Tic-Tac-Toe, Amőba és egyéb állatok

Doktori (Ph.D.) értekezés tézisei

Győrffy Lajos

Témavezető: Dr. Pluhár András
egyetemi docens

Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola

Bolyai Intézet

Szegedi Tudományegyetem, Természettudományi és Informatikai Kar

Szeged, 2019

1. Bevezetés

Az értekezésben a hipergráf játékokra alkalmazott párosítási stratégiákkal és azok általánosításaival foglalkozunk. **Hipergráf játékoknak** nevezzük azon játékokat, melyeket egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfon játszik I és II, akik felváltva választják a tábla egy-egy elemét. A tábla mezői a hipergráf V csúcsai, míg az E élek a táblán lévő nyerőhalmazok. A *normál* változatban mindkettőjük célja elsőként megszerezni a nyerőhalmazok egyikét. A játék lehet kezdő nyerő vagy döntetlen, de a második játékos nem nyerhet optimális stratégia esetén. Ezt a John Nash által egy speciális játékra, majd Alfred Hales és Robert Jewett által általánosan is megalkotott *stratégialopás* gondolatmenete bizonyítja, lásd [8].

Mivel a normál játékban a második játékos nem nyerhet, bevezetjük a **Maker-Breaker** (M-B) játékokat. A kezdő Maker célja az előbbihez hasonló, a második Breaker azonban kizárólag Makert akadályozza. A Maker-Breaker játék vagy Maker vagy Breaker nyerő. A M-B verzió mellett minden hipergráf játékhoz definiálhatunk *felgyorsított* vagy *elfogult* játékot is, melyekben a játékosok több elemet választanak egy lépésben. A Beck József által bevezetett **Picker-Chooser** (P-C) és **Chooser-Picker** verziókban Picker kiválaszt két új elemet, melyekből Chooser egyet választ magának, a másik pedig Pickerhez kerül. A C-P verzióban Chooser épít, Picker rombol, míg a P-C verzióban fordítva.

1.1 Definíció *A k-amőba hipergráfja $\mathcal{H}_k$, melynek csúcsai a végtelen négyzetrács négyzetei, élei pedig minden k darab négyzet egy sorban egymás után, vízszintesen, függőlegesen vagy átlósan.*

A $\mathcal{H}_k$ hipergráfon játszott normál (vagy M-B) játékot hívjuk k-amőbának. Ismert, hogy a k-amőbát $k \leq 4$ esetben a kezdő nyeri, $k \geq 8$ esetben pedig döntetlen. A $k = 5$ esetben 19×19-es résztáblán bizonyítottan nyer a kezdő, ami nem feltétlenül igaz a végtelen táblán játszott normál játékra, noha ott is ez a sejtés. Hasonlóan nyitott a $k = 6, 7$ eset, melyekben döntetlen a sejtés.

Egy **stratégián** olyan függvényt értünk, mely a korábbi lépések alapján megmondja a játékos következő lépését. Az értekezés fő témája a párosítási stratégia, de megemlítjük még a potenciálokon alapuló Erdős-Selfridge potenciálfüggvényen alapuló stratégiát, a résztáblákra bontás módszerét és a teljes esetvizsgálatot is, mely utóbbi minden játék eredményét megadná, azonban már nagyon kis játékok esetére is reménytelen az összes esetet megvizsgálni.

2. Párosítások

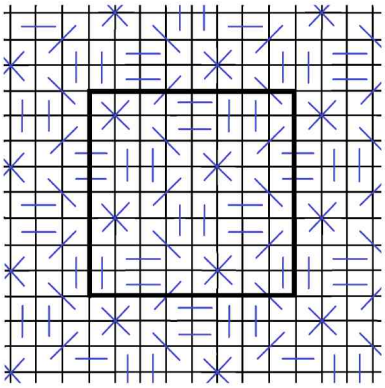
A párosítási stratégiák általános menete röviden, hogy Breaker előre bepárosítja a tábla elemeit, és amennyiben Maker választ egy elemet, Breaker lépésében annak a párját választja. A Chooser-Picker esetben Picker Breakerként szintén alkalmazhatja a párosításokat, hiszen folyamatosan a párokat felkínálva Choosernek azok egyik elemét meg tudja szerezni magának, így nyeri a játékot.

