Egyszeres és kétszeres szinuszsorok és -integrálok egyenletes konvergenciája

Ph.D. értekezés tézisei

KÓRUS PÉTER

Témavezető:
DR. MÓRICZ FERENC
az MTA doktora
professzor emeritus

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Bolyai Intézet

Szeged
2012

Az értekezésben a szinuszsorok, kettős szinuszsorok, szinuszintegrálok és kettős szinuszintegrálok egyenletes konvergenciáját vizsgáljuk. Míg egyszeres sorok és integrálok esetén a jól ismert konvergencia fogalmat használjuk, addig kettős sorok és integrálok esetében a reguláris konvergencia egyenletességét vizsgáljuk. Szinuszsorok esetében S. P. Zhou, P. Zhou és D. S. Yu [13], kettős szinuszsorok esetében Žak és Šneider [12], szinuszintegrálok esetében Móricz Ferenc [10]-beli eredményeit általánosítjuk, végül kettős szinuszintegrálokra bizonyítunk az előzőekhez hasonló állításokat. A tárgyalt eredményekben fontos szerepet játszanak a monoton nemnövő és az általánosított monoton sorozatok illetve függvények.

A dolgozat a szerző [4], [5], [6], [7], [8] cikkeiben elért eredményein alapul.

1. Szinuszsorok

Előzmények

A szinuszsorok egyenletes konvergenciájának elméletében alapvető tételt Chaundy és Jolliffe 1916-ban igazolta.

1.1. Tétel. [1] *Ha a* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ := [0,\infty)$ *monoton nemnövő, 0-hoz tartó sorozat, akkor a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx \tag{1}$$

szinuszsor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens x*-ben, ha*

$$kc_k \to 0, \quad ha \quad k \to \infty. \tag{2}$$

Ezen tételt számos szerző általánosította, S. P. Zhou, P. Zhou és D. S. Yu 2006-ban bizonyította be az akkori legáltalánosabb kiterjesztést, az MVBVS általánosított monoton sorozatosztály segítségével: $\{c_k\} \in$ MVBVS (*Mean Value Bounded Variation Sequences*), ha léteznek $C, \lambda \geq 2$ konstansok, melyekre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| := \sum_{k=n}^{2n-1} |c_k - c_{k+1}| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_k|$$

fennáll minden $n \geq 1$ egész esetén.

1.2. Tétel. [13] *Legyen* $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* MVBVS*-beli.*
(i) *Ha* (2) *teljesül, akkor* (1) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1) *konvergenciája egyenletes* x*-ben, akkor* (2) *fennáll.*

Új eredmények

Célunk az 1.2. Tétel kiterjesztése MVBVS-nél bővebb sorozatosztály(ok) definiálásával.

Definíció. A $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatot *Supremum Bounded Variation Sequence*-nek nevezzük, jelben $\{c_k\} \in$ SBVS, ha léteznek olyan C és $\lambda \geq 1$ konstans számok, melyek csak $\{c_k\}$-tól függnek, és

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq [n/\lambda]} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.$$

Megjegyzés. SBVS-hez hasonló osztályt definiáltak [3]-ban, a definícióbeli sup helyett max-ot használva.

Definíció. A $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ sorozatot *Supremum Bounded Variation Sequence of 2nd type*-nak nevezzük, jelben $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$, ha létezik olyan C konstans és végtelenbe tartó $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty)$ sorozat, melyek csak $\{c_k\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta c_k| \leq \frac{C}{n} \sup_{m \geq b(n)} \sum_{k=m}^{2m} |c_k|.$$

1.3. Tétel. [4] $\mathrm{SBVS}_2 \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{SBVS} \underset{\neq}{\supseteq} \mathrm{MVBVS}$.

