Számítógéppel segített felfedeztetés-központú
matematikaoktatás

Doktori értekezés

MÁDER ATTILA

Témavezető:
DR. KOSZTOLÁNYI JÓZSEF
egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

2012

„A matematika a természettudományok közeli rokona, a „kísérletező tudományok” egyik típusa. A matematikában is eredményre vezethet megfigyelés és analógia. ... A jövő középiskoláiban – remélem – nem hanyagolják majd el annyira a matematikai felfedezés, a tudományos módszer és indukció szempontjait, mint a mai középiskolában.” (PÓLYA GYÖRGY)

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	1
1.1. Komplex matematikatanítási kísérlet	1
1.2. A magyar matematikaoktatás a nemzetközi mérések tükrében	2
1.2.1. TIMSS	3
1.2.2. PISA	3
1.2.3. A TIMSS és PISA mérések eredményeinek összehasonlítása	5
1.3. A kompetencia fogalma és szerepe az oktatásban	6
1.3.1. A kompetencia fogalma	6
1.3.2. A matematikai kompetencia	8
1.3.3. Az Országos kompetenciamérés	9
1.4. Kiutak keresése: modellezés és valóságközeli matematika	10
1.4.1. Matematikai modellezés	10
1.4.2. Valóságközeli vagy realisztikus matematika	12
1.5. A jelen helyzet és a jövő társadalmának elvárásai	13
1.6. Összefoglalás	16
2. Felfedezések a matematikában	18
2.1. Bevezetés	18
2.2. Experimental Mathematics	18
2.2.1. Kísérleti matematika	18
2.2.2. Rövid történeti áttekintés	20
2.3. A kísérleti matematika alkalmazása az oktatásban	22
2.3.1. Kísérletek és matematika	22
2.3.2. A jelenlegi helyzet áttekintése: a bizonyítások súlya a matematika érettségi vizsgán	26

2.3.3. Kísérletek és bizonyítások	26
3. Felfedezések a matematikaórán	29
3.1. Felfedezések számítógép nélkül	30
3.1.1. Műveleti tulajdonságok	30
3.1.2. Nevezetes azonosságok - egy példa	31
3.1.3. Nevezetes összegek - egy példa	32
3.1.4. Felfedezések a geometriában - mérés és szerkesztés	33
3.1.5. A háromszög belső szögeinek összege I.	34
3.1.6. A háromszög belső szögeinek összege II.	35
3.1.7. A háromszög belső szögeinek összege III.	36
3.1.8. A Thalész-tétel	37
3.1.9. Egy valószínűségi modell	38
3.1.10. Módszertani összefoglaló	39
3.2. A tanár megváltozott szerepe	40
3.2.1. IKT - Infokommunikációs technológiák az oktatásban	40
3.2.2. Digitális bennszülöttek és digitális bevándorlók	42
3.2.3. E-learning	43
3.2.4. A tanár új szerepe	44
3.3. Felfedezések a számítógép eszközszintű felhasználásával	46
3.3.1. Bevezetés	46
3.3.2. Nevezetes összegek - egy példa ismét	47
3.3.3. Halmazműveletek tulajdonságai, halmazelméleti azonosságok . .	48
3.3.4. A háromszög belső szögeinek összege IV.	49
3.3.5. A Monty Hall-dilemma - a számítógép és az intuíció	50
3.3.6. A lusta pénztáros - a számítógép és a sejtés	52
3.3.7. Módszertani összefoglaló	54
3.4. Felfedezések a számítógép alkotó jellegű felhasználásával	54
3.4.1. Bevezetés	54
3.4.2. Komputer-algebrai rendszerek (CAS)	54
3.4.3. Szoftverek az oktatás szolgálatában	55
3.4.4. A Thalész-tétel	59
3.4.5. Trigonometrikus azonosságok	60

3.4.6.	Szintetikus geometria	61
3.4.7.	Az integrál és a grafikon alatti terület	64
3.4.8.	Honnan tudja a számológép, mennyi $\cos 30^\circ$?	66
3.4.9.	Módszertani összefoglaló	69
4.	Szigetek	70
4.1.	Bevezetés	70
4.2.	Történeti áttekintés	70
4.3.	A sziget fogalmának kialakítása	72
4.3.1.	Mi az a sziget?	72
4.3.2.	Keressünk szigeteket!	74
4.3.3.	Csináljunk szigeteket!	78
4.3.4.	Minimális magasságú szigetek, szigetek kanonikus reprezentációja	80
4.3.5.	Ismerkedés a korlátos magasságú szigetekkel	85
4.3.6.	A sziget fogalmának kialakulását segítő Mathematica animáció .	91
4.3.7.	Módszertani összefoglaló	92
4.4.	Szigetrendszerek szerkezete	93
4.4.1.	Metsző szigetek	94
4.4.2.	Maximális és minimális szigetek	96
4.4.3.	Szigetek és gráfok	98
4.4.4.	A szigetrendszerek szerkezetének felfedezését segítő Mathematica animáció	104
4.4.5.	Módszertani összefoglaló	104
4.5.	Szigetek maximális száma	105
4.5.1.	Bevezetés	105
4.5.2.	Szigetek az $1 \times n$ -es rácson	105
4.5.3.	Szigetek az $2 \times n$ -es rácson	108
4.5.4.	Szigetek az $3 \times n$ -es rácson	112
4.5.5.	Szigetek az $m \times n$ -es rácson - egy alsó becslés	113
4.5.6.	Szigetek az $m \times n$ -es rácson - egy felső becslés	114
4.5.7.	Szigetek az $m \times n$ -es rácson	118
4.5.8.	Módszertani összefoglaló	119
4.6.	Szigetek korlátozott magassággal	119

4.6.1. Bevezetés	119
4.6.2. Már ismert eredmények, $h = 1, 2$	120
4.6.3. Speciális esetek, az $1 \times n$ -es rács	120
4.6.4. Speciális esetek, a $2 \times n$ -es rács	123
4.6.5. Speciális esetek, a $3 \times n$ -es rács	125
4.6.6. Speciális esetek, a 4×4 -es rács problémája	127
4.6.7. Módszertani összefoglaló	128
Összefoglalás	129
Summary	133
Köszönetnyilvánítás	136
Tárgymutató	137
Ábrák jegyzéke	140
Irodalomjegyzék	144

1. fejezet

Bevezetés - A magyar matematikaoktatás jelenlegi helyzete

„A legnagyobb tanári művészet, hogy az alkotás és felismerés örömét ébressze.” (ALBERT EINSTEIN)

1.1. Komplex matematikatanítási kísérlet

A modern magyar matematikatanítás első nagy korszerűsítési törekvése 1963-ban indult (részben a Szputnyik-sokk hatására). Ekkor kezdődött meg egy budapesti általános iskola (a Váci u. 43. sz. alatt) két első osztályában Barabás Lajosné és Tiszai Zoltánné tanítók vezetésével, Varga Tamás komplex matematikatanítási kísérlete. A nemzetközi irodalomban New Math néven ismertté vált reformtörekvések sok országban elbuktak – nem úgy Magyarországon – mert túl hirtelen, túl sokat akartak, nem illeszkedtek például a tanulók életkori sajátosságaihoz sem [107, 61]. Korábban szó sem volt gondolkodtatásról, a matematikai gondolkodás elsajátíttatásáról. A matematika nem jelentett mást, mint ismeretek rutinszerű alkalmazása, eljárások begyakoroltatása kizárólag direkt tanári irányítás alatt. Az ún. komplex matematikatanítási módszert, illetve az ezen alapuló tantervet 1978-ban kötelezően bevezették minden első osztályban [131]. (Ekkoriban, 1962-ben kezdődött meg a tagozatos matematikaoktatás a Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban. Az iskola hírnevét megalapozó első legendás osztályba járt: Lovász László, Vesztergombi Katalin, Pósa Lajos, Berkes István, Laczkovich Miklós, Major Péter és Pelikán József is, tanáruk Rábai Imre volt. Mindezekről részletes összefoglalás olvasható a szerző [107] cikkében.) Ez a magyar matematikatanításban olyan gyökeres fordulatot eredményezett, mely a mai napig érezteti hatását. Ilyen fellelhető pont például a tananyag spirális felépítése. Ehhez szükséges volt, hogy a világ nagy matematikusai felismerjék, hogy a matematika szerepe az elkövetkezendő évtizedekben meg fog nőni, s ezért annak oktatását modernizálni kell. Ebben persze komoly szerepet játszott a hidegháború. A változások alapvetően

két irányban indultak el. Egyrészt bekerültek az oktatásba a modern – korábban kizárólag az egyetem hatáskörébe utalt – matematika elemei (halmazok, kombinatorika, logika, valószínűségszámítás, statisztika, valamint megjelent a transzformációs szemlélet a geometriában és a függvénytanban), másrészt egyre nagyobb hangsúlyt fektettek a tanulók aktív részvételére. A reformtörekvés - mint minden változás - megosztotta az embereket. Sok szülő ellenezte, nem értették ugyanis, hogy miért kell gyermeküket „egyetemi szintű” ismeretekkel terhelni. A gyerekek többsége azonban szerette a *játékos matematikát*. A Varga Tamás-féle új matematikatanítás lényege éppen az volt, hogy cselekedve, illetve cselekedtetve a gyerekek maguk fedezzék fel azt az ismeretet, amit át akarunk nekik adni. A matematika tanulása a tanuló aktív részvételével az egész gondolkodást formáló folyamattá lett. Az irányított felfedeztetés biztosítja a tévedés szabadságát, ugyanakkor fejleszti a kreativitást és a problémamegoldó gondolkodást.

A tanulás, mint aktív folyamat

A tanulás aktív folyamat; csak akkor lehet sikeres, ha abban a tanuló aktív cselekvéssel részt vesz.

A legfontosabb alapelv a konkrét tevékenységre épülő tapasztalatszerzés, az eszközök használata, a játékok beillesztése. A megújítási törekvés legnagyobb eredménye az volt, hogy passzív befogadóból, aktív létrehozóvá léptette elő a tanulót. Az új tanterv szerint tanulók szemlélete, felkészültsége, problémaérzékenysége lényegesen jobb lett, fogalmaik tisztábbak, használhatóbbak lettek [26].

1.2. A magyar matematikaoktatás a nemzetközi mérések tükrében

A magyar matematikaoktatástól a huszonegyedik század által megkövetelt változásokról a Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése című háttéranyagban Szalay Balázs így ír [153]: „A huszadik század matematikai és természettudományi tanterveinek tartalmát jellemzően a felsőoktatás igényei szabták meg, és elsősorban az az ismeretanyag alkotta, amely a viszonylag kisszámú matematikus, tudós és mérnök képzésének alapjául szolgált. E tekintetben különösen a matematika tananyag járt élen, kiváló felépítésének köszönhetően egy teljesen kompakt rendszert alkotott. A modern társadalmak mindennapjaiban megnőtt a természettudományok, a matematika és a technika szerepe, így a személyes érvényesülés, a munkavállalás és a társadalmi életben való teljes értékű részvétel valamennyi felnőttől egyre nagyobb mértékben követeli meg - és nem pusztán azoktól, akik természettudománnyal összefüggő pályán dolgoznak - a matematikai, természettudományi és technikai műveltséget.” Az azonban megítélés kérdése, hogy mit is értünk *matematikai műveltségen*. A fogalom egyáltalán nem jól definiált, így a tanulási folyamat minden résztvevője (diák, tanár, szülő, társa-

dalom, munkáltató, állam) saját aktuális igényei mentén kérhet számon ezen a néven gyakorlatilag bármit.

A tudás fogalmának átértékelődése

A több információ nem jelent több tudást. Előnyhöz az jut, aki a számára gyakorlatilag korlátlan mennyiségben rendelkezésre álló információk között kapcsolatot képes teremteni. Az érték a rendszerbe foglalt tudás [38].

Magyarország 1995 óta vesz részt az átértékelődött tudást meghatározni, illetve mérni kívánó nemzetközi összehasonlításokban.

1.2.1. TIMSS

Az egyik ilyen, az 1995-ben indult és négyévente lebonyolított TIMSS-vizsgálatot (Trends in International Mathematics and Science Study) oktatásszakmai célok hívták életre. A Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése című háttéranyagban Szalay Balázs így ír [153]: „A mérés voltaképpen célja, hogy a matematika- és a természettudományoktatás fejlesztése érdekében összehasonlító adatokat szolgáltatson a résztvevő országok oktatási teljesítményének aktuális állapotáról. A trendek követése mellett keresi az adott időszakban legsikeresebbnek, leghatékonyabbnak mutakozó oktatási gyakorlatokat. A TIMSS-vizsgálat matematikatesztje a résztvevő országok tanterveinek metszetén méri a tanulók tudását, a tesztben szereplő feladatok többsége hasonló ahhoz, amilyenekkel a magyar diákok az iskolai oktatásban találkoznak. A magyar 4. és 8. évfolyamos tanulók a TIMSS matematikavizsgálatában a résztvevő országok 500 képességpontos átlagánál jobb eredményt értek el mind a négy mérési ciklusban. A 8. évfolyam esetében az 50 résztvevő ország közül mindössze öt távol-keleti állam tanulóinak teljesítménye volt szignifikánsan jobb a magyar diákokénál.”

1.2.2. PISA

A másik, nemzetközi összehasonlításban mérvadó mérés, a PISA-mérés (Programme for International Student Assessment - Nemzetközi Diákértékelési Program), egy gazdasági irányultságú szervezet, az OECD megrendelésére készül. Szalay Balázs összefoglalásában [153]: „Ez az első olyan átfogó nemzetközi felmérés, amely következetesen szakított a tanterv alapú tematikával, és elsősorban a mindennapi életben használható tudást vizsgálja. A mérés az iskolai tanulás során elsajátított ismeretekből és készségekből felépülő, az adott tudományterületen érvényes tudásra összpontosít. A matematika esetében azt méri tehát, hogy milyen mértékben képesek a tanulók a valóságos problémákat felismerni, megérteni, értelmezni és megoldani azáltal, hogy azt először matematikai problémákká konvertálják, majd a matematikai megoldást értelmezik a

valós probléma tükrében.” A PISA-vizsgálat tehát a matematikai eszköztudás, a matematikai alkalmazás képességének mérését tűzte ki célul. A matematikai eszköztudást a kutatási terv elkészítésére felkért szakértői csoport a következőképpen határozta meg:

A matematikai (eszköz)tudás (PISA)

Az egyénnek az a képessége, hogy képes felismerni, megérteni, milyen szerepet játszik a matematika a bennünket körülvevő világban, és ennek tükrében képes megalapozott döntéseket hozni és cselekedni, hogy jelenlegi és későbbi élete során alkotó és felelős ember legyen [38].

Mindenképpen érdemes ezt összevetni a Pólya György által adott korábbi értelmezéssel:

A matematikai tudás fogalma (Pólya György)

Matematikát tudni annyit jelent, mint képesnek lenni matematikát művelni. Ez jelenti a szaknyelv folyékony használatát, problémamegoldásokat, argumentumok kritikai vizsgálatát, bizonyításokat, és talán a legfontosabb matematikai aktivitást, a matematikai elvek, koncepciók észrevételét adott, konkrét szituációban [135].

Most egy új, a modern társadalom által megkívánt, gazdasági szemléletű értelmezéssel élünk. A korábbiakban ez, mint lehetséges szemléleti mód fel sem merült:

A matematika tudás fogalma (Richard Skemp)

A matematikatanítás néhány újtója igyekszik a matematikát logikai fejlődésében bemutatni. Bár ez a megközelítés dicséretes abból a szempontból, hogy igyekszik a matematikát értelmes, nem pedig önkényes konstrukcióként megismertetni, mégis két szempontból is hibásnak mondható. Először is összezavarja a kérdés logikai és pszichológiai megközelítését. Egy probléma logikai megközelítésének a fő célja mindig az, hogy meggyőzze a kétkedőket. A pszichológiai megközelítés fő célja ezzel szemben az, hogy elősegítse a megértést. Másodszor, ez a fajta megközelítés csupán a matematikai felfedezések végső eredményét szolgáltatja, és nem ismerteti meg a tanulót a matematikai felfedezés módszerével. Matematikai gondolatokat tanít, matematikai gondolkodás helyett [145].

A teszt három dimenzióban mér:

- (a) matematikai tartalom;
- (b) megoldási folyamat;

- (c) szituációk (személyes - saját tevékenység, társadalmi - tágabb környezet, tudományos - elméleti probléma).

A PISA-vizsgálat matematikatesztjén a magyar diákok az OECD-tagországok 500 pontos átlagánál valamivel gyengébb eredményt értek el a vizsgálat mindhárom ciklusában. A PISA-mérésben megállapított 500 pontos OECD-átlag, amelyhez viszonyítva számítják ki az összes részt vevő ország eredményét, erősebb oktatási rendszerekben tanuló diákok átlageredményéből származtatott érték [38].

1.1. Megjegyzés. A mérést végző kutatók arra is gondot fordítottak, hogy kikérdezzék a diákokat szociális háttérükről. Ide tartozik például a szülők végzettsége illetve munkája, a saját szoba, testvérek száma, a számítógép. Megállapították, hogy a magyar tanulók szociális háttere gyengébb, mint az OECD-átlag, és nagyobbak a különbségek is. Ez utóbbi arra utal, hogy a magyar oktatási rendszer képtelen segíteni diákjainak kitörni a hátrányos helyzetből. A kutatók megállapították, hogy Magyarországon valamennyi OECD-ország közül a legerősebb a családi szociális-kulturális háttér és az iskolai teljesítmény kapcsolata. Ha ez a kapcsolat erős, az azt jelenti, hogy a hátrányos helyzetű tanuló nem tud a képességeinek megfelelően teljesíteni.

1.2.3. A TIMSS és PISA mérések eredményeinek összehasonlítása

A PISA-vizsgálatban a világ fejlett országainak többsége részt vett. A TIMSS-mérésből hiányzott Finnország, Svájc, Liechtenstein, Belgium, Észtország, Izland, Írország, Franciaország, Lengyelország, Luxemburg, Spanyolország, Horvátország, Portugália, Görögország. Ugyanakkor a TIMSS-mérés számos fejlődő ázsiai, közelkeleti és afrikai országra is kiterjedt [153]. A következő ábra a [153] tanulmányból származik.

1.1. ábra. A PISA 2006 és a TIMSS 2007 eredményeinek összehasonlítása matematikából

A tudás mérésének viszontagságai

A diákoktól semmi esetre sem szabad elvárni, hogy olyan problémákat oldjanak meg, amelyekre nem készítettük fel őket, melyekkel nem találkoztak korábban a tanulmányaik során.

A PISA tesztek tulajdonképpen ilyenek voltak, hiszen:

- (a) A feladatok sem tartalmukban, sem megfogalmazásukban nem illeszkedtek a magyar matematikatanítási kultúrába, hagyományokba. (Ellentétben a finn oktatáskultúrával mely hagyományosan gyakorlati jellegű és az élethez közeli, sok tanterven kívüli foglalkozással.)
- (b) A számonkérés módja teszt jellegű volt, amely szintén idegen a magyar hagyományoktól. S mivel a teszt jellegű számonkérés nem jelenik meg a kimeneti mérésekben (nyolcadik osztályos felvételi, érettségi), ezért nem is készítjük fel a diákjainkat ilyen típusú feladatok megoldására. Itthon marginálisan, kizárólag versenyek (Zrínyi Ilona Matematikaverseny, Gordiusz Matematika Tesztverseny, Hajnal Imre Matematika Tesztverseny, Nemzetközi Kenguru Matematikaverseny (Franciaországból adaptálva), Bolyai János Matematikai Csapatverseny (részben), néhány internetes tesztverseny (pl. Mozaik Tanulmányi Verseny)) formájában jelenik meg, viszont Finnországban szokásos formája a számonkérésnek.
- (c) A vizsgált populáció (15 évesek) választása a finn rendszernek kedvez, hiszen ott ez az életkor iskolai fokozatot zár, míg nálunk nem.
- (d) A feladatsornak nem volt sem egyéni, sem közösségi tétje.
- (e) A feladatsor hosszú volt, bonyolult, fejlett szövegértési készséget igényelt, melynek a magyar diákok szintén híján vannak. (A finn diákok szövegértése kiemelkedő.)
- (f) A feladatok komplexek voltak, gyakorlati ismeretek összekapcsolását igényelték [82].

1.3. A kompetencia fogalma és szerepe az oktatásban

A XXI. században az ismeretelsajátítás szükségességét bizonyos kompetenciák megszerzésének fontossága váltotta fel. A nyolcvanas évek végén és a kilencvenes évek elején erre a változásra paradigmaváltással adott választ a mérési-értékelési szakma: a korábbi tantervi alapú, tartalmi elemekre összpontosító mérések mellett megjelentek a kompetencia alapú mérések is.

1.3.1. A kompetencia fogalma

Jelenleg az oktatásfejlesztés egyik legdinamikusabban fejlődő kutatási területe a kompetenciák vizsgálata. A kompetencia fogalma nem egységes, mást és mást jelent az

élet különböző területein, de a fogalom oktatás területén betöltött jelentése is jelenleg még inkább csak kialakulóban van.

Az alábbiakban csak néhány megközelítést említünk.

A kompetencia fogalma (Coolahan¹)

A kompetenciát úgy kell tekinteni, mint olyan általános képességet, amely a tudáson, a tapasztalaton, az értékeken és a diszpozíciókon alapszik, és amelyet egy adott személy tanulás során fejleszt ki magában [161].

A kompetencia fogalma (Nagy József)

A kompetencia a személyiség alkotórésze, mely további komponensekre bontható, úgy mint: képességek, egyszerű és komplex készségek, öröklött és tanult rutinok és ismeretek [122].

A kompetencia fogalma (Halász Gábor)

A kompetencia az a képességünk és hajlandóságunk, hogy a bennünk lévő tudást (ismereteket, készségeket és attitűdbeli jellemzőket) sikeres problémamegoldó cselekvéssé alakítsuk [66].

A kompetencia fogalma (Felnőttképzési Törvény)

A képzésben részt vett személy ismereteinek, készségeinek, képességeinek, magatartási, viselkedési jegyeinek összessége, amely által a személy képes lesz egy meghatározott feladat eredményes teljesítésére [48].

Az oktatás számára legfontosabbak az ún. kulcskompetenciák. Ez a kompetenciák azon szűkebb köre, amellyel minden embernek rendelkeznie kell. (Ezek azok a kompetenciák ugyanis, amelyek alapul szolgálnak pl. a funkcionális kompetenciák kialakulásához.) Az EU meghatározása e tárgykörben jelenleg a következő:

A kulcskompetencia fogalma (EU)

A kulcskompetenciák az ismeretek, készségek és attitűdök átvihető, több-funkciós készletét képviselik, melyre minden egyénnek szüksége van az önmegvalósításhoz és fejlődéshez, beilleszkedéshez és munkavállaláshoz. Ezeket a kötelező iskolai oktatás vagy képzés befejezéséig ki kell fejleszteni, és az egész életen át tartó tanulás részeként a további tanulás alapjául kell szolgálniuk [45].

¹John Coolahan, ír pedagógus, az Európai Tanács szakértője

Magyarországon a NAT [121] 2007-es módosításába került be a nyolc kompetenciát:

- (1) anyanyelvi kommunikáció;
- (2) idegen nyelvi kommunikáció;
- (3) matematikai kompetencia,
- (4) természettudományi és technológiai kompetencia;
- (5) digitális kompetencia;
- (6) a tanulás tanulása;
- (7) személyközi (szociális) és állampolgári kompetencia;
- (8) vállalkozói kompetencia;
- (9) kulturális kompetencia.

tartalmazó keretrendszer.

Magyarországon a kompetencia alapú oktatás elterjesztésére irányuló projektek 2004 és 2007 között elsősorban a HEFOP (Humán erőforrás-fejlesztési Operatív Program), 2007-től pedig a TÁMOP 3.1.4 (Társadalmi Megújulás Operatív Program) keretein belül indultak el. A továbbiakban a matematikai kompetencia fogalmával foglalkozunk.

1.3.2. A matematikai kompetencia

A matematikai kompetenciákat először Mogens Niss dán kutató foglalta össze [119]:

- (1) matematikai gondolkodás és következtetés;
- (2) matematikai argumentáció;
- (3) matematikai kommunikáció;
- (4) modellezés;
- (5) problémafelvetés és -megoldás;
- (6) reprezentáció, ábrázolás;
- (7) szimbolikus, formális, nyelvi, technikai műveletek alkalmazása;
- (8) eszközhasználat.

A kompetenciákat az alábbi osztályokba sorolhatjuk:

- (a) reprodukív osztály;
- (b) integratív osztály;
- (c) kreatív osztály.

Tartalmi szempontból a következő bázispontok köré építkezhetünk:

- (i) tér és alakzat;
- (ii) változások és relációk;
- (iii) mennyiségek;
- (iv) bizonytalanság.

Ezeket a későbbiekben különböző kutatások a saját vizsgálati modelljükben részben módosítottan kezelték [4].

1.3.3. Az Országos kompetenciamérés

Az Országos kompetenciamérés 2001-ben indult. A vizsgálat az iskolarendszer 4. évfolyamán tanuló diákok körében az alapkészségek, 6., 8. és 10. évfolyamon pedig a matematikai eszköztudás és a szövegértési képesség felmérésére terjed ki. Az ország összes iskolájának minden telephelyén minden 4., 6., 8. és 10. évfolyamos tanuló azonos időpontban és azonos feltételek mellett írja meg a tesztet. A tesztek eredményeinek elemzéséből megállapítható, hogy 6. és 10. évfolyamos diákok matematika eredménye gyakorlatilag nem változott, míg a 8. évfolyamos diákoké csökkent 2003 és 2007 között [153].

A mérések fogadtatása nem volt egyöntetűen pozitív. A szakma a feladatsorokat hosszúnak, a feladatokat a magyar matematikaoktatási kultúrától és szokásoktól idegennek tartotta. Ezen utóbbi oknál fogva viszont nem is várható el, hogy a tanulók itt nyújtott teljesítményét kiértékelve alkossunk értékítéletet. Pedig sajnos ez történik. Az iskolákat ezen mérés eredményei alapján ítélik meg, s az ítékezés olykor erős hangvételű. Éppen ezért a fenntartó, s rajta keresztül az iskola vezetősége igyekszik minél jobb eredmény elérésére ösztökélni diákjait, de elsősorban tanárait. Így nem egyszer, nem egy iskolában adták utasításba a tanároknak, hogy a teszt megírása előtt készítsék fel erre diákjaikat. Ezen igényt kielégítendő, erre a célra feladatgyűjtemények is jelentek, jelennek meg szép számban [10, 41, 100, 101, 127, 128, 149, 150]. Mindez ellentétes a kompetenciamérés elveivel, hiszen ezek szerint erre a mérésre nem lehet előre készülni! Másrészt teljesen megbontja a tananyag előzetes, logikus felépítését, az érettségire való folyamatos, hosszú távú felkészülést, hiszen a mérésben található feladatok semmilyen formában nem egyeztethetők össze a majdani kimeneti mérés feladataival. Külső nyomásra a tanárok nem csak, hogy a tesztre kénytelenek előre felkészíteni, hanem a teszt megírása során(!) is sok esetben segíteniük kell tanítványaikat. Ez viszont jelentős mértékben torzítja a mérés eredményét, irrelevánssá téve azt. Ráadásul a kompetenciamérésekre való pánikszerű felkészítés után minden visszatér a rendes kerékvágásba; a mérések tehát nem érik el egyik legfontosabb céljukat, a szemléletváltást. Nem is lenne szerencsés ha elérnék, egészen addig, amíg az nem jelenik meg a kimeneti mérésekben (8. osztályos felvételi, érettségi). Az idegenkedés másik oka a mérés megírásának módja. A mérés egy teljes napra megakasztja az iskola életét. A lebonyolítás operatív része az iskola feladata. A megírás során a tesztek felig-meddig titkosítják. A megírt feladatlapokat elszállítják az iskolából, a tanárok nem értesülhetnek az egyes diákok teljesítményéről. Csupán egy, az egész iskolára levetített összesített eredményt kapnak, amely nem segít az esetleges hiányok, illetve ezek okainak, forrásának feltárásában, pedig ez lehetne az ilyen egységes mérések egyetlen közvetlen haszna.

1.4. Kiutak keresése: modellezés és valóságközeli matematika

1.4.1. Matematikai modellezés

A matematikai modellezés a XX. században alakult ki, elsősorban a kognitív pszichológia fejlődésének hatására. A modern matematikadidaktika sem kezeli már a matematikát a valóságtól teljesen elszakítva, hanem vallja, hogy a kapcsolatok kétoldalú bemutatásával együtt, elválaszthatatlan egységként érdemes őket kezelni [52]. Azóta a témában számos konferenciát tartottak, (az elsőt 1985-ben az ICTMA (International Conference of Teaching Mathematics Applications) szervezésében) illetve az EU a németországi University of Education koordinálásával számos ország részvételével (Franciaország, Németország, Magyarország, Ciprus, Spanyolország, Egyesült Királyság) LEMA (Learning and Education through Modelling and Applications) néven külön projektet is indított a témában, melybe 2006 szeptemberétől Magyarország is bekapcsolódott [91]. A projekt célja egy olyan tanítási segédanyag kidolgozása, melynek segítségével az Unió bármely országában az oktatás bármely szintjén megkönnyíti a matematikai modellezés oktatásba való integrálását.

Maga a modell, illetve a modellezés fogalma is jelentős változásokon ment keresztül, jelenleg Blum értelmezése a legelterjedtebb.

A matematikai modellezés fogalma (Blum)

A matematikában általánossá vált a modellezés megnevezés alkalmazása arra a teljes folyamatra, amely magában foglalja a strukturálás, matematizálás, matematikai kidolgozás, és interpretálás/validálás (esetleges többszöri végrehajtását) a végső, elfogadható eredmény érdekében [15].

A modellezési ciklus jól használható modellje a PISA 2003 tanulmányban jelent meg [158].

1.2. ábra. A modellezési ciklus (PISA 2003)

- (1) Induljunk ki egy valós környezetben lévő problémából.
- (2) Rendezzük el ezt a matematikai fogalmak szerint, valamint ismerjük fel az ide vonatkozó matematikai eljárásokat.

- (3) Fokozatosan vagdossuk le a valóság elemeit olyan folyamatok segítségével - mint például feltételezés, általánosítás és formalizálás - melyek előtérbe helyezik a szituáció matematikai vonásait és a valós problémát olyan matematikai problémává alakítják, amely hitelesen reprezentálja a szituációt.
- (4) A matematikai probléma megoldása.
- (5) Értelmezzük a megoldást a valós szituációra vonatkoztatva.

A fenti modell Blum munkássága nyomán egy fontos elemmel fejlődött; a szituáció megértése, a szituációból készített modell, külön lépésként jelenik meg. A továbbiakban a modellezés folyamatában csak a szituációs modell vesz részt, vagyis az a „valóság”, ahogyan a tényleges szituációt megértettük, értelmeztük [15]. Az alábbi ábra a [16] tanulmánykötetből származik.

1.3. ábra. A Blum-modell

1.2. Megjegyzés. Ahogy látható, egyik modellből sincs „kilépés”. Ennek oka, hogy a hangsúly magán a folyamaton, és nem annak eredményén van.

Modellek használhatók egyrészt szituációk leírására, pl. alga növekedés, szerencsejátékok. Ezeket leíró modelleknek nevezik. Másrészt modellek készíthetők bizonyos szándékok adott körülmények közötti megvalósítására, pl. választási eljárások, értékelési eljárások készítéséhez. Ez utóbbiak a normatív modellek.

A modellezési feladat megoldása során a hangsúly azon a folyamaton, eljárás(ko)n van, amelyet a tanulónak kell megtalálnia és végrehajtania ahhoz, hogy egy matematikán kívüli probléma és valamely matematikai tartalom között megfelelő kapcsolatot teremtsen. Ilyen jellegű „fordítási eljárás” a matematikán belül is létezik, például amikor geometriai probléma kerül formalizálásra. Ebben az esetben matematikán belüli modellezésről beszélünk [4].

Ezeket a feladatokat a diákok rendszerint csapatmunkában kell, hogy megoldják (már csak a szerteágazó részfeladatok miatt is), mely teljesen idegen a magyar oktatási

hagyományoktól. Erre még a tanárok sincsenek felkészülve, híján vannak pl. a fejlesztő kérdéseknek, melyekkel folyamatosan irányítaniuk kellene a csoportmunkát, illetve a diákok sem tudják, hogyan is értékeljék egymás által a csoportok munkáját. Arról nem is beszélve, hogy a modellezési feladatok matematikán kívüli ismereteket is igényelnek, melyek általában egyáltalán nem triviálisak, és amelyeknek sokszor még a legfelkészültebb tanárok sincsenek birtokában [159]. Ugyanakkor a módszer kétségkívül igazán alkalmas a tanulók komplex problémamegoldásának fejlesztésére.

1.4.2. Valóságközeli vagy realiztikus matematika

A XX. század végére a matematikai nevelés leglényegesebbnek tekinthető kérdéseihez az előző évtizedek realiztikus matematikaoktatási irányzata visz közel. Elindítójának Hans Freudenthal² tekinthető. Munkásságát a nevét viselő matematikadidaktikai kutatásokkal fogalakozó intézet (Feudenthal Institute for Science and Mathematics Education³) folytatja. (Az intézet által folytatott kutatások, illetve az általa képviselt szemlélet nagy mértékben összecseng Varga Tamás elképzeléseivel.) Az irányzat alapvető gondolata, hogy a tanulók nem készen kapott ismeretek befogadói a matematikatanítás során, hanem lehetőségük van nagyszámú, változatos környezetből vett probléma, különböző szituációk vizsgálata alapján a matematikai fogalmak, koncepciók, tételek felfedezésére. A „realisztikus” jelző azt fejezi ki, hogy a tanulók tapasztalatszerzését úgy kell megszervezni, hogy az általuk vizsgált problémák reálisak, elképzelhetőek, jelentéssel bírók legyenek a számukra. Ez jelentheti a valóságból vett jelenségeket, objektumokat éppúgy, mint a korábbi tapasztalatokból ismert matematikai kontextusokat. Tanulmányában Somfai Zsuzsa erről így ír [148]: „A problémából indított tapasztalatszerző folyamatban a tanulók szembesülhetnek különböző megoldási módokkal. Így közben megtanulják, hogyan lehet saját álláspontjukat megvédeni, mások munkáját kritikusan meghallgatni, mérlegelni, a másik munkáját értékelni. Egy adott pillanatban bekövetkezik az absztrakció, az általánosítás, a formalizálás indokoltá válása, de nem minden tanulónál egyszerre. Ennek a matematikatanítási irányzatnak az érvényesülése megváltoztatja a tanár és a tanulók tradicionális szerepét a tanulási folyamatban. A tanár az abszolút tekintélyből a folyamatot irányító, segítő személyiséggé válik. A megfellebbezhetetlen közlések helyett a segítés, kérdezés, a tanulók gondolkodásának árnyalt követése lesznek a fő tanári tevékenységek. A tanulók passzív befogadó helyett aktív szereplőkké válnak.”

Az MUED német matematikatanár-szervezet előzetes munkájának köszönhetően 2004-ben elindult DQME (Developing Quality in Mathematics Education) néven egy 3 éves uniós projekt, melynek célja, hogy a matematikát az akadémikus stílus helyett, egy valóságközeli, praktikus eszközként segítse kezelni [39]. Ezen projekt egyik fő célja az újságcikkeken, médiából vett szituációkon keresztül a diákok kritikai gondolkodásának fejlesztése, melyet az öntudatos EU polgár egyik legfontosabb erényének tartanak.

²Hans Freudenthal (1905-1990) német matematikus

³<http://www.fi.uu.nl/>

Emellett fontos a világ problémáinak megértése és megismerése. Továbbá nemzetközi felmérések azt bizonyítják, hogy azok a diákok válnak a matematika tudatos felhasználóivá, akik az iskolában is tanultak az alkalmazásokról [102].

1.5. A jelen helyzet és a jövő társadalmának elvárásai

A nevelési-oktatási rendszer újjáépítéséhez szükséges pedagógiai megújulás idevágó lényeges elemei a Szárny és Teher Konferencia alapján a következőkben foglalhatók össze [38]:

- (1) az erkölcsi és esztétikai, az olvasási-szövegértési készségek, a beszédkészség, az írás és az infokommunikációs készségek fejlesztése - össztantárgyi feladat;
- (2) a kísérletezés - kulcsponthoz a természettudományos oktatás megújulásában;
- (3) az infokommunikációs módszertár - a pedagógia új eszköze.

A matematika kapcsán a legfontosabb elvárásokat a Kerettanterv [85] így fogalmazza meg:

- (1) a modellalkotás, matematizálás jelentőségének növekedése;
- (2) a matematika alkalmazási terének növekedése;
- (3) egyensúly a matematika belső struktúrájának kiépítése és a tanultaknak a mindennapi életben, más tárgyakban való felhasználása, eszközként való alkalmazása között;
- (4) a modern oktatási, tanulási technológiák beépítése a mindennapi iskolai oktatási, nevelési tevékenységbe.

Ezzel szemben egy 2003-as felmérés szerint a tanárok óráikon szinte egyáltalán nem használnak informatikai eszközöket. Az alábbi táblázat 169 válaszolóra vonatkozó adatokat tartalmaz [147]. (A gyakoriságra vonatkozó adatok százalékban értendők.)

Eszközök	soha (1)	ritkán (2)	néha (3)	elég gyakran (4)	gyakran (5)	átlag	szórás
kereskedelmi forgalomban vásárolt digitális eszközök	38,9	37,7	18,6	4,8	0	1,89	0,87
háziilag készült digitális eszközök	59,6	27,0	8,6	4,3	0,6	1,60	0,87
ingyenes multimedia tananyag	50,4	31,5	28,6	9,6	1,8	2,19	1,01
internet	23,4	34,1	28,1	9,6	4,8	2,38	1,08
prezentációkészítő	65,2	22,6	7,9	2,4	1,8	1,53	0,88
szövegszerkesztő, táblázatkezelő	23,1	22,5	23,1	16,0	15,4	2,78	1,37

1.4. ábra. Informatikai eszközök használati gyakorisága a matematikaórákon

Az objektív okok között feltétlenül szerepelnek a technikai problémák. Az iskolák többségében nem megoldott, hogy a tanár bármelyik órán külön szervezés nélkül számítógépet használjon. Ennek a körülménynek a hiányában esetleges és nagyon fáradtságos, időigényes az olyan óra előkészítése, ahol elektronikus eszközt használhat a tanár. Kevesen vállalkoznak ilyen természetű, önállóan fejlesztett anyag készítésére [147]. A taneszközülaszték az elektronikus eszközök területén az elmúlt években robbanásszerű fejlődésnek indult. A ma tankönyvei DVD kiegészítésekkel jelennek meg, ismét készülnek tanári segédkönyvek, melyek szinte kizárólag ebben a formátumban férhetők hozzá (nem egy esetben a feladatgyűjtemények megoldásköteteivel egyetemben).

A fenti felmérés eredményei szerint a módszerek tekintetében sem jobb a helyzet [147]:

Módszerek	soha (1)	ritkán (2)	néha (3)	elég gyakran (4)	gyakran (5)	átlag	szórás
tanári magyarázat	0	0	3,6	32	64	4,61	0,56
frontális osztálymunka	0	1,7	8,1	45,3	44,8	4,33	0,70
önálló tanulói munka	0	5,2	15,1	56,4	23,3	3,98	0,77
differenciálás	1,2	11,6	37,2	41,9	8,1	3,44	0,85
csoportmunka	5,2	31,4	35,5	20,3	7,6	2,94	1,02
pármunka	23,4	42,7	22,8	10,5	0,6	2,22	0,94
projekt módszer	41,1	36,1	19,0	3,8	0	1,85	0,86
terepmunka	77,8	18,0	3,6	0,6	0	1,28	0,59

1.5. ábra. Tanulásszervezési formák gyakorisága a matematikaórákon

A tanári magyarázat, a frontális osztálymunka, az önálló tanulói munka, illeszkedik a magyar matematikaoktatás hagyományos módszerei közé, illetve ki is meríti azt. A differenciálás megléte, vagy hiánya nem a tanáron múlik. Az anyagi, illetve szervezési lehetőségek korlátai szabják meg azt, hogy van-e rá lehetőség. Az idézett tanulmány ([147]) szerint az osztályok kevesebb, mint 30 %-ában van szintek szerinti csoportbontás, az is főleg csak a felső két évfolyamon jellemző, ahol ezt már az érettségire való felkészítés megkívánja. A differenciálás ezen esetben sem a tanulók valódi, hanem a választott (elérni kívánt) tudásszintjéhez igazodik. A csoportmunka idegen a magyar oktatási hagyományoktól; nem is működtethető 35-38 fős osztályokban. A terepmunka idegenül hathat a matematikaóra kapcsán, viszont Angliában, illetve az USA-ban ennek komoly hagyományai vannak. Célja a közvetlen tapasztalatszerzés (mérés, megfigyelés, adatgyűjtés, kísérletezés). A projekt módszer működtetéséhez sem hagyományaink sem segédeszközaink nem nyújtanak segítséget, ezen felül nagymértékű kreativitást, időráfordítást igényel.

A PISA, illetve a kompetenciamérések fogadtatása meglehetősen vegyes volt. A mérések tartalma szakmai vita tárgyát képezte és képezi jelenleg is. Vitatói elsősor-

ban azt nehezményezik, hogy a mérések feladatai szellemükben és tartalmukban nem igazodnak a tantervekhez és az iskolai matematikaórák gyakorlatához. Néhányan bírálják a mérések feladatainak szakmai hitelességét is. A mérések tartalmával szimpatizáló szakemberek általában úgy vélik, szükség van az alkalmazásképes tudás mérésére, mert ez az oktatási rendszer hatékonyságának egyik fontos mutatója. A tanárokat nem kiképezték, hanem kényszerítették az új szemléletű oktatásra, az iskolákat is részben a kompetenciamérések eredményei alapján ítélik meg. A méréseknek a tanárok kizárólag elszenvedői, nem aktív részesei. Ugyanakkor elvárás a tanárral szemben a diákok kompetenciáinak fejlesztése, az új számonkérési módszerekre való felkészítés.