2.1 Definíció *Adott egy $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf, ahol $V = V(\mathcal{H})$ és $E = E(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{S : S \subseteq V\}$ rendre a csúcsok és élek. A $\rho : X \to Y$ bijekciót, ahol $X, Y \subset V(\mathcal{H})$ és $X \cap Y = \emptyset$* ***párosítás****nak nevezzük a $\mathcal{H}$ hipergráfon.*

2.2 Definíció *Egy $(x, \rho(x))$ pár* ***blokkol*** *egy $A \in E(\mathcal{H})$ élt, ha A a pár mindkét elemét tartalmazza. Ha a ρ párosítás párjai blokkolják a hipergráf összes élét, azt mondjuk, hogy ρ egy* ***jó párosítás*** *a $\mathcal{H}$ hipergráfon.*

A k-amőba játékra ismert, hogy Breaker párosításokkal tud nyerni a $k \geq 9$ esetekben, kisebb k-ra azonban nem létezik párosítás.

2.3 Tétel (Hales-Jewett) *[6] Breakernek létezik nyerő párosítási stratégiája a 9-amőbára.*



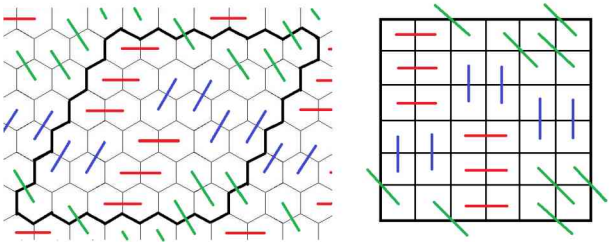
1. ábra. Hales-Jewett párosítás a 9-amőbára

Egy $\mathcal{H}$ hipergráfra legyen $d_2(\mathcal{H})$ (röviden d_2) a maximális közös fok (co-degree). Ezt az értéket szemléletesen nevezhetjük a pár **blokkolási erejének** is, mely a k-amőba esetén legfeljebb $k-1$.

2.4 Állítás *[2] Ha létezik egy ρ jó párosítás a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfra, akkor $d_2|X|/2 \geq |\mathcal{G}|$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kell minden $X \subset V$ esetben, ahol $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$.*

2.5 Definíció *A három irányú k-amőba hipergráfja h_k, melynek csúcsai a végtelen négyzetrács négyzetei, élei pedig k darab négyzet egy sorban egymás az (1,0), (0,1) és (1,1) irányvektorok mentén.*

Ha $k \leq 4$, Maker itt is nyer. Ha $k \geq 7$, Breaker nyer párosítással. Az 5 és 6 eset máig megoldatlan problémák. A 2.4 állítás szerint itt a $k = 7$ az éles eset melyre egy jó párosítás a 2 ábrán látható. Hogy összesen hány ilyen jó párosítás létezik szintén nyitott kérdés volt.



2. ábra. Jó párosítás a 7-amőbára

Csak a függőleges és vízszintes irányokat tekintve Maker nyeri a játékot, ha $k \leq 4$, Breaker nyer párosítással, ha $k \geq 5$. Egy irányban ez a küszöb a 2 és 3 értékek között jelenik meg.

2.6 Definíció *A két irányú k-amőba hipergráfját P_k-val, az egy irányú játékét pedig E_k-val jelöljük. Előbbinél az (1,0) és (0,1), utóbbinál csak az (1,0) irányvektorok menti k-asokat tekintjük nyerőhalmazoknak.*

3. Általánosított párosítások

Hipergráfok kettő-színezésén a csúcsok két színnel történő színezését értjük. Egy színezés **blokkol** egy élt, ha az élben mindkét szín megta-

lálható. Egy színezés **jó színezés**, ha a hipergráf minden élét blokkolja.

Mivel a színezések felfoghatók a csúcshalmazok párosításaként is, hasonlóan a párosítások pedig lépésenkénti színezésként, a két fogalom között egy átmenetet definiáltunk a [3] cikkben. Ezen cikk eredményeire épül ez a fejezet.