1.4. Tétel. [4] *Legyen* $\{c_k\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* SBVS_2*-beli.*
(i) *Ha* (2) *fennáll, akkor* (1) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (1) *konvergenciája egyenletes* x*-ben, akkor* (2) *fennáll.*

1.5. Következmény. [4] *Ha a* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SBVS_2*-beli, akkor* (2) *szükséges és elegendő feltétel az* (1) *sor* x*-ben vett egyenletes konvergenciájához.*

1.6. Állítás. [4] *Bármely olyan* SBVS_2*-beli sorozatra, mely nem* SBVS*-beli,* (2) *fennáll. Azaz az ilyen együtthatójú szinuszsorok egyenletesen konvergensek.*

Segédállítások

Az 1.4. Tétel első (elegendőségi) részének bizonyításából érdemes kiemelni az alábbi lemmát, mely diadikus blokkok segítségével látható be.

1.7. Lemma. *Ha* $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}_2$ *és* (2) *fennáll, akkor*

$$n \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta c_k| \to 0, \ \text{ha } n \to \infty.$$

Az 1.4. Tétel második (szükségességi) része pedig a következőn lemmán alapul, melynek bizonyítása Abel-átrendezéssel történt.

1.8. Lemma. *Legyen* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ SBVS_2*-beli. Ekkor*

$$nc_n \le C \sup_{m \ge b(n)} \sum_{k=m}^{2m} c_k + \sum_{k=n}^{2n} c_k,$$

ahol C *és* $b(n)$ *az* SBVS_2 *definícióbeli,* $\{c_k\}$*-hoz tartozó konstans ill. sorozat.*

Formális derivált és integrál

Tekintsük a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^r c_k \sin kx \tag{3}$$

alakú szinuszsort, mely pozitív páros r esetén (1) r-szeres formális deriváltja, negatív páros r esetén (1) r-szeres formális integrálja.

1.9. Tétel. [5] *Ha* $\{c_k\}$ *sorozat* MVBVS*-beli, akkor* $\{d_k = k^r c_k\}$ *szintén* MVBVS*-beli tetszőleges rögzített* r *egész szám esetén.*

1.10. Következmény. [5] *Legyen* $\{c_k\} \in \mathrm{MVBVS}$ *és* r *páros szám.*
(i) *Ha* $k^{r+1} c_k \to 0$*, akkor* (3) *egyenletesen konvergens* x*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_k\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (3) *egyenletesen konvergens* x*-ben, akkor* $k^{r+1} c_k \to 0$.

1.11. Tétel. [5] *Ha* $\{c_k\}$ *sorozat* SBVS*-beli, akkor* $\{d_k = k^r c_k\}$ *szintén* SBVS*-beli tetszőleges rögzített* r *pozitív egész szám esetén.*

1.12. Következmény. [5] *Ha* $\{c_k\} \in \mathrm{SBVS}$ *és* r *pozitív páros szám, akkor* az 1.10. *Következmény* (i) *és* (ii) *állításai fennállnak.*

2. Kettős szinuszsorok

A reguláris konvergencia

Legyen $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, és tekintsük a

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{jk} \sin jx \sin ky \tag{4}$$

kettős szinuszsort. Ezen sor regulárisan konvergens adott (x, y) esetén, ha a

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \sin jx \sin ky$$

téglalap alakú összegek véges számhoz konvergálnak, amikor m és n egymástól függetlenül a végtelenbe tart, valamint a

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_{jn} \sin jx \sin ny, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{mk} \sin mx \sin ky, \quad m = 1, 2, \ldots$$

sor- ill. oszlopösszegek is konvergensek. Az iménti definícióval ekvivalens a következő: bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan pozitív $m_0 = m_0(\varepsilon)$ küszöbszám, melyre

$$\left| \sum_{j=m}^{M} \sum_{k=n}^{N} c_{jk} \sin jx \sin ky \right| < \varepsilon,$$

ha $m + n > m_0$, $1 \le m \le M$ és $1 \le n \le N$, lásd [9].