A középiskolai (matematika)oktatás présben helyezkedik el. Alulról az általános iskolai óraszámcsökkentés hatására van nyomás alatt. Az elmúlt években az általános iskola felső tagozatán a matematika órászáma heti négyről háromra csökkent. Ez a 25%-os csökkentés olyan, mintha a négy év tankönyvei közül egyet kiválasztva azt egyszerűen kidobtuk volna. A hasonlat egyáltalán nem túlzó, viszont több szempontból is fals, legfőképpen azért, mert az óraszámcsökkentés egyáltalán nem állt arányban a tananyagcsökkentéssel. Így a középiskolába többségében bizonytalan, formális ismeretekkel rendelkező diákok kerülnek, akik nincsenek a szükséges készségek, képességek birtokában. Ezek kialakítására a középiskolának nincs lehetősége. Ezek egyrészt az általános iskolai életkorhoz kötöttek, másrészt rendkívül időigényesek. A prés felső lapját a tankötelezettség megemelése, valamint a tömegek felsőoktatásba irányítása jelenti. A tankötelezettség 18 évre emelésével rengeteg motiválatlan, a korábbinál jóval kevésbé felkészült gyerek ül a középiskolában. Őket nem csak, hogy az érettségiig, de a sikeres felsőoktatási felvételihez is el kell juttatnia a középiskolának, ami szinte lehetetlen vállalkozás.

A tanárral szembeni közvetlen szülői, illetve társadalmi elvárás is kettős és el-lentmondásos. A matematikai ismeretek alkalmazását, alkalmazható tudást várna el egyre inkább a társadalom, a nemzetközi mérések is ezt mérik, s nem a tantervi tudást. Ugyanakkor a tanárral szemben a társadalom elvárása a kimeneti mérésnek való megfeleltetés, az érettségre való felkészítés is. A legfontosabb még mindig az érettségihez szükséges tárgyi ismeretek átadása, mely nem hogy a fentiekkel, de sokszor még a felsőoktatás elvárásaival sincs szinkronban. Számos hazai felmérés bizonyítja ugyanis, hogy a műszaki, matematikai, informatikai szakterületen egyetemre, főiskolára járó diákok első évben, elsősorban a bevezető jellegű matematikai kurzusokon mutatott teljesítménye nem korrelál sem a középiskolai, sem az érettségi eredményekkel (az érettségi választott szintjétől függetlenül). Kimutatható kapcsolat mindössze a versenyeredményekkel van [117].

A probléma mindezekről függetlenül valahol nagyon mélyen gyökeredzik. Megdöbbentő adat, de a középiskolát végzettek 90%-a az érettségi utáni 3 éven belül elveszíti a megszerzett matematikai ismeretei 90%-át. E vizsgálat szerint az Amerikában és Magyarországon érettségiző diákok tudása között a különbség három és félszeres a magyar diák javára. Tíz év múlva viszont az amerikai több mint kétszer annyit tud. Az amerikai még mindig tudja a hetvenöt százalékát annak, amit megtanult; a magyar

mindössze tíz százalékra emlékszik [50].

Jelen pillanatban is zajlik a közoktatási és a felsőoktatási törvény vitája. A törvények nyithatnak új utakat, teret engedhetnek új elképzeléseknek, s ezzel egyszerre természetesen új kihívások elé állíthatják a tanárokat. A fő kérdés persze az, hogy a folytonos reformok által felőrölt, a társadalmi megbecsülés alacsony szintjén álló tanártársadalom képes lesz-e megfelelni az állandóan változó, különböző fórumok által különbözőképpen interpretált elvárásoknak. „A versenyre és a szolidaritásra kell felkészíteni a diákokat, s ennek az új közoktatási törvényben is meg kell jelennie [116].” (PÁLINKÁS JÓZSEF, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke)

1.6. Összefoglalás

A műszaki-tudományos változásoknak, ezen belül is elsősorban az informatika és kommunikáció fejlődésének, a huszadik század történelmét alapvetően meghatározó információrobbanásnak igen jelentős hatása volt az oktatásra is. Ez határozta meg az oktatási-nevelési célok változását, az oktatás tartalmának jelentős módosulását, eszközállományának teljes modernizálódását, a tanításban alkalmazott módszerek megváltoztatására való törekvéseket, a mérések tartalmát és módszereit [80]. A globalizáció által motivált legfőbb elvárás az oktatás felé az volt, hogy gyorsan mobilizálható ismeretet nyújtson alacsony ráfordítással.

Az információrobbanás hatására tehát a tudás, s azon belül a matematikai tudás (műveltség) fogalma átértékelődött. A releváns mérések a tanulói teljesítményt integrált módon kísérik meg felmérni, ahelyett, hogy a tárgyi tudás különálló elmeire fókuszálnának. Elvész a lexikális tudás nimbusza. (Furcsa paradoxon, hogy becslések szerint a NAT bevezetése óta, annak deklarált célja ellenére, megduplázódott a 6-10 évesek számára készült tankönyvekben, munkafüzetekben stb. az ismeretanyag mennyisége. Ez feszítettebb tempót diktál, s kevesebb idő jut az ismeretek kulcsfontosságú tapasztalati előkészítésére, az alapkészségek rutinjainak kidolgozására, a tanultak gyakorlati felhasználására. Nem kedvez ez a felfedezés örömeinek, a tévedések felismerhetőségének, kijavításának [155].)

Az újraértelmezett matematikatudásban fontos szerepet játszik az, hogy a matematikát különböző helyzetekben *alkalmazzuk*. Szemponttá lépett elő, hogy olyan problémákat, feladatokat és végső soron olyan tankönyveket adjunk a gyerekeknek, amelyekből megértik, hogy a mai világ nem létezik matematika nélkül. Gyakorlatiasabb matematikára van hát napjainkban szükség. Ez a tanulók többségét érdekli, s így komoly motivációs tényező [50].

A változás - különösen a magyar matematikaoktatás tekintetében - nagyobb mértékű és mélyebb, mint azt előzetesen gondolnánk. A magyar matematikaoktatás ugyanis inkább elméleti és problémamegoldó, és nem gyakorlati problémák formális megoldását célozta. A tananyag felépítése a másutt szokásosnál jobban építi a tudomány belső logikájára, és kevésbé a gyors alkalmazhatóságra. A matematika érettségi

nálunk mindig is megkövetelte az elmélet megfogalmazását, tételek bizonyítását. A nemzetközi kritika szerint túlzottan akadémikus tudást adnak a magyar iskolák. A diákok öt százalékának, akikből értelmiségi lesz, ez kétségtelenül hatalmas előnyt jelent. De csak nekik. Azaz olyan oktatási rendszerünk van, amely a tehetséges tanulóknak kedvez. Magyarországon abszolút elit oktatás alakult ki és nem olyan, amely a tömegekre is kiterjedt volna, a gyengéket is igyekezett volna felemelni és nivellálni [50].

Sajnos jellemző, hogy még nem tudunk elszakadni a porosz típusú pedagógusi attitűdtől. Pedig az oktatással szemben támasztott elvárásokat többé nem a felsőoktatás, hanem a társadalom folyamatosan változó igényei szabják meg, s ez meg kell, hogy mutakozzon a módszerekben is. Többé már nem a tanár a tanuló elsődleges információforrása. (Bár talán a matematika az egyik olyan terület, ahol ez még vitatható.) A tanárnak nem az információ átadása, hanem az információtengerben való eligazodás segítése, a megszerzett tudás alkalmazásának bemutatása a fő feladata. Éppen ezért (uniós) elvárás az infokommunikációs technológiák (IKT) használata, a projekt módszer, illetve a kutatásközpontú oktatási módszerek (IBL/T - Inquiry-based learning/teaching, kutatásalapú tanulás/tanítás) alkalmazása – biztató hazai példa az Út a tudományhoz és a KUTDIÁK program – az oktatásban a számítógépek alkotó jellegű felhasználása mellett.

2. fejezet

Felfedezések a matematikában

„A számítógép már érzeteti hatását a matematikában éppúgy, mint annak idején a távcső és a mikroszkóp a csillagászatban és a biológiában.” (DORON ZEILBERGER)

2.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben röviden bemutatjuk a matematika egy új szemléleti lehetőségét, a kísérleti matematikát (experimental mathematics), illetve ennek az oktatásban való, a dolgozaton végigvonuló alkalmazását készítjük elő, didaktizáljuk. Összekapcsoljuk kísérleti matematikánkat a heurisztikával, a problémamegoldó gondolkodással, illetve megvizsgáljuk a módszer lehetséges hatásait. Röviden kitérünk a bizonyítások tanításának jelenlegi problémáira, valamint lehetőséget mutatunk arra, hogyan lehet ezen problémákat módszerünk segítségével orvosolni.

2.2. Experimental Mathematics

2.2.1. Kísérleti matematika

A matematikát a formális természete és a deduktív érvelési rendszere választja el a természettudományoktól. Bár a matematika története a felfedezések története, mégis a diákok szemszögéből nézve a kísérletek eddig látszólag nem játszottak jelentős szerepet a matematikában. A kísérletezés, a felfedeztetés legfőképp az időhiány miatt az elmúlt években jelentősen háttérbeszorult. Pedig a formalizmus csak a rendszerezésben, a bizonyosság növelésében, a tudás megszilárdításában segít; az új tudás mindig megfigyelés és kísérletezés útján keletkezik, a matematikában is. A kísérletek mellett a

számítógépek is háttérbe szorítottak voltak. A számítógépek matematikai paradoxona, hogy bár a matematikából fejlődtek ki, információs forradalmat indítottak el, a matematikán kívül használják is őket megszületésük pillanatától; a matematikán belüli, alkotó jellegű felhasználásuk egyre csak váratott magára.

A számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetővé vált azonban kísérletek nagy számú, gyors és hatékony elvégzése, azonnali kiértékelése; teret nyitva egy új matematikai szemlélet kialakulásának. Egyáltalán nem számítógéppel *segített* matematikáról van szó, sokkal inkább a számítógéppel *megalkotott* matematikáról. Az alkotás persze továbbra is a tanár feladata, de amint a számítógépekkel segített kísérletek az órai felfedezés organikus részévé lesznek, a kettő nehezen különíthető el, főleg a diákok szemével nézve. Maga a problémafelvetés, és ezen át a definíciók, tételek, bizonyítások megalkotása mind-mind ezzel történik. A természettudományokban a kísérletek célja mindig is az elmélet igazolása volt, míg a matematikában eleddig csak a sejtések megszületésére vonatkozóan ismerték el szerepüket.

A számítógépes kísérleti matematika módszertana a következőkben foglalható össze [17, 21].

- (a) A rálátás és az intuíció segítése.
- (b) Kapcsolatok és minták felismerése.
- (c) A matematikai tartalom kézzelfoghatóvá tétele a grafikus megjelenítés lehetőségeinek kihasználásával.
- (d) Sejtések megerősítése és cáfolása.
- (e) A bizonyításra érdemes gondolatok kiválogatása.
- (f) Segítség az alkalmas bizonyítási módszerek megtalálásában.
- (g) Számítások elvégzése.
- (h) Analitikusan származtatott eredmények megerősítése.

A fentiekben tulajdonképpen a matematikai alkotás folyamatát láthatjuk, lépésekre bontva, oly módon, hogy azok a számítógépes kísérletekkel elérhetőek legyenek. Az első három pont ((a)-(c)) az intuíció, a következő kettő ((d)-(e)) a sejtés, az utolsó három ((f)-(h)) pedig a bizonyítás segítése.

A következőkben bemutatunk egy, a kísérletek szerepét leíró modellt [17].

2.1. ábra. A kísérletek szerepe a tudományos felfedezésekben

A tapasztalati tudást szolgáló, és azt felépítő kísérletekből megfigyelések származnak, melyekből újabb kísérletek hatására intuitív feltevések lesznek. Ezekből a további, folyamatos kísérletezés hatására, az igazság monoton növelésével, sejtések alakulnak ki. Ezen sejtések további vizsgálata során, eljuthatunk a *majdnembiztos* megerősítésig, illetve a sejtés bizonyításáig, esetleg cáfolásáig. A kísérletek a modell minden szintjével kapcsolatban vannak, így segítségükkel a köztes fázisok kihagyásával, a modell későbbi szintjeire ugorhatunk. A deduktív bizonyítás a modellből kiemelhető (elhagyható). Már meglévő tapasztalati tudásunk pedig felhasználható az új kísérleti eredményeink értékeléséhez, szintén segítve a modellben való előrelépést. Ezen modellben leírtak játszódhatnak le tulajdonképpen mindenki fejében, amikor (matematikai) vizsgálatokat végez egy probléma megoldása érdekében.

Vizsgálataink során számos példán keresztül igyekszünk majd megmutatni ezen modell működését, számítógéppel katalizálván kísérleteinket.

2.2.2. Rövid történeti áttekintés

A matematikai alkotás 2500 éves paradigmája, hogy az ember definiál egy fogalmat, megalkot egy vele kapcsolatos tételt, majd bebizonyítja azt [98]. Mára ez jelentősen megváltozott, bár a kezdet kezdetén még úgy tűnt, nincs túl sok értelme kísérleteknek nevezni a számításokat vagy a képi ábrázolást. Mára azonban új megközelítések, új módszerek, új tudományágak alakultak ki hatásukra. A számítógépek számítási, tárolási, reprezentációs kapacitásának ugrásszerű megnövekedésével megváltozott ez a

nézőpont is. A számítógépes kísérletek beférköztek a „tisztá matematika” (pure mathematics) világába is, megváltoztatva ezzel a matematika egészéhez való hozzáállásunkat.

A terület az 1990-es években került a szélesebb körű érdeklődés középpontjába akkor, amikor az Amerikai Matematikai Társaság (AMS) a Notices of the AMS című kiadványában egy rovatot indított *Computers and Mathematics* címmel. A rovatvezető kezdetben Jon Barwise majd Keith Devlin volt. Mindkettőjük célja az volt, hogy meggyőzzék a matematikus társadalmat arról, hogy a számítógép egy fontos és hasznos kutatási eszköz lehet. (A matematikusok többsége saját bevallásuk szerint is csak levelezésre és szövegszerkesztésre használta az annál sokkal többre hivatott számítógépét.) A kialakult vitában nem csak a számítógépben rejlő óriási számítási és reprezentációs potenciál került megvitatásra, de felmerültek az annak megbízhatatlanságával és ellenőrizhetetlenségével, valamint a logika kikezddhetetlen elvein alapuló bizonyítások szigorának és megkérdőjelezhetetlenségének fellazulásával kapcsolatos aggályok is. A vita egyik csúcspontjaként, 1993-ban Arthur Jaffe és Frank Quinn közzétették vélekedésüket, miszerint a matematikusokat, akárcsak a fizikusokat, ezentúl két csoportra, az elméleti és a kísérleti matematikusok csoportjára kell különíteni [151]. Ha nem is ennyire radikálisan, de a matematikusok többsége egyetértett abban, hogy befogadónak kell lenni a számítógépekkel, még akkor is, ha alkotó jellegű használatuk a matematikában a bizonyítás fogalmának, és ezen keresztül az egész matematikai filozófiának az újraértelmezésével jár. 1992-ben David Epstein, Silvio Levy és Klaus Peters, megalapította az *Experimental Mathematics* című tudományos folyóiratot. (Experimental Mathematics, kiadja az A K Peters, Ltd, főszerkesztő Yuri Tschinkel.) A folyóirat mottója szerint az elmélet és a kísérlet elválaszthatatlanok. 1993 novemberében pedig Jonathan Borwein vezetésével megalapították *Centre for Experimental and Constructive Mathematics* (CECM) kutatóintézetet Kanadában, a Simon Fraser University berkein belül. Azóta számos összefoglaló mű [17, 18, 19] és a filozófiát terjesztő cikk [9, 21, 151, 83] jelent meg. A felderítő felfedezés (exploratory experiment) a fogalomalkotás elfogadott módjává vált, éppúgy mint a tény, hogy a számítógépek adják azt a kísérleti háttérországot a matematikának, amely a természettudományok esetében már évezredek óta megvolt.

Mára a számítógépek alkotó jellegű felhasználásának elfogadása elkerülhetetlenné vált tehát a „hagyománytisztelő” matematikusok körében is. Az első nagy lépés e tekintetben a négyszín sejtés bizonyítása volt. Appel és Haken bizonyítása inkább csak számítógéppel segített volt, (computer-assisted proof) de a matematikusoknak el kellett fogadniuk, hogy nem minden bizonyítás olyan, mint egy költemény, néha meg kell elégednünk egy-egy telefonkönyvvel¹ is. Az utolsó, döntő tény pedig talán Thomas Hale bizonyítása Kepler gömbpakolási problémájára. Hale a bizonyítást, mely a több száz írott oldal mellett gigantikus hosszúságú számítógépes programot és számítást tartalmazott, 1998-ban nyújtotta be az Annals of Mathematics című folyóiratnak. A folyóirat 2003-ban fogadta el a cikket (Thomas C. Hales. *A proof of the Kepler con-*

¹ Appel és Haken bizonyításával szemben nem csak a számítógép megbízhatatlansága volt a kritika, de az is, hogy a bizonyításuk olyan, mint egy telefonkönyv, holott, egy matematikai bizonyításnak minden esetben olyannak kellene lennie, mint egy költemény.

jecture, Annals of Mathematics, **162**(3), 2005), a bíráló bizottság vezetőjének, Fejes Tóth Gábornak azon megállapítása ellenére, miszerint a „bizonyítás 99%-ban helyes”, de az összes számítógépes számítás helyességét nem garantálhatják [88]. Beteljesült tehát Doron Zielberger 1994-es jóslata, miszerint fennáll a lehetősége, hogy elfogadunk egy majdnem biztos állítást, ha az hozzáférhető (pl. költségét tekintve); amennyiben tudjuk, hogy a teljes, szigorú bizonyítás megfizethetetlen költségekkel bírna [163].

2.3. A kísérleti matematika alkalmazása az oktatásban

„A nagy felfedezések nagy feladatokat oldanak meg, de nincs olyan feladat, amelynek megoldásához ne volna szükség valami kis felfedezésre.” (PÓLYA GYÖRGY)

2.3.1. Kísérletek és matematika

A tanár, valamilyen érthetetlen oknál fogva ragaszkodik ahhoz, hogy diákjainak valami teljeset, kikezddhetlent, véglegeset adjon. Az ismereteket ilyen, akadémikus jelleggel tárgyalva diákjainkat nem kíméljük meg ugyan a kudarcoktól, viszont megfosztjuk őket a felfedezés lehetőségétől, izgalmától. Pedig a felfedezés öröm.

A feladat és a felfedezés (Pólya)

Bármilyen apró, ... matematikai feladat megoldása erőfeszítést kíván és a felfedezés örömét adja [138].

Néhány év matematikatanítás után elérjük, hogy a diákok biztosak legyenek abban, hogy ők a matematikában semmit sem képesek alkotni, elérjük, hogy diákjaink ne csak hogy ne értsék, ne is lássák értelmét, sőt ne is szeressék a matematikát; s hogy ezt a szemléletet adják tovább gyermekeiknek is. Dienes Zoltán szerint a gyerekek többsége sohasem jut el odáig, hogy megértse, mit is jelentenek azok a matematikai fogalmak, amiket használ.

A kísérletek szerepének alátámasztására elegendő csak Euler nevét említenünk. Ő volt az, aki rengeteg felfedezést tett a matematikában az indukció, azaz a megfigyelés, a merész sejtés és a briliáns igazolás segítségével. Ugyanakkor a tudományt gazdagító felfedezéseit csak akkor érezte teljesnek, ha őszintén feltárta a hozzájuk elvezető gondolatokat is [137]. Azt pedig, hogy a kísérleteknek megkerülhetetlen szerepük van a heurisztika segítésében, Pólya és Lakatos óta tudjuk. Pólya szerint is a kísérletek jelentik a matematikai tudás legfőbb forrását, a kísérletek azok, melyek a megfelelő irányba terelik az intuíciót.

A találgatás szerepe (Pólya)

A matematikus alkotó munkájának eredménye bizonyító okoskodás, egy bizonyítás, de ezt a bizonyítást plauzibilis okoskodással, találgatással fedezik fel. Ha a matematikatanulás kicsit is tükrözi a matematikai felfedezést, akkor helyet kell kapjon benne a találgatás, a plauzibilis következtetés [138].

Mindezen ismereteknek a kísérleti matematikával való összekapcsolása azonban eddig váratott magára. Éppen ezen kapcsolat feltárása, bemutatása ennek a dolgozatnak a célja. A számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetővé vált kísérletek nagy számú elvégzése, nagy mennyiségű adat feldolgozása, adathalmazok manipulálása, valós idejű számítások elvégzése, animációk vizsgálata, melyek egyébként is elidegeníthetetlen részét képezik a tanulási folyamatnak. Most mindezek a XXI. század társadalmi elvárásainak megfelelő környezetben jelenhetnek meg. Valljuk, hogy kísérleteink segítségével integrálható egymásba a tradicionálisan külön kezelt felfedezés és igazolás.

Felfedezés és igazolás (Pólya)

Amint meggyőződte arról, hogy a tétel igaz, kezd el a bizonyítást [138]!

Pólya munkásságának egyik legfontosabb mondanivalója is éppen az, hogy a matematika nem azonos formális elméleteknek egy csoportjával, hanem elválaszthatatlan attól az emberi tevékenységtől, amellyel mi magunk hozzuk létre a matematikai vizsgálódás tárgyát. Ugyanakkor a számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetőségünk nyílik nagymennyiségű számítás, valamint kísérlet gyors és pontos elvégzésére, illetve ezek eredményeinek kiértékelésére, következtetések levonására. A számítógépek ezen, innovatív módon történő, alkotó jellegű felhasználásával, a Borwein által elindított kutatási módszer oktatásra való adaptálásával, a Pólya György által szorgalmazott heurisztika és kísérletezés végre a megérdemelt mértékű szerepéhez juthat a tanításban. A (közép)iskolások számára kitűzött, természetesen felmerülő, de ugyanakkor kutató jellegű problémák vizsgálata során a számítógép nem csak a szemléltetésben, de a problémafelvetésben, a fogalmak kialakításában, a sejtések megfogalmazásán és tesztelésén keresztül pedig a matematikai alkotás teljes folyamatában is segítségünkre lehet. A kísérlet és az elmélet elválaszthatatlanok. A tanulók maguk is felfedezővé válhatnak és ez az egyik legfontosabb központi gondolat.

Az intuíció szerepe (Pólya)

Az intuíció sokkal hamarabb és kevesebb külső befolyásra jelentkezik, mint a formális érvelés. Ez utóbbit csak akkor értjük meg igazán, ha már a logikai csiszoltság viszonylag magas szintjére jutottunk el. Ezért a középiskolában jóval előbb kell hangsúlyoznunk az intuitív belátást, mint a következtetést [135].

Pólya szerint a tudományos módszer: kitalálás és ellenőrzés. („Tanítsuk meg a találgatást!”) A gép mindkettőben segít. Lehetőséget ad arra, hogy a diák részt vegyen a probléma kitűzésében is. A Pólya-féle egymást követő fázisok elvében a felfedezés fázisa megelőzi a szavakba foglalást és a fogalomalkotást; módszerünkkel fogalmakat is alkothatunk, sőt segíthet a szavakba öntésben is. A megfigyelés, sejtés, induktív érvelés hármasan keresztül segíti a plauzibilis következtetést. A tanár tőkét kovácsolhat az órán keletkezett spontán felfedezésekből. A fentiek nem csak Pólya György, de Lakatos Imre, a bizonyítás és a cáfolat párhuzamos keresésén, a lokális és globális ellenpéldák vizsgálatán, az ún. torzszülöttek kizárásán alapuló heurisztika modelljét is modern köntösben teszik alkalmazhatóvá.

Az intuíció szerepe (Lakatos)

A fejlődő elméletben az intuíció járatlan, botladozik és hibázik. Nincs olyan elmélet, ami ne ment volna keresztül a fejlődés ilyen szakaszán, sőt történeti szempontból ez a legizgalmasabb szakasz, s az oktatásban is ennek kellene a legfontosabbnak lennie. Euklidész ezért ... mind a kezdő fokú, mind a kreatív szintű matematikaoktatásnak a rossz szelleme [90].

Módszerünk spirális használatával nem csak a fogalmak kialakítására, de azok megerősítésére, absztrahálására; esetleges cáfolatára is mód kínálkozik, mely tulajdonképpen nem más, mint Lakatos azon gondolatának, miszerint a matematikai fogalmak ugyanúgy fejlődnek, mint a természettudományok fogalmai, az oktatásban végre megjelenő hatékony alkalmazása.

A rigorózus, többség által korábban is inkább csak tudomásul vett, mintsem megértett bizonyítások háttérbe szorításával, de a bizonyítási igény megőrzésével és a magyar matematikaoktatás tradicionális erényeinek kiaknázásával (pl. problémamegoldó gondolkodásra nevelés) a problémák újfajta megközelítési és feldolgozási módjának lehetősége tárul fel.

A következőkben összefoglaljuk, hogy a kísérleti matematika előző pontban (**2.2.1. fejezet**) részletezett módszertana mily módon adaptálható az oktatásba. (A további fejezetek javarészt ezek részletes kifejtéséről szólnak.)

A tanár a tanulásszervezés operatív szempontjai tekintetében például a következőképpen és a következő formákban használhatja ki a kísérleti matematika által nyújtott lehetőségeket. Lehetővé, illetve könnyebben kivitelezhetővé válik a

- (a) csoportmunka;
- (b) projektmunka;
- (c) differenciálás;
- (d) aktív tanulói részvétel;
- (e) játékalapú tanulás;
- (f) kutatás alapú tanulás.

Módszertani hasznok:

- (1) (nyílt végű) feladatok dinamikus létrehozása;
- (2) ellenőrzési lehetőség;
- (3) a matematika alkalmazási lehetőségeinek bemutatása;
- (4) kollektív tapasztalatszerzés lehetővé tétele;
- (5) dinamizálás didaktikai lehetőségeinek kihasználása;
- (6) problémaérzékenység növelése;
- (7) bizonyítási igény kialakítása;
- (8) eddig megközelíthetetlen problémák tárgyalásának lehetősége;
- (9) matematikai eszközigény csökkentése;
- (10) gyengébb képességűek felzárkóztatása, bevonása;
- (11) a matematika szórakoztatóvá tétele;
- (12) folyamatos kérdésfelvetés segítése;
- (13) társadalmi elvárás kielégítése;
- (14) induktív, deduktív, kritikai és problémamegoldó gondolkodás segítése;
- (15) a problémamegoldási ciklus (minden megoldott probléma szabállyá válik, amely később más problémák megoldására szolgál) segítése;
- (16) megoldás folyamatos próbálgatással, szukcesszív approximáció módszere.

A problémamegoldás, az órai matematikai felfedezés következő elemeinél nyújt segítséget módszerünk:

- (i) fogalmak megalkotása;
- (ii) fogalmaink megszilárdítása;
- (iii) fogalmaink absztrahálása;
- (iv) modellalkotás;
- (v) megfigyelés;
- (vi) analógia;
- (vii) mintafelismerés: teljes indukció;
- (viii) mintafelismerés: proof without words;
- (ix) stratégiák kialakítása;
- (x) bizonyossági szint növelése az igazság monoton növelésével;
- (xi) indoklás megfogalmazása;
- (xii) hibás bizonyítások kreálása;
- (xiii) példák és ellenpéldák együttes hatása;
- (xiv) bizonyítási módszer megtalálása;
- (xv) bizonyítás lépéseinek megalkotása;
- (xvi) ellenőrzés.

A dolgozatban példákat láthatunk az utolsó két felsorolás létjogosultságára vonatkozóan is.

2.3.2. A jelenlegi helyzet áttekintése: a bizonyítások súlya a matematika érettségi vizsgán

A magyar matematikaoktatás hagyományosan problémaorientált, ugyanakkor elméletközpontú. A tételek ellenőrzése inkább történet bizonyításaik számonkérésével, mintsem alkalmazásuk ismeretének tesztelésével. A bizonyítások számonkérése mindig is része volt a matematika érettséginek. (Gondoljunk csak a „Zöld könyv” - Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából I. fejezetére [126].) (Az persze más kérdés, hogy a tanulók hány százaléka értette meg ezeket a bizonyításokat, s hányan voltak azok, akik csak bemagolták azokat, a biztos pontok reményében.) Mára azonban, részben az **1. fejezet**ben elemzett paradigmaváltásnak köszönhetően, a hangsúly az alkalmazások irányába tolódott. A középszintű érettségin nem kérünk számon bizonyítást. Ennek egyenes következménye, hogy a legtöbb iskolában (középszinten) nem is tanítanak bizonyítást, sőt van olyan, ahol ez egyenesen tilos(!). A 2010. május-júniusi érettségi időszakban a matematikából érettségizőknek mindössze a 2,7%-a választotta az emelt szintű érettségit (89889 vizsgázóból 2467), így mindössze ők adtak számot bizonyítási ismereteikből [115]. (Külön megemlítendő, hogy az összes tantárgyat tekintve, ezen alacsony arány ellenére is a matematikát választják a legtöbben emelt szinten.) Már amennyiben igényt tarottak az érettségi 150 pontjából az ezért (a tétel helyes kimondásáért és bizonyításáért együttesen) járó 6 pontra. (Ez az emelt szintű matematika érettségi összpontszámának 4%-a.)

2.3.3. Kísérletek és bizonyítások

A legtöbb tanár úgy érezheti, hiába tanítjuk a bizonyításokat a szokásos deduktív módon, a diákok többsége nem jegyzi meg azokat, de még ha meg is jegyzi, meg nem érti. S ez nem csak a középiskolában van így. Ha valami megmarad, azok az általános iskolából származó aritmetikai ismeretek mellett, a legtöbbet használt összefüggések, tételek. Nem tartozik ide azonban a tételek érvényességi köre, s főleg nem a bizonyításuk. Személyes tapasztalat, hogy egy nagyváros „elit” gimnáziumának informatika tagozatos, s az érettségi után is informatikai területen továbbtanuló diákja, alig egy évvel az érettségi után már nem tudta elkülöníteni egymástól a koszinusztételt, és a koszinusz szögfüggvény definícióját. Mindezek azt mutatják, hogy iskolai szinten még mindig rosszul állunk a bizonyítás fogalmához, annak tanításához, illetve a bizonyításokkal kapcsolatos elvárások megállapításához.

Felmerül hát a kérdés, nem lenne-e elég a (közép)iskolában - az átlagos képességű és nem feltétlenül már a kezdet-kezdetén a matematika iránt elkötelezett - diákok számára egy deduktív, a saját szerkezetéből adódóan (teljes mértékben) befogadhatatlan szemlélet helyett, egy kísérletezésen alapuló, induktív szemléletű matematikát átadni, még ha ezzel nem is jutunk el a logikusok által is elfogadott bizonyításig, csak a *majdnembiztos* állításokig, esetleg a bizonyosság kívánt szintjéig?

A kérdés elsőre talán eretneknek hat, de mégsem az, legalább is addig, amíg nem tisztázzuk egész pontosan a bizonyítás fogalmát, illetve azt, hogy mit is várhatunk el

egy adott korú gyerektől, az életkori sajátosságai, érdeklődési területe stb. figyelembevételével, bizonyítás címén. Mindezen elvárásokat persze szigorúan össze kell hangolni a kimeneti elvárásokkal (érettségi, felvételi, kompetenciamérés), mert ezek között jelenleg éles ellentét feszül.

A fenti kérdések megválaszolása rendkívül bonyolult, hosszadalmas, s nem is célja jelen dolgozatnak, éppen ezért itt csak néhány kapcsolódó, gondolatébresztő megállapítást teszünk. A szerző véleménye szerint a probléma szinte megoldhatatlan, hiszen mire megnyugtató álláspontra jutnánk a kérdésben, ami a rajta dolgozók sokféle, egymását még csak hírből sem ismerő nézőpontja miatt eleve kizárt, addigra az elvárások oly mértékben megváltoznak, hogy a kidolgozott válasz irrelevánssá lesz. A bizonyítás iskolai keretek közé is beilleszthető fogalmáról, szerepéről számos, átgondolásra érdemes álláspont létezik.

A bizonyítás fogalma (Hardy)

Olyan, hogy matematikai bizonyítás, nem létezik; végül is nem tehetünk mást, csak kiemelünk; ... a bizonyítások ... dagályos szóvirágok, céljuk a lélektani hatás, szemléltető ábrák az oktatásban, eszközök a diákok képzeletének serkentésére [67].

A bizonyítás fogalma (Wilder)

A bizonyítás intuitív sugallataink ellenőrzésére használt eljárás [164].

A bizonyítás fogalma (Pólya)

A bizonyítások kapcsolatokat teremtenek a matematikai tények között, s elősegítik, hogy emlékezetünkben megőrizzük őket [135].

Azt, hogy egy fogalom definíciója függ a befogadók életkori sajátosságaitól, érdeklődési körüktől, a szükséges szinttől, azaz az elvárásoktól, teljesen elfogadott. Ez az, amit sok más összetevővel együtt spirális felépítésnek nevezünk. Gondoljunk csak például a hatványozás fogalmára. A hatvány bevezetésekor, az általános iskola 7. osztályában nem más, mint egy azonos tényezőkből álló szorzat rövidítésére használt eljárás, jelölés. Láthatjuk, hogy bizonyos műveletek egyszerűen elvégezhetők a kitevők segítségével, melyek ekkor még pozitív egészek. Ezek után a középiskola kilencedik osztályában kerül elő a nulla kitevő a 0^0 problematikájával. Itt már szükségünk van bizonyos „megállapodásokra”. A nulla kitevős hatvány mellett bevezetjük a negatív egész kitevős hatvány fogalmát is; a korábban megismert azonosságokat nem firtatjuk, rábízunk a permanencia-elvre. (Szerencsésebb persze, ha mi magunk fedeztetjük fel az új hatványfogalmat, mint az egyetlen logikus, és lehetséges kiterjesztést, épp a fenti, nem feltétlenül néven nevezett teljesen természetes elvárás szem előtt tartásával.) Utána látszólag nem foglalkozunk hatványokkal, tizedik osztályban ismét előkerül

a nyolcadik osztályos definíció, és a kilencedik osztályos függvény után a négyzetgyök fogalma. Ezúttal már tárgyaljuk az azonosságokat, sőt kiterjesztjük a gyökvonás fogalmát, jön az n -edik gyök. Tizenegyedik osztályban először bevezetjük a racionális törtkitevős hatvány fogalmát, majd ezt összekapcsoljuk az n -edik gyök fogalmával. Kiderül, a gyökvonás tulajdonképpen hatványozás. Az exponenciális függvény tárgyalásakor, szintén a permanencia-elv és a kétoldali közelítés segítségével vezetjük be a valós kitevős hatványt, hallgatólagosan. Korrekt bevezetése a folytonosság tárgyalásáig várat magára, s a szerző matematika szakos és másodéves volt, amikor a komplex kitevős hatvány fogalmát megismerte.

A fentiek mondanivalója az, hogy ha megkérdezzük valakit a hatvány, vagy a gyök fogalmáról, akkor életkorától függően más és más választ fogunk kapni. Egy-egy tétel bizonyítása esetében ugyanezt azonban a matematikus társadalom nem fogadná el (a tanár társadalom már annál inkább); talán félnek, hogy összedől a matematika építménye Euklidész szigorú bizonyítása nélkül. Az új szemlélet terjedése szerencsére már tetten érhető.

A bizonyítás relativitása (William P. Thurston)

Drámaian világosan látom, hogy a bizonyítás mily mértékben relatív: mindig egy speciális közegben bizonyítunk, egy speciális közönség számára [88].

A bizonyítás relativitása (René Thom)²

Hiszem, hogy a bizonyítás szigora relatív, sohasem teljes. Függ az olvasó előismereteitől és elvárásaitól [88].

A kérdést tovább árnyalja a számítógépek elterjedése, számolási határaik, sebességük, reprezentációs lehetőségeik robbanásszerű fejlődése, valamint (az alkotó jellegű) használatukra vonatkozó elvárások beépülése a társadalmi elvárások közé.

Szintén elgondolkodtató a szerző következő, személyes tapasztalata. A dolgozathoz kapcsolódó cikkek ([72, 110]) publikálása során a folyóiratok (The College Mathematical Journal, International Journal of Computers for Mathematical Learning) szerkesztőitől rendre az a kérés érkezett, hogy töröljük a cikkből a bizonyításokat, de legalább is azokat csupán vázlatos formában, pusztán a főbb ötletek vázolásával tegyük közzé.

A fentiekben leírtak a dolgozatban többször elő fognak kerülni. Az ismételten azonban nem öncélú. Szerepe a hangsúlyozás, a kiemelés, a figyelem felhívása arra, hogy módszerünk használata, vagy akár csak szemléletünk apró megváltoztatása mennyire más színben láttathatja a matematikai megismerés egy-egy problémáját.

²René Thom (1923-2002), francia Fields-érmes (1959) matematikus

3. fejezet

Felfedezések a matematikaórán

„Úgy írtam, hogy az olvasó mindig észrevehesse a tanultak belső indítékait, sőt lássa a felfedezés forrásait is, és úgy érthessen meg mindent, mintha azt saját maga fedezte volna fel.” (G. W. LEIBNIZ)

Mai szemmel nézve Leibniz gondolatai utópisztikusnak hatnak. Manapság a matematikai cikkek deduktív felépítésű erődítmények, melyek még csak véletlenül sem engednek választ találni arra a kérdésre, hogy az adott eredmény *hogyan* született. Mintha a matematikusok titkolni akarnák azt. A cikkek olvasóinak maguknak kell rájönniük arra, amit a cikk írója felfedezett. Az olvasó gyakorlatilag újra kénytelen megalkotni az eredményt. Sajnos a tankönyvek többsége is ilyen, tiszta matematika (pure mathematics), tehát sokkal inkább tudomány, mintsem tantárgy, felfedezésre váró érdekes ismeretlen módjára láttatja a matematikát. Jól megmutatkozik ez abban is, hogy a felfedezettő jellegű feladatok száma az iskola 5. osztálya után a tankönyvekben elenyésző. A tankönyvek mellett az órákon is sokkal inkább kellene támaszkodni az intuícióra, s ezt minden lehetséges eszközzel támogatni, mintsem megpróbálni felépíteni a matematikát az üreshalmazból.

Azt azonban, hogy a diákjaink is mindenre maguktól jöjjenek rá, nem várhatjuk el tőlük. A felfedezéseket és a kísérleteket a tanárnak kell irányítania. A tanár az információ (frontális) forrásából a felfedezéseket segítő társsá lép elő.

Az alábbiakban erre, a tanulók aktív, alkotó részvételével kivitelezhető matematikai felfedezésekre mutatunk néhány példát; egyelőre számítógépek használata nélkül.

3.1. Felfedezések számítógép nélkül

„Már régóta megvannak az eredményeim, csak még nem tudom, hogyan jussak hozzájuk.” (GAUSS)

3.1.1. Műveleti tulajdonságok

Ötödik osztályban kerülnek elő először absztrakt formájukban az algebrai kifejezések. A tanulók absztrakciós készsége ebben a korban még nem minden esetben van olyan szinten, hogy az $(a + b)c = ac + bc$ típusú azonosságokat (műveleti tulajdonságokat) a maguk absztrakt formájában el tudják sajátítani. A sokszor minden áron kizárólag absztrakt formában elsajátíttatni, és ezáltal elsajátítani kívánt azonosságok tanulási nehézségei, illetve gyakran kudarc után nem csoda, hogy sokaknál később is gondot okoz a hasonló kifejezések kezelése. Segítségül hívva azonban egy egyszerű geometriai modellt - a téglalap eddigre már mindenki által ismert területszámítását - a megértést segíthetjük egy ábrával, például a következő módon.

3.1. ábra. Műveleti tulajdonságok: $(b + c)a = ba + ca$

A bal oldali ábrán egy téglalap látható, mely oldalainak hossza $b + c$ illetve a , így területe $t = (b + c)a$. Vágjuk fel téglalapunkat a jobb oldali ábrán látható módon két téglalapra. Így két téglalapot kaptunk, melynek oldalai a és b , illetve a és c hosszúságúak. A két rész¹ területének összege megegyezik az eredeti téglalap területével, vagyis: $(b + c)a = ba + ca$.

3.1. Megjegyzés. Az ilyen és hasonló ábrák hasznosságát szélesebb körben való alkalmazhatóságuk is dicséri. A fenti ábra átjelölésével például az $(a \pm b)(c \pm d)$ típusú összefüggések mindegyike tárgyalható.

3.2. Megjegyzés. Érdekes kérdés, és ez tulajdonképpen a dolgozat további részén is végigvonul, hogy elfogadjuk-e ezt bizonyításnak? Igényel-e egyáltalán bizonyítást,

¹Általában fontos persze, hogy mérhető részekre vágjunk, gondoljunk csak a (Hausdorff)-Banach-Tarski paradoxonra.

főleg ebben az életkorban bármi is, ami ilyen könnyen „igazolható” az intuitív belátás útján? Miért is bizonyítjuk, ha a fenti összefüggés szerepel a valós számok műveleti axiómái között? Elfogadhatjuk-e, hogy a diákok eddigre már ismerik a téglalap területszámítását? A problémát tovább árnyalja az a tény, hogy ezt, és a többi műveleti tulajdonságot jóval korábban, már a kezdet kezdetén, az (írásbeli) összeadás, szorzás tanítása/tanulása során intuitív módon, aktívan használjuk [145].

3.1.2. Nevezetes azonosságok - egy példa

A kilencedik osztályos tananyag jelentős része a nevezetes szorzatokkal, a szorzattá alakítás különböző módszereivel, az algebrai törtekkel való műveletekkel foglalkozik. Ezen ismeretek eszközszintű birtoklása elengedhetetlen feltétele a továbbhaladásnak, tanulásuk viszont nehéz. Ennek egyik oka, hogy tanításuk, az alkalmazásokat is beleértve, az előzőekhez hasonlóan, teljesen formális.

Az előző, általános iskolában használható ábrák apró módosításával középiskolában is jól használható segítséget kaphatunk, fenntartva ezzel a tanításban rendkívül fontos folytonosságot.

3.2. ábra. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Az ábrán látható négyzet területének kétféle módon történő felírásával az

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

azonossághoz jutunk.

A fenti módszer, az ún. kétoldali közelítés, illetve összeszámlálás módszere eredményesen használható a matematika szinte bármely területén [109].