3.1 Definíció *Nevezzük* ***t-sütinek*** *a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráf egy pontosan t csúcsot tartalmazó részhalmazát, mely magában foglalja a részhalmaz elemeinek egy p, q két részre osztását is, ahol $t \in \mathbb{N}, t \geq 2$ és $1 \leq p, q \in \mathbb{N} < t, p + q = t$. Egy süti* ***kiegyensúlyozott****, ha a két részben egyenlő számú elem szerepel, vagyis $p = q$.*

3.2 Definíció *Egy hipergráf* ***t-elhelyezésén*** *a sütik egy nem átfedő elhelyezését értjük a $\mathcal{H}$ hipergráf csúcsaira, ahol minden süti mérete* ***maximum*** *t. Ha páros t esetén csak kiegyensúlyozott t-sütiket tartalmaz, akkor* ***p-párosításról*** *beszélünk, ahol $p = t/2$.*

3.3 Definíció *Egy t-süti* ***blokkol*** *egy $A \in E$ nyerőhalmazt, ha a süti mindkét részének van nemüres metszete A-val. Egy $\mathcal{T}$ t-elhelyezés* ***jó t-elhelyezés*** *a $\mathcal{H}$ hipergráfon, ha $\mathcal{H}$ összes élét blokkolja $\mathcal{T}$ valamely sütije. Egy $A \in E$ él* ***blokkolatlan él****, ha $\mathcal{T}$ egyik sütije sem blokkolja.*

Ha létezik jó t-elhelyezés a $\mathcal{H}$ hipergráfra, akkor létezik jó $(t+1)$-elhelyezés is, vagyis a süti-elhelyezés monoton. Egy adott hipergráf esetén egy adott t-süti legfeljebb d_t nyerőhalmazt tud blokkolni, nevezzük ezt a számot a süti **blokkolási erejének**. Az adott t méretű sütik közül a legnagyobb blokkolási erővel rendelkezőket a **legjobb** t-sütiknek nevezzük.

3.4 Állítás *Legyen egy jó t-elhelyezésünk a $\mathcal{H} = (V, E)$ hipergráfra úgy, hogy $d_2/2 \leq d_3/3 \leq \cdots \leq d_t/t$. Ekkor $|X|d_t/t \geq |\mathcal{G}|$ minden $X \subset V$-re, ahol $\mathcal{G} = \{A : A \in E, A \subset X\}$.*

A továbbiakban a k-amőbára vizsgáljuk a sütik erejét. A 3 táblázat a $t \leq 8$ esetekre tartalmazza a maximális blokkolási erőt.

t	2	3	4	5	6	7	8
d_t	$k-1$	$2k-2$	$4k-4$	$5k-4$	$7k-6$	$9k-8$	$11k-9$
$\frac{d_t}{t}$	$\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}k-\frac{2}{3}$	$k-1$	$k-\frac{4}{5}$	$\frac{7}{6}k-1$	$\frac{9}{7}k-\frac{8}{7}$	$\frac{11}{8}k-\frac{9}{8}$
$k \geq$	9	7	5	4.8	4.29	4	3.73

3.1. Eredmények az amőbára

3.5 Észrevétel *Nem létezik jó színezés $\mathcal{H}_2$-re a végtelen táblán.*

3.6 Tétel *Létezik pontosan egy jó színezés $\mathcal{H}_3$ hipergráfra.*

3.7 Tétel *Nem létezik jó t-elhelyezés $\mathcal{H}_4$-re, ha t=7 vagy 8.*

3.8 Tétel *Létezik jó 8-elhelyezés az 5-amőbára.*

3.9 Tétel *Létezik jó 4-elhelyezés a 7-amőbára.*

3.10 Tétel *Létezik jó 6-elhelyezés a $\mathcal{H}_6$-ra.*

A 3.1 táblázat összefoglalja az eredményeket. A sorok és oszlopok jelentik rendre a t és k értékeit. Az "I" jelenti az ismert jó elhelyezés létezését, a "N" jelenti, ha 3.4 állításból következően biztosan nem lehetséges jó elhelyezés, míg a "?" az eldöntetlen eseteket jelzi.

$k \setminus t$	2	3	4	5	6	7	8	$t \geq 9$	∞
2	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**
3	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**I**
4	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	**N**	?	**I**
5	**N**	**N**	?	?	?	?	**I**	**I**	**I**
6	**N**	**N**	?	?	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
7	**N**	?	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
8	**N**	?	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
9	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**

3.11 Tétel *Nem létezik jó 4-elhelyezés h_4-re a három irányban.*

3.12 Tétel *Létezik jó 4-elhelyezés h_5-re.*

3.13 Tétel *Létezik jó 4-elhelyezés P_3-ra a kétirányú verzióban.*

3.14 Tétel *Létezik jó 3-elhelyezés P_4-re.*

4. A 9-amőba párosításainak leírása

A fejezetben a k-amőba párosítások szempontjából éles, legérdekesebb esetét, a 9-amőbát vizsgáljuk a [4, 5] alapján. Leírjuk a lehetséges párosítások feltételeit, megszámoljuk, majd struktúrába rendezzük őket.