Nemnegatív, monoton nemnövő együtthatójú kettős szinuszsorokra Žak és Šneider bizonyította az 1.1. Tétel kétváltozós megfelelőjét. A nemnegatív valós $\{c_{jk}\}$ kettős sorozatot monoton nemnövőnek nevezzük, ha

$$\Delta_{10} c_{jk} \ge 0, \Delta_{01} c_{jk} \ge 0, \Delta_{11} c_{jk} \ge 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots,$$

ahol

$$\Delta_{10} c_{jk} := c_{jk} - c_{j+1,k}, \qquad \Delta_{01} c_{jk} := c_{jk} - c_{j,k+1},$$
$$\Delta_{11} c_{jk} := \Delta_{10}(\Delta_{01} c_{jk}) = \Delta_{01}(\Delta_{10} c_{jk}) = c_{jk} - c_{j+1,k} - c_{j,k+1} + c_{j+1,k+1}.$$

2.1. Tétel. [12] *Ha* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{R}_+$ *monoton nemnövő, akkor* (4) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban akkor és csak akkor, ha*

$$jkc_{jk} \to 0, \quad ha \quad j + k \to \infty. \tag{5}$$

Új eredmények

A 2.1. Tétel kiterjesztését általánosított monoton (kettős) sorozatosztályok segítségével tesszük meg.

Definíció. A $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozatot MVBVDS-belinek (*Mean Value Bounded Variation Double Sequences*) nevezzük, ha léteznek C és $\lambda \geq 2$ konstans számok, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda, n \geq 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \leq \frac{C}{n} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{mk}|, \quad m \geq 1, n \geq \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sum_{j=[m/\lambda]}^{[\lambda m]} \sum_{k=[n/\lambda]}^{[\lambda n]} |c_{jk}|, \quad m, n \geq \lambda.$$

2.2. Tétel. [7] *Legyen* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *kettős sorozat* MVBVDS*-beli.*
(i) *Ha* (5) *teljesül, akkor* (4) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban.*
(ii) *Megfordítva, ha* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (4) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x, y)*-ban, akkor* (5) *fennáll.*

Ezen kívül [7]-ben azt is megmutattuk, hogy az MVBVDS osztály tartalmazza az ott definiált NBVDS osztályt, mely osztály pedig tartalmazza a nemnegatív, monoton nemnövő kettős sorozatokat. Később, [6]-ban, MVBVDS-t tovább általánosítottuk, mely által megkaptuk a 2.2. Tétel eddigi legbővebb kiterjesztését.

Definíció. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozat SBVDS_1-beli (*Supremum Bounded Variation Double Sequences of 1st type*), ha léteznek olyan C és $\lambda \geq 2$ konstansok illetve $\{b_1(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_2(l)\}_{l=1}^{\infty}$, $\{b_3(l)\}_{l=1}^{\infty}$ végtelenbe tartó sorozatok, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \leq \frac{C}{m} \max_{b_1(m) \leq M \leq \lambda b_1(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \geq \lambda, n \geq 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \leq \frac{C}{n} \max_{b_2(n) \leq N \leq \lambda b_2(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \geq 1, n \geq \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \leq \frac{C}{mn} \sup_{M+N \geq b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m, n \geq \lambda.$$

Definíció. $\{c_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ kettős sorozat SBVDS_2-beli (*Supremum Bounded Variation Double Sequences of 2nd type*), ha léteznek olyan C, $\lambda \ge 2$ konstansok és $\{b(l)\}_{l=1}^{\infty}$ végtelenbe tartó sorozat, melyek csak $\{c_{jk}\}$-tól függnek, és amelyekre

$$\sum_{j=m}^{2m-1} |\Delta_{10} c_{jn}| \le \frac{C}{m} \sup_{M \ge b(m)} \sum_{j=M}^{2M} |c_{jn}|, \quad m \ge \lambda,\ n \ge 1,$$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{01} c_{mk}| \le \frac{C}{n} \sup_{N \ge b(n)} \sum_{k=N}^{2N} |c_{mk}|, \quad m \ge 1,\ n \ge \lambda,$$

$$\sum_{j=m}^{2m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} |\Delta_{11} c_{jk}| \le \frac{C}{mn} \sup_{M+N \ge b(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} |c_{jk}|, \quad m,n \ge \lambda. \tag{6}$$