3.3. Megjegyzés. Elegendő hát ennyi, vagy feltétlenül szükséges a „minden tagot minden taggal” formalizmusa? Mivel a bizonyítás fogalma különösen a számítógépes módszerek elterjedésével nem csak az iskolában (az iskolai matematikában) de a tudományban is tisztázásra vár, meg kell elégednünk annyival, hogy a választ minden esetben a kimenet elvárásai, igényei, illetve az aktuális tanulócsoport sajátosságai,

lehetőségei adják meg. Másrészt viszont ismert, hogy a tanulók egy részének gondolkodása inkább vizuális, míg másoké inkább formális, így az oktatásban mindkét megközelítés párhuzamos használata javasolt.

3.1.3. Nevezetes összegek - egy példa

Az első n pozitív egész szám összegének zárt alakjára vonatkozó Gausztól származó szép bizonyítást szinte mindenki ismeri. Sokan úgy gondolják, hogy míg Gauss osztálytársai *kiszámolták*, addig Gauss *bebizonyította* a kérdéses összefüggést.

Ezt tanulmányozva, a (teljes indukciós) bizonyítás ellenére is felmerülhet diákjainkban a *miért*, egész pontosan a *miért éppen ez* kérdése. A kérdés, és általában az ilyen típusú kérdések megválaszolhatók, s ezáltal az összefüggés lényege, a formula mögötti valódi matematika(i tartalom) is megvilágítható. A megvilágítás még élesebb képet ad abban az esetben, ha az összefüggést maguk a diákok fedezik fel, aktívan megalkotva saját matematikájukat. Piaget szerint is a diákok jobban megértik a cselekvést, mint a szavakat.

Az első n pozitív egész szám összege természetes módon szemléltethető a következő módon. Helyezzünk el kavicsokat (egységnyi területű négyzeteket) az alábbi ábrán látható módon.

3.3. ábra. $1 + 2 + 3 + \dots$

Amit kaptunk, az egy $n \times (n + 1)$ -es téglalap fele.

3.4. ábra. Felfedezés: A pozitív egészek összege és a téglalap fele

A fenti elrendezés kavicsainak száma (a síkidom területe) kétféle módon is meghatározható. A kavicsokat (a négyzetek területét) oszloponként összegezve a kavicsok száma (a terület): $1 + 2 + \dots + n$. A kavicsokat (a négyzetek területét) egyszerre, a fél téglalap segítségével összeszámolva $\frac{n(n+1)}{2}$ számú kavicsot (nagyságú területet) kapunk. Így a kavicsok számának (a síkidom területének) kétféle módon történő meghatározásával kapjuk:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

3.4. Megjegyzés. Magának a fenti ábrának, illetve ezáltal a mögöttes összefüggésnek a megközelítése is apró lépésekben, induktív módon javasolt. Rajzoljuk fel először az $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots$ összegnek megfelelő ábrákat, s hagyjuk, hogy a diákok maguk fedezzék fel az összefüggést. (Itt tulajdonképpen a bizonyítást adó formális teljes indukció absztrakt voltának megszüntetése történik azáltal, hogy szabad teret engedünk az intuíció szárnyalásának.) Ha elakadnak, jelen helyzetben a tanár feladata nem az információ közlése, hanem a felfedezés segítése. Ez történhet például egy jó kérdéssel: Mi történik, ha két szomszédos ábrát ügyesen egymásra fordítunk?

3.5. Megjegyzés. A fenti módszer lehetőséget kínál arra is, hogy szakítsunk a rugalmatlan, a tanulókat lekötő, illetve a társadalmi elvárásoknak megfelelni egyre inkább képtelen, frontális tanítási módszerrel. A diákok kisebb csoportokban is dolgozhatnak a problémán, a csoporton belül egymás munkáját segítve, de lehetőségünk van arra is, hogy megfelelő előkészítés után projekt jellegű, nagyobb lélegzetvételű otthoni feladattá konvertáljuk a problémát.

3.6. Megjegyzés. A fenti ábrák elforgatásával bevezethető a háromszögszám fogalma, s tárgyalható jónéhány kapcsolódó tulajdonság, azonosság is.

3.5. ábra. Felfedezés: A pozitív egészek összege és a háromszögszámok

3.1.4. Felfedezések a geometriában - mérés és szerkesztés

Az elemi geometriában, gyakorlatilag az életkori sajátosságoktól függetlenül, nincs meggyőzőbb a diákok számára, mint a *mérés* és a *szerkesztés*. Valójában a koordináta-geometria sem tesz mást, mint ezek pontatlanságát és esetlegességét helyettesíti (a

pontos) számolással. Saját, többszörös megerősítést nyert tapasztalat, hogy a középiskolai elemi síkgeometria tanításának végén, 10. osztályban, 15-16 éves korban is, még mindig egy-egy jó ábra, szerkesztés, tehát jelen környezetben az *intuitív belátás* után képtelenség a *deduktív következtetés* logikáján alapuló bizonyítást magát, vagy akárcsak annak szükségességét elfogadtatni. Ez az a terület, ahol a személyes tapasztalatok által szerzett bizonyosság elválaszthatatlan a bizonyítástól, tanulói szemmel nézve szükségtelenné téve azt.

A következőkben arra mutatunk néhány példát, hogyan lehet mégis, az összefüggések felfedezése által a bizonyosság kívánt szintjére eljutni, megalapozván, sőt esetleg észrevétlenül létre is hozva a bizonyítást.

3.1.5. A háromszög belső szögeinek összege I.

A következő ábrák egy, a háromszöggel végzett kísérlet kulcsfontosságú pillanatképei [60].

3.6. ábra. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege I.

A fenti megközelítés (bizonyítás?) jelentőségét az adja, hogy a tanulók *aktív, alkotó jellegű* részvételével jön létre. Lehetőséget ad a cselekedtetésre; a *Tépd szét!, Illeszd össze!, Mit tapasztalsz?*, s végül de nem utolsó sorban a *Miért ezt kaptuk?* jellegű megközelítésre, egy deduktív szemléletű felépítés helyett.

3.7. Megjegyzés. Ebben a konkrét esetben, és hasonló esetekben szintén, sokkal hatékonyabb, ha a tanulók maguk vágják ki háromszögeket. Így lesz aki hegyesszögű, derékszögű illetve tompaszögű háromszöggel dolgozik. Akad majd a kivágott és szét-tépett háromszögek között egyenlő szárú, sőt szabályos is. Így segíthetjük az önálló tapasztalatszerzésen alapuló belátást. A számos kísérlet azonos eredménye vezethet el a felfedezéshez. Az önálló felfedezés izgalma segítheti a bizonyítási igény kialakulását is. Akár ezzel az egyszerű példával is jól szemléltethető, hogy a matematikai alkotás egyik leghatékonyabb módja az aktív cselekvésen alapuló tapasztalatszerzés.

3.1.6. A háromszög belső szögeinek összege II.

A következő ábrákon bemutatott *kísérlet* szintén bármiféle formalizmus nélkül alkalmas a fenti összefüggés bizonyítására. Külön előnye, az előzőhöz hasonlóan, hogy nem kell előre megmondanunk, mit is szeretnénk a kísérlettel bebizonyítani, így a felfedezés öröme teljes maradhat. Jelen esetben a háromszög oldalai mentén eltolt, s csúcsainál elforgatott gyufaszál fejének állása adja a bizonyítást, egyállású és váltószögek fogalmának használata nélkül [60].

3.7. ábra. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege II.

3.1.7. A háromszög belső szögeinek összege III.

A következő ábrák szintén egy szemléletes bizonyítást adó sajátkezüleg is kivitelezhető kísérlet pillanatképei. Az alábbi ábra képei a Mathematica programcsomag segítségével készültek [169]. A kísérlet kivitelezéséhez számítógép természetesen nem szükséges, esetleges használatának előnyeiről a (3.3.4.) fejezetben lesz szó.

3.8. ábra. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege III.

3.8. Megjegyzés. A fenti bizonyítással bevezethető a háromszög középvonalának fogalma is.

3.1.8. A Thalész-tétel

A diákok számára tökéletesen meggyőző, s ezáltal a többségük számára a további bizonyítást szükségtelenné és értelmetlenné tevő bizonyítási módszer Thalész tételére is néhány, saját kézzel kivitelezett szerkesztés és mérés. Egy körben egy átmérőt behúzva, annak két végpontját a körvonal több, szabadon választott pontjával összekötve, a keletkezett kerületi szögeket szögmérő segítségével lemérve azonban, főleg a fellépő pontatlanságok okán, nem tudunk eljutni a bizonyosság szinte megdönthetetlen szintjére. A kérdés nyitott marad, vajon tényleg bármely kerületi pont jó választás, vagy csak mi voltunk szerencsések? Jó példa ez hát arra, hogy a kívánt bizonyossági szint eléréséhez itt már érdemes a számítógépek segítségét igénybe venni (3.4.4. fejezet).

3.9. ábra. Thalész-tétel - Bizonyosság vagy bizonyítás?

A mérés és megfigyelés, a kísérleteken keresztüli tapasztalatszerzés nem csak a geometria, de a valószínűesszámitás területén is segíthet, sokszor még formálisan nehezen megközelíthető problémák esetében is. Az alábbiakban erre láthatunk egy példát.

3.1.9. Egy valószínűségi modell

Tekintsük a következő feladatot:

3.9. Feladat. Két játékos, Anna és Balázs, a továbbiakban A és B egy szabályos dobókockával játszik. A játékot A kezdi és a kockát felváltva egyszer-egyszer feldobva az nyer, aki először dob hatost. Mi a valószínűsége annak, hogy A nyer?

Tekintsünk először egy „hagyományos” megoldást:

Megoldás. Jelölje A azt az eseményt, hogy A nyer. Keressük $P(A)$ értékét. Vezessük be a $P(A_n)$ jelölést, mely jelentse azt, hogy A az n . ($n \in \mathbb{N}^+$) lépésben nyer. Ekkor $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$. Könnyen látható, hogy n csak páratlan szám lehet, hiszen A csak páratlanadik dobásra nyerhet. Legyen $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$). Ekkor $P(A_1) = \frac{1}{6}$, $P(A_3) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2$, hiszen ahhoz, hogy A a 3. dobásra nyerjen annak kell teljesülnie, hogy az általa dobott első, és a B által dobott második dobás ne legyen hatos, míg az A által dobott 3. dobás éppen hatos legyen. Hasonló megfontolásokkal adódik, hogy $P(A_n) = \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$. Így a keresett valószínűséget a következő összeg formájában tudjuk felírni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(A_{2k+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{6}{11}.$$

3.10. Megjegyzés. A fenti megoldásban használtuk (kénytelenek voltunk használni) a végtelen mértani sor fogalmát, mely a jelenleg életben lévő hivatalos tananyagot tekintve csak emelt szinten kerül tárgyalásra 11. osztályban. Ezzel ki is zártuk a tanulók 96-98%-át a megértésből.

Éljünk most egy más megközelítéssel.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát.

3.10. ábra. Dobás az első hatosig

Itt S jelöli a start állapotot, innen A dob, aki $\frac{1}{6}$ valószínűséggel dob hatost, így jutunk a bal oldali A , azaz A nyert állapotba, illetve $\frac{5}{6}$ valószínűséggel nem hatost dob, így a jobb oldali C_1 állapotba jutunk, ahonnan B dob. Ha hatost dob, nyert (B állapot), ennek valószínűsége most is $\frac{1}{6}$, ha pedig nem hatost dob, akkor ismét A következik, visszajutottunk tehát az S állapotba. Most tulajdonképpen A -nak a start állapotból való nyerésének valószínűségét keressük, jelölje ezt $P_S(A)$. Analóg módon jelöléseket bevezetve a többi állapotra is, a következő egyenletrendszerhez juthatunk.

$$\begin{aligned} P_S(A) &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}P_{C_1}(A) \\ P_{C_1}(A) &= \frac{5}{6}P_S(A) \end{aligned}$$

ahonnan $P_S(A) = \frac{6}{11}$ adódik [104].

A második módszer előnye nem csak az, hogy nem használja például a végtelen sor fogalmát, s ezáltal szélesebb kör (akár általános iskolások) számára megközelíthetővé teszi a megoldást, hanem elsősorban a megközelítés kézzelfogható jellege. A valószínűségi probléma lényegét ragadja meg az ábra, a játékot ténylegesen követhetővé, játszhatóvá teszi. A játék során a gyerekek maguk találhatják meg az egyes átmeneti valószínűségeket, elsősorban tapasztalati úton. Maguk jöhetnek rá az egyes állapotok egymáshoz, s a kérdéses valószínűséghez való viszonyára, sőt tulajdonképpen számos játékon keresztül szerzett tapasztalataik után ők maguk rajzolhatják fel a fenti folyamatábrát.

3.11. Megjegyzés. A fenti két módszer ötvöztetésével, a kétoldali közelítés módszerét használva a végtelen mértani sorok elméletének ismerete nélkül is meg tudjuk határozni a fenti sor összegét. Sőt, a paraméterek változtatásával más mértani sorok is összegezhethők, így akár azok összegének általános alakja is felfedezhető. Lehetőségünk van például a lépések számának várható értékének hasonlóan egyszerű meghatározására. Számos, a fentiekhez hasonló probléma, s az ide kapcsolódó részletes módszertani elemzés megtalálható a szerző [104] cikkében (Attila Máder. *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6**(1), 15-41, 2008.).

3.1.10. Módszertani összefoglaló

A fejezetben bemutatunk néhány példát a tanulói felfedezések számítógép felhasználása nélküli támogatási lehetőségeire. Az ismert problémák szokásostól eltérő tárgyalási módja új lehetőségeket vet fel. Egy-egy ábra felrajzolása (**3.1.2.**), illetve közös létrehozása, vagy a szokásos tanári kérdések megváltoztatása ösztönzőleg hathat diákjainkra. Láthattuk, hogy egy kis ötletességgel az itt bemutatott módszerek is alkalmasak nem csak egy adott probléma, de akár egy egész témakör tárgyalására (**3.1.3.**). A felfedezések alkalmasak lehetnek egy-egy új terület automatikus, természetes bevezetésére

is (**3.6. megjegyzés**). A tanári irányítással végzett tömeges tanulói kísérletek segítségével lehetővé válik a kollektív tapasztalatszerzés (**3.1.5.-3.1.8.**). A kísérletek segítségével bevezethetünk új fogalmakat (**3.8. megjegyzés**), de akár el is kerülhetjük azok halmozását (**3.1.6.**). A tömeges tanulói kísérletek kiválóan álcázhatók játéknak is (**3.1.9.**), így alkalmasak a játékos formában történő ismeretszerzés minden előnyének kihasználására.

3.2. A tanár megváltozott szerepe

Az információrobbanás oktatásra gyakorolt legfontosabb hatása a tudás fogalmának ártértékelődése volt. A lexikális tudás értékét vesztette, helyette az információs tengerben való eligazodás, a rendelkezésre álló információk felkutatása, összekapcsolása és hasznosítása bír értékkel. Többé már nem a tanár az egyetlen, sőt nem is az elsődleges információforrás.

3.2.1. IKT - Infokommunikációs technológiák az oktatásban

„Az olyan ember, aki nem ért a számítógéphez a XXI. században analfabétának fog számítani.” (TELLER EDE)

A XXI. század tanárával szemben természetes elvárás, hogy ismerje és használja a kor követelményeinek megfelelően az új infokommunikációs technológiákat (IKT (ICT)). A legtöbb esetben az ezekhez szükséges továbbképzések a tanárok többsége számára nehezen elérhető, elsősorban anyagi okok miatt. A kötelező tanórák magas száma, az iskolák technikai felkészületlensége csak súlyosbít a helyzeten.

A műveltség egyik új fokmérője a digitális írástudás, ami a tradicionális tudás, a számítógépes, valamint az információs műveltség szintézise. Napjaink egyik legfontosabb, legtöbbet emlegetett kérdése, hogy a modern információs és kommunikációs technológiák hogyan, mennyire terjedtek el, illetve, hogy ezeket az eszközöket milyen mértékben tudja a lakosság alkalmazni, hasznosítani, valamint az, hogy ezen eszközök milyen mértékben váltak a hétköznapi élet, a kultúra elfogadott elemeivé.

Mindezek tekintetében ugyan az elmúlt években a magyar adatok javultak, azonban európai összehasonlításban ez még csak elegendőnek sem mondható. Egy 2007-es, az Európai Unió 25 tagállamát vizsgáló Eurostat felmérés szerint Magyarország az egyik legrosszabbul teljesítő ország ezen a területen. Az IKT kompetenciák és digitális írásképeség mérésére kifejlesztett - a teljes lakosságot vizsgáló - összesített digitális írástudás index (COQS²) alapján Magyarország Lengyelországgal együtt az utolsók

²Communicating with others (by e-mail and other online methods);
Obtaining (or downloading) and installing software on a computer;
Questioning the source of information on the Internet;
Searching for the required information using search engines.

között szerepel. E tekintetben az EU(15) átlaga 0,81, míg Magyarorszáé 0,3. De nem csak a teljes lakosság, hanem a fiatalok digitális írástudása is jelentősen elmarad az uniós átlagtól [113]. A következő ábra egy SIBIS (Statistical Indicators Benchmarking the Information Society) GPS 2002 felmérésből származik [143].

3.11. ábra. Digitális írástudás - COQS index

A jövőképet tovább rontja, hogy Magyarországon az információs technológiai kiadás mindössze a GDP 2,4 %-a; míg például Ausztriában, Csehországban vagy Észtországban ez az érték meghaladja a 3%-ot [113].

Az információs társadalomba való bekapcsolódás szempontjából meghatározó az oktatás szerepe. Ezért is kiemelkedően fontos az iskolák digitális felszereltsége, a tanárok infokommunikációs ismerete, illetve az új technológiák alkalmazásának igénye, valamint lehetősége a tantermekben. Hazánk helyzete a 100 diákra jutó internettel rendelkező számítógépek tekintetében európai szinten megfelelő. A kedvező iskolai eszközellátottságunkat azonban beárnyékolja, hogy nagyon alacsony az elmúlt években az oktatás során számítógépet használó tanárok aránya, különösen az általános iskolában. Magyarország az uniós átlaghoz képest a sereghajtók között szerepel az IKT és digitális írástudás területén. Mindössze az iskolákkal, oktatással kapcsolatos felméréseknél érjük el az uniós átlag színvonalat. Az elmúlt évek pozitív hazai tendenciái ellenére változatlanul az alpinfrastruktúráról, hozzáférési problémákról lehet beszélni, miközben az Európai Unió 2006-os direktívái már a digitális írástudás, az „intelligens” e-szolgáltatások, a befogadó információs társadalom témaköreit emelik ki [69].

3.2.2. Digitális bennszülöttek és digitális bevándorlók

„Amikor a fiadat oktatod, a fiad fiát is oktatod.” (ŐSI BÖLCSESSÉG)

Felnövőben van a sokak által csak digitális bennszülöttnek³ emlegetett generáció. Ők azok, akik életében már végig jelen volt a számítógép, az internet, így a legnagyobb természetességgel nyúlnak a digitális eszközökhöz, azok használatát organikus folyamatként élik meg, legyen az egy PC, laptop, telefon, vagy valamely, csak virtuálisan elérhető forrás. Az őket nevelő generáció tagjai, akik nem születettek bele a digitális eszközök világába, a digitális bevándorlók. Nekik mindössze arra volt (van) lehetőségük, hogy bizonyos szintig megtanulják ezen eszközök használatát, s így mint olyanok, nem is szolgálhatnak mintául a digitális bennszülöttek számára, hiszen mindaz ami a bennszülötteknek természetes, a bevándorlóknak kemény munkával tanult új kihívás. Nemhogy mintául nem szolgálhatnak számukra, de még a tempót is nehezen veszik fel velük. Legalábbis számos erre vonatkozó oktatásszociológiai felmérés ezt mutatta ki. A digitális bennszülöttek jellemző tulajdonsága, hogy gyorsak, s ennek következtében türelmetlenek. Nem értik például, miért is kell bizonyos információkat, adatokat megtanulni, amikor azokhoz egyetlen kattintással hozzá lehet jutni. A generáció tagjai mire elvégzik az egyetemet átlagban 10 000 órát töltenek videojátékokkal, 20 000 órát tévénezéssel, s mindössze 5 000(!) órát olvasással [139]. Ennek következtében szövegértési képességük rossz, értő olvasásra egyre kevésbé képesek. (Hasonló negatív hatás figyelhető meg a redukált elektronikus kommunikáció hatására a helyesírás esetében is.) Előnyben részesítik az ábrákat a szöveggel szemben, ugyanakkor egyetlen dologra nem tudnak hosszú távon koncentrálni, hiszen szeretik párhuzamosan feldolgozni az információkat. Éppen ezért esetükben nem határolódik el a tanulás és a szórakozás, s szintézisükből kialakult a szórakoztató tanulás (edutainment). Marc Prensky abból kiindulva, hogy egy magára valamit is adó digitális bennszülött soha nem olvasná el egyetlen program felhasználói kézikönyvét sem, helyette inkább a program használata közben tanulja meg annak használatát, egyenesen azt gondolja, hogy a leghatékonyabban számítógépes játékokon keresztül lehet a digitális bennszülötteket tanítani (digital-game based learning (DGBL)), ez a játékalapú tanulás. Számukra az információ minden esetben változatos formában: képből, hangban, videóban, szövegben érkezik. Ezzel a bevándorlók a legtöbb esetben egyszerűen nem tudnak mit kezdeni. Ők a hagyományos, lineáris elvű tanítás hívei, nem hiszik, hogy a véletlen elérés, a gyorsan váltakozó rövid ideig tartó impulzusok hatékonyak lehetnének a tanulásban.

Az infokommunikációs lehetőségek térnyerése jelentősen megváltoztatta a diákok iskolával szemben alkotott elvárásait is; ezek a diákok tehát már nem azok, akikre a jelen oktatási rendszert tervezték. Sőt, nem pusztán arról van szó, hogy a digitális bennszülöttek másképp gondolkodnának, hanem a legújabb neurobiológiai kutatások szerint agyuk szerkezete is másképp alakult. Gondolkodásuk nem lineáris, hanem hypertext alapú, szökellő. Figyelmük nem folyamatos, hanem lökészerű és megosztott.

³A fogalmat Marc Prensky használta először. Közkedvelt elnevezés még a screenagers, illetve a N(et)-generáció (Generation N) is [139].

Oktatásunk egyik legnagyobb problémája éppen ez, hogy a digitális világ nyelvét csak akcentussal bíró tanárok fáradoznak azon, hogy a nyelvet anyanyelvi szinten beszélőket valamire megtanítsák [139]. Néhány éve még például szenzációnak számított egy-egy színes ábrákkal teli, anyanyelvűek által írt nyelvkönyv. Manapság pedig szinte kifogástalanul meg lehet tanulni egy nyelvet pusztán az internet segítségével. Az információkkal telezsúfolt statikus CD-k pedig olvasatlanul végzik a fiók mélyén [140].

A digitális bevándorlók és bennszülöttek közötti folyamatosan növekvő különbség nagyságrendi voltát mutatja, hogy míg a digitális bevándorlók épp csak tanulatják az internet használatát, addig a digitális bennszülöttek már réges régen az Internet of Things (IoT) rendszerében élnek. Az IoT világában gyakorlatilag bármely „dolog” képes bármely másikkal kapcsolódni. A hatféle B (bármivel, bárkivel, bármikor, bárhol, bármilyen szolgáltatással, bármilyen hálózaton keresztül) korlátlan lehetőséget kínál felhasználói számára.

A számítógéppel, illetve a számítógépes játékokon keresztül kialakult, fejlesztett gondolkodási képességeik közé tartoznak például a megfigyelések, a gyors alkalmazkodás képessége, a szabályok gyorsabb kikövetkeztetése, a hipotézisek megfogalmazásának képessége, illetve az, hogy a diákok azokat a folyamatokat részesítik előnyben, melyek aktív cselekvéssel járnak. Éppen ezeket próbáljuk meg kihasználni a felfedezések előtérbe állításával. A fentiekben vázolt szakadék áthidalására lehet segítségünkre például az e-learning néven ismertté váló keretrendszer, módszertani fogásként pedig a felfedezések előtérbe helyezése, az önálló kutatás (játékokon keresztül történő) órai szintű szimulálása. Ez utóbbi felépítése során bátran támaszkodhatunk a kutatás-alapú tanulás/tanítás módszereire, előzményeire.

3.2.3. E-learning

A diákok (digitális bennszülöttek) jórésze kifogásolja is, hogy tanárai nem, vagy csak érdektelen módon használják az internetet. (Magyarországon a 14-17 évesek 94 százaléka internethasználó, míg az őket tanító 30-60 éves korosztálynak mindössze a 45 százaléka használ internetet. A legfőbb különbség azonban a használat aktivitásában van [146].) Az internetben rejlő oktatási lehetőségek egy megvalósulása az e-learning. Bár magára az e-learning-re általánosan elfogadott definíció eddig nem született, hatásait máris érzékelhetjük. Előnye a hagyományos oktatással szemben többek között a földrajzi távolságok áthidalása. A diákoknak nem kell órákat utazni egy-egy óra miatt, s ezzel nem csak az ökológiai lábnyomuk mérete csökkenthető, de az órák térben és időben szabadabban szervezhetők. Nem állhatja útjukat még egy-egy járvány sem [87]. Középiskolákban is vannak már ennek kezdetleges jelei, illetve egyre több egyetem használ egyelőre még csak kiegészítésként VLE-rendszert (Virtual Learning Environment). Ilyen például a Moodle, vagy a Szegedi Tudományegyetem által használt Coospace. Az amerikai egyetemek oldalain barangolva pedig egyre gyakrabban botlunk bele komplett kurzusok elektronikusan is elérhető anyagaiba, s akár teljes előadás-sorozatok videó anyagait is megnézhetjük, esetenként a videóhoz csatolt magyarázó

szövegekkel, ábrákkal. Találkozhatunk továbbá például Skype-on tartott konferenciákkal, előadásokkal is.

Az online módszereknek számos előnye van. A segédanyagok mindegyike elektronikus úton előállított, így gond nélkül, környezetbarát módon sokszorosítható, a kurzusok anyaga könnyen rögzíthető. A digitális bennszülöttek párhuzamos tanulási módszereinek kedvez, hogy egyszerre több téma tárgyalásába is be lehet kapcsolódni. (Az e-learning alapú oktatás egyik formája az aszinkron tanulás, mely során a tanuló a tananyagot a saját tempójában dolgozza fel, szemben a szinkron tanulással, melyben a képzés egy meghatározott időben zajlik, bár a tanulóknak itt sem kell feltétlenül egyazon helyen tartózkodniuk. A saját ritmusban való haladás lehetősége szintén a hatékonyságot növelheti.) A kurzus résztvevőinek száma tetszőlegesen nagy lehet, a mindennapi kommunikációban megszokott online közösség a tanulásban is egymás segítségére lehet. A gyengébb képességűek kevésbé érzik magukat frusztrálva; a tanulási folyamat részesei egyenrangú félként vehetnek részt a foglalkozásokon. Az online módszerek egyik hátránya viszont épp a fizikai távolság meglétéből ered. A tanár nem tudja metakommunikatív eszközeit érvényesíteni, a személyes jelenlétéből eredő előnyöket kihasználni, s a diákok ezt kihasználván könnyebben figyelmen kívül tudják hagyni az instrukciókat is. (Egy szigorú következetességgel működő rendszerben ennek hatását azonban minimálisra lehet csökkenteni.) Meg kell még említenünk, hogy a villámgyors reakciókat igénylő kontakthelyzetek kezelésére a tanár csak személyes jelenlét esetén képes. A munka értékelése szinte kizárólag csak írásban történhet, ami csökkenti az azonnali, szóbeli dicséret motiváló erejét [63].

3.12. Megjegyzés. Az Európai Unió 2001-ben fogadta el az eEuropa program részeként az eLearning-csomagot, melynek célja, hogy a digitális technológia előnyeit az európai polgárok rendelkezésére bocsássa [162].

3.2.4. A tanár új szerepe

Az információs társadalom hatása

Az információs társadalom által támasztott igényeknek való megfelelési kényszer hatására a tanárok szerepe minden eddiginél mélyrehatóbb változás előtt áll. A tanár szerepe a tények és kész megoldások tanítása helyett egyre inkább a kompetenciák és jártasságok átadása, az élethosszig tartó tanulásra (lifelong learning) való felkészítés lesz. A tanár a továbbiakban csupán egyike a tanulót körülvevő számtalan információforrásnak, sőt, maga is folyamatosan tanul a rendszerben. Sokkal inkább tekinthető az információáramlás menedzserének, mintsem az információ forrásának. Sokan a tanárok legfőbb feladatának, már egészen kisiskolás kortól kezdve, a diákok az információk megszüntetésére alkalmassá tevő kritikai képességekkel való felruházását tartják. A mindent tudó, porosz szellemű tanárt felváltja a digitális világban eligazodni képes, új, tanácsadó szellemű tanár, aki a tanulókat aktív, önálló, de ugyanakkor közös felfedezésekhez segíti.

A kérdések szerepe

A matematika felfedeztetés-központú oktatásában megváltozik a kérdések szerepe, jellegük átalakul. Korábban a tanári kommunikációt a téma kifejtésére irányuló, illetve a probléma felvezetését megcélzó, adat megállapításra vonatkozó, valamint a fogalom jelentésére, megnevezésére vonatkozó kérdések uralták [96]. Az egyes kérdések megközelítése a hagyományos szemlélet szerint ugyanis leggyakrabban zárt úton, a *Bizonyítsuk be, hogy...* típusú problémakitűzéssel történik. Ez azonban nézőpontunk szerint valójában nem is problémakitűzés. Kérdésfelvetésnek, gondolatébresztésnek, önálló, szabad alkotásra való sarkallásnak végképp nem nevezhető. A többletismerettel rendelkező felsőbbrendűségével ily módon megfogalmazott feladatok a legtöbb mai diák számára nehezek. Nehezek, mert idegenek a számukra, idegenek, mert értetlenül állnak előtte, hiszen manapság, amikor folyamatosan publikálnak a weben, önálló alkalmazásokat hoznak létre, minden korábbinál jobban igénylik, hogy részesei legyenek a (matematikai) alkotási folyamatnak is, a tanulás számukra ne passzív befogadás, hanem aktív alkotás legyen. Ezen (teljesen természetes módon) felmerülő és jogos, de ugyanakkor a hagyományos módszerekkel kielégíthetetlen igények sora által keltett kétely árnyékában nem beszélhetünk (matematikai) problémamegoldásról, csak kizárólag formális tevékenységről. A formális tevékenységeknek persze fontos szerepük van bizonyos készségek, algoritmusok, eljárások eszközszintű elsajátításában, de a teljes tanulási folyamatot mégsem lehet pusztán rájuk építeni. Mindemellett tudjuk, hogy senki számára nem közölhetünk egy, a meglévő fogalmainál magasabb szinten lévő fogalmat definícióval [145]; s itt implicit módon ez történik. Ezekre a kérdésekre a legtöbb formális bizonyítás nem ad valódi, a gyerekek számára is megnyugtató, a probléma lényegét feltáró választ, s a további kérdésfelvetést sem segíti, annál is inkább nem, mert tulajdonképpen nem is beszélhetünk kérdésfelvetésről. Minden esetben célunk kellene legyen az összefüggés, és általában az új ismeret felfedeztetése. Ha a diák maga jön rá az adott összefüggésre számos sikeres - és persze ezt megelőzendően számos értékes tapasztalattal szolgáló sikertelen - próbálkozás után, magáénak érzi azt, hiszen ő maga találta. A (kísérleti) fizikus, a kémikus folyamatosan kísérletezik, s a kísérleteiből származó tapasztalataiból alkotja meg új ismereteit. S kísérletezik a maga módján a matematikus is. Tanításunkban ennek sajnos vajmi kevés nyoma van. A zárt végű feladatok korlátozó, az önálló gondolatokat kizáró merev keretei helyett teret kell engednünk a nyitott kérdések szabadságának.

A sejtések szerepe

A tanár elsődleges szerepe tehát a felfedezések segítése, a sejtések motiválása. A korábbi, konkrét példák esetében ez azt jelenti, hogy segíthet például a téglalapok összeillesztésében (**3.1.3. fejezet**), vagy a kavicsok megfelelő alakzatba történő elrendezésében. Szerepe sokszor „csak” annyi, hogy felírja a köztes lépések eredményét a táblára (**3.1.9. fejezet**), vagy felhívja a figyelmet arra, amire figyelni kell, például, hogy milyen irányba mutat a gyufa feje (**3.1.6. fejezet**). A jó sejtések mindig is nagy hajtóerőt

jelentettek a matematikában. Ezeket azonban nagyon jól kell megfogalmazni, s a jól megfogalmazott sejtéseket az eredményekkel azonos szinten kell kezelni. Erre a matematika történetében számos helyen találhatunk utalást. Gondoljunk például arra, hogy Fermat sejtése a Fermat-számok prím voltáról hamisnak bizonyult ugyan, de kutatásokat, felfedezéseket ösztönzött.

A számítógépek szerepe

A sejtések legfontosabb forrása éppen a számítógépek által is lehetővé tett, illetve kiterjesztett kísérleti matematika. Azt, hogy ennek létjogosultsága van még a tudományban is, nem csak a korábban ismertetett Borwein-féle vonal mutatja, de jól példázza többek között a Siemion Fajtlowicz amerikai matematikus által létrehozott **Graffiti** nevű program, mely gráfelméleti sejtéseket generál az adatbázisában megtalálható gráfok közös paramétereit vizsgálva. Egyik sejtése például a kommunikációs bonyolultság-elmélet egy kulcskérdéséhez kapcsolódik, s bár magára a kérdésre Alon és Seymour negatív választ adott, egy gyengített változata mind a mai napig nyitott [98].

Kísérleteikkel a diákok tulajdonképpen (önálló) kutatásokat végezhetnek, így a kísérleti matematika számos ponton kötődik a kutatásalapú tanuláshoz.

3.3. Felfedezések a számítógép eszközszintű felhasználásával

„A középszerű tanár magyaráz. A jó tanár indokol. A kiváló tanár demonstrál. A nagyszerű tanár inspirál.” (WILLIAM ARTHUR WARD)

A következőkben olyan, bárki számára egyszerűen és jogtisztán hozzáférhető alkalmazásokat mutatunk be, melyek működtetése pusztán felhasználói ismereteket igényel.

3.3.1. Bevezetés

Jelen helyzetben a tanároknak egy új, folyamatosan megújuló és fejlődő rendszerben kell tudásukat, s módszereiket átértékelni. Itt is, mint minden tanulási folyamat során, kiemelten fontos a fokozatosság. A korábbiakban technikai ismereteket nem igénylő példákön mutattuk be a módszert működés közben. Ebben a részben a számítógépet eszközként használjuk majd. Minimális felhasználói ismeretekkel (internet, egyszerű alkalmazások) rendelkezvén is látványos kísérleteket végezhetünk. Többségében weboldalakról, már elkészített webes alkalmazásokról, illetve telepítést nem igénylő programokról van szó. Előnyük, hogy gyorsan előhívhatók, előzetes elkészítést nem igényelnek, így használatuk nem vesz több időt igénybe, mint egy nélkülük való órára

történő felkészülés. Az itt bemutatott programok telepítést sem igényelnek, mobil eszközökről is futtathatók, így a tanár még a rendszergazda segítségére sincs rászorulva. A következő példák egy konkrét cél érdekében, módszertani alapossággal válogatott lehetőségek, így természetesen nem a teljesség igényével állnak itt.

A példák válogatását a számítógép eszközszintű felhasználásával történő mind szélesebb körű felfedeztetési lehetőségeinek bemutatásának rendeltük alá. Visszaköszönnek már korábbi fejezetekből ismert példák, de bemutatunk olyan lehetőségeket is, melyek számítógép felhasználása nélkül csak komolyabb, középiskolai keretek közé nem illeszkedő eszközök bevonásával tárgyalhatók. A példák tárgyalása során mindegyütt kitérünk a felhasznált eszközök előnyeinek didaktizálására.

3.3.2. Nevezetes összegek - egy példa ismét

A **3.1.3. fejezet** problémáját tárgyaljuk ismét, ezúttal számítógéppel segítve a felfedezést.

Önállóan szeretnénk hát megtalálni, felfedezni az $1 + 2 + 3 + \dots + n$ összeg zárt alakját.

Számoljuk ki a fenti összeget az első néhány n -re!

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 2 &= 3 \\ 1 + 2 + 3 &= 6 \\ 1 + 2 + 3 + 4 &= 10 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 &= 15 \end{aligned}$$

A kérdés, mellyel a felfedezések ösztönözhetőek, természetesen merül fel magukban a diákokban is: Milyen, sem a bal oldali előállítást, sem az előző tagokat nem használó összefüggés van a jobb oldalon található tagok között? Itt lép színre a tanár katalizátor szerepben: Használjuk a <http://oeis.org/> oldalt! Az itt található *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS) egy online elérhetőségű sorozat gyűjtemény. A felkínált mezőbe beírva a vizsgált sorozat (első) néhány tagját, a Keresés gomb lenyomásával megkapjuk az adott kezdőtagokra leginkább illeszkedő, legjellemzőbb sorozatokat. Minél több tagot írunk be, annál inkább releváns találatokat kapunk [124].

Jelen esetben az első találat a következő:

$$\text{Triangular numbers: } a(n) = C(n+1, 2) = n(n+1)/2 = 0 + 1 + 2 + \dots + n.$$

Innen pedig már folytathatjuk a felfedezéseket a sejtés megerősítésével a korábban ismertetett módon.

3.13. Megjegyzés. Felmerülhet a szkeptikusokban a kérdés, miért használtunk számítógépet, ha a probléma, ráadásul felfedeztetéssel, e nélkül is tárgyalható volt. A számítógép ezen egyszerű használatának is számos előnye van. A legtöbb tanár küzd az idő szorításával; a felfedezés számítógéppel gyorsabb, s mégis a tanulók aktív cselekvésével valósul meg.⁴ Ne feledjük, hogy diákjaink már digitális bennszülöttek. Megszokták, hogy az iskolán kívül gyakorlatilag mindenütt, minden információ változatos, digitális formában jut el hozzájuk. Sokkal természetesebben nyúlnak egy egyszerű parancs hatására „csodákat” produkáló weblaphoz, mint kavicsokhoz, vagy tollhoz és négyzet-rácsos papírhoz. További előnye még, hogy a kísérletek gyorsan, és szinte korlátlan számban megismételhetők. A kísérletek nem csak, hogy megismételhetők, de igény szerint módosíthatók is, s ezáltal új felfedezések tehetők; könnyen zárt alakot találhatunk az első n négyzetszám vagy akár köbszám összegére. A számítógép segítségével korábban elérhetetlen problémák válnak hát megközelíthetővé, s ez használatuk másik nagy előnye.

3.3.3. Halmazműveletek tulajdonságai, halmazelméleti azonosságok

A halmazelmélet alapjainak az általános iskola 8., illetve a középiskola 9. osztályában történő tanításához kiválóan használható a következő, Palincsár Zoltán által alkotott program. (A program hozzáférhető (volt) a jelenleg nem üzemelő *Sulina* oldalakon. A szerző mindössze 16 évesen készítette egy pályázatra.)

A programban lehetőségünk van halmazműveletek megadására, (egy, két, illetve három halmazra vonatkozóan) melyeknek megfeleltetett tartományt a program a megfelelő ablak Venn-diagramján szemlélteti. A kéttablakos rendszernek köszönhetően lehetőségünk nyílik halmazműveleti azonosságok szemléltetésére, felfedeztetésére.

3.12. ábra. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

⁴A tananyag elvégzése érdekében diktált gyorsabb tempó egyik következménye általában sajnos az, hogy a diák külső szemlélővé válik az órán.

A program szolgáltatásai között *játék* is szerepel, melyben egy adott halmazműveletsorhoz tartozó tartományt kell a Venn-diagramon színezni; illetve egy adott, a Venn-diagramon megjelölt tartományhoz tartozó lehetséges halmazműveletsort kell megadni.

3.14. Megjegyzés. A fentiekben példát láthattunk arra, hogy hogyan válik lehetségessé játékos formában a felfedeztetés egy egyszerű alkalmazás segítségével. A program használata nem igényel semmiféle előkészületet (még telepíteni sem kell) vagy előképzettséget. A táblára felkerülő, statikus, korlátozott számú ábra helyett a tanulók aktív részvételével megalkotott, korlátlan számú, dinamikus változtatható ábrasereg segíti, sőt lehetővé teszi a halmazműveletek és ezek tulajdonságainak empirikus megismerését, belátását, melynél többet jelen témakörben aligha tűzhetünk ki célul. A programot a gyerekek haza is vihetik, illetve otthoni gépről is elérhető. Így a kísérletek megismételhetők, az otthoni gyakorlás is lehetséges.

3.3.4. A háromszög belső szögeinek összege IV.

A 3.1.7. fejezet ábráit adó animációt használjuk. Az animáció megtalálható a Wolfram Demonstrations Project oldalain [169]. A Mathematica környezetben készült program használatához külön szoftver nem szükséges. Az animáció használatával elvész ugyan a kézzel készült, s „behajtogatott” háromszögnél létrejött személyes tapasztalás, viszont a gépi használat itt is gyorsabb, otthon szintén rekonstruálható, sőt ugyanott hasonló bizonyítások tömkelege található, így lehetőség van az önálló kutatásra ezen a szinten is. Az animációban a paraméterek változtatásával (pl. a csúcsok mozgatásával) lehetőségünk van mérések, kísérletek százainak elvégzésére.

3.13. ábra. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege IV.

A következőkben két nehezebb problémával foglalkozunk. Átlagos középiskolai eszközökkel nem tárgyalhatók, s ami jelen szempontból kiemelten fontos: számítógépek segítségével nélkül érdemben csak nagyon nehezen megközelíthetők.

3.3.5. A Monty Hall-dilemma - a számítógép és az intuíció

A már-már klasszikus probléma eredetét illetően megoszlanak a történeti források. Paul Hoffman szerint ([75]) először a Let's Make a Deal című amerikai televíziós játék utolsó feladatákként tűnt fel; nevét is innen, a játék műsorvezetőjéről kapta⁵. Valójában először Steve Selin tollából tűnt fel az American Statistician hasábjain 1975-ben. Szakmai körökben híressé (hírhedtté) azonban a Parade magazin 1990. szeptember 9-i számának Marilyn vos Savant vezette Ask Marilyn rovata tette. Azóta számos változata, sőt egész folklórja alakult ki [142]. A probléma a következő.