Egy párosítás optimális, ha:

1. Minden pár pontosan $k-1$ élt blokkol.
2. Nincsen túlblokkolás, vagyis minden él egyszeresen blokkolt.
3. Minden mező része a párosításnak.

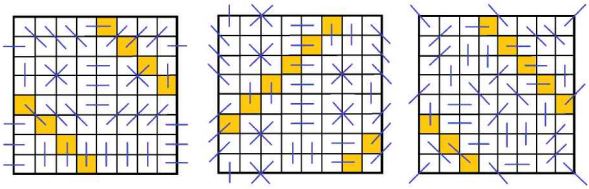
Ezért $\mathcal{H}_9$ egy optimális jó párosítása dominó-párosítás (szomszédos párokból áll), a dominók 8-periodicitással követik egymást minden sorban és minden mezőt tartalmaz egy pár. A párosítás egy mezőjét **anomáliának** nevezzük, ahol a 8-periodicitás sérül, egy nem dominó típusú pár vagy egy párosítatlan mező feltűnik. Bár a 2.4 állítás $O(n)$ tagja miatt előfordulhatnának anomáliák, ezekről beláttuk, hogy mégsem fordulhatnak elő.

4.1 Tétel *Egy elég nagy négyzet alakú résztábla anomáliamentes párosítása egyértelműen és anomáliamentesen kiterjed a teljes táblára.*

4.2 Definíció *A végtelen sík egy párosítása* ***k-tóruszos****, ha az éppen egy $k \times k$-as tórusz kiterjesztése a végtelen síkra, de k-nál kisebb értékekre ez nem teljesül.*

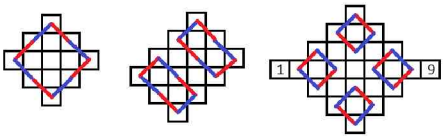
4.3 Tétel *Tegyük fel, hogy van egy jó párosításunk $\mathcal{H}_9$-re. Ekkor ez a párosítás vagy 8-tóruszos vagy 16-tóruszos.*

4.4 Tétel *Vannak olyan 8-tóruszos párosítások $\mathcal{H}_9$-ra, melyek nem izomorfak a Hales-Jewett párosítással.*



3. ábra. Néhány eddig nem ismert párosítás

4.5 Tétel *Egy 8-tóruszos jó párosításból akkor és csak akkor származtatható 16-tóruszos jó párosítást, ha létezik egy másik, különböző 8-tóruszos jó párosítás, mely csak néhány átlós dominóban különbözik az elsőtől úgy, hogy az uniójuk egy átlós alternáló körrendszert ad. Összesen két ilyen lehetséges alternáló körrendszer fordulhat elő, melyek az 4 ábra baloldalán és közepén láthatók.*

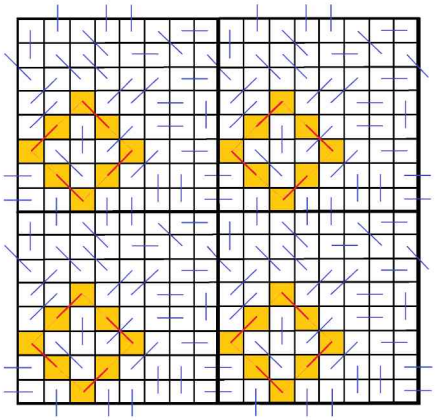


4. ábra. Az alternáló körrendszerek

4.6 Tétel *Léteznek olyan jó párosítások, melyek tartalmazzák a két lehetséges alternáló körrendszer egyikét, így létezik 16-tóruszos jó párosítás is a 9-amőbára.*

4.1. A párosítások megkeresése

Egy számítógépes program segítségével megszámoltuk az összes lehetséges különböző 8-tóruszos jó párosítást, melyek száma 194 543. A program írása során nem csak a párosítások megtalálása, hanem azok megkülönböztetése is nehézséget okozott, tekintve a nagyszámú és sokféle (eltolás, forgatás, tükrözés) tóruszszimmetriát. Mivel nagyon sok különböző párosítást kaptunk, egy természetes út ezek közt egy struktúrát találni a gráfban való tárolás. Az értekezésben mutatunk egy módszert a párosítások közti kapcsolatok definiálására, mely alapján a gráfot is felépíthetjük.