2.3. Tétel. [6] $\mathrm{SBVDS}_2 \supsetneqq \mathrm{SBVDS}_1 \supsetneqq \mathrm{MVBVDS}$.

2.4. Tétel. [6] (i) *Ha a* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *sorozat* SBVDS_2*-beli, valamint* (5) *teljesül, akkor* (4) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x,y)*-ban.*
(ii) *Megfordítva, ha a* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ *sorozat* SVBVDS_1*-beli és* (4) *reguláris konvergenciája egyenletes* (x,y)*-ban, akkor* (5) *fennáll.*

Segédállítások

A 2.4. Tétel elegendőségi részének bizonyítása a következő lemma segítségével történt, mely kettős diadikus blokkok segítségével látható be.

2.5. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $\{c_{jk}\} \subset \mathbb{C}$ *teljesíti az* (5) *és* (6) *feltételeket. Ekkor*

$$mn \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} c_{jk}| \to 0, \quad mn \sum_{j=m}^{\infty} \sup_{k \ge n} |\Delta_{10} c_{jk}| \to 0, \quad mn \sum_{k=n}^{\infty} \sup_{j \ge m} |\Delta_{01} c_{jk}| \to 0,$$

ha $m+n \to \infty$ *és* $m,n \ge \lambda$*.*

A 2.4. Tétel szükségességi részéhez pedig az alábbi, a kettős Abel-átrendezéssel bizonyított lemmát érdemes kiemelni.

2.6. Lemma. *Legyen* $\{c_{jk}\} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ SBVDS_1*-beli a* C *és* $\lambda \ge 2$ *konstansokkal, valamint a* $\{b_1(l)\}$, $\{b_2(l)\}$, $\{b_3(l)\}$ *sorozatokkal. Ekkor*

$$mnc_{mn} \le C \sup_{M+N \ge b_3(m+n)} \sum_{j=M}^{2M} \sum_{k=N}^{2N} c_{jk} + C \sum_{j=b_1(m)}^{2\lambda b_1(m)} \sum_{k=n}^{2n} c_{jk}$$

$$+C\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=b_2(n)}^{2\lambda b_2(n)} c_{jk} + 2\sum_{j=m}^{2m}\sum_{k=n}^{2n} c_{jk}, \quad \text{ha } m,n \ge \lambda.$$

Hasonló állításokat fogalmaztunk meg az MVBVDS osztály esetében is [7]-ben.

3. Szinuszintegrálok

Előzmények

Legyen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény, ahol $\mathbb{R}_+ := (0,\infty)$. Az

$$\int_0^\infty f(x)\sin tx\,dx \tag{7}$$

alakú szinuszintegrálok t-ben vett ($t \in \mathbb{R}$) egyenletes konvergenciájára vonatkozóan Móricz Ferenc bizonyította a következőt.

3.1. Tétel. [10] *Legyen $f(x) : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ monoton nemnövő, melyre*

$$xf(x) \in L^1_{\text{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+). \tag{8}$$

Ekkor a (7) *szinuszintegrál akkor és csak akkor egyenletesen konvergens t-ben, ha*

$$xf(x) \to 0, \quad \text{ha} \quad x \to \infty. \tag{9}$$

Továbbá bevezette az $\mathbb{R}_+$-on értelmezett, nemnegatív, lokálisan abszolút folytonos, monoton nemcsökkenő függvények osztályánál bővebb MVBVF$(\mathbb{R}_+)$ osztályt, és részben általánosította az előző tételt.

Definíció. Az $f(x) \in \text{AC}_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvényt MVBVF$(\mathbb{R}_+)$-belinek (*Mean Value Bounded Variation Function*-nek) nevezzük, ha léteznek a C, $A > 0$ és $\lambda \ge 2$ konstansok, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} |f'(x)|\,dx \le \frac{C}{a}\int_{a/\lambda}^{\lambda a} |f(x)|\,dx, \quad a > A.$$

3.2. Tétel. [10] *Tegyük fel, hogy $f(x) \in$* MVBVF$(\mathbb{R}_+)$*, és* (8) *fennáll.*
(i) *Ha $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ és* (9) *teljesül, akkor a* (7) *integrál egyenletesen konvergens t-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és* (7) *konvergenciája egyenletes t-ben, akkor* (9) *fennáll.*

Móricz tételének kiterjesztése

Az SBVS és SBVS_2 sorozatosztályok mintájára definiált függvényosztályok segítségével általánosítunk.