3.15. Feladat. Képzeljük el, hogy egy televíziós vetélkedőn veszünk részt, ahol három ajtó közül kell választanunk. Az egyik mögött autó van, a másik kettő mögött számár. Kiválasztjuk az egyik ajtót, mire a műsorvezető, aki természetesen tudja, melyik mögött van az autó, kinyit egy másik ajtót, amelyik mögött számár van. (Ilyen ajtót mindig tud nyitni.) Ezután választanunk kell; vagy ragaszkodunk eredeti döntésünkhöz, vagy meggondoljuk magunkat, és a harmadik, ki nem nyitott ajtót választjuk. Melyik a jobb döntés?

⁵A játékot gyakorlatilag változatlan formában Magyarországon is bemutatták, a *Zsákbamacska* című televíziós vetélkedőben.

3.14. ábra. A Monty Hall-dilemma

A probléma ismertetése után érdemes megkérnünk a diákokat arra, hogy *tipeljék meg* a nyeres valószínűségét a két stratégia (a játékos kitart eredeti döntése mellett, illetve ajtót vált) esetén. A kérdés jó eséllyel meg fogja osztani őket, hiszen a korabeli matematikusokkal is ezt tette. Nem akarták elfogadni ugyanis, hogy ebben a helyzetben érdemes élni a műsorvezető által felkínált lehetőséggel, és ajtót kell váltani. Olyannyira, hogy amikor Vázsonyi Endre ismertette a problémát Erdős Pállal, maga Erdős sem látta értelmét váltani. Meggyőzni őt is csak a Stanislaw Ulam által kidolgozott Monte Carlo-módszer segítségével lehetett. A módszer lényege, hogy egy adott esemény valószínűségének numerikus kiszámítása helyett számítógépek segítségével (elegendően) sokszor szimulálják a kísérletet. Egy ilyen kísérletsorozat eredményét mutatja az alábbi ábra.

A játékos nem vált ajtót	Nyerő kísérletek száma: 3340	Összes kísérletek száma: 10 000
A játékos ajtót vált	Nyerő kísérletek száma: 6660	Összes kísérletek száma: 10 000

3.15. ábra. A Monty Hall-dilemma és a Monte Carlo-módszer

3.16. Megjegyzés. Ebből is látszik, hogy értő kezekben a számítógép már gyakorlatilag létrejött pillanatától fogva szerepet játszik a matematikai felfedezésekben, tudományos szinten is.

A kapott relatív gyakoriságok sokat segíthetnek az esemény valószínűségének meghatározásában. Továbbá meg is szüntethetik azt a bizonytalanságot, amibe az emberek akkor kerülnek, amikor az intuíció és a valóság között ilyen nagy a különbség. A fenti, illetve a fentihez hasonló kísérletsorozatok segítségével szemléltethető a nagy számok törvénye is.

3.17. Megjegyzés. Továbbra is kérdés, hogy (iskolai szinten) elfogadhatjuk-e ezt az intuitív belátást bizonyításnak? A diákok a kettő között sokszor egyáltalán nem érznek különbséget, sőt az előbbit erősebbnek érzik, hiszen azt megtapasztalják, míg a (deduktív) bizonyítást nem. Jelen esetben persze kicsit többről van szó, mint pusztán intuíciónál.

Marilyn vos Savant is számos módon próbálta meggyőzni az emelkedett hangnemben ellenkező matematikusokat:

- (1) Képzeljük el, hogy a játékban egymillió ajtó van. A játékos választ egyet, majd a műsorvezető, aki pontosan tudja, hol van az autó, egyetlen másik ajtó kivételével kinyitja az összeset. Most hogyan döntenénk?

3.16. ábra. Dilemma: Hogyan döntenénk?

- (2) Képzeljük el, hogy miután a műsorvezető kinyitotta az egyik ajtót, leszáll a színpadra egy ufó, s egy kis zöld ember bújik ki belőle, s neki is dönteni kell. Ő valóban 50% eséllyel dönt jól, hiszen neki nincs meg az az előnye, ami megvan a játékosnak, nevezetesen a műsorvezető segítsége.

3.18. Megjegyzés. Egy másik lehetséges indoklás az, hogy az a jobb, ha nem tartunk ki eredeti elképzelésünk mellett, mert ekkor akkora eséllyel nyerünk, mint amekkora eséllyel eredetileg rosszul választottunk, vagyis $2/3$ valószínűséggel. Ennek a gondolatmenetnek az is az előnye, hogy pusztán a szimmetriára épül, s nem használja, még hallgatólagosan sem, a feltételes valószínűség fogalmát.

Magát Erdős Pált sem sikerült számítógépek segítségével meggyőzni. Hogyan várhatnánk el ezt akkor a diákjainktól?

3.3.6. A lusta pénztáros - a számítógép és a sejtés

A probléma a következő.

3.19. Feladat. Egy mozi pénztára előtt emberek állnak sorban. A jegyek egységesen 500 forintba kerülnek. A sorban állóknak egymástól függetlenül $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel vagy 500 forintos, vagy 1000 forintos van. A lusta pénztáros nem gondoskodott nyitás előtt váltópénzről. Várhatóan hány mozilátogatót tud majd kiszolgálni a pénztáros?

Itt is egy számítógépes animáció segítségével közelítjük meg a problémát, s ezáltal az tárgyalhatóvá válik a valószínűségi változó fogalmával éppen csak ismerkedő, vagy azzal nem is rendelkező diákok számára is.

A módszer a következő. Egy az interneten elérhető (vagy akár magunk által is elkészíthető) animáció (program) segítségével végezzünk kísérleteket. Figyeljük meg, hogy néhány (számos) sorban állást szimulálva hogyan alakul a kiszolgált vásárlók száma. Érdekes tippelős játékot játszani; a játékosok (diákok) megtippelik, hogy hány vásárló fog jegyhez jutni, és akinek a tippje legközelebb lesz az eredményhez, az nyer. A következő ábrák egy, a Sulinetről származó animációból származnak, de hasonlókat találhatunk például számos egyetem [118], vagy a Wolfram [169] oldalán is.

3.17. ábra. A lusta pénztáros

Ezzel eljuthatunk a matematikai alkotás egyik legfontosabb - s jelen szinten elérhető egyetlen - eleméhez, a sejtéshez. Mégpedig ahhoz a (helyes) sejtéshez, hogy jelen valószínűségi változónak nincs várható értéke. A lusta pénztáros problémája tehát arra is példát mutat, hogy a számítógépek felhasználásával nem csak szemléltethetünk, vagy a bizonyítást segíthetjük, de esetenként magának a sejtésnek a kialakítása sem képzelhető el nélkülük.

3.20. Megjegyzés. A valószínűségi változó várható értékét leíró sor divergenciájának bizonyításához szükséges eszköz pl. a Stirling-formula és a majoráns kritérium [42].

3.3.7. Módszertani összefoglaló

A fejezetben igyekeztünk megmutatni, hogyan is tud a „kiváló”, vagy a „nagyszerű” tanár számítógépes demonstrációk segítségével inspirálni. Példát láthattunk arra, hogy a számítógép hogyan segít felfedezések katalizálásában (3.3.2.). A számítógép segítségével lehetőségünk van a paraméterek változtatásával újabb és újabb felfedezések ösztönzésére. Egyszerű alkalmazások (3.3.3., 3.3.4.) felhasználásával példát láttunk egyrészt a vizuális reprezentációk ösztönző erejére, másrészt a tömeges kísérletek jótékony hatására, a „deus ex machina” elkerülésére. Megmutattuk, hogy a számítógépes reprezentációk használata elkerülhetetlen lehet bizonyos problémák (3.3.5., 3.3.6.) tárgyalása kapcsán.

3.4. Felfedezések a számítógép alkotó jellegű felhasználásával

-Ön szerint mikor érik el számítógépek az első Nobel-díjas felfedezést?
-Szerintem már régen elérték [144]. (HERBERT SIMON⁶)

3.4.1. Bevezetés

Az előző fejezetben javarészt az interneten bárki által szabadon elérhető és felhasználható konserveket mutattunk be. Ezek használata számos, a fentiekben részletesen kifejtett előnyökkel jár, ám nem minden esetben elegendő. A technikai fejlődés, a digitális bennszülöttek folyamatosan megújuló világa, folyamatosan fejlődő eszközöket kíván. Szükség van tehát rá, hogy mi magunk is hozzunk létre alkalmazásokat, hiszen ezek továbbfejlesztése a legkézenfekvőbb, legegyszerűbb lehetőség. Emellett szükség van arra is, hogy diákjainkat is ösztönözzük saját alkalmazások létrehozására. A továbbiakban főként ezek szolgálnak majd felfedezéseink alapjául.

Először röviden bemutatjuk az alkotó jellegű használatot lehetővé tévő rendszereket általánosságban, majd részletesen néhány, az oktatásban jól, s a továbbiakban általunk is használt szoftvert.

3.4.2. Komputer-algebrai rendszerek (CAS)

A számítógépek tudományos, illetve oktatási célú használatában mérföldkőnek számított az első, szimbolikus számítások elvégzésére is alkalmas rendszer. Ez a MIT-n kifejlesztett MACSYMA volt. Ez volt az első rendszer, amely alkalmas volt algebrai manipulációkra. Sőt, ennél jóval többre. A segítségével lehetőség volt egyenletrendszerek,

⁶Herbert Simon Nobel- (1978) és Turing-díjas (1975) közgazdász

differentiálegyenletek megoldására, integrálok meghatározására, mátrixok invertálására, sajátértékek kiszámítására, s általában szimbólumokat tartalmazó kifejezésekkel való numerikus számításra. A ma használt legelterjedtebb komputer-algebrai rendszerek a Mathematica, Maple, MatLab, Maxima. A legtöbb ilyen rendszer drága, sokszor még az egyetemi licenszek beszerzése is gondot okoz, így ezek az állandó forráshiánnyal küzdő (közép)iskolák számára elérhetetlenek. Kivételt csak a Maxima képez, ez ugyanis nyílt forráskódú, ingyenes rendszer. A rendszerek legtöbbjéről általánosságban elmondható, hogy szintakszisuk, beleértve az összetett matematikai objektumok bevitelét is, formális, logikus. (Mindez például a későbbiekben bemutatandó WebMathematics Interactive (WMI) esetében teljesen intuitív.) Kiválóan használhatók az egyetemi oktatásban is, néhány órás gyakorlás után lehetőségünk van tulajdonképpen egy egyszerű programozási nyelv elsajátítására. Kevés ismerettel is viszonylag bonyolult dolgok állíthatók elő. A rendszerek használatával lehetőségünk van pl. egy 15×15 -ös mátrix inverzének, sajátértékeinek gyors kiszámítására (akár szimbolikusan is!), vagy egy több egyenletből álló, többismeretlenes differenciálegyenlet-rendszer megoldására; tehát olyan számításokra, melyeket kézi erővel nem, vagy csak indokolatlanul nagy energia- és időbefektetés árán tudnánk megvalósítani. Könnyedén kirajzoltathatjuk egy-, illetve kétváltozós függvények grafikonjait, készíthetünk továbbá valós idejű animációkat, melyekkel a kísérletezési lehetőségek tárháza tárul elénk. Olyan dolgokat tehetünk láthatóvá, olyan számításokat végezhetünk el, melyekről korábban még csak nem is álmodhattunk.

3.4.3. Szoftverek az oktatás szolgálatában

Az alábbiakban a teljesség igénye nélkül bemutatunk néhány, az oktatásban kiválóan használható, többségében az interaktív táblákkal is együttműködni képes népszerű szoftvert.

GeoGebra

A programot (www.geogebra.org) Markus Hohenwarter kezdte el fejleszteni a Salzburgi Egyetemen. Az első verzió 2002 januárjában jelent meg angol és német nyelven. A szerző művét ingyenesen elérhetővé tette az interneten. Hamarosan annyi kérdést és ötletet, fejlesztési javaslatot kapott, hogy a program folyamatos fejlesztésére egész munkacsoport jött létre. Azóta a világ szinte valamennyi kontinensén számos GeoGebra Intézet jött, s jön folyamatosan létre [59]. Az egyik éppen Szegeden, a Bolyai Intézet berkein belül szerveződik. A fejlesztések folyamatosan lépést tartanak a kor igényével, így például nem csak javascript alapú, a feladatokat dinamikus újrageneráló s így akár számonkérésre, illetve annak gyors kiértékelésére is alkalmas feladatbankok, de okostelefonra optimalizált verzió is készülöben van.

A GeoGebra legfőbb érdeme, hogy két- (manapság már három-) ablakos rendszerének köszönhetően egyesíti a komputer-algebrai rendszerek (CAS) és a dinamikus

geometriai szoftverek (DGS) előnyeit; a program neve is erre utal, GeoGebra, azaz geometria+algebra. Az oktatásban pedig azért terjedhetett el ilyen gyorsan és sikeresen, mert ingyenes, platformfüggetlen, sőt még csak letölteni sem kell. (Ezzel megkímélvén a tanárt attól, hogy az óráit csak hathatós rendszergazdai segítséggel tudja megtartani.) Egyszerű felépítése és könnyű kezelhetősége ellenére az iskolai tananyag szinte valamennyi területe jól tanítható általa, kezdve az egész számok aritmetikájától, a függvény- illetve geometriai transzformációkon keresztül, a statisztikai alkalmazásokon át, egészen az analízis fogalmainak (derivált, integrál, Taylor-polinom, ...) szemléltetéséig. A program kiválóan alkalmas a különböző absztraktsági szinten lévő fogalmak szemléltetésére, a dinamikusan változtatható paramétereknek köszönhetően pedig a felfedeztetésre. Nem utolsósorban egy lelkes, aktív és nyílt közösségnek köszönhetően - melyhez bárki csatlakozhat - folyamatosan bővül az interneten elérhető kész segédanyagok rendszere, így a szoftverrel tartott órára való felkészülés a kezdeti időben sem vesz több időt igénybe, mint a hagyományos, frontális, tábla-krétás óra megtervezése.

Autograph

A program jelenlegi verzióját Mark Hatsell írta, elsősorban a brit Oundle School matematika óráin szerzett tapasztalatok alapján. Az ő nevéhez fűződik az Autograph játékipari technológiákból adaptált ötlettel megalkotott 3D-s modulja [5]. A program a legtöbb, felső tagozaton, illetve középiskolában előkerülő terület oktatására alkalmas. Tökéletesen működik együtt a digitális táblákkal, egy egyszerű kiegészítő eszköz segítségével távolról is irányítható, így a tanár nincs a táblához láncolva, sőt a diákok is tudják távolról kontrollálni a táblán történeteket. A program elsősorban Angliában népszerű [12, 13], de az évente megrendezett nemzetközi továbbképzés és konferencia hatására a felhasználótábora folyamatosan bővül. A program egy határozott - a többi-től megkülönböztető - előnye, hogy alkalmas a grafikonok lassú megjelenítésére. Ez azt jelenti, hogy az (ismeretlen) függvény grafikonja paraméterezhetően folyamatosan rajzolódik ki a képernyőre. Bármikor megállíthatjuk a kirajzolást, kérdéseket tehetünk fel a függvény hozzárendelési szabályára, további menetére, tulajdonságaira vonatkozóan.

3.18. ábra. Autograph - Lassú ábrázolás: $\sin 2x$ hol a következő zérushely?

Derive

A Derive 1988-ban jött létre. Elődje a muMath, az első oktatásra adaptált szoftverek egyike volt, első verziója 1979-re datálható. A Derive fejlesztése sajnos leállt, a disztribútorok az utolsó példányoktól is már csak árukapcsolás útján tudnak megvásárolni. A programot a világ számos országában, s több mint 50 magyar oktatási intézményben is használják, illetve használták. Numerikus és szimbolikus számítások elvégzésére, két- és háromdimenziós ábrázolásokra, vektor- és mátrixműveletek elvégzésére egyaránt alkalmas. Módszertani szempontból egyik legnagyobb előnye a lépésenként is előhívható feladatmegoldás volt. (A feladat vonatkozhat egyenlet megoldására, mátrix invertálására, integrál meghatározására, s számos egyéb művelet elvégzésére.)

#1: $\int x^2 \cdot e^x dx$

$\int x^m \cdot e^{ax} dx \rightarrow \frac{x^m \cdot e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cdot e^{ax} dx$

#1: $\int x^2 \cdot e^x dx$

$\int x^m \cdot e^{ax} dx \rightarrow \frac{x^m \cdot e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cdot e^{ax} dx$

#2: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot \int \frac{x}{x} \cdot e^x dx$

#1: $\int x^2 \cdot e^x dx$

$\int x^m \cdot e^{ax} dx \rightarrow \frac{x^m \cdot e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cdot e^{ax} dx$

#2: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x dx$

#3: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x dx)$

(a)
(b)

#2: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x dx$

$\int x^m \cdot e^{ax} dx \rightarrow \frac{x^m \cdot e^{ax}}{a} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} \cdot e^{ax} dx$

#3: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x dx)$

$\int e^{bx} dx \rightarrow \frac{e^{bx}}{b}$

#4: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - e^x)$

#3: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - \int e^x dx)$

$\int e^{bx} dx \rightarrow \frac{e^{bx}}{b}$

#4: $\frac{x^2}{x} \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - e^x)$

#5: $\frac{x^2}{e} \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 2)$

(c)
(d)

3.19. ábra. Derive - Integrálás lépésenként - $\int x^2 \cdot e^x dx$

WMI

A WebMathematics Interactive (WMI) egy internetes on-line tanulói környezet, mintegy 20 szabadon felhasználható forráskódú szoftver ötvözése. Az egymással kommunikáló programok új struktúrába való szervezésével és egy rendszerbe történő integrálásával, egy olyan keretfeltételeket biztosító program jött létre, amely új didaktikai szempontokat támogató interaktív matematikai modulok számítógépes megvalósítását teszi lehetővé.

3.20. ábra. WMI - Pillanatkép

A WMI egy olyan környezetet teremt, amely a mesterséges intelligenciát és a matematikadidaktika szakmai tapasztalatát kihasználva módszertani szempontból is értékes (nemcsak végeredményt szolgáltató) matematikai modulok konstruálását biztosítja a matematika oktatói számára. Így a komputer-algebrai rendszerek ereje nélkül kerül kiaknázásra, hogy a felhasználói oldalon lévő diáknak bármit is tudnia kellene ezek működéséről. Elsősorban egyetemi, illetve főiskolai használatra készült, de tekintve a tananyagok átfedését, illetve a matematika spirális felépítését, a középiskolában is kiválóan használható [86, 87]. Megalkotója egy szegedi csapat, az ötletgazda pedig Kovács Zoltán. Az elképzelés jelenleg matek.hu néven fut [166]. Egy tematikus, jól átlátható, könnyen kezelhető internetes felületen adhatjuk le „igényünket”, ami lehet egy egyenlet megoldása, egy integrál meghatározása, egy egy- esetleg kétváltozós függvény ábrázolása, vagy egy határérték meghatározása. A válasz azonnal előáll, így kiválóan alkalmas önálló tanulásra, gyakorlásra, saját munkánk ellenőrzésére is. A felkészültség mértékének ellenőrzésére dinamikus és statikus tesztek is rendelkezésünkre állnak. A tanulói illetve tanári tudásellenőrzés tehát több oldalról is támogatott. A WMI alapszolgáltatásai mellett tematikus modulokat tartalmaz a lineáris algebra, analízis, diszkrét matematika, analitikus geometria témakörökben, megkönnyítvén ezen területek feldolgozását. A WMI tökéletesen alkalmas az e-learning alapú oktatásra is. Mi sem példázza ezt jobban, mint hogy a SARS járvány idején Chu-Ching Huang, a Chang Gung University tanára a WMI-vel helyettesítette az elmaradt kontaktórákat [87].

További lehetőségek

Ebben a részben bemutatunk néhány, a szerző által is használt, többségében ingyenes, vagy jól használható ingyenes próbaverzióval rendelkező szoftvert.

- (a) Euler 3D - A program szegedi, Petró Tamás készítette, az ötlet atyja, és a kidolgozás irányítója pedig Szilassi Lajos volt. A program sokáig ingyenesen hozzáférhető volt, mígnem a Mozaik Kiadó Kft. megvásárolta [44].
- (b) Euklidesz - Geometriai szerkesztőprogram, mely 1998-ban jelent meg. A Mozaik Kiadó Kft. megvásárolta, illetve a GeoGebra kiszorította a piacról [43].
- (c) Cabri - A szoftvercsaládnak számos tagja van, melyek elsősorban Franciaországban és az angolszász területeken terjedtek el. Kapcsolódó szakirodalom szerencsére már magyar nyelven is elérhető [27, 114, 152].
- (d) The Geometer's Sketchpad [60, 1, 68, 46]
- (e) GrafEq [64]
- (f) Poly [134]
- (g) Graph [65]

A következőkben öt példát mutatunk be, a számítógép alkotó jellegű felhasználását prezentálандó.

3.4.4. A Thalész-tétel

A kézzel szerkesztett ábra, a saját kezű mérés meggyőző erejét nem pótolhatja semmi (3.1.8. fejezet). A bizonyosság erősebb fokának kialakításában (a bizonyításban?) viszont haszonnal alkalmazhatjuk a számítógépet.

3.21. ábra. Thalész-tétel - Pillanatkép

Az alábbi, GeoGebrában készített alkalmazás elkészítése gyakorlatlan felhasználók számára sem vesz igénybe annyi időt, mint egyetlen statikus ábra megszerkesztése. Számtalan előnye közül kiemelendő, hogy mozgatható a kör, az átmérő, a kerületi pont, sőt ez utóbbi akár animálható is folytonosan a körön. Az animáció valójában nem folytonos, de kijelenthető, hogy minden gyakorlati igényt kielégítően folytonosnak tekinthető. A körvonalon mozgó pont természetesen diszkrét pontok sokaságán „ugrál”, de segítségével annyi kísérlet és mérés végezhető el egyszerre, amennyit számítógépes segítség nélkül nem lennénk képesek végrehajtani.

3.21. Megjegyzés. A püthagóreusok a geometriát *hisztóriénak* tartották, azaz kimondottan tapasztalati tudomány volt. (A számelmélet neve *mathéma* volt.) Ugyanakkor maga Thalész volt az a mérőföldkő a matematikában, aki a szemléletre alapozott tapasztalati geometriát elválasztotta az érzékekre már nem támaszkodó, (logikai) bizonyítást igénylő geometriától.

3.4.5. Trigonometrikus azonosságok

A trigonometrikus azonosságok két fő tulajdonsága, diákszemmel nézve, hogy sokan vannak és hasonlítanak egymásra. Tanári szempontból persze jelentőségüket a függvénytranszformációk, trigonometrikus egyenletek, illetve trigonometriai számítások tereén betöltött szerepük adja. Megkedveltetni őket szinte lehetetlen, viszont legalább néhányat diákjaink emlékezetébe tudunk vésni, ha azokat ők maguk fedezik fel. Erre mutat példát a következő, Autographban kivitelezett kísérlet.

Az ábrán a $\cos x$ függvény grafikonja látható, és egy pont, amelyet animálunk egy függvény grafikonja mentén. A pont *láthatóan* az $\cos x$ függvény x tengelyre vett tükörképe mentén halad, tehát a rejtett görbe meggyőzően sok helyen vett értéke alapján *tapasztaltak* szerint az $y = -\cos x$ függvény grafikonja.

3.22. ábra. Hol halad a pont...?

Az $y = -\cos x$ függvény grafikonját kirajzolva, a pontot tovább animálva, empirikus úton szerzett meggyőződésünk megdönthetlenné válik.

3.23. ábra. ... az $y = -\cos x$ görbe mentén

Ekkor, például egy szövegdoboz segítségével, kiírathatjuk a mozgó pont valódi koordinátáit (megjeleníthetjük az eddig rejtett függvénygörbe hozzárendelési szabályát), s így láthatóvá válik, hogy a pont által leírt görbe az $y = \cos(x - \pi)$. A döbbenet (felfedezés) ereje ebben a szituációban óriási lehet, olyannyira, hogy akár a *miért* megválaszolása érdekében is lépéseket kell tennünk, a diákok nyomásának engedve.

3.24. ábra. A felfedezés: $-\cos x = \cos(x - \pi)$

3.22. Megjegyzés. A fenti felfedezésekben a tanár szerepe nem klasszikus. Feladata elsősorban a kísérlet előkészítése: az $y = -\cos x$ és az $y = \cos(x - \pi)$ görbék kirajzolása, majd ez utóbbi elrejtése, s végül a pont animációjának paraméterezése a rejtett görbe mentén. Ezek után a felfedezésekben már csak katalizátor szerepe van.

3.4.6. Szintetikus geometria

A szintetikus geometria tanítása a számos tananyagreform és -csökkentés hatására jelentősen karcsúsodott a középiskolában. Az egybevágósági transzformációk kapcsán szinte kizárólag azok tulajdonságait, a hasonlósági transzformációkhoz kötődően pedig aritmetikai feladatokat oldunk meg. Szerkesztésekkel egyáltalán nem foglalkozunk, elsősorban időhiány miatt. A diákok többsége szeretne szerkesztéseket végezni, elsősorban az általános iskolából származó játékos, pozitív tapasztalatok miatt. Akkor azonban, amikor akár csak egy egyszerűbb szerkesztés tényleges kivitelezésére kerül

sor, hamar elveszítik türelmüket, a precizitásról nem is beszélve. A szerkesztés egyszerű rajzzá alakul, s sokan nem is látják, értik a különbséget. A szerkesztések kivitelezése hosszadalmas, a figyelmet nagymértékben lekötő folyamat. Nem csak azzal van a baj, hogy erre nincs idő, hanem legfőképpen azzal, hogy a diákok nem látják, hogy a szerkesztés elsősorban egy eszköz a sejtés és a bizonyítás segítésére. A tökéletes pontossággal kivitelezett szerkesztés nem csak sejtető, de bizonyító erejű is, illet azonban hagyományos úton, főleg a mai, másfajta motorikus rutinokkal rendelkező gyerekekkel nem tudunk végezni. A megoldást most is a számítógéptől várhatjuk. A GeoGebra program segítségével nem csak, hogy gyorsan és pontosan szerkeszthetünk, de ábráink dinamikusak lesznek, így tulajdonképpen tetszőleges számú szerkesztést hajthatunk végre egyetlen ábra segítségével. Az ábrák mozgatásával, a paraméterek változtatásával, a szerkesztési lépések visszajátszásával elvégezhető a diszkusszió és felfedezhető a bizonyítás is. Az alábbiakban három, az elemi síkgeometriára különböző területeiről származó problémát mutatunk, megoldás gyanánt pedig egy-egy pillanatképet a dinamikus GeoGebra munkalapról, a *proof without words* égisze alatt. (Egy-egy rövid bekezdés erejéig vázoljuk a deduktív bizonyítások fő gondolatait is.)

3.23. Feladat. Legyen P az ABC háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja. Jelölje O_1 és O_2 az APC , ill. BCP háromszögek köré írható köreinek középpontját. Milyen kapcsolat van az O_1PO_2 , és az ABC háromszög között? Miért?

Megoldás.

3.25. ábra. A háromszögek hasonlóak

Könnyen látható, hogy az AP és BP szakaszok felezőmerőlegesei párhuzamosak egymással. A kerületi és középponti szögek tétele alapján következik, hogy $\angle PO_2C = 2 \cdot \angle PBC$. A PO_2C háromszög egyenlő szárú, így O_1O_2 e háromszög alaphoz tartozó magassága, s így a háromszög PO_2C szögének szögfelezője is. Így kaptuk: $\angle PO_2O_1 = \angle PBC$. Teljesen hasonlóan megmutatható, hogy $\angle PO_1O_2 = \angle PAC$, ez pedig elegendő a hasonlósághoz.

3.24. Feladat. Adott a síkon egy P pont és egy $ABCD$ négyszög. Tükrözzük P pontot a négyszög oldalfelező pontjaira (mindig P -t tükrözzük)! A kapott négy pont milyen négyszöget alkot? Miért?

Megoldás.

3.26. ábra. A képpontok által kifeszített négyszög ...

A sík egy tetszőleges O pontjából indítsunk helyvektorokat az eredeti, illetve a vizsgált négyszög csúcsaiba, valamint a P pontba, illetve a megfelelő oldalfelező pontokba. A helyvektorokat jelöljük a szokásoknak megfelelően a végpontjukhoz tartozó betűvel (pl. $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$). Ekkor, a középpontos tükrözés miatt a következők írhatók:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \vec{a} + \vec{b} - \vec{p} \\ \vec{p}_2 &= \vec{b} + \vec{c} - \vec{p} \\ \vec{p}_3 &= \vec{c} + \vec{d} - \vec{p} \\ \vec{p}_4 &= \vec{d} + \vec{a} - \vec{p}\end{aligned}$$

ahonnan például, $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_4 - \vec{p}_3$ kapható, ami azt jelenti, hogy a $P_1P_2P_3P_4$ négyszög paralelogramma.

3.25. Feladat. Legyen az ABC háromszög beírt körének a háromszög c oldalán lévő érintési pontja E . Milyen az AEC háromszög és a CEB háromszög beírt köreinek kölcsönös helyzete? Miért?

Megoldás. Legyen az ABC háromszög beírt körének AB oldalon lévő érintési pontja E , valamint a háromszög félkerülete s . Jelölje továbbá e az EC szakasz hosszát, P és Q pedig rendre az EBC , illetve az AEC háromszögek EC oldalon lévő érintési pontjait.

3.27. ábra. A beírt körök érintik egymást

Ekkor, kihasználván a háromszög beírt körének oldalon vett érintési pontjai által meghatározott szakaszok hosszáról ismerteket, tudjuk, hogy $EB = s - b$ illetve, $EA = s - a$. Ugyanezen ismereteket alkalmazva a CEB és CAE háromszögek beírt köreinek CE oldalán lévő érintési pontjaira kapjuk, hogy $EP = \frac{e+a+s-b}{2} - a = \frac{s-a-b+e}{2}$ és $EQ = \frac{e+b+s-a}{2} - b = \frac{s-a-b+e}{2}$, ami azt jelenti, hogy $P = Q$, vagyis a körök érintik egymást.

3.4.7. Az integrál és a grafikon alatti terület

Az emelt szintű középiskolai analízis, de talán az egyetemi bevezető kalkulusnak is az egyik legszebb pontja a Newton-Leibniz formula. Az integrál és a grafikon alatti terület közötti kapcsolat azonban egyáltalán nem tartozik a középiskolás fejjel könnyen megérthető fejezetek közé. Egy lehetséges felépítésben először a határozatlan integrál jelenik meg, mint az antideriváltak, (primitív függvények) halmaza. Néhány nélkülözhetetlen integrálási módszer megismerése után következhet először a véges zárt intervallumon értelmezett (nemnegatív korlátos) függvények grafikonja alatti terület vizsgálata. A vizsgált görbevonalú idomok területének meghatározása új módszereket igényel. Kiváló színtere ez a felfedeztetésnek. Az alsó és felső összeg fogalma, illetve ezen összegeknek a beosztás finomításával történő változásának követése nem könnyű. A fentiek precíz leírása is nehéz, és így félő, hogy a diákok főleg erre koncentrálnak a mögöttes, lényegi tartalom helyett. Ezek után bevezetjük a határozott integrál fogalmát a maga megfoghatatlanságával, majd kapcsolatát a grafikon alatti területtel. A legnehezebb fogalom talán az integrál mint a felső határ függvénye és végül a Newton-Leibniz formula. Sokat segíthet hát a fogalmak megértésében néhány dinamikus ábra, animáció. Különösen igaz ez akkor, amikor már nem is a grafikon alatti területről, hanem például különböző egyenesek körül megforgatott görbék által alkotott forgástestek térfogatáról, felszínéről van szó.

A pillanatképpel rögzített első dinamikus GeoGebra munkalapon kiválaszthatjuk a függvény típusát, néhány előre megadott közül. Változtathatjuk a beosztás finomsá-

gát, s közben megfigyelhetjük, hogyan változik az alsó, illetve a felső összeg.

3.28. ábra. Alsó és felső összegek és a beosztás finomsága

A második munkalap egy olyan lehetőséget vázol, ahol a felhasználó (felfedező) maga módosíthatja a függvény hozzárendelési szabályát, az intervallum határait, a beosztás finomságát.

3.29. ábra. Alsó és felső összegek és a határozott integrál

Az alábbi Autographban készült dinamikus ábrán változtatható a függvény hozzárendelési szabálya, az intervallum mindkét végpontja, a beosztás finomsága, a terület közelítésének módja, a forgatás egyenesének egyenlete. A lassú kirajzolás funkciónak köszönhetően folyamatában láthatjuk a forgástest létrejöttét, illetve a program bármely paraméter változtatása esetén újra kiszámolja a vizsgált mennyiségeket. Külön érdekes, amikor a beosztás finomságát animálva láthatjuk, hogyan „simul ki” a forgástest illetve hogyan válik a közelítés mind pontosabbá.

3.30. ábra. Készül a forgástest

3.31. ábra. A forgástest és jellemzői

A fentiek segítségével lehetőség nyílik arra, hogy a tanulók megtapasztalják a matematikai alkotás folyamatát, s közben maguk fedezhetik fel az összefüggéseket.

A következőkben egy példán keresztül megmutatjuk, hogyan tárhatjuk fel a számológép „fekete dobozát” a számítógép segítségével.

3.4.8. Honnan tudja a számológép, mennyi $\cos 30^\circ$?

Ha a számítógépeket még nem is, a számológépeket már évtizedek óta a legnagyobb természetességgel használjuk a tanítási órákon. Vannak olyan témakörök, melyekben nem

is képzelhető el feladatmegoldás számológép nélkül. Szükséges segédeszköz az érettségis is. Bizonyos esetekben a tanár megtiltja (meg szokta tiltani), illetve megtilthatja a használatukat, pl. a továbbhaladás szempontjából nélkülözhetetlen, elsősorban viszonyítási alapot adó nevezetes szögfüggvényértékek ismerete esetében. Jogosan merül fel a kérdés, hogy ha számológéppel számolunk, az honnan „tudja” a megfelelő értékeket? A kérdés persze feltehető számos más esetben, pl. a logaritmus, vagy a gyökvonás esetében is. Igen kevésbé valószínű, hogy a gép egységkört rajzolna, a függvény grafikonjáról olvasna le értéket, esetleg az egész függvénytáblázat belé lenne plántálva, s abból keresne. Akkor mégis honnan tudja a számológép, mennyi $\cos 30^\circ$?

A kérdésre úgy a legérdekesebb megadni a választ, ha azt a diákjainkkal magunk fedeztetjük fel. A válasz ugyanis egy olyan eszközben rejlik, melyet a későbbi tanulmányok, illetve hasonló vizsgálatok során haszonnal alkalmazhatnak, s ha azt maguk fedezik fel, akkor biztos emlékezni fognak rá a későbbiekben is.

Abban a kezdet kezdetén meg kell állapodnunk, hogy fokok helyett több szempontból is kényelmesebb radiánban mérni a szögek nagyságát. Ezáltal a kérdésünk is módosult: Honnan tudja a számológép, mennyi $\cos \frac{\pi}{6}$?

Tekintsük a következő táblázatot, s töltsük is ki az üres mezőket.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2	3	4	8
$T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$								
$T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$								
$T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$								
$T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$								
$\cos x$								

3.32. ábra. Felfedezések - a $\cos x$ és a Taylor-polinom. Hol és mennyire jó a közelítés?

A táblázatban a $\cos x$ 0 körüli különböző rendű Taylor-polinomjai találhatók. A táblázatban kiszámolt értékekből kialakítható a sejtés, hogy a polinom a tagok számának növekedésével a 0 pont szűk környezetében viszonylag gyorsan és pontosan közelíti az igényelt függvényértékeket. A 0 ponttól távolodva azonban a közelítés pontossága csökken, egy idő után nem is használható.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	2	3	4	8
$T_2(x)$	1	0,8629221	0,4516886	-0,2337005	-1	-3,5	-7	-31
$T_4(x)$	1	0,8660538	0,5017962	0,0199689	-0,3333333	-0,125	3,6666667	139,666667
$T_6(x)$	1	0,8660252	0,4999645	-0,00008945	-0,4222222	-1,1375	-2,0222222	-224,42222
$T_8(x)$	1	0,8660254	0,50000004	0,0000247	-0,415873	-0,9747767	-0,3968254	191,67937
$\cos x$	1	0,8660254	0,5	0	-0,4161468	-0,9899925	-0,6536436	-0,1455

3.33. ábra. Felfedezések - a $\cos x$ és a Taylor-polinom. Jó és kevésbé jó közelítések

A fentiek egy egyszerűen elkészíthető GeoGebra alkalmazás segítségével könnye-

dén szemléltethetők. Az animációban megváltoztatható a függvény hozzárendelési szabálya, a polinom rendje, valamint a Taylor-polinom felírására szolgáló pont abszcisszája.

3.34. ábra. A $\cos x$ és a Taylor-polinom - Miért közelít?

Az adott paraméterek változtatásával felfedeztethető, hogy a közelítés pontossága függ a pont választásától, illetve a polinom rendjétől. Mivel akár 50-ed rendű polinomot is előállíthatunk (és ez már meggyőzően közelít, tág intervallumban) megfogalmazódhat a Taylor-sor gondolata is.

3.35. ábra. Taylor-polinom a 6 körül - jobb közelítés egy másik tartományon

3.36. ábra. Taylor-polinom - (Ugye) mennyire jól közelít?

Mindezek összecsengenek az **1.4.2. fejezetben** megfogalmazottakkal is, bizonyítván, hogy felfedezésekkel valóságközeli problémák megoldására vonatkozóan is tehetünk érdemi lépéseket.

3.26. Megjegyzés. A gépi számábrázolás (legyen az számológép vagy számítógép) hibái elvi jellegűek, így azok nem küszöbölhetők ki.

3.4.9. Módszertani összefoglaló

A fejezetben bemutattuk a Magyarországon legelterjedtebb, oktatásban kiválóan használható szoftvereket, **(3.4.3.)** azok didaktikai előnyeivel együtt. Láthattunk példát az önálló, otthoni tanulást segítő lehetőségekre éppúgy, mint az egyszerű felhasználói felület hatékony kihasználására. Használtuk a számítógépet a kísérletek számának megsokszorozására **(3.4.4., 3.4.6.)**, mellyel a bizonyosság szintjét növeltük. A számítógépes megközelítés játékos formába ágyazásával **(3.4.5.)** a legkevésbé kedvelt, alacsony hatékonysággal tanított területeken is motiválttá tehetjük diákjainkat. Elértük, hogy a felhasznált eszközök mögé lássunk, apró bepillantást nyerhessünk a matematika valódi működésébe **(3.4.8.)**. Végül példát láthattunk a bonyolult, a matematikai absztrakció magas fokán álló fogalmakat, összefüggéseket testközelbe hozó reprezentációs lehetőségekre **(3.4.7.)**.

4. fejezet

Szigetek

„Elmondod, elfelejtem. Megmutatod, tán megjegyzem. Ha együtt csináljuk, megértem.” (KÍNAI BÖLCSESSÉG)

4.1. Bevezetés

Az alábbiakban kísérletet teszünk az előzőekben részletezett módszertani elvek egy konkrét, élő példán keresztül történő komplex reprezentálására. A szigetek néven ismertté vált problémacsoport kapcsán megmutatjuk, hogyan lehetséges számítógéppel katalizált felfedezéseken keresztül eljutni egy intuitív fogalomtól a különböző absztrakciós szinteken lévő definíciókig. Részletezzük, hogyan segítheti a számítógép a problémafelvetést, a modellalkotást és a mintafelismerést. Lehetőséget mutatunk a bizonyossági szint számítógépes kísérleteken keresztül történő növelésére, valamint a példák és ellenpéldák együttes hatására. Ennek keretében a helyes megoldások mellett az első intuíciónak leginkább megfelelő, nem feltétlenül korrekt válasszal szolgáló próbálkozásokot is bemutatunk. Ezek a heurisztikus megközelítések serkentik a kételkedés igényét, valamint a kritikus gondolkodás motorjává is válhatnak. A számítógép segítségünkre lesz a bizonyítási módszerek és a bizonyítás lépéseinek megtalálásában is.

4.2. Történeti áttekintés

2007. május 9-én Földes István előadást tartott a Szegedi Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszékének szemináriumán *Prefixmentes és egyértelműen dekódolható kódok Kraft-összegeiről* címmel. Itt vezette be az egydimenziós sziget fogalmát.

2	1	2	3	2	1	2
---	---	---	---	---	---	---

4.1. ábra. Szigetek az 1×7 -es rácson

Egy adott környezetben a létrehozható szigetek maximális száma fontos szerepet játszik jelen tárgyalásmódban a kódok prefixmentességének ellenőrzésében [49]. A cikk jelen tárgykörhöz kapcsolódó eredménye szerint az $1 \times n$ -es rácson legfeljebb n szigetünk lehet. (A sziget fogalmát részletesen felépítjük majd a **4.3. fejezetben.**)

Ezen eredményt Czédli Gábor hamarosan általánosította két dimenzióra, téglalap alakú szigetekre [34]. Innen tudjuk, hogy az $m \times n$ -es rácson a (téglalap alakú) szigetek maximális száma $f(m, n) = \lfloor \frac{mn+m+n-1}{2} \rfloor$, ahol $\lfloor x \rfloor$ az x valós szám (alsó) egészrészét jelöli.

2	2	1	1	1	1	1	1
1	1	1	3	1	1	1	2
2	2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	3	1	1	1	2
2	2	1	1	1	1	1	1

4.2. ábra. Szigetek két dimenzióban

A bizonyítás során felhasznált jóval korábbi tétel az adott hálóelméleti eredmény első hálóelméleten kívüli alkalmazása volt [35].

A cikk a *European Journal of Combinatorics* című folyóiratban jelent meg, 2009-ben. A téma hamar felkeltette számos matematikus érdeklődését. Olyannyira, hogy Lengvárszky Zsolt, a Louisiana State University oktatója (a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének korábbi (1985-86) munkatársa) hamarosan ugyanebben a folyóiratban publikált két cikket is a szigetekről. Az elsőben a nem bővíthető (maximális) szigetrendszerek minimális szigetszámát határozta meg [92]. (Czédli Gábor cikkében valójában a maximális szigetrendszerek maximális szigetszámát adta meg.) Filozófiájukat tekintve Czédli Gábor a legtakarékosabb, Lengvárszky Zsolt a legpazarlóbb sziget elhelyezkedést jellemezte. A másik cikkben a fenti problémakör egy speciális esetét vizsgálva, az $m \times n$ -es rácson elhelyezkedő négyzet alakú szigetek által alkotott maximális szigetrendszerek maximális és minimális szigetszámára vonatkozóan tett megállapításokat [93]. Ekkor indult el a szigetek elemi eszközökkel történő szerteágazó vizsgálata is [11, 110, 112]. Megkezdődött a háromszögrács szigeteinek vizsgálata, de egy jó felső, illetve alsó korlát megtalálása után ez félbeszakadt [70]. Konkrét, zárt formula a négyzet alakú szigetek maximális száma esetében sem született [71]. Történtek vizsgálatok magasabb dimenziókban is [133].