5. ábra. Egy 16-tóruszos párosítás

1. Mozgassuk az első párt a táblán. Ez a mozgatás egy mezőt (pl. A-t) pár nélkül hagyja és egy másik mezőt (B-t) két párral.

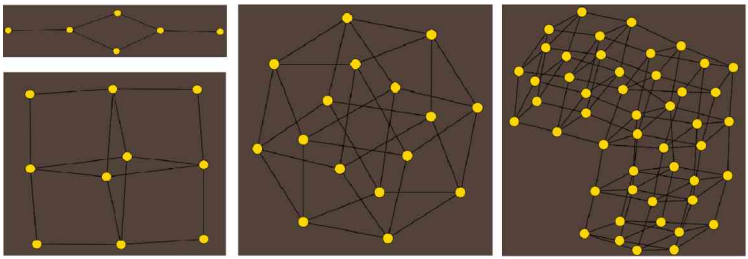
2. Ezután mozgassuk a B-ben eredetileg lévő párt egy eltolással, így a B-ben ismét egy pár marad a lépés után. Ekkor viszont egy újabb mezőben lesz két pár.

3. Ismételjük a 2-es lépést amíg van két párt tartalmazó mező.

4. Ez a módszer véget ér, amikor az utolsó lépés az A mezőnek csinál új párt, melynek nem volt párja a lépés előtt.

Két párosítás összekötött, ha a módszer segítségével megkaphatók egymásból. A kapcsolat szimmetrikus, így gráfot építhetünk melynek a csúcsai a párosítások, az élek pedig a mozgatással kaphatók.

A kapott gráfot vizsgálva kaptuk, hogy a 194 543 csúcsból 194 333 egy komponensben található, a maradék 210 csúcs pedig még 13

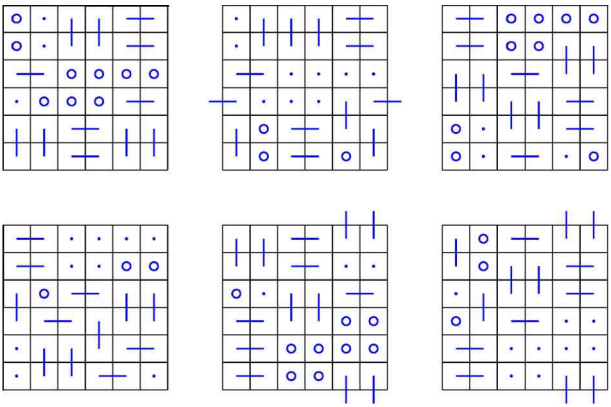


6. ábra. A gráf néhány komponenense, a Sixtep programmal készült

másik komponensbe rendeződik. A fokszámok 1 és 11 között változnak, melyek átlaga 5,47. A gráf 532 107 élt tartalmaz.

Hasonló gráfot a hatszögrács 7-amőbájára is konstruálhatunk, melyből 26 különböző jó párosítást találtunk.

A fejezet végén magasabb dimenziókban is vizsgáljuk a kérdést [7], és be is mutatunk egy jó párosítást a három irányú (a 3 koordinátatengellyel párhuzamos) verzió éles, $k = 7$ esetére.

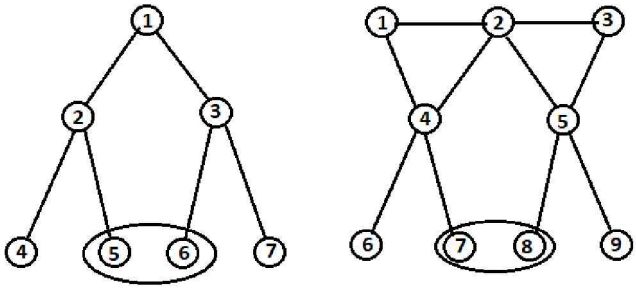


7. ábra. Egy jó párosítás az átlók nélküli 3-dimenziós 7-amőbára

5. Nyitott kérdések

Az utolsó fejezetben a 7-amőbára adunk egy lehetséges résztáblákra bontást, mely segítségével Breaker nyerni tudná a játékot. Sajnos azonban a táblák vizsgálata a mai számítógépes teljesítmények mellett egyelőre reménytelen.