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvényt $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-belinek (*Supremum Bounded Variation Function*-nek) nevezzük, ha léteznek a $C,\ A > 0$ és $\lambda \geq 2$ konstansok, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq a/\lambda} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A.$$

Megjegyzés. $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-hoz hasonló osztályt definiáltak [2]-ben.

Definíció. Az $f(x) \in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ függvény $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$-beli (*Supremum Bounded Variation Function of 2nd type*), ha léteznek a $C,\ A > 0$ konstansok és a $B(x) \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ végtelenbe tartó függvény, melyek csak f-től függnek, és amelyekre

$$\int_a^{2a} \left|f'(x)\right| dx \leq \frac{C}{a} \sup_{b \geq B(a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx, \quad a > A.$$

3.3. Tétel. [5] $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+) \supsetneqq \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+) \supsetneqq \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Továbbá, ha $f(x)$ függvény $\mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$-beli, de nem $\mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$-beli, akkor* (9) *fennáll.*

3.4. Tétel. [5] *Tegyük fel, hogy $f(x) \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ és* (8) *fennáll.*
(i) *Ha $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ és* (9) *teljesül, akkor a* (7) *integrál egyenletesen konvergens t-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ és* (7) *konvergenciája egyenletes t-ben, akkor* (9) *fennáll.*

Megjegyzés. A 3.4. Tétel elegendőségi része azon múlik, hogy ha $f(x) \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ és (9) fennáll, akkor

$$a \int_a^{\infty} \left|f'(x)\right| dx \to 0, \quad \text{ha} \quad a \to \infty.$$

A tétel szükségességi része pedig azon, hogy bármely $f(x) \in \mathrm{SBVF}_2(\mathbb{R}_+)$ esetén

$$a\left|f(a)\right| \leq \int_a^{2a} \left|f(x)\right| dx + C \sup_{b \geq B(a)} \int_b^{2b} \left|f(x)\right| dx.$$

Formális derivált és integrál

Ebben a részben jellemzést adunk az

$$\int_0^\infty x^r f(x) \sin tx \, dx \tag{10}$$

szinuszintegrál egyenletes konvergenciájára, mely pozitív páros r esetén (7) r-szeres t-szerinti formális deriváltja, negatív páros r esetén (7) r-szeres t-szerinti formális integrálja.

3.5. Tétel. [5] *Legyen* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Ekkor tetszőleges rögzített* r *egész szám esetén* $g_r(x) = x^r f(x)$ *szintén* $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$*-beli.*

3.6. Következmény. [5] *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+)$, (8) *fennáll és* r *pozitív páros szám.*
(i) *Ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ *és* $x^{r+1} f(x) \to 0$, *ha* $x \to \infty$, *akkor a* (10) *szinuszintegrál egyenletesen konvergens* t*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *és a* (10) *integrál konvergenciája egyenletes* t*-ben, akkor* $x^{r+1} f(x) \to 0$, *ha* $x \to \infty$.
Az iménti állítások igazak maradnak akkor is, ha azt tesszük fel, hogy r *negatív páros szám és* $x^{r+1} f(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+)$.

3.7. Tétel. [5] *Tegyük fel, hogy* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$. *Ekkor tetszőleges rögzített* r *pozitív egész szám esetén* $g_r(x) = x^r f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$.