Sokkal nehezebb problémába ütköztünk a szerző által elindított korlátozott magasságú szigetek vizsgálata során, itt egyelőre csak néhány speciális esetre vonatkozó részeredményünk van [72, 111] (Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czédli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011., Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.).

A problémakör létjogosultságát nem csak a publikációk magas száma mutatja,

hanem az is, hogy a szigetek „sikere” további hálóelméleti vizsgálatokat motivált [36, 37]. Ugyanakkor a matematika különálló területei közötti oly fontos hidak egyikét is jelentheti a szigetek új szemléletű, folytonos esetben történő vizsgálata [95, 129].

4.3. A sziget fogalmának kialakítása

„... a matematikai fogalmakat hosszú időn át érleljük, s csak azután jutunk el a matematikailag kialakítandó fogalomhoz.” (SZENDREI JÁNOS)

Ebben a részben az önálló felfedezést segítő, tudatos tanári munkával irányított feladatokkal kísérletet teszünk a sziget fogalmának további, tetszőleges mélységű matematikai vizsgálat elvégzésére alkalmas, különböző absztrakciós szintű kialakítására. Ezzel is igazolván, hogy felfedezésekkel nem csak a sejtések, de a fogalmak kialakításának szintjén is eredményes munka végezhető.

4.3.1. Mi az a sziget?

Egy probléma megközelítése során fontos, hogy mindig úgy vezessük be azt, hogy felkeltsük a tanulók érdeklődését. Erre alkalmas lehet néhány kép, ábra, karikatúra; illetve különösen hasznos, ha más tudományterületekre, más tantárgyaknál már tanult ismeretekre utalunk. A modell-, illetve fogalomalkotás kezdeti szakaszában különösen ügyeljünk arra, hogy fogalmaink intuitívak, a formalizmust a lehető legteljesebb mértékben nélkülözők legyenek.

4.1. Feladat. Mi a sziget?

4.3. ábra. Mi a sziget?

A választ például a földrajz órán tanultakat felhasználva, így adhatjuk meg.

4.2. Definíció. A sziget vízzel teljesen körbezárt kisebb szárazföld.

A tanár szerepe itt annyi, hogy a diákokat egy konkrétabb, megfogható fogalmakat és tulajdonságokat használó definíció megalkotására ösztönözze. A cél ezzel persze egy matematikai modell megalkotása. A szigetet szigetté tevő, lényegi (definiáló) tulajdonságát kiemelve például a következő definíciót kaphatjuk.

4.3. Definíció. Egy sziget kiemelkedik a tengerből; *minden* pontja magasabb, mint közvetlen környezete *bármely* pontja.

4.4. Megjegyzés. Ezzel kizártuk vizsgálataink köréből azokat a szigeteket, melyek nem összefüggők, illetve amelyek belsejében vannak környezetüknél mélyebb területek, tavak. A továbbiakban tehát csak tómentes szigetekkel fogunk foglalkozni. A felépítés egy másik módja, illetve új kutatási, felfedezési irány lehet az, ha ilyen szigeteket is megengedünk.

A szigetek reprezentálására természetes eszközként rendelkezésünkre áll a négyzetrácsos papír. Az ebben rejlő lehetőségekre felhívva tanulóink figyelmét, terelhetjük őket egy újabb, jobban használható definíció megalkotása felé.

4.5. Feladat. Hogyan jeleníthető meg a sziget egyszerű, kezelhető formában, csak a lényegi tulajdonságát megtartva? Milyen (matematikai) modellt tudnánk adni a szigetre?

Megoldás. Egy lehetséges választás a következő. Legyen leegyszerűsített világunk a négyzetrács egy téglalapja. Az egységnégyzetekből álló téglalap minden mezőjéhez hozzárendelünk egy pozitív egész számot, a mező magasságát. Minden, a téglalapunkon kívüli mező magasságát (azaz a vízszintet) 0-nak vesszük.

4	4	4	1	4	4
3	4	3	1	5	4
1	5	1	1	2	2
3	4	3	1	3	3

4.4. ábra. Leegyszerűsített világunk

4.6. Megjegyzés. Az, hogy a mezők értékét pozitív egészeknek választottuk, önkényesnek tűnhet. Könnyen meggondolható azonban, hogy felesleges valós számokat megengedni magasságnak. Ugyanis a meglévő magasságokat nagyság szerint növekvő módon sorba rendezve, az első helyett egyet, a második helyett kettőt, s.í.t. írva, ugyanazokat a szigeteket kapjuk, s csak pozitív egész értékeket használunk. Mivel a rácsunk véges, ez mindig megtehető.

Távlati célunk a szigetek számának vizsgálata, így a fogalom kialakítását is ennek rendeljük alá. A következő néhány, a szigetek számára vonatkozó feladat célja, hogy az intuitív után egy, a további vizsgálatok szempontjából használható, kevésbé általános, konkrétabb fogalmat alapozzanak meg.

A fenti kétdimenziós ábrák egy egyszerű program, míg a háromdimenziós reprezentációk a Mathematica komputer-algebrai rendszer segítségével készültek. A számítógéppel támogatott oktatás számos előnye megmutatkozik már ezekben az egyszerű ábrákban is: a kétdimenziós ábra könnyen sokszorosítható, kivetíthető, azon a szigetek könnyen jelölhetők. A háromdimenziós ábrák forgathatók, teljesebb vizuális képet adnak. Ábrákat természetesen akár egy egyszerű képszerkesztő programmal is készíthetünk. Több ábra generálásával, könnyedén katalizálhatjuk felfedezéseinket. Elérhetjük például a kísérletek megsokszorozását, amikor is minden tanuló (csoport) különböző ábrát kapva, ugyanazon a problémán, de mégis különböző feladaton dolgozik.

A fenti rövid kísérletsorozatnak is számos eredménye van. Megismertük, kialakítottuk a fősziget fogalmát, továbbá megtapasztalhattuk, hogy szigeteink túlságosan is sokfélék lehetnek, összeszámlálásuk nehézkes. Nehézkes, sőt lehet, hogy felesleges is, hiszen akár a világunk mérete által maximálisan elérhető, $m \times n$ -es rács esetén mn , számú szigetet is elő tudunk állítani. Így még összeszámlálásuk sem érdekes. A következőkben ennek járunk utána. Az általános, paramétereket tartalmazó vizsgálat előtt most is konkrét, kis rácsokon érdemes próbálkozni, az önálló tanulói aktivitást szem előtt tartva.

4.8. Feladat. Adjunk meg magasságokat a 2×3 -as rácsra úgy, hogy azon pontosan 6 szigetünk legyen!

Megoldás.

4.8. ábra. Kis rács, sok sziget

A fenti természetesen csak egy lehetséges konfiguráció, de már ez is alapul szolgálhat számos, különböző irányba történő általánosításhoz. Egy ilyenre példa a következő.

4.9. Feladat. Adjunk meg magasságokat az $m \times n$ -es rácson úgy, hogy azon pontosan mn szigetünk legyen!

Megoldás. Egy lehetséges megoldást mutat az alábbi ábra.

1	2	...	...	n
$n+1$	$n+2$	...	...	$2n$
$2n+1$	$2n+2$	...	...	$3n$
...	...	...	...	...
...	...	...	$mn-1$	mn

4.9. ábra. Nagy rács, sok sziget - mn sziget az $m \times n$ -es rácson

Ezen konfigurációban a magasságok a sorokban balról jobbra haladva szigorú monoton növekvő sorozatot alkotnak.

A fentiekkel célunk a tanulók általunk preferált szigetfogalom irányába történő terelése úgy, hogy kísérleteinken keresztül ez egy általuk megtalált természetes választásnak tűnjön. Eddigi vizsgálataink következményeként a tanulók maguk ismerhetik fel tehát, hogy speciális alakú szigetekkel érdemes csak foglalkoznunk. A korábbiak után egy természetes választás a téglalap alakú sziget.

Ezek után feladatként is kitűzhető fogalmunk további absztrahálása.

(a) Szigetek művész szemmel

(b) Szigetek, egy kicsit matematikus szemmel

4.10. ábra. Szigetek absztrahálódása

4.10. Feladat. Adjunk definíciót a téglalap alakú sziget fogalmára!

Megoldás. Korábbi vizsgálatainkban szerzett tapasztalatainkat felhasználva például a következő definíciók születhetnek.

4.11. Definíció. Legyen adott egy $m \times n$ -es (négyzet)rács, melynek minden mezőjéhez hozzárendelünk egy pozitív egész számot, a mező (tengerszint feletti) magasságát. Rácsunk egy téglalap alakú tartományát szigetnek nevezzük, ha van olyan vízmagasság, amely esetén a téglalap (szigetként) kiemelkedik a „vízből”.

Az absztrakció különböző szintjén más-más, ekvivalens definíciók is megadhatók. Ha matematikai tartalommal töltjük meg a *miért emelkedik ki* kérdését, akkor például a következő definíciót kaphatjuk.

4.12. Definíció. Legyen adott egy $m \times n$ -es (négyzet)rács, melynek minden mezőjéhez hozzárendelünk egy pozitív egész számot, a mező magasságát. Rácsunk egy téglalap alakú tartományát szigetnek nevezzük, ha minden cellájának magassága nagyobb, mint a téglalapot határoló mezők bármelyikének magassága.

Ez a definíció tulajdonképpen elegendően konkrét és pontos további vizsgálataink elvégzéséhez. A következő, első látásra szükségtelenül bonyolult definíció jelentőségét például az is adja, hogy ezzel a megközelítéssel válik a problémakör programozhatóvá, ami viszont a későbbi vizsgálatokban fontos szerepet fog játszani.

4.13. Definíció. Legyen $A = (a_{ij})_{m \times n}$ egy $m \times n$ -es pozitív egész számokat tartalmazó mátrix és $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pozitív egészek, melyekre $1 \leq \alpha \leq \beta \leq m$, illetve $1 \leq \gamma \leq \delta \leq n$. Ekkor azon a_{ij} elemek által alkotott R részmátrixot, melyekre $\alpha \leq i \leq \beta$ és $\gamma \leq j \leq \delta$ mátrixunk egy téglalapjának nevezzük. Legyen r R legkisebb eleme, illetve legkisebb elemeinek egyike. Ekkor, ha az A mátrix bármely, R -rel szomszédos a_{ij} elemére $a_{ij} < r$, akkor azt mondjuk, hogy R (téglalap alakú) sziget A -n.

A fentiek alapján természetes, hogy a továbbiakban, ha csak mást nem mondunk, szigeten téglalap alakú szigetet értünk.

4.14. Megjegyzés. A fentiekből látható, hogy hogyan lehetséges a felfedezések középpontba állításával, irányított kísérletekkel segíteni az önálló fogalomalkotás folyamatát.

A következőkben a megalkotott definíciónk alkalmazási lehetőségeit mutatjuk be; célunk a fogalom elmélyítése. Különösen fontos ugyanis, hogy fogalmaink felhasználásának tekintetében addig ne lépünk tovább, míg fogalmaink meg nem szilárdultak.

4.15. Feladat. Keressük meg az összes szigetet az alábbi rácson!

3	3	2
3	2	2

(a)

4	3	1	2
5	2	1	3
4	4	1	4

(b)

4	4	4	1	4	4
3	4	3	1	5	4
1	5	1	1	2	2
3	4	3	1	3	3

(c)

4.11. ábra. Keressük meg az összes (téglalap alakú) szigetet!

Megoldás. A megoldások az alábbi ábrán láthatók. Az első ábrán csak egy sziget van, a fősziget. A második és a harmadik ábrán pedig hat szigetünk van. Érdekes ezt összevetni a **4.7. feladat** eredményével.

3	3	2
3	2	2

(a)

4	3	1	2
5	2	1	3
4	4	1	4

(b)

4	4	4	1	4	4
3	4	3	1	5	4
1	5	1	1	2	2
3	4	3	1	3	3

(c)

4.12. ábra. A téglalap alakú szigetek

4.16. Megjegyzés. Az azonos feladat különböző szemléletű megoldása (**4.7.**, **4.15. feladat**) hatékony eszköze a fogalom letisztázásának, elmélyítésének.

A sziget fogalmának elmélyítése kapcsán különösen fontos a szigetkeresés lehetséges inverzproblémáinak vizsgálata. A következőkben erre mutatunk néhány példát.

4.3.3. Csináljunk szigeteket!

Eddigi feladatainkban egy adott rácson kellett megtalálnunk az összes szigetet. Tekintsük ezen keresés egyik lehetséges megfordítását!

4.17. Feladat. Adjuk meg a mezők magasságértékeit úgy, hogy pontosan a jelölt téglalapok legyenek szigetek!

4.13. ábra. Adjuk meg a magasságokat!

Megoldás. A 4.13(c) és a 4.13(d) ábrákhoz hosszabb próbálkozás után sem találunk megoldást. Az ilyen paradox helyzetek segíthetnek el bennünket a szigetrendszerek szerkezetére vonatkozó felfedezésekig. Már ezen néhány példából is kialakulhat a sejtés, hogy két sziget nem metszheti, sőt nem is érintheti egymást, hacsak nem tartalmazza teljes egészében egyik a másikat. Ezt a **4.52. sejtés** keretében be is fogjuk bizonyítani. A 4.13(a), 4.13(b) és a 4.13(e) ábrákhoz az alábbiakban adunk meg egy-egy lehetséges megoldást.

3	3	2	2
3	3	2	3
3	3	2	5

(a) Megoldás 4.13(a)

1	1	1	3	3
5	5	1	3	5
5	7	1	3	5
3	3	1	1	1

(b) Megoldás 4.13(b)

2	2	1	1	1	1	1	1
1	1	1	3	1	1	1	2
2	2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	3	1	1	1	2
2	2	1	1	1	1	1	1

(c) Megoldás 4.13(e)

4.14. ábra. A 4.17. feladat megoldásai

4.18. Megjegyzés. Ott, ahol van megoldás, végtelen sok megoldás van, hiszen valamely téglalap alakú sziget minden mezőjének magasságát azonos értékkel megnövelve a szigetek nem változnak, csak a magasságuk. Az ilyen, nem egyértelmű megoldással rendelkező feladatok különösen fontosak a sziget fogalmának kialakításában, hiszen rajtuk keresztül épp a sziget lényegi, definiáló tulajdonságát tudjuk megvilágítani.

A megoldások iránymutató tanári vezetéssel történő vizsgálata egy, a továbbiak szempontjából fontos, de önmagában is érdekes fogalomhoz vezet el. Az alábbiakban ezt építjük fel.

4.3.4. Minimális magasságú szigetek, szigetek kanonikus reprezentációja

4.19. Feladat. Adjunk meg további megoldásokat a 4.17 (a) és (b) feladatokhoz.

Megoldás. A következőkben két-két megoldást adunk meg a 4.13(a) és 4.13(b) ábrákhoz.

4	4	2	1
4	4	2	4
4	4	2	5

(a) Megoldás 4.13(a)

3	3	2	2
3	3	2	3
3	3	2	4

(b) Megoldás 4.13(a)

1	1	1	3	4
4	4	1	4	5
4	5	1	4	5
3	3	1	1	1

(c) Megoldás 4.13(b)

2	2	2	3	3
4	4	2	3	4
4	5	2	3	4
3	3	2	2	2

(d) Megoldás 4.13(b)

4.15. ábra. Magasságok másképp

A számos helyes, de nem azonos megoldás összehasonlítása során könnyedén felmerülhet a felhasználandó magasságértékek vizsgálata.

4.20. Feladat. Mi a közös a fenti megoldásokban?

Megoldás. Bizonyos mezők magasságai csökkenthetők úgy, hogy a szigetrendszer nem változik abban az értelemben, hogy pontosan ugyanazok a téglalapok maradnak szí-

getek. A 4.15(a) ábra esetében például az alábbi ábra mutatja a mezők magasságának csökkentésével előálló új lehetőséget. A megváltozott magasságokat vastagon szedtük.

3	3	2	1
3	3	2	4
3	3	2	5

4.16. ábra. Magasságok csökkentése

4.21. Megjegyzés. A fenti mellett számos más megoldás is adható. Ezen a ponton is külön felhívjuk a figyelmet a fokozatosság elvére. Nem célunk rögtön, hogy a minimális megoldást találjuk meg. Először elég, ha a diákok azt veszik észre, hogy vannak olyan mezők, amelyek magasságai csökkenthetők. Ez az észrevétel a korábbiak után természetes. Ha ugyanis a magasságok növelhetők a szigetrendszer megváltoztatása nélkül (**4.18. megjegyzés**), akkor az is előfordulhat persze, hogy csökkenthetők.

Innen már természetes a minimális magasságokkal dolgozó eset vizsgálata.

4.22. Feladat. Oldjuk meg a **4.17 (a)** és **(b) feladatokat** úgy, hogy a lehető legkisebb magasságértékeket használjuk fel.

Megoldás. A 4.13(a) és 4.13(b) ábrákhoz tartozó minimális magasságokkal dolgozó megoldásokat az alábbi ábrákon láthatjuk.

2	2	1	1
2	2	1	2
2	2	1	3

(a) Megoldás 4.13(a)

1	1	1	2	2
3	3	1	2	3
3	4	1	2	3
2	2	1	1	1

(b) Megoldás 4.13(b)

4.17. ábra. Minimális magasságok

4.23. Feladat. Egy ilyen, minimális kitöltés esetében hogyan állapítható meg egyszerűen egy adott mező magassága?

Megoldás. Könnyen látható, hogy minden mező magassága az a pozitív egész szám, ahány szigetnek része az adott mező. (Ezt mindenképp érdemes összevetni a **4.36. megjegyzésben** foglaltakkal.)

A mezők magasságának meghatározása kapcsán felmerülhet a szigetmagasság definiálásának igénye. Ezt is feldolgozhatjuk felfedezettő jelleggel, feladatok segítségével.

4.24. Feladat. Hogyan érdemes definiálni egy adott sziget magasságát?

Megoldás. A sziget magasságára a következő definíció adható.

4.25. Definíció. Egy sziget magassága a mezői magasságértékeinek minimuma.

Mint minden esetben, így most is érdemes a definíció megszilárdulását feladatokkal segíteni. Az alábbiakban erre láthatunk néhány példát.

4.26. Feladat. Miért nem mezői magasságértékének maximumát választottuk egy sziget magasságának?

Megoldás. A magasságok maximumának nincs ténylegesen köze a szigethez, ez a **4.18. megjegyzés** alapján jól látható. A minimum viszont az az érték, melynél egy kicsit alacsonyabb vízszint esetén az adott sziget tényleg szigetként viselkedik.

4.27. Feladat. Határozzuk meg az alábbi ábrán látható szigetrendszer szigeteit, s azok magasságait!

3	2	1	5	5
2	2	1	5	4

4.18. ábra. Szigetek és magasságaik

Megoldás. A fenti ábra szigeteit az alábbiakban jelöltük. A bal oldali 1×1 -es sziget magassága 3, míg az ugyanott található 2×2 -es sziget magassága 2. A jobb oldalon látható 2×2 -es sziget 4-es magasságú.

3	2	1	5	5
2	2	1	5	4

4.19. ábra. Szigetek és magasságaik

4.28. Feladat. Adjuk meg a 3×4 -es rács mezőinek magasságértékeit úgy, hogy a rácson a fősziget mellett még pontosan két sziget legyen, melyek magassága 2 illetve 3.

Megoldás. Az alábbi ábrán egy lehetséges kitöltés látható. A bal felső sarok 2×2 -es szigetének magassága 2, míg a jobb alsó sarokban található 2×1 -es sziget magassága 3.

3	3	1	1
3	2	1	3
1	1	1	3

4.20. ábra. 2 illetve 3 magas szigetek

A fenti, szigetrendszerek minimális megadási módjára vonatkozó észrevétel annyira fontos, hogy akár külön fogalmat is bevezethetünk rá. Ezt láthatjuk a következőkben.

4.29. Definíció. Legyen adott egy rács, s rajta egy szigetrendszer. Ha a rács minden mezőjének magassága az a pozitív egész szám, ahány szigetnek az adott mező része, akkor a szigetrendszer ezen megadási módját a szigetrendszer kanonikus reprezentációjának nevezzük.

4.30. Megjegyzés. A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy a kanonikus alakban minden mező magassága a lehető legkisebb olyan szám, amellyel az adott szigetrendszer előállítható, így akár minimális reprezentációnak is nevezhetnénk.

Azt persze, hogy miért fontos a szigetrendszerek ily módon történő megadása, szintén feldolgozhatjuk feladatok formájában is. A következő két feladat erre mutat példát.

4.31. Feladat. Mi adja a minimális magasságok mellett, a szigetrendszerek kanonikus reprezentációjának jelentőségét?

Megoldás. A szigetrendszerek ezen megadása már egyértelmű.

4.32. Feladat. Melyik az a magasságérték, amely biztosan megjelenik egy szigetrendszer kanonikus reprezentációjában?

Megoldás. Bármely szigetrendszer kanonikus reprezentációjában biztosan megjelenik egy 1 magasságú mező. Könnyen látható ugyanis, hogy ha ilyen mezőnk nincs, akkor minden magasság csökkenthető egyesével (a szigetek számának megváltoztatása nélkül) addig, amíg 1 magasságú mezőnk nem lesz. Ezek azok a mezők, melyek csak a főszigetnek részei.

A fogalom megszilárdulását itt is segíthetjük azt különböző irányból megvilágító feladatokkal. Az alábbiakban erre mutatunk egy példát.

4.33. Feladat. Adjuk meg az alábbi ábrákon látható szigetrendszerek kanonikus reprezentációját.

4.21. ábra. Keressük a kanonikus reprezentációt!

Megoldás. A megoldásokat az alábbi ábrán láthatjuk.

4.22. ábra. Szigetek kanonikus reprezentációja

4.3.5. Ismerkedés a korlátos magasságú szigetekkel

A szigetek keresésében a következő fokozatot a korlátozott magassággal rendelkező szigetek vizsgálata jelentheti. Itt a magasságok korlátozásával érjük el, hogy feladatainknak csak véges sok megoldása legyen. A korlátos magasságokkal dolgozó eset vizsgálata a kanonikus reprezentáció bevezetése után már természetes folytatása eddigi vizsgálatainknak.

4.34. Feladat. Adjuk meg a mezők magasságértékeit úgy, hogy pontosan a jelölt téglalapok legyenek szigetek, ha a felhasználható maximális magasság $h = 1$!

4.23. ábra. Adjuk meg a magasságokat!

Megoldás. Ha a maximális magasság $h = 1$, akkor ez azt jelenti, hogy minden mező magassága 1. Ekkor azonban csak egy szigetünk lehet, a teljes rács, vagyis a fősziget. Így egy megoldás van a 4.23(a) ábrához, és nincs megoldás a 4.23(b) ábrához kapcsolódóan.

1	1	1
1	1	1

4.24. ábra. Megoldás, ha a magasság legfeljebb 1

4.35. Feladat. Adjuk meg a mezők magasságértékeit úgy, hogy pontosan a jelölt téglalapok legyenek szigetek, ha a felhasználható maximális magasság $h = 2$!

4.25. ábra. Adjuk meg a magasságokat!

Megoldás. Hamar megláthatjuk, hogy nem található megoldás a 4.25(b) ábrához. A bal alsó sarok cellája ugyanis három különböző szigetnek is mezője, így az ő magassága legalább 3 kellene, hogy legyen. A többi feladathoz az alábbiakban mutatunk egy-egy megoldást. Ezeknek a feladatoknak más megoldása nincs is.

1	1	2
2	1	2

(a) Megoldás 4.26(a)

1	2	1	1
1	1	1	2
2	2	1	2

(b) Megoldás 4.26(c)

4.26. ábra. Megoldások, ha a magasság legfeljebb 2

4.36. Megjegyzés. A 4.25(b) ábrához kapcsolódó ellentmondások, illetve maga a nem létező megoldás is fontos szerepet játszik a szigetfogalom megszilárdulásában. A példák mellett megfelelő szerephez kell engednünk jutni az ellenpéldákat is. Különösen fontos, hogy különböző okokból nem működő példákat, ellenpéldákat mutassunk a fontos tulajdonságok lehető legtöbb oldalról való kiemelése céljából. Most például megállapíthattuk, hogy ha a megengedett maximális szigetmagasság h , akkor a főszigeten belül legfeljebb $h - 1$ szinten egymásba ágyazott szigetek állhatnak. Ez persze szoros kapcsolatban van a kanonikus reprezentáció bevezetése kapcsán tapasztaltakkal.

Ezek után sikerrel próbálkozhatunk összetettebb feladatok megoldásával is. Erre mutat példát a következő feladat.

4.37. Feladat. Adjuk meg a mezők magasságértékeit úgy, hogy pontosan a jelölt téglalapok legyenek szigetek, ha a felhasználható maximális magasság $h = 4$!

(a)

(b)

(c)

4.27. ábra. Adjuk meg a magasságokat!

Megoldás. Az előzőek alapján könnyen megállapítható, hogy a 4.27(c) ábrához nincs megoldás. A többi feladat (kanonikus) megoldása az alábbiakban látható. A **4.37 (b) feladat**nak nincs is más megoldása, míg a **4.37 (a) feladat** esetében a kanonikus mellett több más megoldás is létezik.

1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	2

(a)

2	2	2	1	2
4	3	2	1	3
1	1	1	1	4

(b)

4.28. ábra. Megoldások, ha a magasság legfeljebb 4

A továbbiakban a szigetkeresés problémájának egy másik lehetséges inverzével foglalkozunk.

4.38. Megjegyzés. Fontos módszertani eszköz az ellenpéldák mellett a hibás bizonyítások, rossz megoldások bemutatása. Serkentik ugyanis a kételkedés igényét, valamint a kritikus gondolkodás motorjává is válhatnak, így segítségünkre lehetnek meglévő fogalmaink magasabb szintre történő emelésében is. A következőkben (**4.39. feladat** - **4.42. feladat**) erre is példát mutatunk.

4.39. Feladat. Adjuk meg a magasságokat úgy, hogy csak egyetlen sziget legyen a 2×3 -as rácson!

Próbálkozás. Egyetlen szigetünk mindig van, a fősziget. Ha nincs másik sziget, az csak úgy lehetséges, ha minden mező magassága azonos, például 1.

4.40. Feladat. Mi a véleményünk az előző próbálkozásról? Elfogadjuk azt megoldásnak?

Megoldás. Nem. A megoldás hibás. A következő ábra egy ellenpéldát mutat.

3	3	2
3	2	2

4.29. ábra. Egyetlen talaj, csak a főszigettel

Az előző feladat egyfajta általánosításaként tekintsük a következő feladatot, s ennek kapcsán a sziget fogalmának további elmélyítését szolgáló, valamint a példák és ellenpéldák szerepét, illetve az igazság monoton növelésének módját jól reprezentáló, hibás és helyes megoldási lehetőségeket.

4.41. Feladat. Adjuk meg a magasságokat úgy, hogy 2 sziget legyen a 2×3 -as rácson!

Megoldás. Egy lehetséges megoldást mutat az alábbi ábra.

2	1	1
2	1	1

4.30. ábra. 2 sziget a 2×3 -as rácson

A fenti egy tipikus megoldás. Annak megismerése, hogy nem csak ilyen típusú megoldás (tehát amikor a szigetekeken kívül a talaj egyenletes) létezik, fontos a továbbiak szempontjából. Ehhez segít hozzá a következő feladat.

4.42. Feladat. (Próbálkozás az általánosításra.) Igaz-e a **4.41. feladat** következő általánosítása? Ha magasságokat kell megadnunk úgy, hogy az $m \times n$ -es rácson két szigetünk legyen, akkor, mivel az adott rács, a fősziget mindig sziget, egyetlen lehetőségünk van, mégpedig az, ha egy tetszőleges belső téglalap alakú tartomány minden mezőjének magasságát h -nak ($h > 1$), az összes többi mező magasságát pedig azonos, h -nál kisebb, pozitív egésznek választjuk.

Megoldás. Nem, és az indoklás a **4.39. feladat** megoldásának vizsgálata során tapasztaltak alapján könnyen megelérhető. Egy ellenpéldát mutat a következő ábra.

1	2	2
3	1	2

4.31. ábra. Ellenpélda a 4.42. feladat állítására

4.43. Megjegyzés. Amennyiben szigetrendszerünket kanonikus alakban kell megadni, akkor viszont a $h = 2$ kiegészítéssel már igaz lesz a **4.42. feladat** állítása.

A következő feladattal lezárjuk ezt a rövid szakaszt, melynek keretében a fentiekben részletezett módszertani elvek bemutatása mellett, eljutunk egy kis rácson a minimális szigetszámtól a létrehozható maximális szigetszámig. Azt, hogy több szigetet tényleg nem lehet létrehozni, a későbbiekben (**4.5. fejezet**) be is fogjuk bizonyítani. Maximálisan sok sziget létrehozása már viszonylag kis rácsok esetén is nehéz feladat. Jelenleg a cél nem más, mint a maximum elérése – annak említése nélkül, hogy ez az elérhető maximum – ezzel is segítvén a szigetek maximális számára vonatkozó sejtés kialakulását.

4.44. Feladat. Adjuk meg a magasságokat úgy, hogy 5 sziget legyen a 2×3 -as rácson!

Megoldás. Egy lehetséges megoldást mutat az alábbi ábra.

2	1	2
3	1	3

4.32. ábra. 5 sziget a 2×3 -as rácson

4.45. Megjegyzés. A fentiekben megadott hibás és helyes próbálkozásokban illetve megoldásokban csak a rácsoakat adtuk meg, azokban a szigetekeket nem jelöltük. Ezen a szinten ez már megtehető, s kívánatos is, ezzel is segítvén a fogalom absztrahálódását.

A következőkben tovább folytatjuk szigeteink vizsgálatát viszonylag kis méretű (2×3 -as) rácsonk esetében, ám ezúttal korlátozott magasságfüggvény mellett. Cé-lunk a korlátos eset további vizsgálatának megalapozása, valamint annak érzékeltetése, hogy a nagymértékű hasonlóság ellenére itt egy teljesen más problémáról van szó. Ezt könnyebben elérhetjük, ha a fenti problémák korlátos esetre vonatkozó analogonjait dolgozzuk fel.

4.46. Feladat. Adjuk meg a magasságokat úgy, hogy 1 sziget legyen a 2×3 -es rácson, ha a megengedett maximális szigetmagasság $h = 1$!

Megoldás. A megoldás egyszerű. Egyetlen lehetőségünk, hogy rácsonkat egyesekkel töltjük fel, s ekkor valóban csak egy szigetünk van, a fősziget.

4.47. Feladat. Adjuk meg a magasságokat úgy, hogy 2 sziget legyen a 2×3 -as rácson, ha a megengedett maximális szigetmagasság $h = 1$!

Megoldás. Nincs megoldás, mivel a rácsonkat egyesekkel feltöltve csak egyetlen sziget keletkezhethet.

A következő feladatban eljutunk a 2×3 -as rácson $h = 2$ magassággal elérhető maximális szigetszámhoz. Az, hogy ennél több szigetünk jelen feltételek mellett nem lehet, egyelőre még csak sejtés. Ezt azonban később be is fogjuk bizonyítani (**4.6.4. fejezet**). Már ez a sejtés szintű észrevétel is elég azonban ahhoz, hogy jelen probléma kapcsán általánosítást fogalmazzunk meg (**4.49. feladat**), illetve, hogy a korábban, a nem korlátos esetben tapasztaltaktól (**4.44. feladat**) eltérő eredményünk alapján érzékeltessük, hogy a korlátos esetben egy teljesen más megközelítést igénylő problémával állunk szemben.

4.48. Feladat. Adjuk meg a magasságokat úgy, hogy 3 sziget legyen a 2×3 -as rácson, ha a megengedett maximális szigetmagasság $h = 2$!

Megoldás. Az alábbi ábra egy lehetséges megoldást mutat.

2	1	2
1	1	1

4.33. ábra. 3 sziget a 2×3 -as rácson

4.49. Feladat. Fogalmazzunk meg általános észrevételt a **4.48. feladat** alapján az $m \times n$ -es rács legfeljebb 2 magas szigeteinek számára vonatkozóan!

Megoldás. Ha legfeljebb 2 magas szigetet kell elhelyeznünk az $m \times n$ -es rácson, akkor leghatékonyabban az 1 magas mezők által határolt egy területű 2 magas mezők alkotnak szigetet. Belőlük az $m \times n$ -es rácson legfeljebb $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil$ van, s a főszigetet is számolva a szigetek maximális számára $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$ adódik, ahol $\lceil x \rceil$ az x valós szám felső egészrészét jelöli. Az alábbi ábra egy lehetséges megoldást mutat a 6×7 -es esetben.

2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1

4.34. ábra. Szigetek a 6×7 -es rácson, ha $h = 2$

4.3.6. A sziget fogalmának kialakulását segítő Mathematica animáció

Bevezetés

Ebben a fejezetben bemutatunk egy, többek között a sziget fogalmának kialakításában és megszilárdításában is jól használható interaktív Mathematica animációt.

A Mathematica 6. verziótól kezdődően a Mathematica programcsomagban lehetőségünk van az órai munkát is segítő alkalmazások egyszerű létrehozására. A logikus felépítésű, egyszerű nyelv használatával könnyedén hozhatunk létre felhasználóbarát, látványos animációkat, interaktív játékokat. Miközben a teljes forrás rejtve marad a felhasználók előtt, elkészített alkalmazásainkat széles körben oszthatjuk meg diákjainkkal, kollegáinkkal. Erre kiváló példa a már korábban említett és használt Wolfram Demonstrations Project [169]. A már elkészült alkalmazások használatához pedig elegendő az ingyenesen elérhető Mathematica Player [168].

Az alkalmazás bemutatása

Jelen alkalmazásban a felhasználó (játékos, felfedező) egy 2×3 -as ráccsal kezdheti meg a játékot.

4.35. ábra. Játék a szigetekkel Mathematicában

Kezdetben minden mező magassága 1. A rács alatt található mezők segítségével, egy egyszerű kattintással növelhető a megfelelő mezők magassága. A játékmező felső részén található csúszkák segítségével változtatható a tábla mérete, illetve elérhető, hogy az egyes mezők magasságát ne csak növelni, de csökkenteni is tudjuk. A három-dimenziós ábránk mérete szintén változtatható, sőt tetszőleges mértékben és irányba forgatható is, a kialakuló szigetrendszerre való optimális rálátást segítendő. Egyetlen kattintással lehetőségünk van a táblánk inicializálására, ekkor visszkapjuk az alapállapotot, amelyben minden mező magassága 1. A csúszkák alatt pedig folyamatosan látható az, hogy éppen aktuálisan hány szigetünk van. Az ilyen és ehhez hasonló alkalmazások természetesen maradéktalanul képesek együttműködni az interaktív táblákkal is. Így a tanulói felfedezés összekapcsolható az aktív tanulói részvétellel. Kattintgatások helyett a tábla érintésével hozhatunk létre szigeteket.

A játék célja

A játék célja, hogy maximális számú szigetet kreáljunk az adott rácson, tehát egy maximális szigetrendszert. Ha ezt elértük, egy kis pipa jelenik meg a táblán.

Az alkalmazást valódi céljától függetlenül, a megismerés jelen fázisában is haszonnal forgathatjuk. Segíthetjük vele a szigetfogalom kialakulását, hiszen folyamatosan nyomon követhető, hogy hány szigetünk van éppen. Így a diákoknak lehetőségük van önállóan felfedezni, hogy mit is tekintünk szigetnek, s mit nem. A szigetrendszerek kreálása során kialakulhatnak sejtések a szigetek elhelyezkedésére, maximális számára, illetve például a felhasználandó maximális magasságokra vonatkozóan is. Ezeket a további tárgyalás során eredményesen hasznosíthatjuk.

A sziget fogalmának egy kevésbé részletes felépítése, illetve a fenti animáció részletes bemutatása megtalálható a szerző [110] cikkében (Attila Máder, Róbert Vajda. *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.).

4.3.7. Módszertani összefoglaló

A fejezetben feladatokon keresztül nyertünk bevezetést a szigetek világába. Kialakítottuk és megszilárdítottuk a rács, a mező, a sziget, a fősziget a magasság(függvény), a szigetrendszer, a kanonikus reprezentáció és a sziget magasságának fogalmát. A ki-tűzött feladatok a következőképp csoportosíthatók:

- (a) A sziget fogalmának intuitív megközelítése (4.1.-4.9.).
- (b) A sziget matematikai fogalmának kialakítása, absztrahálása (4.10.-4.13.).
- (c) Szigetek keresése adott magasságfüggvény mellett (4.15.).
- (d) Inverzproblémák a fogalom elmélyítésére (4.17., 4.34.-4.49.). Ezek a következőképp kategorizálhatók:

- magasságfüggvény keresése adott szigetrendszerhez,
 - magasságfüggvény keresése adott szigetszámhoz,
 - korlátos magasságfüggvény keresése adott szigetrendszerhez,
 - korlátos magasságfüggvény keresése adott szigetszámhoz.
- (e) Szigetrendszerek megadása, kanonikus reprezentáció (4.19.-4.33.).
- (f) Újabb definíciók, példák, ellenpéldák kreálása, bizonyítások relevanciájának ellenőrzése (4.39.-4.44.).

A bemutatott Mathematica alkalmazás segítségével a fentiek játékos formában, aktív tanulói tapasztalatszerzéssel kísérve hajthatók végre. Az alkalmazás segítségével a tanulók kísérletek tucatjait végezhetik, akár közösen órán, akár otthon egyedül. A számítógép segítségével szerzett tapasztalatok segítenek a fogalmak gyors és hatékony kialakításában, elmélyítésében.

Külön felhívjuk a figyelmet a fokozatosságra, mely a felfedeztetés-központú tanítás esetén is fontos. Mindig adjunk elég időt egy adott fogalom megértéséhez, s ha kell, újabb és újabb példák segítségével alkalmazzuk, mélyítsük, absztraháljuk azt, míg a kívánt szintre el nem jutunk. A bemutatott eszközök felhasználásával tetszőleges számú feladat állítható elő gyorsan és hatékonyan.

A tanulók többféleképp is motiválhatók a munkára, melyet akár egyénileg, akár csoportokban is végezhetnek. Minden csoportnak kioszthatunk például egy-egy rácsot, (magasságfüggvénnyel vagy anélkül), s célul tűzhetjük ki a lehető legtöbb sziget megtalálását, vagy kreálását. A leggyorsabbat, illetve a legjobb eredményt elérőket külön jutalomban részesíthetjük. Egy-egy adott típusú feladat elvégzése után célszerű mindig új csoportokat alakítani, melyekbe ezáltal különböző képességű, a korábbi feladatokat eltérő hatékonysággal megoldó diákok kerülhetnek. A tipikusan több megoldással rendelkező feladatok jó alapul szolgálhatnak az eredmények és felfedezések közösségi szintű tárgyalásához. A gyerekek feladata lehet az eredmények, felfedezések többiekkel való ismertetése, különböző eredmények esetén a vélemények ütköztetése, az álláspontok megvédése.

4.4. Szigetrendszerek szerkezete

Ebben a fejezetben ismét egy lépést teszünk távlati célunk, a szigetek maximális számának meghatározása felé. A szigetek összeszámlálása során is előnyös, ha valamely stratégia mentén tudjuk azt megejteni. Ehhez nyújt segítséget, ha szigeteinket osztályozzuk. Az osztályozáshoz a korábbi kísérletek során szerzett tapasztalatainkat, intuitív fogalomcsíráinkat fogjuk használni [110].

4.4.1. Metsző szigetek

Az alábbiakban a szigetek kölcsönös helyzetére vonatkozó sejtéseinket emeljük magasabb szintre.

4.50. Feladat. Azt már láttuk, hogy két sziget közül egyik tartalmazhatja a másikat. Láttunk-e példát más módon érintkező szigetekre?

Megoldás. Nem. Ha ilyen konstrukciót tartalmazó szigetrendszer volt adva, arról megtapasztaltuk, hogy nem is létezik, illetve az ilyen típusú szigetrendszerek létrehozására vonatkozó kísérleteink kudarcba fulladtak (**4.17. feladat**).

4.51. Feladat. A korábbiak (**4.17. feladat**, illetve a **4.3.6. fejezet** játékának használatával) alapján milyen sejtésünk alakult ki a szigetek elhelyezkedésére, kölcsönös helyzetére vonatkozóan?

Megoldás. A vizsgálatok alapján a következő sejtés fogalmazható meg.

4.52. Sejtés. Két különböző szigetnek csak akkor lehet közös mezője, illetve határa, ha egyik tartalmazza a másikat. Azaz két különböző sziget közül az egyik tartalmazza a másikat, vagy a szigetek „messze” vannak egymástól, azaz el tudunk sétálni (úszni) közöttük.

A korábbi, számítógéppel sokszorozott kísérleteink hatására nem csak a fenti sejtés vált kellőképp erőssé, de az igazság monoton növelése során az okok feltárása is lehetővé vált. Így már maga a bizonyítás is kísérleteinknek köszönhetően intuitívan megalapozott. Absztrakt leírása ezek után egyszerű.

Bizonyítás. Azt már láthattuk, hogy két sziget közül egyik tartalmazhatja a másikat. Tegyük most fel, hogy van két olyan szigetünk, melyeknek van közös mezője (vagy akár csak határpontja) és egyik sem tartalmazza a másikat.

4.36. ábra. Metsző szigetek

Legyen a két sziget I_1 és I_2 . Mivel I_1 sziget, így minden mezőjének magassága nagyobb, mint környezete bármely mezőjének magassága, ezért

$$a > b \quad (4.1)$$

De mivel I_2 is sziget, ezért ugyanez az o mezőire is fennáll, vagyis

$$b > a \quad (4.2)$$

Ekkor 4.1 és 4.2 összevetéséből ellentmondásra jutunk. $\square$

4.53. Megjegyzés. A fenti bizonyítás abban az esetben is érvényes, ha a két sziget nem metszi egymást, csak közös határpontjuk van.