Ezek után hasonlóan a párokhoz és sütikhez definiáljuk a résztáblák blokkolási erejét, melynek segítségével könnyebbé válik a lehetséges résztáblákra bontási stratégiák keresése. A fejezetben megvizsgáljuk az esetszámok csökkentésének további lehetőségeit, melyek során egy természetesnek gondolt heurisztikát viszont megcáfolunk, nevezetesen, hogy egy résztáblán ha van két elemből álló él, Makernek a két elem közül kell feltétlenül választania.



8. ábra. Kettessel kell-e kezdeni?

Az utolsó fejezet legvégén [1] alapján ismertetjük a hipergráfok egy osztályozását, majd példákkal illusztráljuk azt.

Hivatkozások

[1] J. Beck, *Combinatorial Games, Tic-Tac-Toe Theory*, Cambridge University Press 2008.

[2] A. Csernenszky, R. Martin and A. Pluhár, On the Complexity of Chooser-Picker Positional Games. *Integers* **12** (2012), 427–444.

[3] L. Győrffy, A. Pluhár, Generalized pairing strategies – A bridge from pairing strategies to colorings. *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, **8**, no. 2 (2016), 233–248.

[4] L. Győrffy, G. Makay, A. Pluhár, Pairing strategies for the 9-in-a-row game. *Ars Mathematica Contemporanea*, **16** (2019), 97–109.

[5] L. Győrffy, G. Makay, A. London, The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games. *Acta Cybernet.*, **23** (2017), 561–572.

[6] A. W. Hales and R. I. Jewett, Regularity and positional games, *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963) 222–229; M.R. # 1265.

[7] P. Mukkamala and D. Pálvölgyi. Asymptotically optimal pairing strategy for tic-tac-toe with numerous directions. *Electronic J. Combinatorics* **17(1)**: N33, (2010).

[8] A. Pluhár, Játékelmélet, elektronikus jegyzet

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Győrffy Lajos Ph.D. fokozatra pályázó Tic-Tac-Toe, Amőba és egyéb állatok című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- L. Győrffy, A. Pluhár (2016), Generalized pairing strategies – A bridge from pairing strategies to colorings, *Acta Univ. Sapientiae, Math.*, **8**, no. 2, 233–248.
- L. Győrffy, G. Makay, A. Pluhár (2019), Pairing strategies for the 9-in-a-row game, *Ars Math. Contemporanea*, **16**, 97–109.

Győrffy Lajos hozzájárulása a fent felsorolt cikkekhez 50%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2019. január 29.

Dr. Pluhár András
Szegedi Tudományegyetem
egyetemi docens

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Győrffy Lajos Ph.D. fokozatra pályázó Tic-Tac-Toe, Amőba és egyéb állatok című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkekből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- L. Győrffy, G. Makay, A. Pluhár (2019), Pairing strategies for the 9-in-a-row game, *Ars Math. Contemporanea*, **16**, 97–109.
- L. Győrffy, G. Makay, A. London (2017), The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games, *Acta Cybernet.*, **23**, 561–572.

Győrffy Lajos hozzájárulása a fent felsorolt cikkekhez 50%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2019. január 29.

Dr. Makay Géza
Szegedi Tudományegyetem
egyetemi docens

Társszerzői nyilatkozat

Kijelentem, hogy ismerem Győrffy Lajos Ph.D. fokozatra pályázó Tic-Tac-Toe, Amőba és egyéb állatok című értekezését, amelyet a Szegedi Tudományegyetemre nyújt be.

A következő cikkből felhasznált eredményekben a pályázó hozzájárulása meghatározó volt:

- L. Győrffy, G. Makay, A. London (2017), The structure of pairing strategies for k-in-a-row type games, *Acta Cybernet.*, **23**, 561–572.

Győrffy Lajos hozzájárulása a fenti cikkhez 50%.

Kijelentem, hogy a fent felsorolt eredményeket nem használtam fel, és nem is fogom felhasználni tudományos fokozat megszerzéséhez.

Szeged, 2019. január 29.

Dr. London András
Szegedi Tudományegyetem
egyetemi adjunktus