3.8. Következmény. [5] *Ha* $f(x) \in \mathrm{SBVF}(\mathbb{R}_+)$, (8) *fennáll és* r *pozitív páros szám, akkor* a 3.6. *Következmény* (i) *és* (ii) *állításai fennállnak.*

4. Kettős szinuszintegrálok

Eredmények

Tekintsük az

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \sin ux \sin vy \, dx \, dy, \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2 \tag{11}$$

alakú kettős szinuszintegrálokat, ahol $f(x,y):\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{C}$ Lebesgue-mérhető függvény, továbbá

$$xyf(x,y)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\overline{\mathbb{R}}_+^2). \tag{12}$$

Azt mondjuk, hogy a (11) integrál regulárisan konvergens adott (u,v) esetén, ha

$$\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\sin ux\sin vy\,dx\,dy\to 0,\qquad \text{ha } a_1+a_2\to\infty,\, b_1>a_1\ge 0, b_2>a_2\ge 0.$$

Definíció. Az $f(x,y)\in \mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$ függvényt $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+^2)$-belinek nevezzük, ha léteznek olyan, csak f-től függő, C és $\lambda\ge 2$ konstansok, amelyekre

$$\int_{a_1}^{2a_1}\left|f_x(x,y)\right|dx\le\frac{C}{a_1}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\left|f(x,y)\right|dx,\quad a_1,y>0,$$

$$\int_{a_2}^{2a_2}\left|f_y(x,y)\right|dy\le\frac{C}{a_2}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2}\left|f(x,y)\right|dy,\quad x,a_2>0,$$

$$\int_{a_1}^{2a_1}\int_{a_2}^{2a_2}\left|f_{xy}(x,y)\right|dx\,dy\le\frac{C}{a_1a_2}\int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1}\int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2}\left|f(x,y)\right|dx\,dy,\quad a_1,a_2>0.$$

4.1. Tétel. *Legyen* $f\in\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+^2)$ *olyan függvény, amelyre* (12) *fennáll.*
(i) *Ha* $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{C}$ *és*

$$xyf(x,y)\to 0,\qquad \textit{ha}\quad x+y\to\infty, \tag{13}$$

akkor a (11) *integrál reguláris konvergenciája egyenletes* $(u,v)\in\mathbb{R}_+^2$*-ben.*
(ii) *Megfordítva, ha* $f:\mathbb{R}_+^2\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *és* (11) *reguláris konvergenciája egyenletes* $(u,v)\in\mathbb{R}_+^2$*-ben, akkor* (13) *fennáll.*

Továbbá definiáltuk az $\mathrm{NBVF}(\mathbb{R}_+^2)$ osztályt is, melyről megmutattuk, hogy része $\mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}_+^2)$-nek, és tartalmazza az $\mathbb{R}_+^2$-en értelmezett, nemnegatív, lokálisan abszolút folytonos, monoton nemcsökkenő függvényeket.

4.2. Következmény. *Ha* $f:\mathbb{R}_+^2\to\overline{\mathbb{R}}_+$ *monoton nemnövő és* $f\in\mathrm{AC}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+^2)$*, akkor* (13) *szükséges és elegendő feltétele annak, hogy* (11) *egyenletesen konvergens legyen* (u,v)*-ben.*

Megjegyzés. A 4.1. Tétel (i) része és a 4.2. Következmény egyaránt kis eltéréssel található meg [8]-ban, mivel az ott bebizonyított tételek tartalmaznak egy olyan plusz feltételt, mely elhagyható, amint azt a disszertációban bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A [8] cikkel egyidőben Móricz [11]-ben a 4.2. Következményhez hasonló eredményt kapott az $\mathbb{R}^2_+$-en értelmezett, nemnegatív, monoton nemcsökkenő (nem feltétlenül lokálisan abszolút folytonos) függvényekre.

Segédállítások

A 4.1. Tétel elegendőségi ill. szükségességi részének bizonyítása az alábbi lemmák segítségével történt.