Tételünknek nem csak a szigetrendszerek szerkezetére vonatkozóan van jelentősége. Megfordítása segítségével ugyanis egy új definíciót is tudunk adni a sziget fogalmára. A következőkben ezt készítjük elő.

A fentiek segítségével további észrevételek fogalmazhatók meg a szigetrendszerek szerkezetére vonatkozóan. Az egyik ezek közül az, hogy a fenti tulajdonság jellemzi is a szigetrendszereket, vagyis igaz a fenti tétel következő értelemben vett megfordítása.

4.54. Tétel. Tetszőleges, a **4.52. sejtés** feltételeinek eleget tevő téglalaphalmaz szigetrendszerré tehető a magasságok megfelelő megválasztásával.

Bizonyítás. Legyen a rácsunk $m \times n$ -es; mn -szerinti indukcióval bizonyítunk. Ha $mn = 1$, vagy mindösszesen 1 szigetünk van, a fősziget, készen vagyunk. Legyen $mn > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás minden kisebb mn esetén igaz. Tekintsük most a maximális téglalapokat. Ezek azok, a főszigettől különböző téglalapok, melyeket valódi módon csak a teljes rács tartalmaz téglalapjaink közül. Ezekre, mint rácsokra az indukciós feltevés miatt igaz az állítás, így meg tudjuk választani a magasságokat úgy, hogy a maximális téglalapok, mint szigetrendszerek eleget tegyenek a feladat feltételének, vagyis azokban csak a jelölt téglalapok legyenek szigetek. Végül töltsük ki a rácsunk még kitöltetlen mezőit olyan magasságértékkel, amely minden eddig felhasználtnál kisebb (ha ilyen nincs, emeljük meg minden eddigi magasságot eggyel, így az 1 magasság megfelelő lesz), így a maximális téglalapok is szigetté váltak. $\square$

A téglalapok fenti elhelyezkedése tehát jellemzi is a szigetrendszereket, így ezáltal megtaláltuk a szigetrendszer egy másik definícióját is. A következő definíció nem használja a magasság fogalmát, viszont a szigetrendszereket a bennük elhelyezkedő szigetek kölcsönös helyzete alapján jellemzi. Távlati célunk, a szigetek maximális számának meghatározása szempontjából ez a kölcsönös helyzet kulcsfontosságú lesz, ezért ezen definíció szerepeltetése jelen helyen különösen indokolt.

4.55. Definíció. Legyen adott egy $m \times n$ -es rács. Ezen rács téglalapjainak egy $\mathcal{R}$ halmazát szigetrendszernek nevezzük, ha bármely $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, $R_1 \neq R_2$ esetén $R_1 \subset R_2$, vagy $R_2 \subset R_1$ vagy R_1 egyetlen cellája sem szomszédos R_2 egyetlen cellájával sem.

A szigetrendszerek szerkezetének feltérképezése során fontos lépés a szigetek osztályozása. Erre mutatunk példát a következő fejezetben.

4.4.2. Maximális és minimális szigetek

Korábbi, konkrét kísérleteinkben speciális szigetekkel is találkoztunk. Ebben a pontban ezek rendszerbe foglalására mutatunk lehetőséget, a tanulói felfedezést, önálló fogalomalkotást továbbra is szem előtt tartva. A jelen fejezetben megismert minimális és maximális szigetek fontos szerepet játszanak majd a későbbiekben, a szigetek maximális számának meghatározása során, megismerésük a szigetrendszerek szerkezetének részletesebb feltérképezése mellett ezért is fontos.

4.56. Feladat. Mikor hív(hat)unk egy szigetet maximálisnak, illetve minimálisnak?

Megoldás. Mivel a fősziget bármely szigetrendszer esetén mindig jelen van, és már külön neve is van, nincs értelme őt maximálisnak (is) nevezni. Természetes útja a fogalomalkotásnak, ha ezek után közvetlenül a fősziget „alatt” elhelyezkedő szigeteket tekintjük. Nevezzük tehát maximális szigetnek azokat a főszigettől különböző szigeteket, melyeket a fősziget kivételével egyetlen másik sziget sem tartalmaz valódi módon. A minimális sziget fogalmának megalkotásakor már egyszerűbb dolgunk van. Legyenek a minimális szigetek azok a szigetek, amelyek nem tartalmazznak (valódi módon) egyetlen másik szigetet sem. Az alábbi ábrán a minimális illetve maximális szigeteket vastag keretezéssel jelöltük.

4.37. ábra. Minimális és maximális szigetek

4.57. Megjegyzés. A fenti mellett természetesen számos más, értelmes definíció is adható a maximális illetve a minimális sziget fogalmára. Ezen a ponton mindenképp érdemes körbejárni a különböző tanulói megközelítéseket, megvizsgálva azok előnyeit és hátrányait. Mi a továbbiakban a fenti értelmezéssel élünk, mert távlati célunk, a szigetek maximális számának meghatározása szempontjából ez az egyik legcélravezetőbb.

A következő feladatok célja a minimális, illetve a maximális sziget fogalmának elmélyítése, absztrahálása. Használhatjuk itt is a **4.3.6. fejezet** játékát, melyben folyamatosan újragenerálható szigetrendszerek tucatjain végezhetjük el a minimális és

maximális szigetek vizsgálatát, ezzel is segítvén az önálló tanulói felfedezéseken alapuló fogalomalkotást.

4.58. Feladat. Hány minimális, illetve maximális sziget van az alábbi ábrán?

4.38. ábra. Minimális és maximális szigetek

Megoldás. Három minimális és három maximális szigetünk van. Ezeket az alábbi ábrán vastag keretezéssel jelöltük is.

(a) Minimális szigetek

(b) Maximális szigetek

4.39. ábra. Minimális és maximális szigetek

4.59. Feladat. Lehet-e egy sziget egyszerre minimális és maximális?

Megoldás. Igen. Az előző (4.39.) ábra egy példát mutat. A jobb felső sarokban található 1×1 -es sziget minimális és maximális is.

4.60. Feladat. Lehet-e egyszerre minden sziget minimális és maximális?

Megoldás. Nem, mivel a fősziget mindig sziget, de sohasem maximális.

4.61. Feladat. Lehet-e, hogy nincs minimális szigetünk?

Megoldás. Nem. Ha van legalább egy szigetünk (és egy mindig van, a fősziget), akkor ezen belül keressünk egy szigetet. Ha nem találtunk, akkor ez azt jelenti, hogy jelen szigetünk minimális. Ha találtunk újabb szigetet, ismételjük meg rá iménti eljárásunkat. Ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, s minimális szigetet szolgáltat. Egy más megközelítéssel élve a maximális magasságú sziget biztosan minimális.

4.62. Feladat. Lehet-e, hogy nincs maximális szigetünk?

Megoldás. Igen. Mivel a fősziget nem maximális, ezért ha csak a fősziget sziget, egyetlen szigetünk van, amely nem maximális. (Erre mutatott példát korábban többek között a 4.24 ábra és a 4.29 ábra.) Viszont minden más esetben van maximális szigetünk, ugyanis a fősziget által valódi módon tartalmazott szigetek közül a minimális magasságú maximális. Kanonikus reprezentáció esetén ezek a 2 magasságú szigetek.

4.4.3. Szigetek és gráfok

A szigetrendszerek szerkezetének teljesebb feltérképezése céljából ebben a fejezetben egy mélyebb matematikai eszköz, a gráf fogalmát fogjuk használni. Bevezetjük tehát a szigetrendszer gráfjának fogalmát, amely komoly szerepet játszik a szigetrendszer fogalmának absztrahálásában, illetve távlati célunk, a szigetek maximális számának meghatározásában is.

A következő feladatban intuitív módon jelenik meg a szigetrendszer gráfja.

4.63. Feladat. Fogalmazzunk meg észrevételt az alábbi ábra alapján a szigetrendszerek és a gráfok kapcsolatáról.

4.40. ábra. Szigetek és gráfok

Megoldás. Láthatóan minden szigetrendszerhez rendelhetünk egy, a tartalmazásra épülő gráfot, a szigetrendszer gráfját.

A fent bevezetett gráf és a hozzá tartozó szigetrendszer kapcsolatának további vizsgálatából újabb megállapításokhoz juthatunk a szigetrendszerek szerkezetét illetően. Ez ölt testet a következő tétel formájában.

4.64. Tétel. Tetszőleges rács szigetei a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmazt alkotnak.

Bizonyítás. Minden sziget tartalmazza (nem valódi módon) önmagát, így bármely I szigetre $I \subseteq I$, vagyis a tartalmazás mint reláció reflexív. Bármely I_1, I_2 sziget esetén, ha $I_1 \subseteq I_2$ és $I_2 \subseteq I_1$, akkor $I_1 = I_2$, a reláció antiszimmetrikus. Bármely I_1, I_2, I_3 sziget esetén, ha $I_1 \subseteq I_2$ és $I_2 \subseteq I_3$, akkor $I_1 \subseteq I_3$, azaz relációnk tranzitív. Ezzel beláttuk, hogy szigeteink a tartalmazásra nézve részbenrendezett halmazt alkotnak. $\square$

A fenti, a szigetrendszerek szerkezetére vonatkozó megállapítás tükrében a szigetrendszerünk gráfja is más értelmet nyer.

4.65. Feladat. Hogyan interpretálható a fentiek alapján **4.63. feladat** gráfja?

Megoldás. A gráf szigetrendszerünk Hasse-diagramja.

A fentiekben példát láthattunk arra, hogyan segítik a kísérletek a fogalmak ciklikus absztrahálását. Új fogalmaink segítségével megadhatjuk a szigetrendszer egy új modelljét is.

4.66. Feladat. Tekintsünk egy szigetrendszert. Adjunk egy, a szigetrendszert (jól) leíró modellt, melyben a szigetek kölcsönös helyzetük alapján kerülnek jellemzésre!

Megoldás. Egy lehetséges modell a következő. Rendeljünk szigetrendszerünkhöz egy irányított gráfot. A gráf csúcsainak feleltessük meg szigeteinket. A kisebb szigeteket a gráf alacsonyabb szintjeire helyezzük. Az I_1 csúcsból pontosan akkor indul el az I_2 csúcsba, ha a hozzájuk rendelt I_1 sziget közvetlenül tartalmazza az I_2 szigetet, azaz $I_2 \subset I_1$, és nem létezik olyan I_3 sziget, melyre $I_2 \subset I_3 \subset I_1$. Ekkor azt mondjuk, I_1 fedi I_2 -t, jelölésben: $I_2 \prec I_1$.

4.67. Megjegyzés. A továbbiakban a gráfon nem jelöljük az élek irányát, azok a szemléletnek megfelelően „fentről lefelé” mutatnak. Szintén nincs jelentősége az élek hosszának, vagyis annak, mely csúcs a gráfnak melyik szintjén helyezkedik el. A jobb áttekinthetőség kedvéért azonban célszerű minden csúcsot a neki megfeleltetett sziget tartalmazási relációban elfoglalt helyének megfelelő mélységbe helyezni. Ez azt jelenti, hogy ha szigetrendszerünk kanonikus alakban adott, akkor minden szigetnek megfeleltetett csúcsot az adott sziget magasságának megfelelő mélységi szintre helyezünk a gráfban. Mivel fő célunk, a szigetek maximális számának meghatározása szempontjából feltehető, hogy minimális magasságú szigetekkel dolgozunk, ezért a továbbiakban a legtöbb esetben kanonikus reprezentációt fogunk használni.

A következő feladatok célja a szigetrendszer gráfjának mélyebb megismerése, a fogalom absztrahálása, illetve a gráf meghatározó tulajdonságainak felfedeztetése, valamint a szigetek és a gráfok kapcsolatának mélyebb feltárása.

4.68. Feladat. Rajzoljuk fel az alábbi ábrákon látható szigetrendszerek gráfját!

3	1	3
2	1	2
3	1	3

(a)

5	4	3	2	1
---	---	---	---	---

(b)

3	2	1	3
2	2	1	2
4	3	1	1

(c)

1	2	1	2	1
1	1	1	1	1
2	1	3	2	3

(d)

4.41. ábra. Rajzoljuk fel a gráfokat!

Megoldás. A következő ábra egy-egy lehetséges, a szemléletünknek leginkább megfelelő, azaz a **4.67. megjegyzésben** részletezett módon megadott megoldást mutat.

4.42. ábra. Szigetrendszereink gráfjai

A jobb megértés érdekében itt is egy inverz feladattal folytatjuk a feldolgozást.

4.69. Feladat. Adjunk meg az alábbi gráfokkal reprezentált szigetrendszereket!

4.43. ábra. Adjunk meg szigetrendszereket!

Megoldás. A következő ábrán láthatjuk az (a)-(c) feladatok egy-egy kanonikus megoldását. A (d) és (e) gráfokhoz hosszabb próbálkozás után sem találunk megoldásokat.

4.44. ábra. Gráfjaink szigetrendszerei

A példák és ellenpéldák gondolatébresztő hatásának köszönhetően a fentiek alapján felfedezhetjük a szigetrendszerek gráfjának legfontosabb tulajdonságait.

4.70. Feladat. A fenti kísérletek alapján a szigetrendszerek gráfjának mely tulajdonságai fedezhetők fel?

Megoldás. Gráfjaink minden esetben körmentes, összefüggő gráfok, vagyis fák. A fősziget a fa gyökere. A gráf biztosan összefüggő, hiszen a fősziget minden szigetet tartalmaz. Legyen a gráfhoz tartozó rácsunk $m \times n$ -es. A körmentességet mn -szerinti

indukcióval bizonyítjuk. Ha $mn = 1$ vagy mindösszesen 1 szigetünk van, a fősziget, akkor készen vagyunk. Legyen $mn > 1$, és tegyük fel, hogy az állítás minden kisebb mn esetén igaz. Tekintsük most a maximális szigeket. Ezekre, mint rácokra az indukciós feltevés miatt igaz az állítás, azaz az általuk meghatározott szigetrendszerek gráfjai diszjunkt fák. Ezen fák gyökereit a főszigetnek megfeleltetett csúcs fedi, így a teljes szigetrendszer gráfja is fa.

Azt már láthattuk, hogy a főszigetnek megfeleltetett csúcs a szigetrendszer fájának gyökere. A következő néhány feladat célja, a korábban megismert további speciális szigetek és a gráf kitüntetett csúcsai közötti kapcsolat felfedeztetése.

4.71. Feladat. Mely szigetek tartoznak a gráfunk leveleihez?

Megoldás. A minimális szigetek.

4.45. ábra. A minimális szigetek a levelek

4.72. Feladat. Mely szigeteket feleltettük meg a gyökér által fedett csúcsoknak?

Megoldás. A gyökér fiainak megfeleltetett szigetek a maximális szigetek.

4.46. ábra. A maximális szigetek a gyökér fiai

A szigetek, illetve szigetrendszerek és a hozzájuk tartozó rácok, magasságfüggvények kapcsolatának felfedeztetésének mintájára (4.15.-4.49.), jelen pontban is számos

feladatot tűzhetünk ki a gráfok és a szigetrendszerekhez tartozó rácsok vizsgálatára. Vizsgálhatjuk például a rács méretének, vagy a magasságfüggvény értékkészletének kapcsolatát a gráfokkal. A számos lehetőség közül egyre mutatunk példát a következőkben. Itt a feldolgozásba jobban illeszkedően, a szigetek számának és a gráfoknak a kapcsolatát vizsgáljuk.

4.73. Feladat. Adjunk meg egy olyan szigetrendszert a 3×4 -es rácson, amely gráfjának pontosan

- (a) 1,
- (b) 2,
- (c) 4,
- (d) 8,
- (e) 9 csúcsa van.

Megoldás. Az alábbi ábra egy-egy lehetséges megoldást mutat.

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

(a)

2	2	2	1
2	2	2	1
2	2	2	1

(b)

2	2	1	2
2	3	1	2
2	2	1	2

(c)

3	1	3	3
2	1	2	2
3	1	4	3

(d)

4	1	4	3
3	1	2	2
2	1	4	3

(e)

4.47. ábra. Gráfok és szigetek

4.4.4. A szigetrendszerek szerkezetének felfedezését segítő Mathematica animáció

A 4.3.6. fejezet technikai észrevételeinek tükrében tekintsük a következő demonstrációt.

4.48. ábra. Szigetrendszerek és szerkezetük Mathematicában

Az alkalmazás elindítása után a bal oldalon egy szigetrendszer háromdimenziós ábráját láthatjuk. (Ez, hasonlóan a korábbiakhoz, természetesen forgatható a legjobb rálátás biztosítása végett.) A képernyő jobb oldalán pedig az éppen aktuális vízszint esetében felbukkanó új szigetek vetülete látható. A játék kezdetén a vízszint 0, s így természetesen egyetlen szigetünk van, a fősziget. A felhasználói ablak tetején található csúszka segítségével egyesével emelhetjük a vízszintet. A vízszint emelkedésének hatására újabb és újabb szigetek tűnnek fel, míg végül a teljes szigetrendszer a víz alá merül. Mindez a bal oldali ábrán teljes mértékben nyomon követhető, hiszen ott a szigetek víz feletti, és víz alatti része egyaránt látszik. A felhasználónak ezúttal is van módja tetszőleges rács megadására, tetszőleges magasságú mezőkkel. A játéknak ezúttal konkrét célja nincs, így azt akár mi magunk is meghatározhatjuk.

4.4.5. Módszertani összefoglaló

A fejezetben eljutottunk a korábbi kísérletek által intuitívan kialakított sejtések konkrét megfogalmazásáig, bizonyításáig. Megalkottuk a maximális és minimális sziget fogalmát, bevezettük a szigetrendszer gráfját, valamint megvizsgáltuk a szigetrendszerek és a gráfok kapcsolatát. A kitűzött feladatok a következőképp csoportosíthatók:

- (a) Szigetek kölcsönös helyzetének vizsgálata (4.50.-4.55.).
- (b) Speciális szigetek vizsgálata (4.56.-4.62.).
- (c) A matematikai modell felállítása (4.63.-4.67.).
- (d) Ismerkedés a modellünkkel (4.68.-4.70.).

- (e) Speciális szigeteink és a modellünk kapcsolatának vizsgálata (4.71.-4.72.).
- (f) Szigetrendszerek vizsgálata a gráfjaikon keresztül (4.73.).

A bemutatott Mathematica alkalmazás segítségével a diákok maguk fedezhetik fel a szigetrendszerek egy már magasabb absztrakciós szinten lévő modelljét. Így láthatjuk, hogy a számítógépes kísérletek az absztrahálásban is segítségünkre lehetnek. A tanulók számára a bemutatott feladatok segítségével újabbakat is kitűzhetünk, melyek vonatkozhatnak például speciális gráffal rendelkező szigetrendszerek létrehozására is. Itt a korlátozó paraméterek, illetve a paraméterek számának változtatásával tudunk kitűzni különböző szintű feladatokat. A Mathematica demonstráció felhasználásával lehetőségünk van a feladatok számának gyors többszörözésére, illetve a digitális bennszülöttek hatékony motiválására.

4.5. Szigetek maximális száma

„Azt hiszem, hogy a matematikai minimum és maximum problémák azért rokonszenvesek, mert mindennapos problémáinkat idealizálják.” (PÓLYA GYÖRGY)

4.5.1. Bevezetés

Ebben a fejezetben célunk az $m \times n$ -es rácson elhelyezhető szigetek maximális számának meghatározása abban az esetben, ha a magasságfüggvény nem korlátos. E feladat első megközelítésre túl bonyolult, ezért speciális esetek vizsgálatával kezdünk. Ez segítheti az intuíciót és a heurisztikát, valamint megalapozhatja analógiák kialakulását. A speciális esetek vizsgálatát történeti előzmények is indokolhatják. Egy részletes felépítés megtalálható a szerző [110] cikkében (Attila Mäder, Róbert Vajda, *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.).

A fejezet egyes eredményeinek megalkotásához használjuk bátran a **4.3.6. fejezet** Mathematica animációját.

4.5.2. Szigetek az $1 \times n$ -es rácson

4.74. Feladat. Állítsuk rácsunkat a **4.3.6. fejezet** játékában $1 \times n$ -esre ($n = 1, 2, 3, \dots$), majd próbáljunk meg minél több szigetet létrehozni. Ezek után próbáljuk megoldani a következő feladatot.

4.75. Feladat. Legfeljebb hány szigetünk lehet egy

- (a) 1×2 -es,
- (b) 1×3 -as,

- (c) 1×4 -es,
 (d) 1×5 -ös rácson?

Megoldás. Fenti kísérleteinkből kialakulhat a sejtés, hogy a maximális szigetszám az egyes esetekben rendre 2, 3, 4, illetve 5. A számítógép segítségével lehetséges megvalósítások tömkelegét találhatjuk, ezek közül egyet-egyet mutatnak az alábbi ábrák.

4.49. ábra. Szigetek kis rácson

4.76. Feladat. Milyen sejtés fogalmazható meg az előző feladat eredményéből?

Megoldás. Sejtésünk a következő.

4.77. Sejtés. A szigetek maximális száma az $1 \times n$ -es téglalap esetében n .

Bizonyítás. A bizonyítás n -szerinti teljes indukcióval történik. Az állítás könnyen ellenőrizhető módon $n = 1, 2$ esetén fennáll. Tegyük fel most, hogy az állítás teljesül valamely $n \geq 2$ -ig minden n -re. Legyen a rácunk $n + 1$ hosszú. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a vizsgált szigetrendszer kanonikus alakban adott. Ekkor tudjuk (**4.32. feladat**), hogy van a rácson 1 magasságú mező. Tekintsük az egyik ilyen mezőt. Ez három részre vágja rácunkat: a mező előtti k hosszú részre, magára az 1 magas mezőre, és az ezen mező utáni $n - k$ hosszú részre.

4.50. ábra. Szigetek - az első vágás

Ekkor ezen, $n + 1$ hosszú rácson a szigetek I számára az indukciós feltevés szerint fennáll, hogy $I \leq k + n - k + 1$, hiszen a k hosszú mezőn legfeljebb k , az $n - k$ hosszún legfeljebb $n - k$ sziget van, illetve még sziget az egész rác. Így beláttuk, hogy egy $n + 1$ hosszú rác esetén a szigetek számára: $I \leq k + n - k + 1 = n + 1$. Egy n hosszú rác esetén az n számú sziget realizálható is, így a becslés éles, nem javítható.

4.51. ábra. Szigetek - a becslés éles

□

4.78. Megjegyzés. Számítógéppel végzett tömeges kísérleteink között nagy valószínűséggel akad olyan is, melyben sikerült az optimális szigetszámot produkálni úgy, hogy volt 1 magas mező is a rácson. Így a fenti indukciós bizonyítás lényegi észrevétele máris a rendelkezésünkre áll. Bizonyításunk pusztán annyival mond többet, hogy ez mindig elérhető. Ezzel ismét bizonyítékát adtuk annak, hogy a számítógéppel végzett nagyszámú kísérleteknek a bizonyítások előkészítésében és azok megalapozásában is fontos szerepe van.

Eredményünk mélyebb megértését itt is segíthetjük inverz feladatokkal.

4.79. Feladat. Egy $1 \times n$ -es téglalap esetén adjuk meg a magasságokat úgy, (adjunk meg olyan magasságfüggvényt), melyre a szigetek száma

- (a) 1,
- (b) 2,
- (c) 3,
- (d) $\lfloor n/2 \rfloor$,
- (e) $\lceil n/2 \rceil$,
- (f) $n - 2$,
- (g) $n - 1$.

Megoldás. Egy-egy lehetséges megoldást mutatnak az alábbi ábrák az $n = 7$ esetben.

4.52. ábra. A 4.79 feladat megoldásai

Az $1 \times n$ -es rács vizsgálatát egy nehezebb feladat kitűzésével zárjuk.

4.80. Feladat. Igazoljuk, hogy az $1 \times n$ rácsot az $1, 2, \dots, n$ számok bármely permutációjával kitöltve n szigetünk lesz.

4.81. Megjegyzés. Az, hogy a fenti állítás igaz, egyáltalán nem nyilvánvaló. Így a kezdet kezdetén még abban sem lehetünk biztosak, hogy tényleg bizonyítani, vagy esetleg cáfolni kell-e. Erre azonban a már megismert Mathematica játékkal való munka néhány perc után választ ad. Most a számítógépekkel végzett kísérleteink egy nehezebb probléma megoldásában mutattak irányt.

4.5.3. Szigetek az $2 \times n$ -es rácson

A $2 \times n$ -es rácson elhelyezhető szigetek maximális számának meghatározásához a kétoldali közelítés módszerének segítségével kezdünk hozzá. Először egy felső, majd egy alsó korlát meghatározására vezető, számítógéppel támogatott felfedeztetési lehetőséget mutatunk be.

Első megközelítés - sejtés a felső korlátra

4.82. Feladat. Legfeljebb hány sziget lehet egy

- (a) 2×1 -es,
- (b) 2×2 -es,
- (c) 2×3 -as,
- (d) 2×4 -es,
- (e) 2×5 -ös rácson?

Megoldás. A szigetek száma, például a **4.3.6. fejezet** játékának segítségével kialakult sejtésünk szerint, rendre 2, 3, 5, 6, 8.

A feladatunk ezek után az általánosítás. A következőkben arra mutatunk példát, hogyan segítheti egy egyszerűen használható számítógépes program a mintafelismerést.

4.83. Feladat. Hogyan folytatható a fenti sorozat? Milyen minta ismerhető fel? Milyen kapcsolatban lehet ez a szigetek elhelyezkedésével?

Megoldás. A sorozat folytatásában, a képzési szabály (az n -edik tag explicit, illetve rekurzív alakjának) megtalálásában is segítségünkre lehet a számítógép. Használhatjuk például a korábbiakban már megismert és hasonló szituációban bevált OEIS alkalmazást [124]. A weblap által felkínált mezőbe kell újfent beírunk sorozatunk ismert tagjait, s válaszul megkapjuk azokat a sorozatokat (azon sorozatok közül az ismerteket, illetve az adatbázisban szereplő releváns találatokat) melyekre az általunk megadott minta illeszkedik. Természetesen minél több tagot adunk meg, annál kevesebb, s jobban illeszkedő sorozatot kapunk. Mivel a kapott válaszok halmaza jelenleg elég kaotikus, a feladatunk nem lehet más, mint további konkrét rácsok vizsgálata, s még több tag kiszámítása.

A fentiek kiváló például szolgálnak arra, hogy mit sem ér a számítógépes segítség értő felhasználó nélkül. Itt kap szerepet a tanácsadó szellemű, a felfedezéseket megfelelő irányba terelő tanár. Az ő feladata a kézi, és a számítógéppel segített kísérletek összehangolása, hogy azok egymást segítve eredményre tudjanak vezetni.

4.84. Feladat. Hány sziget lehet legfeljebb egy

- (a) 2×6 -es,
- (b) 2×7 -es,
- (c) 2×8 -as,
- (d) 2×9 -es rácson?

Megoldás. Sejtésünk szerint a válasz rendre 9, 11, 12, 14.

4.85. Megjegyzés. A további konkrét esetek vizsgálatával nem csak az explicit alak megtalálása felé tehetünk lépéseket, de ha ez nem sikerülne, módszerünk arra is alkalmas, hogy a következő megközelítési mód ötletét megalapozza.

4.86. Feladat. Az OEIS segítségével keressünk meg sorozatunk lehetséges további tagjai közül még néhányat. Milyen sejtések fogalmazhatók meg a program által felkínált lehetőségek segítségével sorozatunk n -edik tagjára vonatkozóan?

Megoldás. A program által felkínált első lehetőség a folytatásra: 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 50, 51, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 62, 63, 65, 66, 68, 69, 71, 72, 74, 75, 77, 78, 80, 81, 83, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 93, 95, 96, 98, 99, az n -edik tagra vonatkozóan pedig: The map $n \rightarrow a(n)$ (where $a(n) = 3n/2$ if n even or $(3n+1)/2$ if n odd). Ezzel a következő sejtés fogalmazható meg.

4.87. Sejtés. Jelölje a_n a $2 \times n$ -es rácson képezhető szigetek maximális számát. Ekkor

$$a_n = \begin{cases} \frac{3n}{2}, & \text{ha } n \text{ páros} \\ \frac{3n+1}{2}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} = \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$$

Második megközelítés - egy biztos alsó korlát

4.88. Feladat. Adjunk alsó becslést a szigetek maximális számára a $2 \times n$ -es rácson. (Most tehát nem az a célunk, hogy a $2 \times n$ -es rácson maximális számú szigetet produkáljunk, hanem csak az, hogy adjunk egy olyan konstrukciót, amely megvalósítható, és „viszonylag sok” szigetet ad a rácson.)

Megoldás. Már korábban láttuk, hogy az 1×2 -es rácson legfeljebb 2, míg a 2×2 -es rácson legfeljebb 3 szigetünk lehet. (Persze nagyobb rácsoakra is vannak eredményeink, de jelen megközelítéshez ennyi is elég.) Azt már láthattuk az $1 \times n$ -es rácson (4.77. sejtés), hogy mindig van olyan optimális konstrukció, amelyben valamely mező magassága 1. Mivel 1 magas mező csak a fősziget része lehet, ez úgy is értelmezhető, mint egy vágás a rácson. Tulajdonképpen ezen vágás létezésén múlt indukciós bizonyításunk. Ha egy ilyen vágás létét feltételezzük a $2 \times n$ -es rácson is, azzal nem biztos, hogy maximális számú szigetet tudunk előállítani (ez nem is célunk most), de egy alsó korlátot tudunk találni, s lehetőségünk nyílik egy rekurzió felállítására is. Jelölje b_n a következő, vágásos konstrukció által a $2 \times n$ -es rácson kialakított szigetek maximális számát. A korábbiakból tudjuk, hogy $b_1 = 2$, $b_2 = 3$. Legyen most rácsonk $2 \times n$ -es, ahol $n > 2$. Egy lehetséges konstrukció a következő. Hasítsunk le rácsonk egyik végéből egy 2×2 -es részt, s töltsük fel az utolsó oszlopot egynél nagyobb magasságértékekkel úgy, hogy ott 2 sziget keletkezzen (ez megtehető), az utolsó előtti oszlopot pedig egyesekkel.

4.53. ábra. Vágás a $2 \times n$ -es rácson

Ahhoz, hogy az egyesekből álló utolsó előtti oszlop ténylegesen elvágóként funkcionáljon szükséges, hogy az első, $n - 2$ hosszú részben minden felhasznált magasság nagyobb legyen mint 1. Ez az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hiszen ha az első részben is lenne egyes magasság, nincs más dolgunk, mint minden itt szereplő magasságértéket megnövelni egy tetszőleges, de minden mezőre azonos pozitív egész értékkel (például eggyel). Ekkor az első $n - 2$ hosszú részen keletkezik b_{n-2} számú sziget, a hátsó oszlopban kettő, és ott van még a főszigetünk is. Ezen konstrukció által adott szigetek számára kaptuk tehát: $b_1 = 2$, $b_2 = 3$, $b_n = b_{n-2} + 3$, ha $n > 2$. Feladatunk ezen másodrendű lineáris inhomogén rekurzió megoldása. A számítások kézzel történő elvégzése helyett itt is segítségül hívhatjuk a számítógépet. Kiváló eszköz a rekurzió megoldására valamely komputer-algebrai program, például a Mathematica 8.0. Itt egy egyszerű kód segítségével megadhatjuk, s meg is oldhatjuk a rekurziót. Az

```
RSolve[{b[n] == b[n-2]+3, b[1] == 2, b[2] == 3}, b, n]
```

parancs hatására kapjuk:

$$\frac{1}{4} (1 - (-1)^n + 6n),$$

vagyis

$$b_n = \frac{6n + 1 + (-1)^{n+1}}{4} = \left\lfloor \frac{3n + 1}{2} \right\rfloor.$$

A számítógép által szolgáltatott eredmény felhasználásával mi magunk is bebizonyíthatjuk a fenti összefüggést, például teljes indukcióval a következő módon.

Tudjuk, hogy $b_1 = 2 = \left\lfloor \frac{3 \cdot 1 + 1}{2} \right\rfloor$ és $b_2 = 3 = \left\lfloor \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} \right\rfloor$. Tegyük fel, hogy az állítás teljesül minden n -nél kisebb pozitív értékre. Ekkor

$$b_n = b_{n-2} + b_1 + 1 = \left\lfloor \frac{3(n-2) + 1}{2} \right\rfloor + 2 + 1 = \left\lfloor \frac{3n + 1}{2} \right\rfloor.$$

4.89. Megjegyzés. Ezzel is példáját láthattuk annak, hogyan segíthetik a számítógéppel végzett vizsgálatok a bizonyossági szint növelését, valamint hogyan válik lehetővé segítségükkel a számítások, bizonyítási módszerek egyszerűsítése.

Megközelítéseink összevetése

4.90. Feladat. Milyen sejtést fogalmazhatunk meg a két megközelítésben kapott eredményeink segítségével?

4.91. Sejtés. A $2 \times n$ -es rácson maximum $I_{2 \times n} = \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$ szigetünk lehet.

4.92. Megjegyzés. Eredményünk mélyebb megértését itt is segíthetjük inverz feladatokkal a **4.79. feladat** mintájára.

Az általános, $m \times n$ -es eset tárgyalása előtt még érdemes részletesen megvizsgálnunk még egy speciális esetet, a $3 \times n$ -es rács esetét. Ez a rács még kellőképp egyszerű ahhoz, hogy gyorsan átlátható legyen, viszont elegendően összetett ahhoz, hogy az általános eset megoldási módszere körvonalazódni tudjon általa.

4.5.4. Szigetek az $3 \times n$ -es rácson

„A módszer olyan fogás, melyet legalább kétszer alkalmazunk.” (PÓLYA GYÖRGY)

4.93. Feladat. Az $1 \times n$ -es és a $2 \times n$ -es rácsoknál megismert módszer segítségével próbáljunk egy felső és egy alsó becslést találni a szigetek számára a $3 \times n$ -es rácson.

Megoldás. Használjuk tehát előző módszereinket! Kis rácsokon számításokat, vizsgálatokat, kísérleteket végezve azt tapasztaljuk, hogy a $3 \times 1, 3 \times 2, 3 \times 3, \dots$ rácson legfeljebb rendre $3, 5, 7, 9, 11, \dots$ számú sziget lehet. Különösebb segítség nélkül is kialakulhat a sejtés, hogy a szigetek maximális száma a $3 \times n$ -es rácson $2n + 1$. De tényleg lehet ennyi szigetünk? Az előző, vágásos technika segítségével könnyedén felírhatunk egy, a szigetek számára vonatkozó alsó becslést leíró rekurziót. Jelölje b_n a jól ismert, vágásos technika által szolgáltatott szigetek számát a $3 \times n$ -es rácson. Ekkor $b_1 = 3$, $b_2 = 5$. Ha $n > 2$, akkor pedig a következő másodrendű lineáris rekurzió írható fel: $b_n = b_{n-2} + 4$ ($n > 2$).

A rekurziót most már könnyedén meg tudjuk oldani az előző hasonló parancs apró módosításával.

```
RSolve[{b[n] == b[n-2]+4, b[1] == 3, b[2] == 5}, b[n], n]
```

A Mathematica válasza:

$$b_n = 1 + 2n.$$

4.94. Megjegyzés. Persze a számítógép válasza itt is bizonyítható teljes indukcióval a **4.88. feladat** megoldásában látottakkal analóg módon.

Az alsó és a felső becslés most is találkozik, így meggyőző sejtésünk alakulhat ki a $3 \times n$ -es esetben is a szigetek maximális számára vonatkozóan.

4.95. Sejtés. A $3 \times n$ -es rácson a szigetek maximális száma $I_{3 \times n} = 2n + 1$.

4.96. Megjegyzés. A számítógéppel végzett munkának itt is megjelenik egy fontos előnye. A korábbi kódok jól használhatók most is, néhány paraméter megváltoztatása után. Nem szükséges új, hosszadalmas számításokba bonyolódni, melyek nem csak, hogy elveszik a diákok kedvét a további munkától, de alkalmasak arra is, hogy csak rájuk koncentráljunk, így éppen a feladat lényege vész el a megoldására felsorakoztatott bonyolult eszköztár mögött.

4.5.5. Szigetek az $m \times n$ -es rácson - egy alsó becslés

A fenti $1 \times n$, $2 \times n$, $3 \times n$ -es rácson végzett vizsgálatok után jobb esélyekkel próbálkozhatunk meg az általános probléma megoldásával. Érdekes azonban az alsó és felső becslésre vonatkozó vizsgálatokat itt is élesen elkülöníteni. Ebben a részben az alsó becslésnek járunk utána.

4.97. Feladat. Adjunk alsó becslést a fent megismert vágásos technika segítségével a szigetek számára az $m \times n$ -es rácson.

Megoldás. Jelölje az ily módon az $m \times n$ -es rácson keletkező szigetek számát b_n . A fentiek alapján felírhatjuk a következő rekurzív összefüggést, ahol is $b_1 = m$ a **4.77. tétel**, $b_2 = \frac{6m+1+(-1)^{m+1}}{4}$ pedig a **4.88. feladat** alapján adódott.

4.54. ábra. Vágás az $m \times n$ -es rácson

Itt már egy paraméteres másodrendű lineáris rekurzió megoldása a feladatunk, melyet a fentiekben többször használt Mathematica parancs újabb módosításával egyszerűen megtehetünk:

```
RSolve[{b[n] == b[n-2]+m+1, b[1] == m, b[2] ==  $\frac{6m+1+(-1)^{m+1}}{4}$ }, b, n]
```

A program által válaszul adott

$$\frac{1}{8} \left(-5 - (-1)^m - (-1)^n - (-1)^{m+n} + 4m + 4n + 4mn \right)$$

összefüggést egyszerűsítve:

$$b_n = \left\lfloor \frac{mn + m + n - 1}{2} \right\rfloor$$

adódik.

4.98. Megjegyzés. Ekkor persze m helyébe egyet, kettőt illetve hármat helyettesítve visszkapjuk a 4.77., 4.91., illetve a 4.95. pontok eredményeit.

4.99. Megjegyzés. A vizsgált paraméteres másodrendű lineáris rekurzió megoldása a korábban használt kódok egyszerű módosításával gyorsan, egyszerűen elvégezhető, magasabb szintű matematikai, és mindenféle programozói ismeret nélkül.

4.100. Feladat. Oldjuk meg a fenti rekurziót az előző, számítógéppel megalkotott eredményünk felhasználásával.

Megoldás. Könnyen látható, hogy $b_1 = \lfloor \frac{m \cdot 1 + m + 1 - 1}{2} \rfloor = m$ és $b_2 = \lfloor \frac{m \cdot 2 + m + 2 - 1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{3m+1}{2} \rfloor$. Tegyük most fel, hogy állításunk minden n -nél kisebb pozitív egész értékre teljesül. Ekkor $b_n = b_{n-2} + b_1 + 1 = \lfloor \frac{m \cdot (n-2) + m - 1 + (n-2)}{2} \rfloor + m + 1 = \lfloor \frac{mn+m+n-1}{2} \rfloor$.

4.101. Megjegyzés. Ezen a ponton különösen fontos hangsúlyozni azt, hogy nem azt állítjuk, hogy ennél több sziget nem keletkezhet az $m \times n$ -es rácson, hanem csak azt, hogy egy viszonylag egyszerű rekurzív technikával ennyi sziget biztosan kreálható.

4.5.6. Szigetek az $m \times n$ -es rácson - egy felső becslés

A felső becslés kialakítása során is több úton indulhatunk el. Ezek közül egyre mutatunk példát. Ennek során megmutatjuk, milyen kapcsolat van egy szigetrendszer gráfja, s a szigetrendszer által elfoglalt, eddig nem is említett rácpontok között.

Rácpontok

A következő néhány feladat célja rácsunk jobb megismertetése. Eddig csupán a rácson található szigetekkel, esetleg a rácsot alkotó cellákkal foglalkoztunk, de magukkal a rácpontokkal még nem. Pedig a rácpontoknak fontos, és jól meghatározható korlátozó szerepe van a szigetek számát illetően. Az alábbi feladatok ennek felfedezését készítik elő.

4.102. Feladat. Hány rácpont található egy $m \times n$ -es rácson?

Megoldás. A rácpontok száma egy $m \times n$ -es rácson $(m+1)(n+1)$.

Már többször említésre került, hogy a minimális szigetek különösen fontos szerepet játszanak a szigetek maximális számának meghatározásában. A következő feladatban összekapcsoljuk a minimális szigetek és rácpontok fogalmát.

4.103. Feladat. Legalább hány rácspontot foglal el egy minimális sziget?

Megoldás. Egy minimális sziget legalább négy rácspontot foglal el. Az alábbi ábrán ezt szemléltetjük.

4.55. ábra. Rácspontok és minimális szigetek

Gráfok és rácspontok

A szigetek maximális számára vonatkozó felső becslésünk a szigetrendszer gráfjának és a szigetrendszer szigetei által elfoglalt rácspontok számának kapcsolatán múlik. Az alábbiakban ezt készítjük elő, először egy, a fa csúcsai és levelei száma közötti kapcsolatot feltáró tétellel.

4.104. Tétel. Ha egy T (gyökeres) fának minden nemlevél csúcsának legalább két fia van, akkor a fa V csúcsára és l levelére: $V \leq 2l - 1$.

Bizonyítás. Legyen T egy gyökeres fa V csúccsal és l levéllel, melyben minden nemlevél csúcsnak legalább két fia van. Számoljuk meg, illetve becsljük a gráf éleinek számát kétféle módon. Mivel a gyökér kivételével minden csúcsnak pontosan egy apja van, ezért az élek száma $V - 1$. Viszont, mivel minden nemlevél csúcsnak legalább két fia van, ezért az élek száma nem lehet kisebb, mint $2(V - l)$. Így kapjuk $V - 1 \geq 2(V - l)$, azaz $V \leq 2l - 1$. $\square$

4.105. Feladat. Szigetrendszereink gráfjai eleget tesznek-e a **4.104. tétel** feltételeinek?

Megoldás. Nem, erre korábbi szigetrendszereink között számos példát találhatunk (pl. 4.40. ábra).

Kísérletekkel is elérhetjük, hogy fel tudjuk fedezni a „hiba” okát. Erre mutat példát a következő néhány feladat.

4.106. Feladat. Mi történhet egy kanonikus alakban megadott szigetrendszer esetében egy szigettel a vízszint emelkedésével?

Megoldás.

