatvan százaléknyi**.

A probléma felvetése, az eredmény megsejtése, a bizonyítás nagy vonalakban történő megálmodása az első szerzőnek köszönhető. A phi és psi leképezések definiálása, ezek bijektivitásának kimutatása közös, konzultatív munka, amelynek során az első szerző szerepe volt a meghatározó.

A cikk további, nagyobbik részében a második szerző munkája volt a meghatározó. A fent említett bijektivitást leszámítva a moduláris hálókban végzett, messze nem triviális és több eredeti ötletet követelő számolássorozat a második szerző önálló munkája, amelyet az első szerző csupán egy-két apróság tekintetében tudott rövidíteni. Amint az utólag kiderült, a ,,nagy vonalakban történő megálmodás" kissé alulbecsülte a tényleges tennivalók nehézségi fokát.

Ismeretes, hogy már négy változó esetén sincs algoritmus arra, hogyan számoljunk moduláris hálóban; ezért bátran mondhatom, hogy Skublics Benedek hozzájárulása messze nem triviális, és az érdemek nagyobbik fele őt illeti. (Igaz ugyan, hogy a Neumann-keretek által generált moduláris hálókban való számolásra C. Herrmann adott egy – túlságosan bonyolult – algoritmust, de az itt nem volt használható, hiszen a koordinátagyűrű elemei általában nincsenek benne a keret által generált részhálóban, márcsak számossági okokból sem).

Kijelentem, hogy a cikk azon részeit, amelyeket a fentiekben döntően Skublics Benedeknek tulajdonítottam, doktori fokozat szerzésére nem használtam fel és nem is fogom felhasználni.

Társszerzőként

Szeged, 2013. január 24.

Dr. Czédli Gábor egyetemi tanár,
a matematikatudományok doktora
SZTE TTIK Bolyai Intézet