4.3. Lemma. *Legyen* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{C}$, $f \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ *olyan függvény, mely teljesíti* (12)*-t. Ha* (13) *fennáll, akkor*

$$a_1 y \int_{a_1}^{\infty} \left|f_x(x,y)\right| dx \to 0, \quad \text{ha} \quad a_1 + y \to \infty,\ a_1, y > 0,$$

$$x a_2 \int_{a_2}^{\infty} \left|f_y(x,y)\right| dy \to 0, \quad \text{ha} \quad x + a_2 \to \infty,\ x, a_2 > 0,$$

$$a_1 a_2 \int_{a_1}^{\infty} \int_{a_2}^{\infty} \left|f_{xy}(x,y)\right| dx\, dy \to 0, \quad \text{ha} \quad a_1 + a_2 \to \infty,\ a_1, a_2 > 0.$$

4.4. Lemma. *Tegyük fel, hogy* $f : \mathbb{R}^2_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f \in \mathrm{MVBVF}(\mathbb{R}^2_+)$ *a* C, λ *konstansokkal. Ekkor tetszőleges* $a_1, a_2 > 0$ *esetén*

$$a_1 a_2 f(a_1, a_2) \le (3C+1) \int_{a_1/\lambda}^{\lambda a_1} \int_{a_2/\lambda}^{\lambda a_2} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Hivatkozások

[1] T. W. CHAUNDY és A. E. JOLLIFFE, The uniform convergence of a certain class of trigonometric series, *Proc. London Math. Soc.*, **15** (1916), 214-216.

[2] M. DYACHENKO, E. LIFLYAND és S. TIKHONOV, Uniform convergence and integrability of Fourier integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **372** (2010), 328-338.

[3] M. DYACHENKO és S. TIKHONOV, Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria, *Studia Math.*, **193** (2009), 285-306.

[4] P. KÓRUS, Remarks on the uniform and L^1-convergence of trigonometric series, *Acta Math. Hungar.*, **128 (4)** (2010), 369-380.

[5] P. KÓRUS, On the uniform convergence of special sine integrals, *Acta Math. Hungar.*, **133 (1)** (2011), 82-91.

[6] P. KÓRUS, On the uniform convergence of double sine series with generalized monotone coefficients, *Periodica Math. Hungar.*, **63 (2)** (2011), 205-214.

[7] P. KÓRUS és F. MÓRICZ, On the uniform convergence of double sine series, *Studia Math.*, **193** (2009), 79-97.

[8] P. KÓRUS és F. MÓRICZ, Generalizations to monotonicity for uniform convergence of double sine integrals over $\overline{\mathbb{R}}^2_+$, *Studia Math.*, **201** (2010), 287-304.

[9] F. MÓRICZ, Some remarks on the notion of regular convergence of multiple series, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **41** (1983), 161-168.

[10] F. MÓRICZ, On the uniform convergence of sine integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **354** (2009), 213-219.

[11] F. MÓRICZ, On the uniform convergence of double sine integrals over $\overline{\mathbb{R}}^2_+$, *Analysis (München)*, **31** (2011), 191-204.

[12] I. E. ŽAK és A. A. ŠNEIDER, Conditions for uniform convergence of double sine series (orosz), *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Mat.*, **4** (1966), 44-52.

[13] S. P. ZHOU, P. ZHOU és D. S. YU, Ultimate generalization to monotonicity for uniform convergence of trigonometric series,
online: http://arxiv.org/abs/math/0611805v1.

Nyilatkozat

Alulírott, Dr. Móricz Ferenc professzor emeritus nyilatkozom arról, hogy az „*On the uniform convergence of double sine series*" című cikk Kórus Péterrel közös munkánk, melyben a jelölt saját munkája hozzávetőlegesen 50%.

Továbbá nyilatkozom arról is, hogy a „*Generalizations to monotonicity for uniform convergence of double sine integrals over* $\overline{\mathbb{R}}^2_+$" című cikk Kórus Péterrel közös munkánk, melyben a jelölt munkája hozzávetőlegesen 50%.

Szeged, 2012. január 31.

....
Dr. Móricz Ferenc
professzor emeritus

Nyilatkozat

Alulírott, Dr. Móricz Ferenc professzor emeritus nyilatkozom arról, hogy az „*On the uniform convergence of double sine series*" és a „*Generalizations to monotonicity for uniform convergence of double sine integrals over* $\overline{\mathbb{R}}^2_+$" című cikkeket sem eddig, sem ezután nem használom fel doktori fokozat megszerzésére.

Szeged, 2012. január 31.

....
Dr. Móricz Ferenc
professzor emeritus