- (a) eltűnik (ha minden pontja alacsonyabb, mint az új vízszint),
- (b) több szigetre esik szét (ha van az új, aktuális vízszintnél magasabb és alacsonyabb pontja is, ez utóbbi a sziget „belsejében”),
- (c) egy része víz alá kerül (ha van az új, aktuális vízszintnél magasabb és alacsonyabb pontja is, ez utóbbi a sziget „szélén”).

Az alábbi ábra a szigetek lehetséges változásaira mutat példát a vízszint emelkedésével. Az alapállapot ((a) ábra) esetében a teljes rács egyetlen összefüggő sziget. A vízszint emelésével először ((b) ábra) szigetünk három kisebb szigetre esik szét. A vízszint további emelkedése esetén ((c) ábra) láthatjuk, amint a bal oldali oszlop szigetének egy része a víz alá süllyed, a harmadik oszlop szigete több kisebb részre esik szét, míg az ötödik oszlop szigete eltűnik.

2	1	3	1	2	2	1	3	1	2	2	1	3	1	2
3	1	2	1	2	3	1	2	1	2	3	1	2	1	2
4	1	3	1	2	4	1	3	1	2	4	1	3	1	2

(a)
(b)
(c)

4.56. ábra. Változó szigetek

4.107. Megjegyzés. A kanonikus reprezentáció biztosítja azt, hogy ha valami kiemelkedik a rácsunkból, akkor az téglalap alakú és sziget. Így a rácsunkból a vízszint emelésével minden esetben téglalap alakú tartományok jönnek létre, melyek szigetek is.

4.108. Megjegyzés. Ebben az esetben is érdemes a **4.4.4. fejezet** Mathematica demonstrációját segítségül hívni. Itt, a paraméterek változtatásával könnyedén találhatunk a fenti tételt kielégítő, illetve ki nem elégítő szigetrendszereket is. Mivel nagyszámú kísérletet végeztünk viszonylag rövid idő alatt, így arra is van módunk, hogy magunk fedezzük fel, hogy mi a „hibája” a tételt ki nem elégítő szigetrendszereknek. A számítógépes kísérletek szerepe itt a példák, ellenpéldák, közös tulajdonságok keresésében rejlik.

4.109. Feladat. Milyenek azok a szigetek, melyeknek csak egy fiuk van?

Megoldás. Ezek azok a szigetek, melyek a vízszint emelkedésével nem tűnnek el, nem esnek szét több kisebb szigetre, hanem egy részük víz alá merül.

4.110. Feladat. Hogyan tehetnénk a szigetrendszerek gráfjait a **4.104. tétel** feltételeit kielégítővé?

Megoldás. Nevezzük a vízszint emelkedésével egy részüket elvesztő szigetek víz alá merülő részeit félszigetnek, s rendeljük a félszigetekhez is a korábbiaknak megfelelően, a tartalmazási relációba illeszkedően, egy-egy csúcsot a gráfban.

4.57. ábra. Félszigetek

Ekkor az eddig mindössze egy fiúval rendelkező csúcsoknak is legalább két fiuk lesz. Nevezzük az így kapott gráfot a szigetrendszer kiegészített gráfjának.

A minimális szigetek rácspontjainak vizsgálata után indokolt a szigetrendszer kiegészített gráfjában szintén levélként feltűnő félszigetek rácspontjainak vizsgálata is. Ezt végezzük el a következő feladat formájában.

4.111. Feladat. Hány rácspontot foglal el „saját jogán” egy félsziget? (Azaz hány olyan rácspont van egy adott félszigethez tartozóan, melyet elfoglal a félszigetet befoglaló sziget, de nem foglal el a befoglaló sziget egyetlen fia?)

Megoldás. Legalább kettőt. Az alábbi ábra ezt mutatja.

4.58. ábra. Rácspontok és félszigetek

A következő feladattal megkezdjük a rácspontok és a szigetrendszer kiegészített gráfjának vizsgálatából adódó felső becslés előkészítését.

4.112. Feladat. A fenti, rácspontokra vonatkozó eredmények (**4.103.** és **4.111. feladat**) alapján milyen becslés adható a minimális szigetek és félszigetek együttes számára?

Megoldás. Könnyű meggondolni, hogy a minimális szigetek diszjunktak, még csak közös határpontjuk sem lehet. Ebből következik, hogy különböző minimális szigetek páronként különböző rácspontokat fednek le. Az egy adott félsziget által „elfoglalt” rácspontok bevezetéséből (4.111. feladat) pedig az következik, hogy a különböző félszigetek által elfoglalt rácspontok is páronként különböznek. Az is világos, hogy minimális sziget és félsziget sem foglalhat el közös rácspontot. Így, ha a minimális szigeteink száma s , a félszigeteké f , akkor $4s + 2f \leq (m + 1)(n + 1)$.

4.113. Feladat. A szigetrendszereink kiegészített gráfjára vonatkozó tételünk, valamint a fenti becslés összekapcsolásával milyen felső becslést adhatunk a szigetek maximális számára az $m \times n$ -es rácson [11, 110]?

Megoldás. Legyen szigetrendszerünk kiegészített gráfjának V csúcsa, ez azt jelenti, hogy V szigetünk és félszigetünk van összesen. Ekkor $V \leq 2l - 1$, ahol l a kiegészített gráf leveleinek száma, vagyis $l = s + f$, ahol s a minimális szigetek, f a félszigetek száma. Ekkor a szigetek $V - f$ számára a következő írható.

$$V - f \leq 2l - 1 - f = 2(f + s) - 1 - f = 2s + f - 1 = \frac{4s + 2f}{2} - 1 \leq \frac{(m + 1)(n + 1)}{2} - 1.$$

Mivel V és f egész, ez a következő alakban is írható:

$$V - f \leq \left\lfloor \frac{mn + m + n - 1}{2} \right\rfloor.$$

4.5.7. Szigetek az $m \times n$ -es rácson

Ezek után nincs más dolgunk, mint az alsó és felső becslésünk összekapcsolása.

4.114. Feladat. Az alsó (4.97. feladat) és felső (4.113. feladat) becslés alapján mit állíthatunk az $m \times n$ -es rács szigeteinek maximális számáról?

Megoldás. Mivel az alsó, és a felső becslés ugyanazt az értéket szolgáltatotta a szigetek maximális számára, ezért megállapíthatjuk, hogy a szigetek maximális száma az $m \times n$ -es rácson

$$\left\lfloor \frac{mn + m + n - 1}{2} \right\rfloor.$$

4.115. Megjegyzés. Az, hogy az alsó és felső becslés „összeér”, különösen szép. A fenti teljes gondolatmenet a kétoldali közelítés módszerének egy szép alkalmazása. Az alsó és felső becslés találkozásának van egy említésre méltó következménye is, mégpedig a vágásos technika hatékonysága. Ez azt jelenti, hogy bármely rácson tudunk olyan optimális szigetrendszert kreálni, mely tartalmaz a fentiekben megismert vágást.

4.5.8. Módszertani összefoglaló

A fejezetben speciális esetek vizsgálatán elindulva meghatároztuk az $m \times n$ -es rács szigeteinek maximális számát. A számítógéppel végzett kísérleteink ezúttal segítségünkre voltak a sejtések kialakításában és megszilárdításában (4.74.-4.76., 4.82.-4.86.) Arra is láthattunk példát, hogy a tömeges kísérletek tapasztalatai hogyan alapozzák meg a bizonyítást, annak lényegi lépésének előrevetítésével (4.77.). Láthattuk, hogyan használhatjuk a számítógépet alkotó jelleggel, egy-egy egyszerű, s hatékonyan módosítható kód segítségével számítások elvégzésére (4.88., 4.93., 4.97.). A feladatok megoldását továbbra is a (számítógépes) tanulói felfedezéseknek rendeltük alá. Vizuális reprezentációink használatával (4.4.4.) lehetővé vált a szigetrendszerek korábban megismert szerkezetének összekapcsolása jelenlegi célunkkal. A probléma összetettsége okán kénytelenek voltunk absztrakt tárgyalásba bonyolódni (4.104.-4.113.), a lehetőségekhez képest azonban igyekeztünk ezt is előzetes felfedezésekkel felpuhítani, megalapozni. A tanulói kísérleteket szem előtt tartva bevezettük a vágás, félsziget és a szigetrendszer kiegészített gráfjának fogalmát is.

4.6. Szigetek korlátozott magassággal

A fentiekben egy ismert tétel bizonyításához vezető utat mutattunk be. A fenti problémakör azonban számos egyéb kérdést is felvet, ezek jórésze nyitott. Fontos, hogy diákjaink számára meg nem oldott problémákat is felvessünk. Ekkor talán nem fogják azt hinni, hogy egy matematikus nem tesz mást, mint „egész nap a Pitagorasz-tétellel számol”. Arra is láthattunk példát, hogyan lehet „úgy tenni”, mintha egy probléma új, megoldatlan volna. Miután azonban megoldottuk, s eláruljuk diákjainknak, hogy valójában egy ismert eredményt alkottunk meg újra, csalódottságuk érthető lesz. Fontos tehát, hogy valódi nyitott kérdések is előkerüljenek, olyanok, amik ismertek, legendásak (Goldbach-sejtés, Riemann-hipotézis), s olyanok is, melyekkel mi magunk találkoztunk kísérleteink során. Az alábbiakban erre mutatunk példát.

4.6.1. Bevezetés

A fentiekben szigeteink magasságát nem korlátoztuk. A felhasznált magasságértékek tetszőlegesen nagyok lehettek. A következőkben azt vizsgáljuk, hogyan változik a szigetek maximális száma, ha a magasság(függvény) korlátos. Itt tehát a maximális sziget-szám nem csak a rács méretétől, hanem a felhasználható maximális magasságtól, h -tól is függ. Erre vonatkozó kísérleteket is végeztünk már például a 4.34.-4.37. feladatok és a 4.46.-4.49. feladatok keretein belül.

Azt tudjuk, hogy ha $h \geq \lceil \log_2(m+1) \rceil + \lceil \log_2(n+1) \rceil - 1$, akkor tudunk maximális számú szigetet kreálni az $m \times n$ -es rácson [73]. De azt, hogy egy adott h magasság esetén mennyi a legfeljebb h magassággal az $m \times n$ -es rácson előállítható szigetek száma,

teljes egészében még nem sikerült megválaszolni. Részeredmények persze vannak, s ezeket mi magunk is felfedezhetjük. Itt is, a fejezet teljes egészének tárgyalása során folyamatosan használhatjuk a **4.3.6. fejezet** Mathematica játékát. A korlátos magasságú szigetrendszerekről bővebben olvashatuk a szerző [72, 112] cikkeiben (Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czedli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011., Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.).

4.6.2. Már ismert eredmények, $h = 1, 2$

A témakör nem is teljesen új, számos ide is tartozó eredményt már korábban megalkottunk. A következőkben ezek közül elevenítjük fel a legfontosabbakat.

4.116. Megjegyzés. Minden új témakör tárgyalása során fontos, hogy azt valamilyen módon kössük a korábban tanultakhoz. Ez itt, hála korábbi eredményeinknek, egyszerűen megtehető.

4.117. Feladat. Hány szigetünk lehet legfeljebb az $m \times n$ -es rácson, ha a maximális szigetmagasság $h = 1$? (Gondoljunk a **4.46. feladatra!**)

Megoldás. Ebben az esetben mindig pontosan egy szigetünk van, a fősziget.

4.118. Feladat. Hány szigetünk lehet legfeljebb az $m \times n$ -es rácson, ha a maximális szigetmagasság $h = 2$? (Gondoljunk a **4.49. feladatra!**)

Megoldás. Leghatékonyabban az egység területű, 2 magas mezők alkotnak szigetet. Ekkor a szigetek maximális száma $\lceil \frac{n}{2} \rceil \cdot \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$.

Hasonló, egyszerű megfontolások azonban nem tehetők, ha $h \geq 3$. Érdekes tehát egy-egy jól kezelhető speciális eset vizsgálatával folytatnunk.

4.6.3. Speciális esetek, az $1 \times n$ -es rács

4.119. Feladat. Legfeljebb hány szigetünk lehet az $1 \times n$ -es rácson, ha $h = 3$?

Megoldás. Ha $n = 1, 2, \dots$ akkor rendre a következőt kapjuk a szigetek maximális számára: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 13, 14, 15, 16, 16, ... Ezekre az értékekre a korábban már használt OEIS a következő választ adja: I am sorry, but the terms do not match anything in the table.

Kísérleteink ezen formája ezúttal nem járt sikerrel. Vizsgáljunk hát meg a szigeteink száma mellett egy-egy maximális szigetszámot adó konkrét konstrukciót is. Ez az első néhány esetben történhet kézzel, papíron, de írhatunk rá egy egyszerű programot is. Az világos, hogy a „brute force” technika most nem működik, nem tudjuk végigszámoltatni programunk segítségével a számítógéppel az összes lehetséges kitöltést, hiszen ez már $h = 3, n = 10$ estén is $h^n = 3^{10} = 59049$ eset, míg ha $n = 30$, akkor $h^n = 3^{30} \approx 2 \cdot 10^{14}$. Felfedezéseinkkel azonban a számítógép munkáját is segíthetjük.

4.120. Megjegyzés. Felfedezéseink nem csak arra jók tehát, hogy segítségükkel egy kész eljárást használni tudjunk, hanem arra is, hogy egyáltalán lehetővé tegyük a probléma számítógéppel történő megközelítését. Ezzel a felfedezések újabb szintjét mutattuk meg.

Azt már a korábbiakból is tudjuk, hogy az 1 szükségképpen felbukkan mezőink magasságai között. Ha ugyanis nincs 1 magas mezőnk, akkor az összes mező magasságát egyszerre, egyesével csökkenthetjük mindaddig, amíg 1 magas mezőnk nem lesz, s közben a szigeteink száma nem változik. Ha viszont van 1 magas mezőnk, egy rekurzív eljárás segítségével nagyságrendekkel csökkenthetjük a végigszámolandó esetek számát. Az informatikában ezt dinamikus programozásnak hívják. A $h = 3, n = 2, 3, \dots, 20$ eseteket az alábbiakban foglaltuk táblázatba.

n	egy optimális szigetrendszer	a szigetek száma
2	1, 2	2
3	1, 2, 3	3
4	1, 3, 2, 3	4
5	2, 1, 3, 2, 3	5
6	2, 3, 1, 3, 2, 3	6
7	3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	7
8	1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	7
9	2, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	8
10	2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	9
11	3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	10
12	1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	10
13	2, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	11
14	2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	12
15	3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	13
16	1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	13
17	2, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	14
18	2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	15
19	3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	16
20	1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3	16

4.59. ábra. Szigetek korlátozott magassággal, $h = 3, n = 2, 3, \dots, 20$

A fenti esetekből felfedezhetjük az optimális konfigurációk szerkezetét, és az általuk szolgáltatott maximális szigetszámot is. Programunk persze más n, h párokra is futtatható; s még $h = 10, n = 1000$ esetén is kevesebb mint egy másodperc alatt lefut. Számos, maximális számú szigetet adó konkrét konstrukció vizsgálata után a következő sejtésekhez juthatunk.

4.121. Sejtés. Maximális számú szigetet tudunk kreálni az $1 \times n$ -es rácson az 1, 2, 3 magasságok felhasználásával a következő módon: a rács első mezőjétől kezdődően tegyünk minden második mezőre 3-as magasságot. Az üresen maradt mezőket figyelve az elsőől kezdődően tegyünk minden másodikra 2 magasságértéket, majd legvégül az üresen maradt cellákat töltsük fel egyesekkel.

4.122. Sejtés. A fenti eljárással keletkező szigetek száma maximális és:

$$I_3(n) = n + 1 - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil^+$$

ahol $\lceil \cdot \rceil^+ = \max\{1, \lceil \cdot \rceil\}$

4.123. Megjegyzés. A fenti jelölés kissé idegenül hathat, mégis ez a legegyszerűbb módja a sejtésünk formulába öntésének.

Következő feladatunk természetesen most is eredményünk általánosítása. Programunk más h értékekre vonatkozó futtatásából megszülethetnek az általános esetre vonatkozó következő sejtéseink is.

4.124. Sejtés. Maximális számú szigetet tudunk kreálni az $1 \times n$ -es rácson az 1, 2, ..., h magasságok felhasználásával a következő módon: a rács első mezőjétől kezdődően tegyünk minden második mezőre h magasságot. Az üresen maradt mezőket figyelve, az elsőől kezdődően tegyünk minden másodikra $h - 1$ magasságértéket, és így tovább, egészen $h = 2$ -ig, majd legvégül az üresen maradt cellákat töltsük fel egyesekkel.

4.125. Sejtés. A fenti eljárással keletkező szigetek száma maximális és:

$$I_h(n) = n + 1 - \left\lceil \frac{n}{2^{h-1}} \right\rceil^+.$$

4.126. Megjegyzés. A fenti sejtések közül elég csak az utolsót bizonyítani, hiszen az a korábbiak általánosításának is tekinthető. Mivel a bizonyítás túl hosszú, s főleg technikai, ezért azt itt most nem részletezzük. Annyit azonban érdemes megemlíteni, hogy kettős indukcióval dolgozik, egy n , illetve egy h szerintivel. A bizonyítás több változatban is megtalálható a szerző [72] és [111] cikkeiben.

A továbbiakban a két, még ismert speciális eset vizsgálatával foglalkozunk.

4.6.4. Speciális esetek, a $2 \times n$ -es rács

4.127. Feladat. A 4.3.6. fejezet Mathematica animációját felhasználva próbáljunk meg maximális számú szigetet kreálni a $2 \times 2, 2 \times 3, \dots$ méretű rácsokon, az 1, 2, 3 magasságértékek felhasználásával. Mit tapasztalunk?

Számos kísérlet után, a korábbi, vágásos konstrukciók szem előtt tartásával kialakulhat bennünk a sejtés az optimális konfigurációra vonatkozóan. Ezt természetesen további kérdésekkel segíthetjük is. Ebben a helyzetben különösen fontos, hogy a tanár maradjon meg a katalizátor szerepénél. A *vegyük észre, hogy* típusú továbblendítés helyett érje el, hogy a diákok tényleg maguk vegyék észre azokat a tényeket, melyek felé terelni próbáljuk őket. Ezt könnyen elérhetjük, ha a vizsgált problémát több kisebb, gyorsabban megválaszolható részproblémára bontjuk. Az alábbiakban erre láthatunk példát.

4.128. Feladat. Mit mondhatunk a 2 magas mezőt tartalmazó szigetekről?

Megoldás. Egyszerűen látható, hogy ezen szigetek $1 \times k$ vagy $2 \times k$ alakúak.

4.129. Feladat. A fentiekben meghatározott típusú szigetek közül melyik fordulhat elő egy optimális konfigurációban?

Megoldás. A 2 magas mezőt tartalmazó $1 \times k$ alakú szigetek nem optimálisak. Ha egy ilyen sziget fordul elő a rácsban, akkor a másik sor ezen szigettel szomszédos mezőinek magassága szükségképpen 1.

3	2	3
1	1	1

4.60. ábra. 1×3 -as sziget a 2×3 -a rácson

Ekkor viszont a jelenlegi felső sort megismételve, majd itt a legmagasabb mezők magasságát 1-gyel megnövelve a szigetek száma nő.

3	2	3
4	2	4

4.61. ábra. A megváltoztatott tábla, több sziget

Végül csökkentve eggyel minden mező magasságát, a szigetek száma nem változik és minden mező magassága legfeljebb 3 lesz.

2	1	2
3	1	3

4.62. ábra. A megváltoztatott tábla, több sziget $h = 3$ korláttal

Ekkor viszont a 2 magas mezőt tartalmazó sziget $2 \times k$ alakú.

Az így kapott konstrukció beépíthető korábbi észrevételeink sorába.

4.130. Feladat. Mire emlékeztet ez minket?

Megoldás. Az $2 \times n$ -es rácsnál felbukkanó vágásra.

4.131. Feladat. Mit állíthatunk a fenti észrevételünk segítségével?

Megoldás. Egy optimális konfigurációban a 2 magas mezőket tartalmazó szigeteink csak $2 \times k$ alakúak lehetnek. Ezek csak akkor optimálisak, ha $k = 1$. Ez azt jelenti, hogy a rácsban szükségképpen van 2 magas függőleges vágás, hiszen épp a 2 magas mezőket tartalmazó 2×1 -es részek funkcionálnak vágásként. Ez alapján rekurzió felállítására nyílik lehetőségünk. Ehhez a felfedezéshez segíthet minket hozzá a következő ábra.

3	2	3	1	3	2	3
4	2	4	1	4	2	4

4.63. ábra. Egy optimális konfiguráció

4.132. Feladat. Milyen transzformáció bújik meg a fenti elrendezésben?

Megoldás. Egyfajta tengelyes tükrözés. Alkossunk maximális számú szigetet először a legnagyobb magasságértékeink (ezúttal 3 és 4) segítségével először az 1×2 -es rácson. Most, ha még egy magasságértékünk van (2), akkor ezen rács egy 2 magas vágásra való tükrözésével egy nagyobb rács optimális kitöltését érhetjük el, azonos magasságok segítségével.

Mivel még egy felhasználatlan magasságunk van, most egy 1 magas vágásra való tükrözéssel ismét növelni tudjuk az optimálisan kitöltött rács méretét, azonos maximális magasság mellett.

3		3	2	3	2	3
4		4	2	4	2	4
(a)		(b)		(c)		
3	2	3	1	3	2	3
4	2	4	1	4	2	4
(d)				(e)		

4.64. ábra. Tükrözéssel növelt világ

A fenti észrevétel segítségével megalkotható a következő tétel, melyet a bizonyítás technikai nehézségei, és a keretek szűkossége okán ezúttal sem részletezünk. A bizonyítás megtalálható a szerző [111] cikkében.

4.133. Tétel. Az $1, 2, \dots, h$ ($h \geq 3$), magasságok segítségével a $2 \times n$ -es rácson létrehozható szigetek maximális száma:

$$I_h(n) = \left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor + 1 - \left\lceil \frac{n}{2^{h-2}} \right\rceil^+.$$

4.134. Megjegyzés. A fenti formulát alaposabban szemügyre véve észrevehetjük abban a korlátlan esetben meghatározott maximumot. Ez a $2 \times n$ -es rács esetében $\left\lfloor \frac{3n+1}{2} \right\rfloor$. Eredményünk tehát azt jelenti, hogy korlátos magassággal legfeljebb ennél $\left\lceil \frac{n}{2^{h-2}} \right\rceil^+ - 1$ -el kevesebb sziget hozható létre. Hasonló észrevétel természetesen az $1 \times n$ -es rács esetén is fennáll (**4.125. sejtés**), de ott még ez a formulából, annak egyszerűsége miatt, nem volt azonnal észrevehető.

A fenti megjegyzés egy nagyon fontos kapcsolatot tár fel a korlátos és korlátlan magasságokkal dolgozó esetek között.

4.6.5. Speciális esetek, a $3 \times n$ -es rács

A $3 \times n$ -es rács vizsgálatakor már egy jóval nehezebb problémával találjuk magunkat szemben. A kezdeti megközelítés persze nem változik.

4.135. Feladat. A 4.3.6. fejezet Mathematica animációját felhasználva próbáljunk meg maximális számú szigetet kreálni a $3 \times 3, 3 \times 4, \dots$ méretű rácsokon, az 1, 2, 3 magasságértékek felhasználásával. Mit tapasztalunk?

A korábbiak mintájára itt is a 2 magas mezőket tartalmazó szigetek karakterizálásával érdemes felfedezéseinket kezdeni.

4.136. Feladat. Mit mondhatunk a 2 magas mezőt tartalmazó szigetekről?

Megoldás. A korábbiakkal analóg módon látható, hogy azok nem lehetnek $2 \times k$ alakúak.

4.137. Feladat. A 4.3.6. fejezet Mathematica játékának segítségével keressünk optimális konfigurációt a 3×4 -es rácson, $h = 4$ esetben, s próbáljuk meg azt az $1 \times n$ -es és a $2 \times n$ -es rácsnál tapasztalt vágások segítségével is létrehozni.

Megoldás. Egy lehetséges maximális szigetrendszer például a következő.

4	3	1	3
2	2	1	2
4	3	1	3

4.65. ábra. Vágások a 3×4 -es rácson

Számos kísérlet után, a felfedezett vágások segítségével rekurzió írható fel, mely a következő tételhez vezet. (A bizonyítás megtalálható a szerző [111] cikkében.)

4.138. Tétel. Az $1, 2, \dots, h$ ($h \geq 3$), magasságok segítségével a $3 \times n$ -es rácson létrehozható szigetek maximális száma:

$$I_h(n) = 2n + 2 - \left\lceil \frac{n}{2^{h-2}} \right\rceil^+.$$

4.139. Megjegyzés. A 4.134. megjegyzéshez hasonlóan itt is megállapítható, hogy az abszolút maximumhoz $(2n + 1)$ képest itt $\left\lceil \frac{n}{2^{h-2}} \right\rceil^+ - 1$ -el kevesebb sziget hozható létre.

4.6.6. Speciális esetek, a 4×4 -es rács problémája

Ezek után a következő eset a 4×4 -es rács problémája $h = 3$ esetén. Egy optimális esetet mutat a következő ábra.

2	1	2	3
3	1	1	1
1	1	1	2
2	3	1	3

4.66. ábra. Probléma a 4×4 -es rácson

Jelen esetben 9 szigetünk van. A fő különbség a korábbiakhoz képest az, hogy ez nem hozható létre az eddig sikerrel alkalmazott vágásos technika segítségével. Szimmetria okoknál fogva ugyanis alapvetően egy helyen tudjuk vágni rácsunkat. Ezt mutatja a következő ábra.

	1		
	1		
	1		
	1		

4.67. ábra. Vágás a 4×4 -es rácson

Ezen a rácson viszont a korábbiak (4.6.3., 4.6.4. fejezet) felhasználásával könnyen látható módon csak 8 szigetet tudunk létrehozni. Egy lehetséges kitöltést mutat a következő ábra.

2	1	2	3
3	1	1	1
1	1	1	2
2	1	1	3

4.68. ábra. Vágás és szigetek a 4×4 -es rácson

A továbbiakban a feladatunk tulajdonképpen téglalapok téglalapra történő, optimális lefedést biztosító elhelyezése. A probléma nehéz, NP-teljes, a témakör kutatása jelenleg is ezen a ponton tart.

4.6.7. Módszertani összefoglaló

A fejezetben megvizsgáltuk különböző speciális rácson a szigetrendszerek maximális elemszámát, korlátozott magasságfüggvény esetén. Számítógépes felfedezéseink forrása a korábbiakban már megismert **4.3.6.** Mathematica játék volt. A témakörhöz kapcsolódó, már ismert speciális esetek (**4.117.-4.118.**) vizsgálata után megtapasztalhattuk, milyen, ha meglévő eszközeinkkel nem tudunk választ találni kérdéseinkre (**4.119.**). Ezzel eljutottunk a felhasználói ismereteket is csak minimálisan igénylő alkalmazások használatától a saját program létrehozásáig. Saját programunk segítségével megoldottuk problémánkat az $1 \times n$ -es rácson (**4.122.**). Az itt szerzett tapasztalatok alkotó jellegű felhasználásával, a tanulói felfedezéseket a $2 \times n$ -es és a $3 \times n$ -es eset megoldására irányítottuk (**4.127.-4.138.**). A fejezetet egy máig nyitott problémával zártuk (**4.6.6.**), a probléma gyökerének és nehézségi szintjének megvilágításával.

A dolgozatban felhasznált fontosabb programok, alkalmazások, demonstrációk, játékok, animációk megtalálhatók a CD mellékleten.

Összefoglalás

A dolgozat témája az experimental mathematics néven ismertté vált új tudományos szemlélet oktatásra történő adaptálási lehetőségének bemutatása, összekapcsolván mindezt a felfedezett ismeretszerzéssel.

Az értekezés a szerző következő publikációin alapul:

- Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czedli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011.
- Attila Máder. *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6**(1), 15-41, 2008.
- Attila Máder, Róbert Vajda. *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.
- Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.
- Attila Máder. *The Use of Experimental Mathematics in the Classroom*, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, 2011.
www.model.u-szeged.hu

Érintőlegesen a következő publikációból is merítünk:

- Máder Attila. *A „specmat” 40 éve a Ságváriban I.*, A matematika tanítása, **17**(4), 13-21, 2009.

Az első fejezetben röviden áttekintjük a magyar középiskolai matematikaoktatás helyzetét a Varga Tamás-féle tananyagreformtól ([26, 107]) kezdődően a napjainkban felmerülő problémákig. Kitérünk a PISA és TIMSS mérések viszontagságaira és elemezzük a mérések eredményeit. A XXI. században az ismeretelsajátítás szükségességét bizonyos kompetenciák megszerzésének fontossága váltotta fel, ezért a korábbi tantervi alapú, tartalmi elemekre összpontosító mérések mellett megjelentek a kompetencia alapú mérések is. A kompetencia, valamint a matematikai kompetencia fogalmának több oldalról történő megközelítése után részletesen tárgyaljuk az Országos

kompetenciamérés eredményeit, hatásait, ellentmondásosságait [66]. Az új típusú tudásszemléletnek, illetve a megjelenő és egyre markánsabbá váló társadalmi igényeknek megfelelni kívánó új utak - mint a matematikai modellezés és a valóságközeli matematika ([4, 102, 50]) - áttekintése után elemezzük a jelenlegi, válságosnak mondható helyzet okait.

A második fejezetben bemutatjuk a kísérleti matematika mibenlétét. A számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetővé vált kísérletek nagy számú, gyors és hatékony elvégzése, azonnali kiértékelése; teret nyitva egy új matematikai szemlélet kialakulásának. Egyáltalán nem számítógéppel segített matematikáról van szó, sokkal inkább a számítógéppel megalkotott matematikáról. Maga a problémafelvetés, és ezen át a definíciók, tételek, bizonyítások megalkotása mind-mind számítógéppel történik. A számítógépes kísérleti matematika Borwein által megalkotott módszertanának ([17, 18, 21]) elemzése után rövid történeti áttekintést adunk a terület fejlődéséről, az 1990-es években történő megjelenésétől kezdve egészen napjainkig. Ezután részletesen áttekintjük a kísérleti matematika oktatásban történő alkalmazásának elméleti hátterét. Mindennek itthon már van hagyománya, hiszen azt, hogy a kísérleteknek megkerülhetetlen szerepük van a heurisztika segítésében, Pólya és Lakatos óta tudjuk [90, 136]. Pólya szerint a kísérletek jelentik a matematikai tudás legfőbb forrását, a kísérletek azok, melyek a megfelelő irányba terelik az intuíciót. Ugyanakkor a számítógépek fejlődésével és elterjedésével lehetőségünk nyílik nagy mennyiségű számítás valamint kísérlet gyors és pontos elvégzésére, illetve ezek eredményeinek kiértékelésére, következtetések levonására. A számítógépek ezen innovatív módon történő, alkotó jellegű felhasználásával, a Borwein által elindított kutatási módszer oktatásra való adaptálásával, a Pólya György által szorgalmazott heurisztika és kísérletezés végre a megérdemelt mértékű szerepéhez juthat a tanításban. A (közép)iskolások számára kitűzött, természetesen felmerülő, de ugyanakkor kutató jellegű problémák vizsgálata során a számítógép nem csak a szemléltetésben, de a problémafelvetésében, a fogalmak kialakításában, a sejtések megfogalmazásán és tesztelésén keresztül pedig a matematikai alkotás teljes folyamatában is segítségünkre lehet. A kísérlet és az elmélet elválaszthatatlanok [112]. A tanulók maguk is felfedezővé válhatnak és ez az egyik legfontosabb központi gondolat. A fejezet végén röviden elemezzük módszerünknek a bizonyítás fogalmára gyakorolt hatását [88].

A harmadik fejezetben több példán keresztül bemutatjuk, hogyan is működnek a felfedezések a matematikaórán. A fejezet első részében felfedezéseinket még számítógépes segítség nélkül tesszük meg. Megmutatjuk, hogyan lehet egy egyszerű ábra segítségével műveleti tulajdonságokat, vagy algebrai azonosságokat felfedeztetni. Három különböző animációt is mutatunk a háromszögek belső szögeinek összegére vonatkozó tétel bizonyítására. A számítógép nélküli felfedezések bemutatását egy egyszerű, a problémát játszhatóvá, felfedezhetővé tévő valószínűségi modell bemutatásával zárjuk [104]. Bemutatjuk, hogy a tanári irányítással végzett tömeges tanulói kísérletek segítségével lehetővé válik a kollektív tapasztalatszerzés, bevezethetünk új fogalmakat. Az itt bemutatott módszerek alkalmasak nem csak egy adott probléma, de akár egy egész témakör tárgyalására, illetve egy-egy új terület automatikus, természetes

bevezetésére is. A fejezet következő részében bemutatjuk, hogyan változik meg a tanárok szerepe az információs társadalom által támasztott igényeknek való megfelelési kényszer hatása alatt [38]. Elemezzük, hogy a modern technikai eszközök használatában csak botladozva haladó tanárok hogyan segíthetik az ezen eszközöket organikus használó digitális bennszülötteket a műveltség egyik új fokmérője, a digitális írástudás elérésében. Vizsgáljuk a kérdések, a sejtések, és a számítógépek szerepét a számítógéppel segített felfedezettő oktatásban. A fejezet harmadik szakasza a számítógép eszközszintű felhasználásával kivitelezhető kísérletek bemutatásával foglalkozik. Többségében az interneten bárki által elérhető egyszerű alkalmazások, weblapok, animációk segítségével helyezzük új nézőpontba már tárgyalt kérdéseket, illetve hozunk testközelbe korábban elérhetetlen problémákat [124, 169]. A fejezetet a számítógépek alkotó jellegű felhasználási lehetőségeinek bemutatásával zárjuk. Néhány, a dolgozatban is használt, valamint az oktatásban is kiválóan alkalmazható szoftver bemutatása után bemutatjuk, hogyan tárgyalható a Thalész-tétel, a trigonometrikus azonosságok, a szintetikus geometria, vagy akár az analízis témaköre egy-egy alkalmazás segítségével könnyedén, a digitális bennszülöttek számára is felfedezhető módon [59, 5, 12, 13].

A dolgozat utolsó fejezetében kísérletet teszünk a korábbiakban részletezett módszertani elvek egy konkrét, élő példán keresztül történő komplex reprezentálására. A tanulói felfedezéseket mindvégig szem előtt tartva, ahol csak lehet, egymásra épülő feladatok sorozatán keresztül jutunk el eredményeinkhez [110]. Egy rövid történeti áttekintés után feladatokon keresztül felépítjük a sziget fogalmát. Az önálló felfedezést segítő, tudatos tanári munkával irányított feladatokkal absztraháljuk a sziget fogalmát igazolván, hogy felfedezésekkel nem csak a sejtések, de a fogalmak szintjén is eredményes alkotó munka végezhető. A fogalom kialakításához egy Mathematica animációt is használunk. Az alkalmazás segítségével a tanulók kísérletek tucatjait végezhetik, akár közösen órán, akár otthon egyedül. A számítógép segítségével szerzett tapasztalatok segítenek a fogalmak gyors és hatékony kialakításában, elmélyítésében. A következő részben a szigetrendszerek szerkezetét tárjuk fel. A minimális és maximális szigetek fogalmának bevezetése mellett megalkotjuk a szigetrendszer gráfját, és vizsgáljuk a gráfok és a szigetek kapcsolatát, egy újabb Mathematica animáció használatával. A következő szakaszban célunk az $m \times n$ -es rácson elhelyezhető szigetek maximális számának meghatározása abban az esetben, ha a magasságfüggvény nem korlátos. E feladat első megközelítésre túl bonyolult, ezért egy-egy speciális eset vizsgálatával kezdünk. A korábban bemutatott interaktív Mathematica animáció segítségével nem csak, hogy sejtéseket fogalmazunk meg, de a bizonyítás alap gondolatát is megtaláljuk az $1 \times n$ -es rács esetében. Az itt felfedezett vágásos technika segítségével sejtést fogalmazunk meg a $2 \times n$ -es rácson elhelyezhető szigetek maximális számára vonatkozó alsó korlátot illetően, s ezt be is bizonyítjuk. Ezzel a számítógéppel segített bizonyítással a számítógép alkotó jellegű felhasználásának egy újabb szintje tárul fel. Módszerünk általánosításával az $m \times n$ -es rácsra vonatkozó alsó korlátot is megtaláljuk. Az alsó korlát megtalálása után a szigetrendszerek gráfjának segítségével egy felső korlát keresésébe fogtunk [11]. A korábban már eredményesen használt Mathematica demonstráció segítségével elemezzük a vízszint emelkedésének a szigetekre gyakorolt hatását. Az egy

gráfelméleti tétel segítségével megtalált felső korlát megegyezik a korábban megtalált alsó korláttal, így a fejezet fő eredményeként megkaptuk az $m \times n$ -es rácson elhelyezhető szigetek maximális számát. Ezek után fogunk az $m \times n$ -es rácson korlátozott magassággal elhelyezhető szigetek maximális számának vizsgálatába. A korábban felfedezett eredmények, a megtalált módszerek (vágásos technika) továbbfejlesztésével, valamint a számítógép felhasználásának legmagasabb szintjének elérésével, egy saját készítésű program segítségével meghatározzuk az $1 \times n$, $2 \times n$ és $3 \times n$ -es rácson legfeljebb h magasság felhasználásával elérhető maximális szigetszámot [72, 111]. A fejezet végén megmutatjuk, módszerünk miért nem működik nagyobb rácsoakra.

Summary

The theme of this thesis is the possible adaptations of experimental mathematics combined with experimental learning in teaching.

The dissertation is based on the following papers of the author:

- Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czedli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011.
- Attila Máder. *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6**(1), 15-41, 2008.
- Attila Máder, Róbert Vajda. *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.
- Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.
- Attila Máder. *The Use of Experimental Mathematics in the Classroom*, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, 2011.
www.model.u-szeged.hu

Additionally we have used the following publication as well:

- Máder Attila. *A „specmat” 40 éve a Ságváriban I.*, A matematika tanítása, **17**(4), 13-21, 2009.

In the first section we briefly discuss the state of mathematics teaching in secondary schools from Tamás Varga's curriculum reform ([26, 107]) to the present days. We mention the problems of PISA and TIMSS surveys and examine their results. In the 21st century the skill based learning took over from the lexical knowledge based education and as a result competence based surveys have appeared beside curriculum based surveys. After the discussion of competencies and mathematical competency we show the results, consequences and the controversies of the National Competency Test [66]. Following this we discuss the new ways of teaching as mathematical modelling

and functional mathematics which are more and more demanded by the new scientific approach and the continuously changing society expectations then we move on to analyse the present crucial situation [4, 102, 50].

In the second section we are going to describe the experimental mathematics. The improvement and spread of computers have allowed to research quickly and efficiently, and to analyse great amount of data immediately which creates new environment for educational mathematic research. The problem identification, definitions, thesis and proofs are created with the help of computer. It is rather computer created than computer supported mathematics. We describe the methodology of computer supported experimental mathematics created by Borwein ([17, 18, 21]) and briefly present the historical overview of this field starting from the 1990s to present days. Then we are going to examine the theoretical background of experimental mathematics in mathematics teaching, which is not new in our country. Since Pólya and Lakatos we know the crucial importance of experiments in helping heuristics [90, 136]. According to Pólya, experiments are the basic source of mathematical knowledge that drive the intuition in the correct direction. The improvement and spread of computers have made us able to make a lot of calculations and experiments quickly and punctually, and we can analyse the results and draw the consequences. By this creative and innovative way of computer usage the research method adaptation to education was started by Borwein while the heuristics was urged by György Pólya, and experiments finally might achieve their deserved ratio in education. When we examine realistic and experimental problems with students in secondary school, computers help not only in representation but also in defining problems and creating concepts as well. Moreover, by making and testing conjectures, they help in the creation of mathematics. There is no theory without experiments [112]. Students can become explorers, and this is the most important idea. At the end of the section we analyse the influence of our new method to the definition of proof [88].

In the third section we show several examples of exploration in mathematics lessons. In the first part of the section we have our explorations without computers. We describe how a simple figure can be used for noticing characteristics of operations or algebraic identities. We show three animations for proof of the sum of the interior angles of triangles. The presentation of discoveries without computers ends with a simple, playfully probabilistic model [104]. We show how group experiments make the collective experience and the introduction of new concept possible. Methods showed here are suitable not only for a given problem but even for the automatic and natural discussion of a new topic or a whole field as well. In the next part of this section we summarize how the teachers' role changes as a result of the demand of the society [38]. We analyse how teachers who can hardly use modern equipment should help students who were born into the organic usage of these equipments with achieving one of the measures of new knowledge the digital literacy. We examine the roles of questions, hypothesis and computers in the computer supported exploratory teaching. The third part of the section is about the computer supported experiments. We mostly use simple applications, web pages and animations publically available on the Internet in order

to find new prospect to earlier discussed questions and new ways to get closer to previously unachievable problems [124, 169]. The section ends with the demonstration of creative ways of computer usage. After presenting the softwares used in the thesis and other useful alternatives we demonstrate how the Thales Theorem, trigonometrical identities, synthetic geometry or even the topic of analysis can be taught for digital aboriginals in explorational way using some applications [59, 5, 12, 13].

In the last section of the thesis we make an attempt to a complex representation of the previously discussed methodology through a concrete, real example. Keeping in mind the students' exploration and where it is possible, we use series of exercises build on each other [110]. After a short historical overview we are going to set up the concept of island through examples fostering self exploration. By these examples combined with teacher's supportive and conscious supervision we are able to create the concept of island which is suitable for further mathematical examination in different level of abstraction, proving that by explorations we can work efficiently not only on the level of hypothesis but on the level of concepts as well. To set up the concept we use a Mathematica animation. With the support of this application the students can carry out dozens of experiments together in the lesson or alone at home. The computer based experience help to create and understand the concept quickly and efficiently. In the next section we analyse the structure of the system of islands. Besides the introduction of the definition of minimal and maximal island we create the graph of island's system in addition to this we analyse the relationship between graphs and islands with another Mathematica animation. In the next section our aim is to find the maximal number of islands on a $m \times n$ sized board when the height function is not bounded. For the first sight this problem is too complex so we start with a special case. With the previously mentioned interactive Mathematica animation we not only create hypotheses but find the main idea of proof in case of $1 \times n$ sized board. Using discovered cutting technique we make conjectures for the lower bound of the number of the islands lying on a $2 \times n$ sized board and we prove the conjecture. The computer supported proof is a new potential of creative usage of computers. By generalizing our methodology we are able to find the lower bound related to $m \times n$ sized board. The determination of lower bounds is followed by the quest for an upper bound using the graphs of the systems of islands [11]. The previously used Mathematica demonstration is used to analyse the influence of the rise of the water level to the system of islands. The upper bound, which is found using the theorem of graph theory equals to the lower bound, determined earlier, so the main result of this chapter is the maximal number of islands lying on an $m \times n$ sized board. After this we start calculating the number of islands with bounded heights on an $m \times n$ sized board. Using the previous results, the improvement of the already found method (cutting technique), the highest involvement of a computer and using a self-developed program we determine the maximal number of islands which are at most h height lying on a $1 \times n, 2 \times n, 3 \times n$ sized board [72, 111]. At the end of the section we explain why our method is not suitable for larger boards.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetet szeretnék mondani témavezetőmnek, Dr. Kosztolányi Józsefnek a sok szakmai és személyes tanácsért, támogatásért. Köszönöm azt a sok segítséget és értékes útmutatást is, amit az elmúlt években kutatómunkám, illetve a disszertáció elkészítése során tőle kaptam.

Hálás köszönettel tartozom általános iskolai matematikatanáromnak, Szalainé Szunyi Klárának. Az ő szerető gondoskodása, szakmai elkötelezettsége hatására szerettem meg a matematikát, s választottam ezt a pályát.

Köszönettel tartozom társszerzőimnek név szerint, K. Horváth Eszternek, Andreja Tepavčevićnek, Makay Gézának, Vajda Róbertnek. Nagy öröm volt együtt dolgozni velük, a közös munka rendkívül inspiráló volt, és rengeteget tanultam közben.

Köszönöm Nagy Dórának, Cseh Zsuzsannának és Guy Thomasnak az angol nyelvű részek összeállításában nyújtott segítségüket.

Hálás vagyok édesanyámnak, valamint Vaskó Marianna és Matos Zoltán barátomnak a kézirat többszöri gondos átolvasásáért, javításáért.

Külön köszönet illeti továbbá Lénárt Ivett és Szörényi Péter tanítványaimat a szigetek művészi ábrázolásáért.

Tárgymutató

- aktív tanulói részvétel, 2, 29, 32, 34, 35, 43, 48, 92, 93
AMS, 21
antiderivált, 64
Appel, Kenneth, 21
aszinkron tanulás, 44
Autograph, 56, 60, 65

Banach-Tarski paradoxon, 30
Barwise, Jon, 21
bizonyosság, 25, 26, 34, 37, 59, 69, 70
Blum, Werner, 10, 11
Blum-modell, 11
Bolyai Intézet, 55, 71
Borwein, Jonathan, 21, 23, 46, 130
brute force, 121

Cabri, 59
CECM, 21
Chu-Ching Huang, 58
Coolahan, John, 7
CooSpace, 43
COQS, 40, 41
Czédli Gábor, 71

Derive, 57
Devlin, Keith, 21
Dienes Zoltán, 22
digitális írástudás, 40, 131
digitális bennszülött, 42–44, 48, 54, 105, 150
digitális bevándorló, 42, 43
dinamikus geometriai szoftver, 56
dinamikus programozás, 121
DQME, 12

e-learning, 43, 44, 58
eEuropa, 44
Einstein, Albert, 1
Erdős Pál, 51, 52
Euklidesz, 59
Euler 3D, 59
Experimental Mathematics, 21
experimental mathematics, 18, 22, 23, 129, 133, 134, 141, 142, 148, 151

Földes István, 70
fa, 101, 115
Fajtlowicz, Siemion, 46
fedés, 99, 102
Fejes Tóth Gábor, 22
felfedezés, 2, 4, 24, 29, 30, 32–35, 39, 43–45, 47–49, 51, 54, 56, 60–62, 64–67, 69, 70, 72, 79, 92, 101, 105, 108, 116, 119, 121, 122, 126, 128, 131
Freudenthal Intézet, 12
Freudenthal, Hans, 12

gépi számábrázolás, 69
Gauss, 30, 32
GeoGebra, 55, 56, 59, 60, 62, 64, 67
GeoGebra Intézet, 55
gráf, 98, 99, 101, 102, 104, 115
 összefüggő, 101
 irányított, 99
 szigetrendszeré, 98–100, 103, 105, 114, 115, 117
 szigetrendszeré, kiegészített, 117–119
GrafEq, 59
Graffiti, 46
Graph, 59

háromszögszám, 33
Haken, Wolfgang, 21

- Hale, Thomas, 21
 Hardy, G. H., 27
 Hasse-diagram, 99
 hatféle B, 43
 Hatsell, Mark, 56
 HEFOP, 8
 heurisztika, 18, 22–24, 70, 105, 130
 Hoffman, Paul, 50
 Hohenwarter, Markus, 55
 ICTMA, 10
 IKT, 17, 40, 41
 információrobbanás, 16, 40
 integrál, 64, 65
 határozatlan, 64
 határozott, 64
 mint a felső határ függvénye, 64
 intuíció, 19, 22–24, 29, 31, 33, 51, 73, 92, 105, 130
 IoT, 43
 játékalapú tanulás, 42
 játékos matematika, 2, 61
 Jaffe, Arthur, 21
 középvonal, 36
 közoktatási törvény, 16
 kétoldali közelítés módszere, 28, 31, 33, 39, 108, 118
 kód
 prefixmentes, 71
 kísérlet, 19, 20, 22, 23, 26, 29, 34–37, 40, 46, 48, 49, 51, 53–55, 60, 61, 70, 75, 93, 101, 105, 107, 112, 116, 119, 121, 130
 kísérleti matematika, 18, 22, 23
 Kepler, 21
 Kerettanterv, 13
 kollektív tapasztalatszerzés, 40, 130
 kompetencia, 6–8, 40
 -mérés, 9
 alapú oktatás, 8
 funkcionális, 7
 kulcs-, 7
 matematikai, 8
 komplex matematikatanítási kís., 1
 komputer-algebrai rendszer, 54, 55, 75, 110
 kutatásalapú tanulás/tanítás, 17, 43, 46
 Lakatos Imre, 22, 24, 130
 Leibniz, 29
 LEMA, 10
 Lengvárszky Zsolt, 71
 levél, 102, 115
 lifelong learning, 44
 mértani sor, 38, 39
 MACSYMA, 54
 majoráns kritérium, 53
 matematikai eszköztudás, 4, 9
 matematikai műveltség, 2, 16
 matematikai modellezés, 10
 matematikai tudás, 4
 Mathematica, 36, 49, 75, 91, 93, 104, 105, 108, 110, 112, 113, 116, 120, 123, 125, 126, 128, 152
 Maxima, 55
 modell, 73, 99, 104
 leíró, 11
 matematikán belüli, 10, 11
 normatív, 11
 modellezési ciklus, 10
 Monte Carlo-módszer, 51
 Monty Hall-dilemma, 50, 51
 Moodle, 43
 négyszín sejtés, 21
 Nagy József, 7
 nagy számok törvénye, 51
 NAT, 8, 16
 New Math, 1
 Newton-Leibniz formula, 64
 Niss, Mogens, 8
 OEIS, 47, 108, 109, 120
 Oundle School, 56
 Pálinkás József, 16
 Pólya György, i, 4, 22–24, 27, 105, 112, 130

- permanencia-elv, 27, 28
 Piaget, 32
 PISA, 3–6, 10, 14
 Poly, 59
 Prensky, Marc, 42
 primitív függvény, 64
 problémamegoldó gondolkodás, 2, 24
 proof without words, 25, 62
 pure mathematics, 21, 29

 Quinn, Frank, 21

 rácspont, 114, 115, 117
 részbenrendezett halmaz, 99
 realiztikus matematika, 12, 69
 rekurzió, 110, 112, 124, 126
 másodrendű lineáris, 112, 114
 paraméteres, 113
 reláció, 99

 Savant, Marilyn vos, 50, 52
 Selin, Steve, 50
 SIBIS, 41
 Simon, Herbert, 54
 Skemp, Richard, 4
 Skype, 44
 spirális felépítés, 1, 27, 58
 Stirling-formula, 53
 Sulinet, 48, 53
 szórákkoztató tanulás, 42
 Szegedi Tudományegyetem, 43, 70
 sziget, 71–77, 82, 86, 87, 89–96, 99, 102–
 105, 108, 109, 112, 114, 116, 120,
 121, 123, 126, 127, 131
 egydimenziós-, 70
 fél-, 117–119
 fő-, 74, 75, 85–87, 92, 95–98, 101, 102,
 104, 110, 120
 magasság, 82
 maximális, 96–98, 102
 minimális, 96, 97, 102, 115, 117, 118
 téglalap alakú, 71, 76
 tómentes, 73
 tetszőleges alakú, 74

 szigetrendszer, 71, 79, 81, 83, 92–96, 98,
 99, 101–105, 114–116
 kanonikus reprezentáció, 80, 83, 84,
 86, 88, 92, 98, 99, 106, 116
 maximális, 71, 92, 126
 Szilassi Lajos, 59
 szinkron tanulás, 44
 szukcesszív approximáció módszere, 25

 TÁMOP, 8
 Taylor-polinom, 67–69
 Taylor-sor, 68
 teljes indukció, 25, 32, 33, 95, 102, 111,
 112, 122
 Teller Ede, 40
 Thalész-tétel, 37, 59
 The Geometer's Sketchpad, 59
 Thom, René, 28
 Thruston, William P., 28
 TIMSS, 3, 5

 Ulam, Stanislaw, 51

 vágás, 110, 112, 119, 124, 126, 127
 Vázsonyi Endre, 51
 valós számok műveleti axiómái, 31
 valóságközeli matematika, 3
 valószínűségi változó, 53
 Varga Tamás, 1, 12
 Venn-diagram, 48, 49
 Virtual Learning Environment, 43

 WebMathematics Interactive, 55, 57, 58
 Wilder, Raymond Louis, 27
 Wolfram Demonstrations Project, 49, 53,
 91

 Zeilberger, Doron, 18, 22

Ábrák jegyzéke

1.1. A PISA 2006 és a TIMSS 2007 eredményeinek összehasonlítása matematikából	5
1.2. A modellezési ciklus (PISA 2003)	10
1.3. A Blum-modell	11
1.4. Informatikai eszközök használati gyakorisága a matematikaórákon . . .	13
1.5. Tanulásszervezési formák gyakorisága a matematikaórákon	14
2.1. A kísérletek szerepe a tudományos felfedezésekben	20
3.1. Műveleti tulajdonságok: $(b + c)a = ba + ca$	30
3.2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	31
3.3. $1 + 2 + 3 + \dots$	32
3.4. Felfedezés: A pozitív egészek összege és a téglalap fele	32
3.5. Felfedezés: A pozitív egészek összege és a háromszögszámok	33
3.6. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege I.	34
3.7. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege II.	35
3.8. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege III.	36
3.9. Thalész-tétel - Bizonyosság vagy bizonyítás?	37
3.10. Dobás az első hatosig	38
3.11. Digitális írástudás - COQS index	41
3.12. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	48
3.13. Bizonyítás(?) - A háromszög belső szögeinek összege IV.	50
3.14. A Monty Hall-dilemma	51
3.15. A Monty Hall-dilemma és a Monte Carlo-módszer	51
3.16. Dilemma: Hogyan döntenénk?	52
3.17. A lusta pénztáros	53

3.18. Autograph - Lassú ábrázolás: $\sin 2x$ hol a következő zérushely?	56
3.19. Derive - Integrálás lépésenként - $\int x^2 \cdot e^x dx$	57
3.20. WMI - Pillanatkép	58
3.21. Thalész-tétel - Pillanatkép	59
3.22. Hol halad a pont...?	60
3.23. ... az $y = -\cos x$ görbe mentén	61
3.24. A felfedezés: $-\cos x = \cos(x - \pi)$	61
3.25. A háromszögek hasonlóak	62
3.26. A képpontok által kifeszített négyszög	63
3.27. A beírt körök érintik egymást	64
3.28. Alsó és felső összegek és a beosztás finomsága	65
3.29. Alsó és felső összegek és a határozott integrál	65
3.30. Készül a forgástest	66
3.31. A forgástest és jellemzői	66
3.32. Felfedezések - a $\cos x$ és a Taylor-polinom. Hol és mennyire jó a közelítés?	67
3.33. Felfedezések - a $\cos x$ és a Taylor-polinom. Jó és kevésbé jó közelítések	67
3.34. A $\cos x$ és a Taylor-polinom - Miért közelít?	68
3.35. Taylor-polinom a 6 körül - jobb közelítés egy másik tartományon	68
3.36. Taylor-polinom - (Ugye) mennyire jól közelít?	69
4.1. Szigetek az 1×7 -es rácson	70
4.2. Szigetek két dimenzióban	71
4.3. Mi a sziget?	72
4.4. Leegyszerűsített világunk	73
4.5. Keressük meg a szigeteket!	74
4.6. Szigetek tetszőleges alakkal	74
4.7. Szigetek tetszőleges alakkal	74
4.8. Kis rács, sok sziget	75
4.9. Nagy rács, sok sziget - mn sziget az $m \times n$ -es rácson	76
4.10. Szigetek absztrahálódása	76
4.11. Keressük meg az összes (téglalap alakú) szigetet!	78
4.12. A téglalap alakú szigetek	78
4.13. Adjuk meg a magasságokat!	79

4.14. A 4.17. feladat megoldásai	79
4.15. Magasságok másképp	80
4.16. Magasságok csökkentése	81
4.17. Minimális magasságok	81
4.18. Szigetek és magasságaik	82
4.19. Szigetek és magasságaik	83
4.20. 2 illetve 3 magas szigetek	83
4.21. Keressük a kanonikus reprezentánst!	84
4.22. Szigetek kanonikus reprezentációja	84
4.23. Adjuk meg a magasságokat!	85
4.24. Megoldás, ha a magasság legfeljebb 1	85
4.25. Adjuk meg a magasságokat!	85
4.26. Megoldások, ha a magasság legfeljebb 2	86
4.27. Adjuk meg a magasságokat!	86
4.28. Megoldások, ha a magasság legfeljebb 4	87
4.29. Egyenetlen talaj, csak a főszigettel	87
4.30. 2 sziget a 2×3 -as rácson	88
4.31. Ellenpélda a 4.42. feladat állítására	88
4.32. 5 sziget a 2×3 -as rácson	89
4.33. 3 sziget a 2×3 -as rácson	90
4.34. Szigetek a 6×7 -es rácson, ha $h = 2$	90
4.35. Játék a szigetekkel Mathematicában	91
4.36. Metsző szigetek	94
4.37. Minimális és maximális szigetek	96
4.38. Minimális és maximális szigetek	97
4.39. Minimális és maximális szigetek	97
4.40. Szigetek és gráfok	98
4.41. Rajzoljuk fel a gráfokat!	100
4.42. Szigetrendszereink gráfjai	100
4.43. Adjunk meg szigetrendszereket!	101
4.44. Gráfjaink szigetrendszerei	101
4.45. A minimális szigetek a levelek	102

4.46. A maximális szigetek a gyökér fiai	102
4.47. Gráfok és szigetek	103
4.48. Szigetrendszerek és szerkezetük Mathematicában	104
4.49. Szigetek kis rácson	106
4.50. Szigetek - az első vágás	106
4.51. Szigetek - a becslés éles	106
4.52. A 4.79 feladat megoldásai	107
4.53. Vágás a $2 \times n$ -es rácson	110
4.54. Vágás az $m \times n$ -es rácson	113
4.55. Rácspontok és minimális szigetek	115
4.56. Változó szigetek	116
4.57. Fél-szigetek	117
4.58. Rácspontok és fél-szigetek	117
4.59. Szigetek korlátozott magassággal, $h = 3$, $n = 2, 3, \dots, 20$	121
4.60. 1×3 -as sziget a 2×3 -a rácson	123
4.61. A megváltoztatott tábla, több sziget	123
4.62. A megváltoztatott tábla, több sziget $h = 3$ korláttal	124
4.63. Egy optimális konfiguráció	124
4.64. Tükrözéssel növelt világ	125
4.65. Vágások a 3×4 -es rácson	126
4.66. Probléma a 4×4 -es rácson	127
4.67. Vágás a 4×4 -es rácson	127
4.68. Vágás és szigetek a 4×4 -es rácson	127

Irodalomjegyzék

- [1] Steven C. Althoen, Joseph L. Brandell. *Investigating Bricard's Proof of Morley's Theorem with The Geometer's Sketchpad*, Mathematics Teacher, **102**(9), 706-719, 2009.
- [2] Ambrus András. *A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematikaoktatásban*, Képzés és gyakorlat, Konstantin Filozófus Egyetem, Nyitra, 19-32, 2008.
- [3] Ambrus Gabriella. *Hagyományos és problémaorientált feladatok kapcsolatának vizsgálata az iskolai gyakorlatban*, A matematika tanítása, **15**(1), 3-9, Szeged, 2007.
- [4] Ambrus Gabriella, Vancsó Ödön. *Modellezés az iskolai gyakorlatban*, A matematika tanítása, **16**(5), 3-11, Szeged, 2008.
- [5] Autograph
www.autograph-math.com
- [6] George E. Andrews. *The Death of proof? Semi-Rigorous Mathematics? You've Got to Be Kidding!*, The Mathematical Intelligencer **16**(4), 16-18, 1994.
- [7] Bonnie Averbach, Orin Chein. *Problem Solving Through Recreational Mathematics*, Dover Publications, New York, 2000.
- [8] Béla Bajnok. *An historical overview of the influence of technology on Mathematical competitions*, History of Mathematics and Teaching of Mathematics, Szeged, 2010. május 20-22.
- [9] Alain Baker. *Experimental Mathematics*, Erkenntnis **68**(3), 331-344, 2008.
- [10] Baldaváriné Juhász Éva, Mezőné Oszlanczi Ilona. *Készüljünk a kompetenciamérésre! Szövegértés és matematika, 6. évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2009.
- [11] János Barát, Péter Hajnal, Eszter K. Horváth. *Elementary proof techniques for the maximum number of islands*, European Journal of Combinatorics, **32**(2), 276-281, 2011.

- [12] C. N. Barton. *Autograph Activities - Teacher Demonstrations for 16-19*, Eastmond Publishing Ltd, Oundle, Peterborough, 2009.
- [13] C. N. Barton. *Autograph Activities - Student Investigations for 16-19*, Eastmond Publishing Ltd, Oundle, Peterborough, 2009.
- [14] Blénessy Gabriella. *Kooperációs lehetőségek a matematika- és informatikaoktatás területén*, A matematika tanítása, **17**(2), 25-31, 2009.
- [15] Werner Blum. *Application and Modelling in Mathematics Education* (Discussion Document (ICMI Study 14)), Educational Studies in Mathematics, **51**, 149-171, 2002.
- [16] Werner Blum, Gabriele Kaiser, Rita Borromeo Ferri, Gloria Stillman (szerk.). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, (International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling 1, ICTMA 14), Springer, 2011.
- [17] Jonathan Borwein, David Bailey. *Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century*, A K Peters, 2004.
- [18] Jonathan Borwein, David Bailey. *Experimental Mathematics in Action*, A K Peters, 2007.
- [19] Jonathan Borwein, David Bailey, Ronald Girgensohn. *Experimentation in Mathematics (Computational Paths to Discovery)*, A K Peters, 2004.
- [20] Jonathan Borwein, Keith Devlin. *The Computer as Crucible - An Introduction to Experimental Mathematics*, A K Peters, 2008.
- [21] Jonathan Borwein. *The Experimental Mathematician: The Pleasure of Discovery and the Role of Proof*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **10**(2), 75-108, 2005.
- [22] Jonathan Borwein. *Aesthetics for the Working Mathematician*, Queens University Symposium on Beauty and the Mathematical Beast: Mathematics and Aesthetics, 2001.
- [23] Margaret Brown, Peter Brown, Tamara Bibby. *"I would rather die": reasons by 16-year-olds for not continuing their study of mathematics*, Research in Mathematics Education, **10**(1), 3-18, 2008.
- [24] Bruno Buchberger. *Should Students Learn Integration Rules?*, ACM SIGSAM Bulletin, **24**(1), 10-17, 1990.
- [25] B. Buchberger, C. Dupre, T. Jebelean, F. Kriftner, K. Nakagawa, D. Vasaru, W. Windsteiger. *The Theorema Project: A Progress Report*, Symbolic Computation and Automated Reasoning, Proceedings of CALCULEMUS 2000, Symposium on

- the Integration of Symbolic Computation and Mechanized Reasoning (szerk.: M. Kerber, M. Kohlhase), 98-113, A K Peters, Natick, Massachusetts, St. Andrews.
- [26] C. Neményi Eszter, Somfai Zsuzsa. *A matematika tantárgy helyzete és fejlesztési feladatai*, A tanulás és tanítás helyzete, A tanulás és tanítás helyzete, Oktatás-kutató és Fejlesztő Intézet, 2004.
www.ofi.hu/tudastar/tantargyak-helyzete/matematika-tantargy
- [27] Cabri
www.cabri.com
- [28] Olivia M. Carducci. *The Wolfram Demonstrations Project*, MAA Focus, **28**(1), 8-9, 2009.
- [29] Michelle Cirillo. *Ten things to consider when teaching proof*, Mathematics Teacher, **103**(4), 251-257, 2009.
- [30] Judita Cofman. *Einblicke in die Geschichte der Mathematik I (Aufgaben und Materialien für die Sekundarstufe I)*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, 1999.
- [31] Judita Cofman. *Einblicke in die Geschichte der Mathematik II (Aufgaben und Materialien für die Sekundarstufe II und das Lehramtsstudium)*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin, 2001.
- [32] Judita Cofman. *What to Solve? (Problems and Suggestions for Young Mathematicians)*, Oxford University Press, New York, 1994.
- [33] Judita Cofman. *Numbers and Shapes Revisited (More Problems for Young Mathematicians)*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [34] Gábor Czédli. *The number of rectangular islands by means of distributive lattices*, European Journal of Combinatorics **30**(1), 208-215, 2009.
- [35] Gábor Czédli, András P. Huhn, E. Tamás Schmidt. *Weakly independent subsets in lattices*, Algebra Universalis, **20**, 194-196, 1985.
- [36] Gábor Czédli, Miklós Hartmann, E. Tamás Schmidt. *CD-independent subsets in distributive lattices*, Publicationes Mathematicae Debrecen, **74**(1-2), 127-134, 2009.
- [37] Gábor Czédli, E. Tamás Schmidt. *CDW-independent subsets in distributive lattices*, Acta Sci. Math., **75**(1-2), 49-53, 2009.
- [38] Csermely Péter, Fodor István, Eva Joly, Lámfalussy Sándor (szerk.). *Szárny és Teher - Ajánlás a nevelés-oktatás rendszerének újjáépítésére és a korrupció megfékezésére*, Bölcsék Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.

- [39] Developing Quality in Mathematics Education - DQME
www.dqme2.eu
- [40] Tim Deignan. *Enquiry-Based Learning: perspectives on practice*, Teaching in Higher Education, **14**(1), 13-28, 2009.
- [41] Dózsa Mónika. *Készüljünk a kompetenciamérésre!, Szövegértés és matematika, 4. évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [42] Saber Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.
- [43] Euklidesz
matek.fazekas.hu/euklides/hun/euklides.htm
- [44] Euler 3D
www.mozaike.info.hu/Homepage/Mozaportal/MPeuler3d.php
- [45] Az Európai Parlament és a Tanács ajánlása az egész életen át tartó tanulás-hoz szükséges kulcskompetenciákról (2006/962/EK), Az Európai Unió Hivatalos Lapja 394/10. (2006.12.18.)
eur-lex.europa.eu
- [46] Scott Fallstrom, Maron I. Walter. *Using Geometer's Sketchpad to Explore, Conjecture, and Enjoy*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **14**(2), 183-194, 2009.
- [47] Efraim Fischbein. *Intuition and proof*, Mathematics Education I., Major themes in education (szerk.: Alan J. Bishop), Routledge, 78-97, 2010.
- [48] Felnőttképzési törvény, 2001. évi CI. törvény a felnőttképzésről
http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=A0100101.TV
- [49] Stephan Földes, Navin M. Singhi. *On Instantaneous Codes*, Journal of Combinatorics, Information & System Sciences **31**, 307-316, 2006.
- [50] Földes Petra (szerk.) *Élő matematika - Hogyan válhatnak hasznossá és használhatóvá a matematikai ismeretek - Beszélgetés Vancsó Ödön kutatóval*, Új Pedagógiai Szemle, 133-140, 2002.
- [51] Doug French, Charlie Stripp (editors). *'Are You Sure?' Learning about Proof*, The Mathematical Association, 1999.
- [52] Hans Freudenthal. *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1973.
- [53] Furdek Attila. *Új utak a matematika tanításában (1)*, A matematika tanítása, **15**(4), 3-6, 2007.

- [54] Furdek Attila. *Új utak a matematika tanításában (2)*, A matematika tanítása, **16**(1), 13-16, 2008.
- [55] Furdek Attila. *Új utak a matematika tanításában (3)*, A matematika tanítása, **16**(2), 9-14, 2008.
- [56] Furdek Attila. *Új utak a matematika tanításában (4)*, A matematika tanítása, **16**(3), 7-12, 2008.
- [57] Furdek Attila. *Új utak a matematika tanításában (5)*, A matematika tanítása, **16**(4), 14-20, 2008.
- [58] Anthony Gardiner. *Discovering Mathematics (The Art of Investigation)*, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [59] Geogebra.
www.geogebra.org
- [60] Geometer's Sketchpad.
www.dynamicgeometry.com
- [61] Gordon Győri János, Halmos Mária, Munkácsy Katalin, Pálfalvi Józsefné. *A matematikatanítás mestersége - Mestertanárok a matematikatanításról*, Gondolat Kiadó, Budapest, 2007.
- [62] Doug Gould, Denise A. Schmidt. *Trigonometry comes alive through digital storytelling*, Mathematics Teacher, **104**(4), 297-301, 2010.
- [63] Fatih Gürsul, Hafize Keser. *The effects of online and face to face problem based learning environments in mathematics education on student's academic achievement*, Procedia - Social and Behavioral Sciences, **1**(1), 2817-2824, 2009.
- [64] GrafEq.
www.peda.com/grafeq
- [65] Graph.
www.padowan.dk/graph
- [66] Halász Gábor. *Előszó, A kompetencia. Kihívások és értelmezések* (szerk.: Demeter Kinga), Országos Közoktatási Intézet, Budapest 2006.
- [67] G. H. Hardy. *Mathematical proof*, Mind, **38**(149), 1-25, 1928.
- [68] Amanda Hawkins, Nathelie Sinclair. *Explorations with Sketchpad in Topogeometry*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **13**(1), 71-82, 2008.
- [69] Humán Erőforrás Operatív Program - HEFOP
www.hefop.hu

- [70] Eszter K. Horváth, Zoltán Németh, Gabriella Pluhár. *The number of triangular islands on a triangular grid*, Periodica Mathematica Hungarica, **58**(1), 25-34, 2009.
- [71] Eszter K. Horváth, Gábor Horváth, Zoltán Németh, Csaba Szabó. *The number of square islands on a rectangular sea*, Acta Sci. Math., **76**(1-2), 35-48, 2010.
- [72] Eszter K. Horváth, Attila Máder, Andreja Tepavčević. *One-dimensional Czedli-type Islands*, The College Mathematical Journal, **42**(5), 374-378, 2011.
- [73] Eszter K. Horváth, Branimir Šešelja, Andreja Tepavčević: *Cardinality of height function's range in case of maximally many rectangular islands – computed by cuts*, Central European Journal of Mathematics, submitted.
- [74] Eszter K. Horváth, Branimir Šešelja, Andreja Tepavčević, *Cut approach to islands in rectangular fuzzy relations*, Fuzzy Sets and Systems **161**(24), 3114-3126, 2010.
- [75] Paul Hoffman. *A Prímber - Erdős Pál kalandjai a matematika végtelenjében*, Scholar Kiadó, Budapest, 1999.
- [76] John Horgan. *The death of proof*, Scientific American, 1993(10), 92-103, 1993.
- [77] Tarja-Riitta Hurme, Sanna Järvelä. *Students' Activity in Computer-supported Collaborative Problem Solving in Mathematics*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **10**(1), 49-73, 2005.
- [78] Art Johnson. *Preparing for Formal Proofs in Geometry*, Mathematics Teacher, **103**(4), 291-297, 2009.
- [79] Gwendolyn J. Johnson, Deisse R. Thompson, Sharon L. Senk. *Proof-Related Reasoning in High School Textbooks*, Mathematics Teacher, **103**(6), 411-417, 2010.
- [80] Katz Sándor. *Hogyan változott meg az iskola feladata? Észrevételek, javaslatok*, Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése – háttéranyag, 40-44, Bölcsék Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.
- [81] Katz Sándor. *Kompetenciák, kiemelt területek – Matematikatanítás*, Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése – háttéranyag, 68-75, Bölcsék Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.
- [82] Dr. Kántor Sándorné. *A PISA és az ahhoz hasonló típusú feladatok megoldásának tapasztalatairól*, A matematika tanítása, **16**(1), 3-12, 2008.
- [83] Bart Van Kerkhove, Jean Paul Van Bendegem. *Pi on Earth, or Mathematics in the Real World*, Erkenntnis, **68**(3), 421-435, 2008.

- [84] Dr. Kis-Tóth Lajos. *Digitális kompetenciák fejlesztése a tanártovábbképzésben*, IX. eLearning fórum
www.elearningforum.hu/data/forum9/pdf/Kis_Toht_Lajos_II.pdf
- [85] Kerettanterv.
www.nefmi.gov.hu/kozoktatas/tantervek/kerettantervek
- [86] Zoltán Kovács, Róbert Vajda. *Interactive Web Portals in Mathematics*, Teaching Mathematics and Computer Science **1**(2), 347-361, 2003.
- [87] Zoltán Kovács. *WMI2: Interactive Mathematics on the Web*, Teaching Mathematics and Computer Science **5**(2), 393-405, 2007.
- [88] Steven G. Krantz. *The Proof Is in the Pudding: The Changing Nature of Mathematical Proof*, Springer, 2010.
- [89] Laczkovich Miklós. *Sejtés és bizonyítás*, Typotex, Budapest, 1998.
- [90] Lakatos Imre. *Bizonyítások és cáfolatok*, Typotex, Budapest, 1998.
- [91] Learning and Educating through Modelling and Applications Project
<http://lema-project.hu>
- [92] Zsolt Lengvárszky. *The minimum cardinality of maximal systems of rectangular islands*, European Journal of Combinatorics, **30**(1), 216-219, 2009.
- [93] Zsolt Lengvárszky. *The size of maximal system of square islands*, European Journal of Combinatorics, **30**(4), 889-892, 2009.
- [94] Zsolt Lengvárszky. *Notes on triangular islands*, Acta Sci. Math., **75**, 369-376, 2009.
- [95] Zsolt Lengvárszky, Péter Pál Pach. *A note on rectangular islands: the continuous case*, Acta Sci. Math., **77**, 27-34, 2011.
- [96] Lénárd Ferenc. *A problémamegoldó gondolkodás*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1964.
- [97] Leanne A. Lineares, Phil R. Smith. *Proof mapping*, Mathematics Teacher, **103**(4), 259-265, 2009.
- [98] Lovász László. *Egységes tudomány-e a matematika?*, Természet Világa Matematika Különszám, 44-48, TIT, Budapest, 1998.
- [99] Paolo Mancosu. *Explanation in Mathematics*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2008.
plato.stanford.edu/entries/mathematics-explanation

- [100] Maróti Lászlóné. *Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 5. évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [101] Maróti Lászlóné, Soós Edit. *Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 8. évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [102] Maus Pál, Vancsó Ödön. *Egy európai uniós projekt a matematikaoktatás megújításáért*, A matematika tanítása, **17**(2), 3-9, 2009.
- [103] Günther Mayrhofer, Susanne Saminger, Wolfgang Windsteiger. *CreaComp: Experimental Formal Mathematics for the Classroom*, Symbolic Computation and Education, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 94-115, 2007.
- [104] Attila Máder. *Heads or Tails Gambling - What Can Be Learned about Probability?*, Teaching Mathematics and Computer Science, **6**(1), 15-41, 2008.
- [105] Máder Attila. *Néhány zavart okozó fogalmi pontatlanság a középiskolai matematikában*, A matematika tanítása, **16**(3), 13-17, 2008.
- [106] Máder Attila. „Mindenki ír, és senki nem olvas.” - *Felmérés néhány matematikai „folyóirat” olvasottságáról*, A matematika tanítása, **16**(5), 19-25, 2008.
- [107] Máder Attila. *A „specmat” 40 éve a Ságvárban I.*, A matematika tanítása, **17**(4), 13-21, 2009.
- [108] Máder Attila. *A „specmat” 40 éve a Ságvárban II.*, A matematika tanítása, **17**(5), 17-27, 2009.
- [109] Máder Attila. *A kétoldali közelítés, összeszámlálás módszerének alkalmazása az algebra, a számelmélet, a geometria, az analízis és a kombinatorika tanításában*, kézirat
- [110] Attila Máder, Róbert Vajda. *Elementary Approaches to the Teaching of the Combinatorial Problem of Rectangular Islands*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **15**(3), 267-281, 2010.
- [111] Attila Máder, Géza Makay. *The maximum number of rectangular islands*, The Teaching of Mathematics, **14**(1), 31-44, 2011.
- [112] Attila Máder. *The Use of Experimental Mathematics in the Classroom*, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life 2011.
www.model.u-szeged.hu
- [113] Joyce Malyn-Smith. *Power Users of Technology*, UN Chronicle 2004(2), 51-60.
www.un.org/wcm/content/site/chronicle
- [114] Maria Alessandra Mariotti. *Justifying and proving in the Cabri Environment*, International Journal of Computers for Mathematical Learning, **6**(3), 257-281, 2001.

- [115] NEFMI.
www.oh.gov.hu/erettsegi_vizsgak
- [116] Metropol, 2011. január 27.
- [117] Molnár István. *Some thoughts on a student survey*, Teaching Mathematics and Computer Science, **8**(1), 41-59, 2010.
- [118] Nádori Péter oldala.
www.math.bme.hu/~nandori/Virtual_lab/stat/applets
- [119] Mogens Niss. *Measuring Student Knowledge and Skills (A New Framework for Assessment)*, Investigation into Assessment in Mathematics Education, 1-104, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [120] Kimberly O. Muller. *How Technology can promote the learning of proof*, Mathematics Teacher, **103**(6), 437-441, 2010.
- [121] Nemzeti Alaptanterv. 202/2007 Kormányrendelet a Nemzeti alaptanterv kiadásáról, bevezetéséről és alkalmazásáról szóló 243/2003. kormányrendelet módosításáról
http://net.jogtar.hu/jr/gen/hjegy_doc.cgi?docid=A0700202.KOR
- [122] Nagy József. *XXI. Század és nevelés*, Osiris Kiadó, Budapest, 2000.
- [123] Kwok Chi Ng. *Replacing Face-to-Face Tutorials by Synchronous Online Technologies: Challenges and pedagogical implications*, The International Review of Research in Open and Distance Learning, **8**(1), 1-15, 2007.
- [124] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences
<http://oeis.org>
- [125] Orosz Gyula. *Számítógépes valószínűségyszámítási játékok tárgyalása Markov-láncok segítségével*, Módszertani Lapok, Matematika, **1**(1), 24-30, 1994.
- [126] Összefoglaló feladtgűjtemény matematikából, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.
- [127] P. Veres Ildikó, Víghné Tisótzki Tünde. *Készüljünk a kompetenciamérésre!, Szövegértés és matematika, 10. évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [128] P. Veres Ildikó, Veres Pál. *Készüljünk a kompetenciamérésre!, Szövegértés és matematika, 8. évfolyam*, Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [129] Péter Pál Pach, Gabriella Pluhár, András Pongrácz, Csaba Szabó. *The possible number of islands on the sea*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **375**(1), 8-13, 2011.

- [130] Palotás Zoltán. *Tanulás, tanulási környezet és a minőség összefüggései*, Oktatás-kutató és Fejlesztő Intézet, Budapest, 2009.
- [131] Pálfalvi Józsefné. *A mestertanárok elbeszélései nyomán támadt gondolataim az elmúlt fél évszázad megújítási törekvéseiről a magyar matematikatanításban*, A matematika tanítása, **15**(3), 9-16, 2007.
- [132] Henri Picciotto. *Why I use interactive whiteboards?*, Mathematics Teacher **104**(4), 250-253, 2010.
- [133] Gabriella Pluhár. *The number of brick islands by means of distributive lattices*, Acta Sci. Math., **75**, 3-11, 2010.
- [134] Poly.
www.peda.com/poly
- [135] Pólya György. *A gondolkodás iskolája*, Bibliotheca, Budapest, 1957.
- [136] Pólya György. *A problémamegoldás iskolája I.-II.*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 1968.
- [137] Pólya György. *Indukció és analógia - A matematikai gondolkodás művészete I.*, Gondolat, Budapest, 1988.
- [138] Pólya György. *A plauzibilis következtetés - A matematikai gondolkodás művészete II.*, Gondolat, Budapest, 1988.
- [139] Marc Prensky. *Digital Natives, Digital Immigrants*, On the Horizon, NCB University Press, **9**(5-6), 2001.
- [140] Prievara Tibor. *Na de ki is az a digitális bennszülött?* Tanárblog.
<http://tanarblog.hu>
- [141] Réti Mónika. *Hogyan változott meg az iskola feladata? Mennyiben terjedt el az árnyékoktatás?*, Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése – háttéranyag, 17-21, Bölcsék Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.
- [142] Jason Rosenhouse. *The Monty Hall Problem - The remarkable story of math's most contentious brain teaser*, Univesity Press, Oxford, 2009.
- [143] Statistical Indicators Benchmarking the Information Society - SIBIS GPS 2002. *Digital literacy among European youth*,
www.sibis-eu.org/statistics/data/7-61.htm
- [144] Byron Spice. *CMU's Simon reflects on how computers will continue to shape the world*, Pittsburg Post-Gazette, October 16, 2000.
- [145] Richard Rowland Skemp. *A matematikatanulás pszichológiája*, Edge 2000, Budapest, 2005.

- [146] Ságvári Bence. *Az IT generáció*, Nemzeti Ifjúsági Információs és Dokumentációs Adattár
www.mobilitas.hu/niida
- [147] Somfai Zsuzsa. *A matematikatanítás helyzete a középiskolában - A 2003-as obszervációs felmérés tapasztalatai*, A tanulás és tanítás helyzete, Oktatókutatató és Fejlesztő Intézet, 2004.
www.ofi.hu/tudastar/tantargyak-helyzete/matematikatanitas
- [148] Somfai Zsuzsa. *A matematika tantárgy helyzete a felső tagozaton és a középiskolában*, Oktatókutatató és Fejlesztő Intézet, Új Pedagógiai Szemle, 2012(12), 99-115.
www.ofi.hu/tudastar/matematika-tantargy
- [149] Soós Edit, Maróti Lászlóné. *Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 6. évfolyam* Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [150] Soós Edit, Maróti Lászlóné. *Kompetencia alapú feladatgyűjtemény matematikából 7. évfolyam* Maxim Kiadó, Szeged, 2010.
- [151] Henrik Kragh Sørensen. *What's experimental about experimental mathematics?*
www.experimentalmath.info/papers/sorenson-expm.pdf
- [152] Rudolf Straesser. *Cabri-Geometere: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning?*, International Journal of Computers for Mathematical Learning **6**(3), 319-333, 2009.
- [153] Szalay Balázs. *A matematikai kompetencia változása*, Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése – háttéranyag, 63-67, Bölcsek Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.
- [154] Szendrei János. *A matematikatanítás korszerűsítése*, Az eredményesebb matematikatanításért, Országos Pedagógiai Intézet, 1977.
- [155] Szilágyi Imréné. *Kompetenciák, kiemelt területek - A kisiskolások oktatásának legfontosabb változásai (főbb feszültségpontok)*, Szárny és Teher: A magyar oktatás helyzetének elemzése – háttéranyag, 63-67, Bölcsek Tanácsa Alapítvány, Budapest, 2009.
- [156] David Tall. *The Psychology of Advanced Mathematical Thinking*, Advanced Mathematical Thinking, 3-21, Kluwer Holland, 1991.
- [157] Totik Vilmos. *Lehetetlen*, Természet Világa Matematika Különszám, 86-93, TIT, Budapest, 1998.
- [158] Vancsó Ödön, Hodossy Attila. *Matematikai modellezés - nyitott feladatok és az értékelés*, Mérei Ferenc Fővárosi Pedagógiai és Pályaválasztási Tanácsadó Intézet,
www.fovpi.hu/data/cms65909/9_Matematikai_modellezes_Vancso_Hodossy_0925.pdf

- [159] Vancsó Ödön. *A matematikai modellezés nehézségei egy 2009-es OKTV feladat kapcsán*, A matematika tanítása, **17**(4), 30-34, 2009.
- [160] Vári Péter, Bánfi Ilona, Felvégi Emese, Krolopp Judit, Rózsa Csaba, Szalay Balázs. *A PISA 2000 vizsgálatról*, Új Pedagógiai Szemle, 2001(12), 31-44.
- [161] Vass Vilmos. *A kompetencia fogalmának értelmezése*, A kompetencia. Kihívások és értelmezések (szerk.: Demeter Kinga), Országos Köznevelési Intézet, Budapest 2006.
- [162] Zarádi Zoltán. *A hálózati tanulás és az IKT az európai oktatási rendszerekben*, Új Pedagógiai Szemle, 2003(2), 75-82.
www.ofi.hu/tudastar/zarandy-zoltan-halozati-090617
- [163] Doron Zeilberger. *Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture*, The mathematical intelligencer **16**(4), 11-14, 1993.
- [164] Raymond Louis Wilder. *The Nature of Mathematical Proof*, The Americal Mathematical Monthly, **51**, 309-323, 1944.
- [165] H. Wu. *The Role of Open-Ended Problems in Mathematics Education*, Journal of Mathematical Behavior, **13**(1), 115-128, 2004.
- [166] WebMathematics Interactive
wmi.math.u-szeged.hu
- [167] S. Wolfram. The Mathematica Book. Wolfram Media Inc. Champaign, Illinois, USA. Cambridge University Press, 1999.
www.wolfram.com
- [168] www.wolfram.com/products/player
- [169] www.demonstrations.wolfram.com